

# شبکه دو بعدی متعامد منطبق بر مرز برای جریانهای خارجی و داخلی با استفاده از تبدیل شوارتز-کریستوفل

سید حسین منصوری\*، سید مسعود حسینی سروری\*\*، علی کشاورز\*\*\* و محمد رهنما\*\*\*\*

بخش مهندسی مکانیک دانشگاه شهید باهنر

بخش مهندسی کشتی دانشگاه سیستان و بلوچستان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۵/۳/۲۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۶/۱۴)

چکیده - در این مقاله، روش تولید شبکه دو بعدی متعامد منطبق بر مرز برای تنوع گسترده‌ای از اجسام در جریانهای خارجی و داخلی بر پایه انتگرال گیری عددی از تبدیل شوارتز-کریستوفل ارائه شده است. برای اولین مرتبه در این مورد از نرم افزار متمتیکا<sup>۱</sup> به دلیل تواناییهای بالای آن در انجام عملیات سمبولیک، عددی و گرافیکی استفاده شده است. از ویژگیهای این روش، دقت بالای آن (مرتبه پنجم)، در برگرفتن تمامی اشکال با هندسه‌های گوناگون در جریانهای خارجی و داخلی، توانایی تولید شبکه‌های متعامد و کنترل فضای شبکه است. برای جریانهای داخلی و اشکال دو بعدی همبند ساده یا همبند چند گانه متقارن در جریانهای خارجی شبکه می‌تواند منطبق بر حل جریان پتانسیل سیال تراکم ناپذیر باشد. برای اشکال دو بعدی همبند چند گانه کلی در جریانهای خارجی، یک شبکه نوع C تولید می‌شود. مثالهای نمونه شامل جریان خارجی روی تپه‌های خاکی، ایرفویلهای متقارن، نیمرخ خودروها و شبکه نوع C برای ایرفویلهای نامتقارن و جریان داخلی درون مجراهای با اشکال مرزی دلخواه ارائه شده است. همچنین، برای سهولت انجام محاسبات، یک برنامه کامپیوتری در محیط متمتیکا تهیه شده است.

## Two-Dimensional Boundary-Conforming Orthogonal Grids for External and Internal Flows Using Schwarz-Christoffel Transformation

S. H. Mansouri, S. M. Hosseini Sarvari, A. Keshavarz and M. Rahnama

Department of Mechanical Eng., Shahid Bahonar University of Kerman

Department of Marine Eng., Sistan and Baluchestan University

**ABSTRACT-** *In this paper, a Schwarz-Christoffel method for generating two-dimensional grids for a variety of complex internal and external flow configurations based on the numerical intergration procedure of the*

\*\*\* مری

\*\*\* استادیار

\*\* مری

\* دانشیار

A	ثابت مختلط	داخلی	err	مقدار خطا
B	ثابت مختلط	فاصله مرزبایینی و بالایی	بالانویسها	
$z(x, y)$	صفحه فیزیکی	مجرا	c	مقدار همگرایی
$\omega(\zeta, \eta)$	صفحه محاسباتی	زاویه دوران در هر رأس	$\nu$	مقدار محاسبه شده در هر مرحله تکرار
$\zeta(\sigma, \delta)$	صفحه واسطه برای جریان	کنیرالاضلاع		

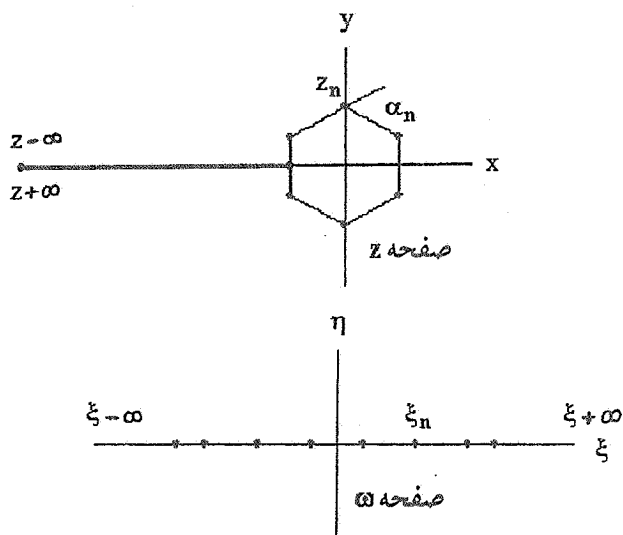
*Schwarz-Christoffel transformation has been developed by using Mathematica, which is a general purpose symbolic-numerical-graphical mathematics software. This method is highly accurate (fifth order) with mesh size, and is highly flexible for treatment of complex internal flow geometries, for a high degree of control of mesh spacing, and for generation of either orthogonal or non-orthogonal grids. In addition, this method directly generates two-dimensional incompressible potential flow solutions for internal flow, and simply or symmetrical multiply connected external flows: it generates a C type grid for a general multiply connected two-dimensional external flow. The capabilities of this method has been shown by sample cases including external flow over symmetric and antisymmetric airfoils, a car profile, and internal flows with arbitrary shapes. To facilitate further applications, a computer program using Mathematica software has been developed.*

## ۱- مقدمه

حل دقیق مسائل جریان خارجی و داخلی با هندسه‌های پیچیده، همچون جریان خارجی روی اجسام خط جریانی، مقاطع بالها، تپه‌های خاکی، ساختمانها و نیمرخ اتومبیلها و جریان داخلی درون مجاری با اشکال مرزی دلخواه یکی از موارد مورد علاقه محققان در دینامیک سیالات محاسباتی است. در مسائل جریانهای بارینولدز بالا که در آنها نواحی جریانهای برگشتی و امواج ضربه در سرعت‌های بالا ممکن است ایجاد شود، انتخاب یک سیستم مختصات مناسب نقش مهمی را در حل مؤثر و دقیق یک مسئله ایفای می‌کند. برای مسائل جریان لزج، سیستم مختصات می‌تواند شکل معادلات جریان، اعمال دقیق شرایط مرزی و مقدار خطای انقطاع ناشی از تقریبهای پدید آمده در اثر انفصال معادلات جریان را تعیین کند. تولید یک سیستم مختصات مناسب برای یک هندسه پیچیده مشکل است. زیرا، سیستم مختصات باید نه تنها فرمولبندی و حل عددی مسئله را سهولت بخشد، بلکه خطاهای ناشی از روش حل عددی رانیز کاهش دهد. سیستمهای مختصات منحنی الخط متعامد، معادلات حاکم تبدیل یافته را بسیار ساده می‌کنند. همچنین، شرایط مرزی می‌توانند با دقت زیادی در سیستمهای مختصات متعامد

اعمال شوند که عاملی برای افزایش دقت حل است [۱].

در گذشته، نگاشت همدیس<sup>۲</sup> برای حل جریان پتانسیل روی اشکال نه چندان پیچیده با معلوم بودن رفتار جریان استفاده می‌شد [۲]. ولی امروزه نگاشت همدیس به صورت یک روش برای تولید شبکه بدون هیچ قیدی روی نوع جریان استفاده می‌شود. در عمل، خطوط شبکه تولید شده می‌توانند منطبق بر خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل یک مسئله جریان پتانسیل ایده آل انتخاب شوند. غالباً این کار به پایداری روش محاسباتی مورد استفاده در حل جامع مسئله کمک می‌کند [۳]. ارزیابی روشهای مختلف نگاشت همدیس در مراجع [۴ و ۵] ارائه شده است. یکی از مزایای سیستمهای همدیس ایجاد کمترین تعداد جملات اضافی در معادلات دیفرانسیل جزئی تبدیل یافته است. برای مثال، اشکالی نظیر ایرفویلها<sup>۳</sup> و پره‌های توربوماشینها توسط یک یا چند تبدیل ساده به شکلی نزدیک به یک دایره نگاشت می‌شود. برای همگرایی، لازم است که شکل نزدیک به دایره به اندازه کافی شبیه یک دایره کامل باشد. ایویس [۶]، مجموعه‌های متوالی از تبدیلهای را برای نگاشت یک ایرفویل یک جزئی به یک دایره واحد و ایرفویلهای چند جزئی به فضای حلقوی دواپر هم مرکز ارائه



شکل ۱- نگاشت مرز کثیرالاضلاع در صفحه  $z(x,y)$  به نیم صفحه بالایی  $w(\xi,\eta)$

که در آن  $N$  تعداد ضلعهای (یا رئوس) کثیر الاضلاع و  $\alpha_n$  زاویه دوران در هر راس کثیر الاضلاع (در جهت پاد ساعتگرد) است. مقادیر  $\alpha_n$  متناظر با رئوس کثیر الاضلاع از معادلات زیر به دست می آیند:

$$\alpha_n = \arg(z_{n+1} - z_n) - \arg(z_n - z_{n-1}), n = 1, 2, \dots, N$$

که در آن مقادیر  $z_n$  رئوس کثیر الاضلاع در صفحه  $z$  هستند. شکل (۲) تصویر یک کثیر الاضلاع نمونه در صفحه  $z$  را نشان می دهد. نقاط  $\xi_n$  مکانهایی نامعلومی روی محور حقیقی در صفحه  $w$  متناظر با رئوس  $z_n$  کثیر الاضلاع در صفحه  $z$  هستند. براساس قضیه ریمان، مکان سه نقطه از نقاط  $\xi_n$  اختیاری است.  $A$  یک ثابت مختلط است که به هندسه میدان فیزیکی بستگی دارد [۲].

از آن جایی که مقادیر  $\xi_{\pm\infty}$  متناظر با رئوس  $z_{\pm\infty}$  در صفحه  $z$  در معادله (۱) حذف می شوند، با در نظر گرفتن یک کثیرالاضلاع  $N+1$  ضلعی در صفحه  $z$  با راس  $N+1$  در  $\pm\infty$ ، از معادله (۱) می توان استفاده کرد.

در اصل می توان یک شبکه یکنواخت در صفحه  $w$  طرح کرد و از نگاشت معکوس  $z(w)$  برای تولید شبکه مورد نظر در صفحه فیزیکی استفاده کرد. برای به دست آوردن تابع نگاشت  $z(w)$  با انتگرال گیری از معادله (۱) خواهیم داشت:

کرده است. معیری و تقدیری [۷] از انتگرال کوشی برای تولید شبکه در جریانهای داخلی دو بعدی با مرزهای هموار و پیوسته استفاده کرده اند. کاربرد تبدیل شوارتز-کریستوفل برای اشکال دلخواه، این روش را به عنوان ابزار نیرومندی برای ایجاد شبکه در جریانهای داخلی مطرح کرده است. اسریده هار و دیویس [۸] از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای تولید سیستم مختصات برای تنوعی گسترده ای از جریانهای داخلی استفاده کرده اند.

در این مقاله، از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای تولید سیستم مختصات در جریانهای خارجی و داخلی دو بعدی استفاده شده است. برای اشکالی که در جریان خارجی توسط یک کثیر الاضلاع مناسب تقریب زده می شوند، یک نگاشت یک مرحله ای از صفحه محاسباتی به صفحه فیزیکی و برای جریانهای داخلی یک نگاشت دو مرحله ای ارائه خواهد شد. همچنین چگونگی انتگرال گیری عددی با حذف نقاط منفردی که در گوشه های کثیر الاضلاع واقع شده اند، شرح داده می شود. برای نواحی همبند ساده و همبند چند گانه با تقارن محوری در جریانهای خارجی و داخلی، این سیستم مختصات برحسب جریان پتانسیل یک سیال تراکم ناپذیر معادل منطبق خواهد بود. برای نواحی همبند چند گانه کلی در جریانهای خارجی، یک شبکه نوع  $C$  ایجاد می شود. به منظور تشریح قابلیت کاربرد این روش، چندین مثال نمونه ارائه خواهد شد.

## ۲- فرمولبندی و روش حل

### ۲-۱ تابع نگاشت

الف - جریان خارجی - تبدیل شوارتز-کریستوفل به ناحیه محدود شده با یک کثیر الاضلاع بسته در صفحه  $z(x, y)$  اجازه می دهد تا به نیم صفحه فوقانی صفحه  $w(\xi, \eta)$  نگاشت شود. در صفحه  $w$  مرز کثیر الاضلاع منطبق بر محور حقیقی خواهد بود. با ایجاد یک برش انشعاب، می توان ناحیه بین کثیر الاضلاع با بینهایت در صفحه  $z$  را به عنوان ناحیه محدود شده در نظر گرفت، شکل (۱). بنابراین از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای تولید شبکه جریان خارجی می توان استفاده کرد.

شکل مرسوم تبدیل شوارتز-کریستوفل به صورت زیر است:

$$\frac{dz}{d\omega} = A \prod_{n=1}^N (\omega - \xi_n)^{\frac{-\alpha_n}{\pi}} \quad (1)$$

می‌تواند در صفحه  $\omega$  از مکانهای  $\omega + i\varepsilon$  که در آن  $\varepsilon$  یک مقدار بسیار کوچک (برای مثال  $10^{-10}$ ) است، عبور کند.

ب - جریان داخلی - فرض کنید مرز پایین مجرا در یک جریان داخلی یک  $N_1$  ضلعی و مرز بالای مجرا یک  $N_2$  ضلعی باشد، در این صورت شکل مجرا در صفحه فیزیکی یک  $(N_1 + N_2)N + 1$  ضلعی خواهد بود، به طوری که دو راس از کثیرالاضلاع در  $\pm\infty$  قرار دارند. حال مرز کثیرالاضلاع را روی محور حقیقی صفحه  $\xi$  باز می‌کنیم. در این صورت رأس  $Z_{N_1+1}$  به نقطه  $\sigma_{N_1+1}$  و راس  $Z_{N_1+1}$  به  $\pm\infty$  روی محور حقیقی صفحه  $\xi$  انتقال می‌یابد، شکل (۲).

از آن جایی که مقادیر  $\sigma_{N_1+1} = \pm\infty$  متناظر با  $Z_{N_1+1}$  در تبدیل شوارتز-کریستوفل حذف می‌شوند، می‌توان نوشت:

$$\frac{dz}{d\xi} = A \prod_{n=1}^N (\xi - \sigma_n)^{\frac{-a_n}{\pi}} \quad (5)$$

که در آن زاویه دوران در هر راس کثیرالاضلاع  $\sigma_n$  و مکانهای نامعلومی روی محور حقیقی صفحه  $\xi$  هستند. مقادیر  $a_n$  متناظر با رئوس کثیرالاضلاع از مقادیر زیر به دست می‌آیند:

$$a_n = \begin{cases} \arg(z_{n+1} - z_n) - \arg(z_n - z_{n-1}) & n = 1, 2, \dots, N_1, \\ \pi & n = N_1 + 1, \\ \arg(z_n - z_{n-1}) - \arg(z_{n+1} - z_n) & n = N_1 + 2, \dots, N \end{cases}$$

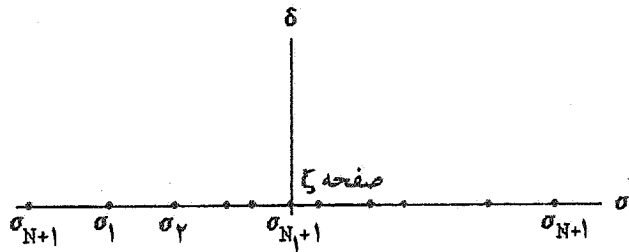
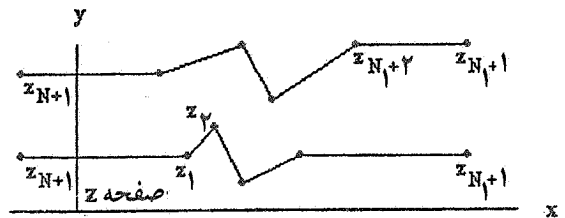
که در آن رئوس کثیرالاضلاع در صفحه  $Z$  هستند. در ابتدا، یک شبکه مستطیلی یکنواخت می‌تواند در صفحه  $\omega$  طرح شود. در این صورت از نگاشت

$$\xi(\omega) = e^\omega \quad (6)$$

برای تولید شبکه جریان یک چاه (یا چشمه) در نقطه  $(0,0)$  در صفحه  $\xi$  استفاده می‌شود، شکل (۳).

برای به دست آوردن تابع نگاشت  $z(\xi)$  با انتگرال گیری از معادله (۵) خواهیم داشت:

$$z(\xi) = A \int_{\xi_0}^{\xi} \prod_{n=1}^N (\xi - \sigma_n)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\xi + B \quad (7)$$



شکل ۲- نگاشت مرز کثیرالاضلاع در صفحه  $Z(x,y)$  به

نیم صفحه بالایی  $\xi(\sigma, \delta)$

$$z(\omega) = A \int_{\omega_0}^{\omega} \prod_{n=1}^N (\omega - \xi_n)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\omega + B \quad (2)$$

که در آن  $\omega$  نقطه ای روی محور حقیقی یا نیم صفحه فوقانی صفحه  $\omega$  و  $B$  یک ثابت مختلط است. تبدیل (۲) را می‌توان ناشی از دو نگاشت متوالی از صفحه  $\omega$  به صفحه  $u$  و سپس به صفحه  $Z$  تصویر کرد، به طوری که

$$u(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \prod_{n=1}^N (\omega - \xi_n)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\omega \quad (3)$$

$$z(u) = Au + B \quad (4)$$

در صورتی که مکان قطبهای  $\xi_n$  در صفحه محاسباتی معلوم باشند، تابع  $u(\omega)$  محور حقیقی صفحه  $\omega$  را به یک کثیرالاضلاع متشابه با کثیرالاضلاع مورد نظر در صفحه  $Z$  نگاشت می‌کند.  $z(u)$  یک تابع خطی است که کثیرالاضلاع صفحه  $u$  را به کثیرالاضلاع مورد نظر در صفحه  $Z$  نگاشت می‌کند.

به جز حالتی ساده، اگر موقعیت قطبهای  $\xi_n$  معلوم باشند، برای انتگرال گیری از معادله (۳) باید از روشهای عددی استفاده کرد. با این حال در نزدیکی نقاط  $\xi_n$  به علت ماهیت منفرد معادله در  $\omega = \xi_n$  مشکل به وجود می‌آید. بنابراین، مسیر انتگرال گیری

معادله (۳) به صورت عددی انتگرال گیری کرد. به منظور سرعت بخشیدن به انتگرال گیری می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(10)$$

$$u_m^v = \begin{cases} 0 & m = 1, \\ u_{m-1}^v + \int_{\xi_{m-1}^v}^{\xi_m^v} \prod_{n=1}^N (\omega + i\epsilon - \xi_n^v)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\omega & m = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

در این صورت هر مقدار  $u_m$  از مقدار قبلی  $u_{m-1}$  حاصل می شود. بدیهی است که اگر مکانهای  $\xi_n$  روی محور حقیقی صفحه  $\omega$  درست انتخاب شده باشند، کثیر الاضلاع به دست آمده در صفحه  $u$  متشابه با کثیر الاضلاع مورد نظر در صفحه فیزیکی  $Z$  خواهد بود. با این حال توزیع نقاط  $\xi_n$  غالباً صحیح نیست. از این رو، برای به دست آوردن کثیر الاضلاع در صفحه  $Z$  در هر تکرار می توان از معادله زیر استفاده کرد:

$$z_m = A^v u_m + B \quad (11)$$

به طوری که،

$$\begin{cases} A^v = \frac{\text{Max} |z_n^c - z_n^c|}{|u_n^v - u_n^v|} e^{i\theta_n}, & n = 1, 2, \dots, N \\ B = z_n^c \end{cases}$$

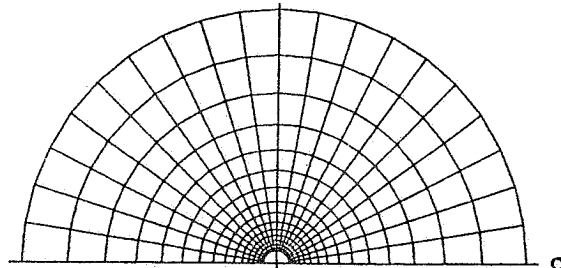
که در آن  $\theta_n$  زاویه امتداد  $z_{N-1} z_N$  با افق است، و مقدار آن برابر است با:

$$\theta_N = \arg(z_N^c - z_{N-1}^c)$$

$A^v$  معیاری از نسبت یک طول مشخص در صفحه  $Z$  به صفحه  $u$  است. از آن جایی که نقطه  $\xi_1$  در هر تکرار به نقطه  $u = 0$  نگاشت می شود، ثابت  $B$  در هر تکرار نقطه  $u_1$  را به  $z_1^c$  نگاشت می کند.

ساختار تبدیل شوارتز-کریستوفل به گونه ای است که درستی زوایای رئوس کثیر الاضلاع حاصل در صفحه  $Z$  در هر مرحله تکرار را تضمین می کند. از این رو، تنها مکان رئوس (طول اضلاع) کثیر الاضلاع به ازای مقادیر دلخواه حدسی  $\xi_n$  دارای خطا هستند شکل (۴).

معیار سنجش خطا، به ازای تمام نقاط  $m = 1, 2, \dots, N$  اختلاف فاصله بین نقاط  $z_m$  به دست آمده و نقاط  $z_m^c$  است.



شکل ۳- شبکه واسطه  $\zeta(\sigma, \delta)$

که در آن  $\zeta$  نقطه ای روی محور حقیقی یا نیم صفحه فوقانی  $\zeta$ ، و  $A$  و  $B$  ثابتهای مختلط اند [۲]. مانند جریانهای خارجی مسیر انتگرال گیری می تواند در صفحه  $\zeta$  از مکانهای  $i\epsilon + \zeta$  که در آن  $\epsilon$  یک مقدار بسیار کوچک (برای مثال  $10^{-10}$ ) است، عبور کند.

## ۲-۲ روش حل عددی

### الف - جریان خارجی

از آن جایی که موقعیت قطبهای  $\xi_n$  نامعلوم است، برای تعیین فواصل  $z_{n-1}^v - z_n^v$  از معادله (۴)، که در آن  $v$  بالانویس تکرار است، باید از معادله (۳) با یک توزیع فرضی اولیه  $\xi_n$  انتگرال گیری شود. اما نقاط همگرایی  $z_n^c$  (رئوس کثیر الاضلاع) در صفحه فیزیکی  $Z$  معلوم اند. بنابراین با یک توزیع فرضی اولیه از قطبهای  $\xi_n$  به صورت زیر:

$$\sigma_n^{v+1} = \begin{cases} \sigma_n^v & n = 1, \\ \sigma_{n-1}^{v+1} + \frac{|z_n^c - z_{n-1}^c|}{|z_n^v - z_{n-1}^v|} & n = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (8)$$

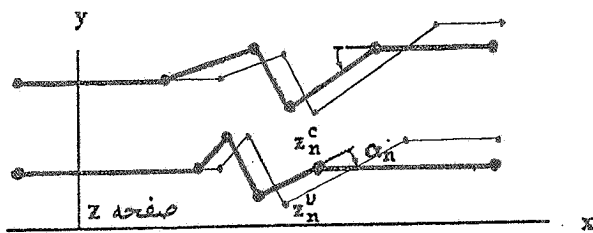
و با تبدیل

$$\xi_n^1 = \frac{z_n^c}{z_N^c} - 1 \quad (9)$$

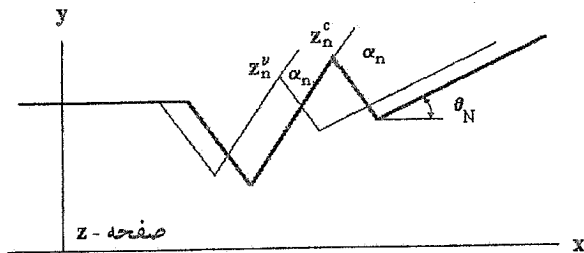
نقاط  $\xi_n$  به فاصله  $[-1, 1]$  محدود می شوند. به طوری که

$$-1 \leq \xi_n^1 \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

برای به دست آوردن نقاط  $u_m$  متناظر با  $\xi_n$  در هر تکرار باید از



شکل ۵- مرز محاسبه شده در طول فرایند تکرار: شکل واقعی —، شکل محاسبه شده در تکرار ۷ —



شکل ۴- مرز محاسبه شده در طول فرایند تکرار: شکل واقعی —، شکل محاسبه شده در تکرار ۷ —

مرحله اول حل شروع می‌شود. با این حال یک مشکل همچنان در نقطه  $z_{N_1+1}^c \rightarrow \infty$  وجود دارد. از آن جایی که مقدار  $z_{N_1+1}^c$  فقط برای تعیین مقادیر  $\sigma_{n+1}^c$  به کار می‌رود، می‌توان آن را یک مقدار اختیاری در نظر گرفت، به طوری که این مقدار نباید با هیچ یک از مقادیر  $z_m^c$  ( $m \neq N_1 + 1$ ) مساوی باشد. تجربه ثابت کرده‌است که هرچه این مقدار اختیاری به حداکثر مقادیر  $z_m^c$  نزدیکتر باشد، همگرایی سریعتر خواهد بود. بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$z_{N_1+1}^c = 1 + \frac{1}{\gamma}(z_{N_1}^c + z_{N_1+2}^c) \quad (16)$$

به دست آوردن نقاط  $z_m^c$  متناظر با  $\sigma_m^c$  در هر تکرار باید از (۴) به صورت عددی انتگرال گیری کرد. بنابراین:

$$z_m^c = \begin{cases} z_m^c & m = 1, \\ u_{m-1}^c + A \int_{\sigma_{m-1}^c}^{\sigma_m^c} \prod_{n=1}^N (\xi + i\varepsilon - \sigma_n^c)^{-\frac{a_n}{\pi}} d\xi + B & m = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (17)$$

که در آن

$$\begin{cases} A = -\frac{h}{\pi} \\ B = z_1^c \end{cases}$$

که مقدار  $h$  فاصله بین مرز پایینی و بالایی مجرا در جهت پاد محور افقی است. بدیهی است که اگر مکانهای  $\sigma_n$  روی محور حقیقی  $\xi$  درست انتخاب شده باشند، نقاط  $z_m^c$  رئوس کثیر الاضلاع در صفحه  $z$  خواهند بود. با این حال، توزیع اولیه نقاط  $\sigma_n$  غالباً صحیح نیست، شکل (۵). از این رو، برای به دست آوردن کثیر الاضلاع در صفحه  $z$  یک فرایند تکرار و تصحیح لازم است.

بنابراین، مقدار خطا برابر است با:

$$err_m^c = |z_m^c - z_m^u|, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

در صورتی که مقدار  $err_m^c$  به ازای تمام مقادیر  $m = 1, 2, \dots, N$  حد قابل قبول (برای مثال  $10^{-5}$ ) نباشد، برای تصحیح فاصله بین نقاط  $\xi_n^{v+1}$  برای تکرارهای بعدی مشابه روش دیویس [۸]، از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$\xi_n^{v+1} = \begin{cases} 0 & n = 1, \\ \xi_{n-1}^{v+1} + \frac{|z_n^c - z_{n-1}^c|}{|z_n^u - z_{n-1}^u|} & n = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (13)$$

سپس با تبدیل

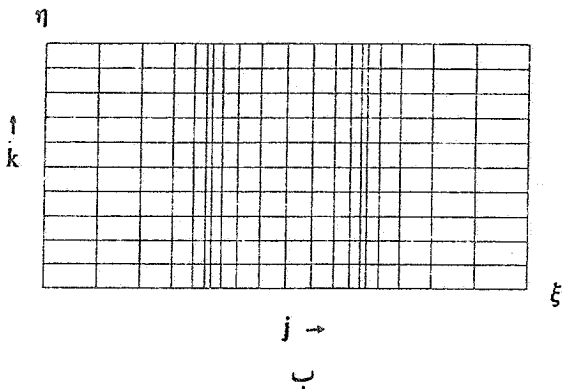
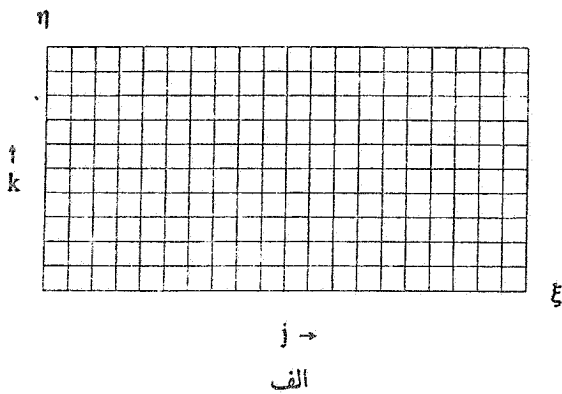
$$\xi_n^{v+1} = \gamma \frac{\xi_n^{v+1}}{\xi_N^{v+1}} - 1 \quad (14)$$

مکان نقاط  $\xi_n^c$  مجدداً به فاصله  $[-1, 1]$  محدود خواهد شد. در نهایت، با رجوع به معادله (۸) تمام فرایند (۸) تا (۱۴) تا نیل به همگرایی ادامه می‌یابد.

### ب- جریان داخلی

همانند جریان خارجی معادله (۷) باید با یک توزیع فرضی اولیه  $\sigma_n$  انتگرال گیری شود. بنابراین با یک توزیع فرضی اولیه از قطبهای  $\sigma_n$  به صورت زیر:

$$\sigma_n^1 = \begin{cases} -N_1 & n = 1, \\ 0 & n = N_1 + 1, \\ 1 & n = N_1 + 2, \\ \sigma_{n-1}^1 + |z_n^c - z_{n-1}^c| & n = \text{برای مقادیر دیگر} \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۶- شبکه الف) یکنواخت محاسباتی و ب) واسطه محاسباتی

متناظر با مکانهای مطلوب در صفحه فیزیکی استفاده کرد، شکل ۶-ب).

## ۲-۴ ایجاد شبکه در صفحه فیزیکی

### الف - جریان خارجی

همین که پارامترهای نگاشت به مقادیر همگرایی خود دست یافتند، سیستم مختصات می تواند با انتگرال گیری از تابع تبدیل (۱) در جهت مناسب به دست آید. تابع

$$z_{j1}(\omega_{j1}) = A^c \int_{\xi_1^c}^{\omega_{j1}} \prod_{n=1}^N (\omega + i\varepsilon - \xi_n^c)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\omega + B \quad (22)$$

که در آن  $A^c$  و  $\xi_n^c$  در آخرین تکرارند، هر نقطه  $\omega_{j1}$  روی محور حقیقی صفحه محاسباتی (یا صفحه محاسباتی واسطه) را به نقاط  $z_{j1}$  در صفحه فیزیکی نگاشت می کند. از این رو تابع

$$z_{jk}(\omega_{jk}) = z_{jk-1} + A^c \int_{\omega_{jk-1}}^{\omega_{jk}} \prod_{n=1}^N (\omega + i\varepsilon - \xi_n^c)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\omega + B \quad (23)$$

از آن جایی که مقدار  $z_{N+1}^c$  فقط برای تصحیح مقادیر  $\sigma_n^{v+1}$  به کار می رود و نقش دیگری در محاسبات ندارد، بنابراین در هر مرحله تکرار، می توان نوشت:

$$z_{n+1}^v = z_{n+1}^c \quad (18)$$

معیار سنجش خطا به ازای تمام نقاط  $m = 1, 2, \dots, N$  در هر تکرار، اختلاف فاصله بین نقاط  $z_m^v$  به دست آمده و نقاط  $z_m^c$  است. بنابراین،

$$\text{err}_m^v = |z_m^v - z_m^c|, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

مانند جریانهای خارجی در صورتی که مقدار  $\text{err}_m^v$  به ازای مقادیر  $m = 1, 2, \dots, N$  در حد قابل قبول (برای مثال  $10^{-5}$ ) نباشد، برای تصحیح فاصله بین نقاط  $\sigma_n^{v+1}$  برای تکرارهای بعدی از معادله زیر استفاده می شود:

$$\sigma_n^{v+1} = \begin{cases} \sigma_n^v & n = 1, \\ \sigma_{n-1}^{v+1} + \frac{|z_n^c - z_{n-1}^c|}{|z_n^v - z_{n-1}^v|} & n = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (20)$$

سپس با اصلاح

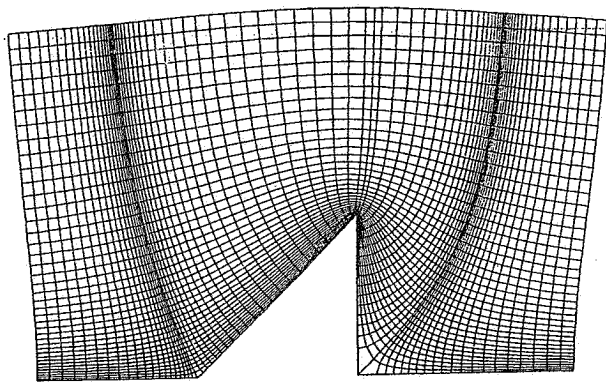
$$\sigma_{n+1}^{v+1} = \sigma_n^{v+1} - \sigma_{N+1}^{v+1} \quad (21)$$

تمام فرایندها (۱۵) تا (۲۱) تا نایل به همگرایی ادامه می یابد.

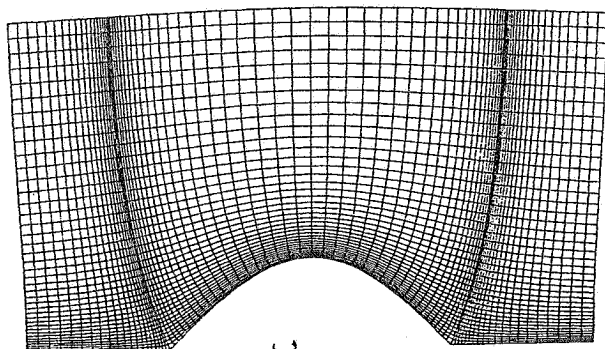
## ۲-۳ ایجاد شبکه در صفحه محاسباتی

شبکه محاسباتی، شبکه ای مستطیلی، یکنواخت و موازی محورهای مختصات در نیم صفحه فوقانی صفحه محاسباتی است. از این رو با مشخص کردن مرزهای این میدان به راحتی می توان شبکه ای مستطیلی و یکنواخت در صفحه محاسباتی ایجاد کرد، شکل ۶-الف).

برای تجمع شبکه در مکانهای با گرادین شدید حل در میدان فیزیکی، می توان از یک تبدیل جبری برای انتقال میدان محاسباتی یکنواخت به صفحه محاسباتی واسطه با تجمع خطوط شبکه



الف



ب

شکل ۷- شبکه جریان پتانسیل برای الف) شیب  $45^\circ$  و ب) تپه کسینوسی

نشان داده شده است. در اینجا منحنی  $\gamma$  با یک  $40^\circ$  ضلعی تقریب زده شده است. برای نیل به همگرایی لازم و دقت  $10^{-5}$ ، تعداد ۶ مرحله تکرار لازم است.

به منظور ایجاد شبکه جریان نواحی همبند چند گانه با تقارن محوری نظیر ایرفویل‌های متقارن، می‌توان پروفیل نیمه بالایی (یا پایینی) منحنی ایرفویل را با یک کثیر الاضلاع تقریب زده و سپس شبکه جریان حول آن را به دست آورد. در شکل (۸-الف) شبکه جریان ایده آل دو بعدی حول یک ایرفویل مستقارن  $NACA65_{3-0}18$  نشان داده شده است. منحنی نیمه بالایی ایرفویل یک  $25^\circ$  ضلعی در نظر گرفته شده است [۹]. برای به دست آوردن مقادیر همگرایی  $A^c$  و  $\xi_{jk}$  با دقت  $10^{-5}$  تعداد ۶ مرحله تکرار لازم است.

در شکل (۸-ب) شبکه جریان دو بعدی حول نیمرخ یک خودرو نشان داده شده است. منحنی نیمرخ اتومبیل توسط یک  $32^\circ$  ضلعی تقریب زده شده است و تعداد مراحل تکرار برای نیل به همگرایی برابر ۱۴ است.

هر نقطه  $\omega_{jk}$  شبکه واقع در نیم صفحه فوقانی صفحه محاسباتی را به نقاط  $Z_{jk}$  شبکه واقع در صفحه فیزیکی نگاشت می‌کند.

ب - جریان داخلی

ابتدا تابع

$$\xi(\omega_{jk}) = e^{\omega_{jk}} \quad (24)$$

شبکه محاسباتی  $\omega$  را به شبکه جریان برای یک چشمه (یا چاه) در نقطه  $(0, 0)$  در صفحه  $\xi$  نگاشت می‌کند. در این صورت تابع

$$z_{j1}(\xi_{j1}) = A \int_{\sigma_1^c}^{\xi_{j1}} \prod_{n=1}^N (\xi + i\varepsilon - \sigma_n^c)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\xi + B \quad (25)$$

که در آن  $\sigma_n^c$  مقدار همگرایی  $\sigma_n^c$  در آخرین تکرار است هر نقطه  $\xi_{j1}$  روی محور حقیقی صفحه محاسباتی (یا صفحه محاسباتی واسطه) را به نقاط  $Z_{j1}$  در صفحه فیزیکی نگاشت می‌کند. در نهایت، تابع

$$z_{jk}(\xi_{jk}) = z_{jk-1} + A \int_{\xi_{jk-1}}^{\xi_{jk}} \prod_{n=1}^N (\xi + i\varepsilon - \sigma_n^c)^{\frac{-a_n}{\pi}} d\xi + B$$

هر نقطه  $\xi_{jk}$  شبکه در نیم صفحه فوقانی  $\xi$  را به نقاط  $Z_{jk}$  در صفحه  $Z$  نگاشت خواهد کرد.

۳- ارائه نتایج

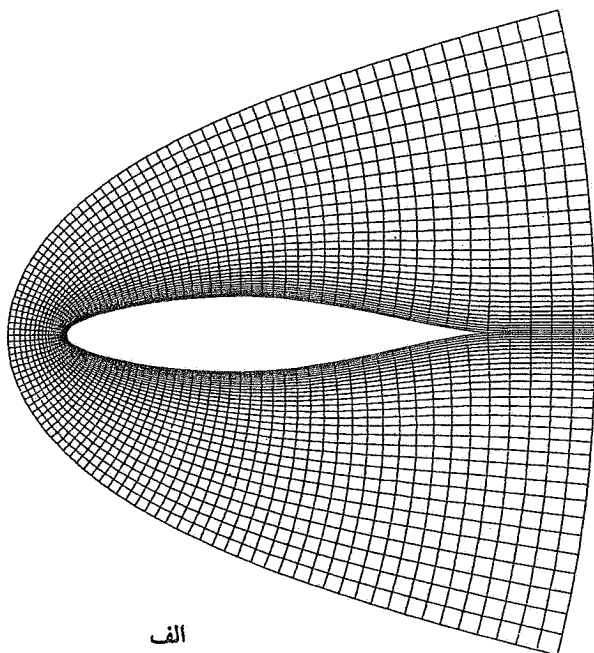
الف - جریان داخلی

مرز میدان فیزیکی ممکن است یک ناحیه همبند ساده یا همبند چند گانه باشد. برای نواحی همبند ساده یا همبند چند گانه با تقارن محوری، شبکه ایجاد شده می‌تواند منطبق بر حل یک جریان پتانسیل معادل باشد. به عنوان اولین مثال از کاربرد این روش، جریان روی یک برآمدگی  $45^\circ$  در شکل (۷-الف) نشان داده شده است. برای به دست آوردن مقادیر همگرایی  $A^c$  و  $\xi_{jk}$  با دقت  $10^{-5}$  تعداد ۱۶ مرحله تکرار لازم است.

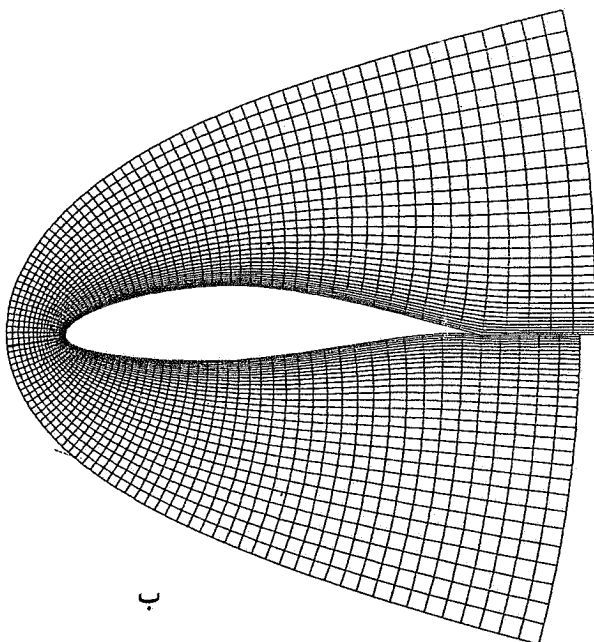
در شکل (۷-ب) شبکه جریان روی یک تپه با معادله

$$y = \cos x, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

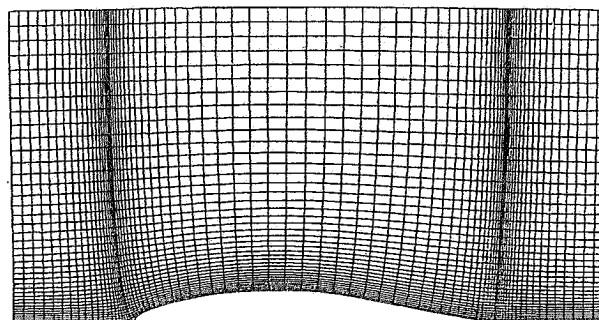




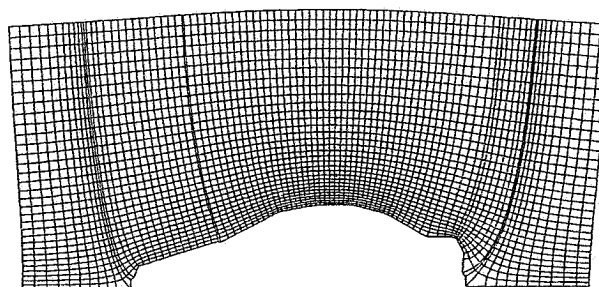
الف



ب



الف



ب

شکل ۸- شبکه جریان پتانسیل برای الف) ایرفویل متقارن NACA۶۵-۰۱۸ و ب) نیمرخ خودرو

برای نواحی همبند چند گانه کلی در میدان فیزیکی می توان یک شبکه نوع C ایجاد کرد. برای مثال در شکل (۹ - الف) یکی شبکه نوع C حول ایرفویل متقارن NACA۶۵-۰۱۸ ایجاد شده است. در این جا کل منحنی ایرفویل توسط یک ۵۰ ضلعی تقریب شده است. تعداد مراحل تکرار برای نیل به همگرایی برابر ۲۳ است. در شکل (۹ - ب) شبکه نوع C برای یک ایرفویل نامتقارن NACA۶۴-۰۱۸ ارائه شده است. منحنی ایرفویل با یک ۵۰ ضلعی تقریب زده شده است و تعداد مراحل تکرار برای نیل به همگرایی برابر ۱۵۵ است.

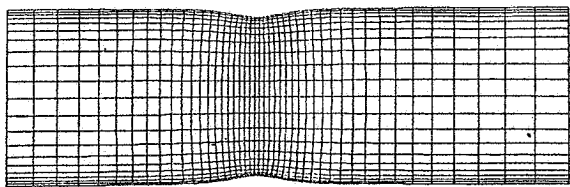
لازم به توضیح است که زمان لازم برای انجام محاسبات به تعداد مراحل تکرار و تعداد نقاط شبکه بستگی دارد. مثلاً برای تولید یک شبکه ۶۱×۲۱ زمان ۱۵۲ ثانیه روی یک کامپیوتر سازگار با IBM ۴۸۶ لازم است.

### ب - جریان داخلی

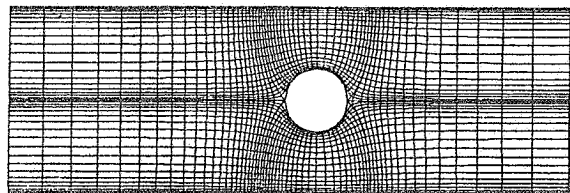
در جریان داخلی، شبکه منطبق بر حل یک جریان پتانسیل معادل است. به عنوان اولین مثال از کاربرد این روش، جریان درون

شکل ۹- شبکه نوع C برای الف) ایرفویل متقارن NACA۶۵-۰۱۸ و ب) ایرفویل نامتقارن NACA۶۴-۰۱۸

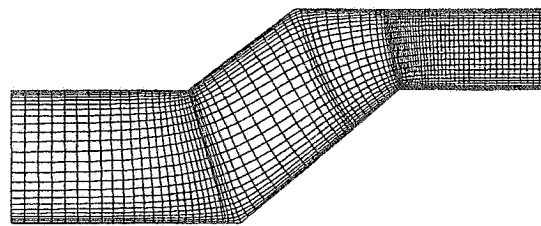
یک مجرا با مرزهای دلخواه مطابق شکل (۱۰ - الف) را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن مقادیر همگرایی  $\sigma_n^c$  با دقت ۵-۱۰ تعداد ۳۶ مرحله تکرار لازم است. شکل (۱۰ - ب) جریان درون یک مجرا را با انبساط سطح مقطع نشان می دهد. تعداد مراحل تکرار برای نیل به همگرایی برابر ۲۳۴ است.



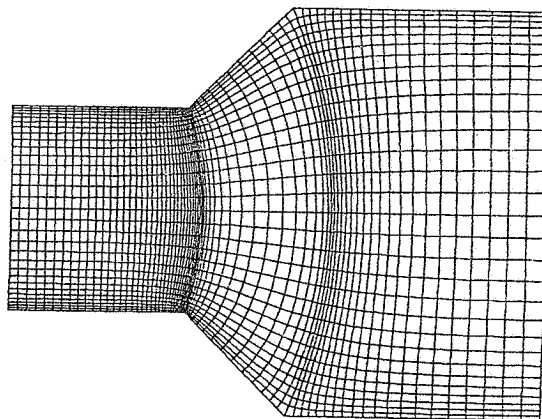
الف



ب



الف



ب

شکل ۱۱- شبکه جریان درون مجرای با کاهش هموار سطح مقطع و ب) یک مانع استوانه ای

شکل ۱۰- شبکه جریان درون مجرای با الف) مرزهای دلخواه و ب) انبساط سطح مقطع

[۱۰]. دقت روش از مرتبه پنجم است. از ویژگیهای این روش در برگرفتن تمامی اشکال با هندسه‌های گوناگون در جریانهای خارجی و داخلی، توانایی تولید شبکه‌های متعامد و کنترل فضای شبکه است. برای جریانهای داخلی و اشکال دو بعدی همبند ساده یا همبند چندگانه متقارن در جریانهای خارجی، شبکه می‌تواند منطبق برحل جریان پتانسیل سیال تراکم ناپذیر باشد. برای شکل‌های دو بعدی همبند چندگانه کلی در جریانهای خارجی، یک شبکه نوع C تولید می‌شود. در ضمن متریک‌های تبدیل دارای توزیع هموارند [۳].

در شکل (۱۱- الف) جریان درون مجرای با کاهش هموار سطح مقطع نشان داده شده است. تعداد مراحل تکرار برای نیل به همگرایی برابر ۶۹ است. در نهایت، شکل (۱۱- ب) جریان درون یک مجرا با یک مانع استوانه ای را نشان می‌دهد. مرز نیم دایره توسط یک ۴۰ ضلعی تقریب زده شده است و تعداد مراحل تکرار برای همگرایی برابر ۱۳۵۶ است.

به منظور تسهیل در انجام محاسبات یک برنامه کامپیوتری در محیط ممتیکا نوشته شده است [۱۰]. با استفاده از توابع موجود در این برنامه کامپیوتری می‌توان با دادن اطلاعات هندسی جریان در صفحه فیزیکی و همچنین مرزهای میدان محاسباتی، شبکه متعامد در صفحه فیزیکی را با استفاده از تبدیل شوارتز-کریستوفل به دست آورد.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله، روش تولید شبکه متعامد منطبق بر مرز برای تنوع گسترده‌ای از اجسام در جریانهای داخلی و خارجی بر پایه انتگرال گیری عددی از تبدیل شوارتز-کریستوفل ارائه شده است. برای اولین مرتبه در این مورد از نرم افزار ممتیکا به دلیل تواناییهای بالای آن در انجام عملیات سمبولیک، عددی و گرافیکی استفاده شده است

#### قدردانی

نویسندگان مایلند مراتب تشکر و قدردانی خود را از همکاری‌های مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی که آنان را در تهیه مقاله یاری کرده‌اند، اعلام دارند.

1. Mathematica                      2. conformal mapping                      3. airfoils

مراجع

1. Thompson, J. F., Warsi Z. U. A., and Mastin C. W., *Numerical Grid Generation foundation and Applications*, North Holland, 1985.
2. Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 4th ed., Macmillan, New York, 1960.
3. Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
4. Ives, D. C., *Conformal Grid Generation*, in *Numerical Grid Generation*, ed. by J. F., Thompson, North Holland, 1982.
5. Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and Mastin, C. W., "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations: A Review," *Journal of Computational Physics*, Vol. 47, pp. 1-108, 1982.
6. Ives, D. C., "A Modern Look at Conformal Mapping Including Multiply-Connected Regions," *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 1006-1011, 1976.
7. Moayeri, M. S., and Taghdiri, M. A., "Boundary-Conforming Orthogonal Grids for Internal Flow Problems," *Iranian Journal of Science & Technology*, Vol. 17, No. 3, pp. 191-201, 1993.
8. Sridhar, K. P., and Davis, R. T., "A Schwarz-Christoffel Method for Generating Two Dimensional Flow Grids," *Journal of Fluid Engineering*, Vol. 107, pp. 330-337, 1985.
9. Abbot, Z. H., and Von Doenhoff, A. E., *Theory of Wing Sections*, Dover Publisher, 1949.
10. Hosseini Sarvari, S. M., *MasCad, A Mathematica Package for Grid Generation*, International Center for Science & High Technology & Environmental Sciences, Kerman, 1996.