

تحلیل مبدل‌های الکترونیک قدرت با استفاده از روش بهبود یافته متوسط گیری فضای حالت

جواد مهدوی* و علی عمادی**

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۱۰/۱۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۵/۳۰)

چکیده - مبدل‌های الکترونیک قدرت، سیستم‌های غیرخطی وابسته به زمان هستند که تحلیل دقیق آنها بدون استفاده از کامپیوتر بسیار مشکل بوده و با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری نیز زمان زیادی صرف می‌شود. استفاده از روش متوسط گیری فضای حالت^۱ همان طور که ذکر می‌شود، علاوه بر ساده کردن تحلیل که نتیجه تبدیل سیستم وابسته به زمان به یک سیستم مستقل از زمان است، زمان محاسبات آن را نیز به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. اما این روش برای مدارهایی که شرط تغییرات کوچک برای متغیرهای حالت آنها برقرار نیست، به دلیل اینکه نمی‌تواند تغییرات سریع و بزرگ را دنبال کند قابل استفاده نیست. بنابراین از یک روش بهبود یافته استفاده می‌کنیم که در آن علاوه بر اینکه متوسط متغیرهای حالت را در نظر می‌گیریم، هارمونیکها را نیز اضافه می‌کنیم. این روش کلی‌تر می‌تواند به طور اساسی با انواع دلخواه شکل موجها مطابقت پیدا کند و اساساً بر روی نمایش سری فوریه^۲ وابسته به زمان برای یک پنجره لغزان از شکل موج داده شده استوار است. در این مقاله پس از معرفی روش بهبود یافته متوسط گیری فضای حالت، نتایج حاصل از به کارگیری این روش در مورد انواع اصلی مبدل‌های DC/DC و همچنین DC/AC ارائه می‌شود و سپس تأثیر بعضی از پارامترها در کیفیت مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

Analysis of Power Electronic Converters Using the Developed State Space Averaging Method

J. Mahdavi and A. Emaadi

Department of Electrical Engineering, Sharif University of Technology

ABSTRACT- Power electronic converters are non-linear time-dependent systems whose exact analysis without the use of computers is very difficult, and even using computer softwares requires a long time. Use of the state space averaging method, as will be mentioned, in addition to simplifying the analysis procedure which is a result of converting a time-dependent system to a time-independent one, reduces the required computation time considerably. But this method is not applicable to circuits for which small variations of state variables

* دانشیار ** دانشجوی کارشناسی ارشد

استقلال، سال ۱۶، شماره ۱، شهریور ۱۳۷۶

ω_0 فرکانس نوسانات آزاد بار RLC،

d سیکل کار، معادله (۷)

شکل (۱۰)، رادیان
ثانیه ω فرکانس زاویه‌ای، معادله (۱)، رادیان
ثانیه

does not apply, since it is not able to follow rapid and large changes. Therefore, we make use of a developed method in which we consider the average of the state variables as well as adding the harmonics. This more general method can basically be adjusted to various arbitrary wave forms, and is based upon a Fourier series time-dependent display for a sliding window of the given waveform. In this paper, after introducing the developed state space averaging method, results of applying this method to various basic DC/DC and DC/AC converters will be mentioned, and also effects of some parameters on the quality of model will be discussed.

۱- مقدمه

در یک مبدل الکترونیک قدرت به ازای هر یک از وضعیت سویچها سیستم خطی است، ولی به دلیل اینکه سویچها دائماً در حال تغییر وضعیت هستند در نهایت سیستم وابسته به زمان است و می‌توان نشان داد که در صورت متغیر بودن بعضی از کمیتها مانند سیکل کار^۴ مبدل، سیستم غیرخطی نیز می‌شود. بدین ترتیب برای هر یک از وضعیت سویچها می‌توانیم معادلات حالت را بنویسیم. حال اگر بتوانیم یک سیستم معادلات حالت ارائه کنیم که دربرگیرنده تمام وضعیتها باشد، قادر به تحلیل آسانتر مبدل خواهیم بود. این موضوع اساس روش متوسط‌گیری فضای حالت است [۱ تا ۴]. علاوه بر اینکه به کمک این روش می‌توانیم سیستم وابسته به زمان را به یک سیستم مستقل از زمان تبدیل کنیم، همچنین قادر به خطی سازی معادلات حول نقطه کار و در نتیجه به دست آوردن توابع تبدیلی که در کنترل سیستم استفاده می‌شوند خواهیم بود [۵].

روش متوسط‌گیری فضای حالت یک روش موثر برای تحلیل و طراحی کنترلر در مبدلهای الکترونیک قدرت است. اما خانواده مبدلهایی که این روش می‌تواند درمورد آنها به کار رود محدود است. محدودیت اصلی شرط تغییرات کوچک برای متغیرهای حالت است. منظور از این شرط این است که در بسط سری فوریه برای یک محدوده باطول زمانی معین از شکل موج یا شکل موجهای مورد نظر مدار، مولفه غالب باید جمله dc باشد. به دلیل این محدودیت امکان به کارگیری این روش برای محدوده وسیعی از مدارهای الکترونیک قدرت وجود ندارد چون اکثر این مدارها دارای متغیرهای

حالتی هستند که به طور غالب رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهند. بنا به دلایل فوق از یک روش کلی تر متوسط‌گیری فضای حالت که از سری فوریه با ضرایب متغیر با زمان استفاده می‌کند و برای انواع مبدلهای با هر شکل موجی از متغیرهای حالت قابل به کارگیری است استفاده می‌کنیم. البته در این روش غالباً از تقریبهای ساده کننده استفاده می‌شود که در این تقریبهای جملات کم اهمیت در سری مذکور حذف می‌شوند. به عنوان نمونه برای بازیابی روش متوسط‌گیری فضای حالت کافی است فقط ضریب dc را نگه داریم. اعمال این روش کلی تر با در نظر گرفتن جملات dc و هارمونیک اول برای مبدلهای DC/DC تشدید متقارن که در آنها یک هارمونیک غالب وجود دارد نتایج بسیار خوبی می‌دهد [۱]، اما در سایر مبدلهای DC/DC از نوع تک پایانه‌ای^۵ کاملاً روشن نیست. به دنبال، در مورد این روش کلی تر متوسط‌گیری از متغیرهای حالت و نحوه به کارگیری آن در مورد انواع اصلی مبدلهای DC/DC و همچنین DC/AC شرح خواهیم داد.

۲- روش بهبود یافته متوسط‌گیری فضای حالت

این روش براساس این واقعیت است که شکل موج مورد نظر $x(t)$ را در فاصله $[t-T, t]$ با دقت دلخواه می‌توان توسط سری فوریه زیر تقریب زد:

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n \langle x \rangle_k(t) e^{jk\omega t} \quad (1)$$

که در آن:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

به عبارت دیگر چون در تعریف $\langle x \rangle_k(t)$ ، T را ثابت گرفتیم، اگر تغییرات ω کم باشد این روش قابل قبول است.

ب - تبدیل توابعی از متغیرها: یک مسئله مهم دیگر در نمایش ضرایب سری فوریه یک سیگنال شامل محاسباتی به صورت زیر است:

$$\langle x \rangle_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

$$\langle f \rangle_k = \langle f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle_k \quad (5)$$

در حالت کلی به دست آوردن یک شکل صریح برای معادله (5) بر حسب تعداد متناهی از ضرایب $\langle x \rangle_i$ امکان ناپذیر است. در حالت خاصی که f یک چند جمله‌ای باشد روشی برای محاسبه دقیق معادله (5) موجود است. این روش بر اساس معادله تلفیقی^۶ زیر است:

$$\langle x.y \rangle_k = \sum_i \langle x \rangle_i \langle y \rangle_{k-i} \quad (6)$$

مجموع بالا باید روی تمام اعداد صحیح i محاسبه شود. در بسیاری از موارد جملات زیادی در سری فوق به قدری کوچک‌اند که می‌توان به راحتی از آنها صرف نظر کرد. کمیتی که در معادله (5) نشان داده شده است در حالتی که f یک چند جمله‌ای باشد می‌تواند با در نظر گرفتن هر جمله همگن به طور جداگانه محاسبه شود. نحوه تبدیل جملات خطی و ثابت واضح است. تبدیل جملات مرتبه دو را با استفاده از معادله (6) می‌توان محاسبه کرد. برای تبدیل جملات همگن از درجات بالاتر می‌توان با فاکتورگیری، هر جمله را به حاصلضرب جملات با درجه پایینتر تبدیل کرد. سپس می‌توان این روش را برای هر یک از جملات به دست آمده به کار برد. این فرایند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که فقط جملات خطی وجود داشته باشند. طریقه به کارگیری روش بهبود یافته متوسط‌گیری فضای حالت را برای مدارهای الکترونیک قدرت همراه با نحوه به کارگیری آن در مورد انواع اصلی مبدل‌های DC/DC شرح خواهیم داد و سپس این روش را در مدلسازی اینورترهای موج مربعی و PWM به کار خواهیم برد.

۳- تحلیل انواع اصلی مبدل‌های DC/DC

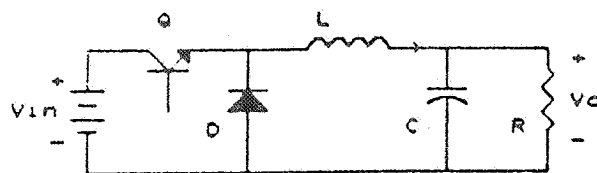
در این بخش با استفاده از روش بهبود یافته متوسط‌گیری فضای حالت به تحلیل مبدل‌های DC/DC پایه پرداخته و نتایج حاصله را با جوابهای به دست آمده از حل دقیق زمانی سیستم مقایسه می‌کنیم.

در معادله (1) مقدار π بستگی به دقت مورد نظر دارد و چنانچه π به سمت بینهایت میل کند خطای تقریب نمایش سری فوریه نیز به سمت صفر میل خواهد کرد. اگر فقط جمله $K=0$ را در نظر بگیریم، همان روش متوسط‌گیری فضای حالت را خواهیم داشت. اگر یک متغیر حالت شکل نوسانی نداشته باشد و تقریباً ثابت باشد برای آن فقط از این جمله استفاده می‌کنیم. همچنین اگر یک متغیر حالت فقط شکل نوسانی و نزدیک به سینوسی داشته باشد از جملات $k=+1, -1$ استفاده می‌کنیم که به این روش تقریب با هارمونیک اول گفته می‌شود. اگر متغیر حالت هم مولفه dc و هم شکل نوسانی داشته باشد از جملات فوق همراه هم استفاده می‌کنیم. در هر صورت هرچه جملات بیشتری را در نظر بگیریم، از دقت بالاتری برخوردار خواهیم بود.

انتخاب T برای مدل کردن هر مبدل نکته بسیار ظریفی است که باید به آن دقت کرد، به طور مثال در مبدل‌های DC/DC تناوب سوییچینگ و در اینورترها تناوب موج اصلی خروجی اینورتر است. $\langle x \rangle_k(t)$ نیز ضرایب مختلط سری فوریه‌اند که هنگامی که پنجره‌ای به طول T روی شکل موج واقعی می‌لغزد محاسبه می‌شوند. مشخصات معینی از ضرایب فوریه (3) برای انجام تحلیل بسیار مهم هستند که در ادامه شرح داده می‌شوند: الف - مشتق‌گیری نسبت به زمان. مشتق زمانی ضریب K ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_k(t) = -jk\omega \langle x \rangle_k(t) + \langle \frac{d}{dt} x \rangle_k(t) \quad (4)$$

حالتی که در آن فرکانس سوییچینگ ω با زمان متغیر است نیز برای تحلیل سیستمهایی که در آنها فرکانس تغذیه ثابت نیست باید در نظر گرفته شود. در این حالت معادله (4) تنها یک تقریب است، اما اگر فرکانس سوییچینگ به آرامی با زمان تغییر کند تقریب خوبی است.



شکل ۱- مبدل کاهنده ولتاژ

برای استفاده از تقریب مرتبه اول در به دست آوردن i_L و v_o باید بگیریم. با توجه به حقیقی بودن i_L و v_o داریم:

$$\begin{aligned} \langle i_L \rangle_{-1} &= \langle i_L \rangle_{+1}^* \\ \langle v_o \rangle_{-1} &= \langle v_o \rangle_{+1}^* \end{aligned} \quad (11)$$

که در آنها اپراتور * به معنی مزدوج کردن یک عدد مختلط است. با استفاده از معادله (۴) داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle i_L \rangle_{+1} = -j\omega \langle i_L \rangle_{+1} + \frac{1}{L} [\langle V_{in} u(t) \rangle_{+1} - \langle v_o \rangle_{+1}] \\ \frac{d}{dt} \langle v_o \rangle_{+1} = -j\omega \langle v_o \rangle_{+1} + \frac{1}{C} [\langle i_L \rangle_{+1} - \frac{1}{R} \langle v_o \rangle_{+1}] \\ \frac{d}{dt} \langle i_L \rangle_{-1} = \frac{1}{L} [\langle V_{in} u(t) \rangle_{-1} - \langle v_o \rangle_{-1}] \\ \frac{d}{dt} \langle v_o \rangle_{-1} = \frac{1}{C} [\langle i_L \rangle_{-1} - \frac{1}{R} \langle v_o \rangle_{-1}] \end{cases} \quad (12)$$

شش متغیر حالت حقیقی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle i_L \rangle_{+1} &= x_1 + jx_2 \\ \langle v_o \rangle_{+1} &= x_3 + jx_4 \\ \langle i_L \rangle_{-1} &= x_5 \\ \langle v_o \rangle_{-1} &= x_6 \end{aligned} \quad (13)$$

باجا گذاری معادلات (۱۳) در دستگاه معادلات حالت (۱۲) و استفاده از معادله (۶) و انجام محاسبات ریاضی، معادلات حالت نهایی به صورت زیر به دست می آیند:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & -\frac{1}{Rc} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & -\omega & \frac{1}{Rc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \mathbf{x} +$$

۱-۳ مبدل کاهنده ولتاژ

مدار مبدل شکل (۱) را که با تناوب T پررود سویچینگ T و سیکل کار d کار می کند، در نظر می گیریم. در وضعیت هدایت پیوسته معادلات حالت مدار را در دو وضعیت وصل و قطع سویچ Q به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_{in} - v_o] & 0 < t < dT \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} [i_L - \frac{v_o}{R}] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [-v_o] & dT < t < T \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} [i_L - \frac{v_o}{R}] \end{cases} \quad (8)$$

حال با تعریف تابع کموتاسیون $u(t)$ به صورت زیر دوسری معادله حالت فوق را در یک سری خلاصه می کنیم:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < dT \\ 0 & , dT < t < T \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_{in} u(t) - v_o] \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} [i_L - \frac{v_o}{R}] \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin \pi d}{2\pi L} V_{in} \\ -\frac{\sin \pi d}{\pi L} V_{in} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d}{L} V_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

معادله i_L و v_o برحسب این متغیرهای حالت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} i_L &= x_o + \gamma x_1 \cos \omega t - \gamma x_2 \sin \omega t \\ v_o &= x_e + \gamma x_3 \cos \omega t - \gamma x_4 \sin \omega t \end{aligned} \quad (15)$$

برای حل معادلات حالت پارامترهای مدار را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T &= 10^{-4} \text{ sec.} \\ R &= 10 \text{ s} \\ L &= 1 \text{ mH} \\ C &= 10 \mu\text{F} \\ V_{in} &= 20 \text{ V} \end{aligned} \quad (16)$$

مبدل کاهنده ولتاژ با پارامترهای فوق برای سه مقدار سیکل کار $d=0/75$ و $d=0/5$ ، $d=0/25$ با استفاده از روش فوق تحلیل شد. نتایج به دست آمده از این روش، همچنین جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (2) آورده شده‌اند. به ازای سیکل کارهای فوق، مبدل کاهنده ولتاژ با تقریب مرتبه دو نیز حل شده است و همان طور که در شکل (2) مشخص است، هرچه هارمونیکهای بیشتری را در نظر بگیریم نتیجه به جواب واقعی نزدیکتر است. در این حالت ده متغیر حالت حقیقی داریم (پیوست). بدین ترتیب راه موثری برای کاهش خطای ناشی از این روش برای مبدلهایی که دینامیک پیچیده‌تری دارند استفاده از تقریبهای مراتب بالاتر است.

۳-۲ مبدل افزایشی ولتاژ^{۱۱}

مدار مبدل شکل (3) را که با تناوب سوئیچینگ T و سیکل کار d

کار می‌کند، در نظر می‌گیریم. در وضعیت هدایت پیوسته معادلات حالت مدار را با استفاده از تابع $u(t)$ که با معادلات (9) تعریف شد به صورت زیر می‌نویسم:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_{in} - v_o(1-u(t))] \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} [i_L(1-u(t)) - \frac{1}{R} v_o] \end{cases} \quad (17)$$

در اینجا نیز همانند مبدل کاهنده ولتاژ عمل کرده، معادلات حالت نهایی را به صورت معادله (18) به دست می‌آوریم.

i_L و v_o را به ازای سیکل کارهای $d=0/75$ ، $d=0/5$ ، $d=0/25$ با تقریب مرتبه اول به دست می‌آوریم. نتایج به دست آمده و جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (4) آورده شده‌اند.

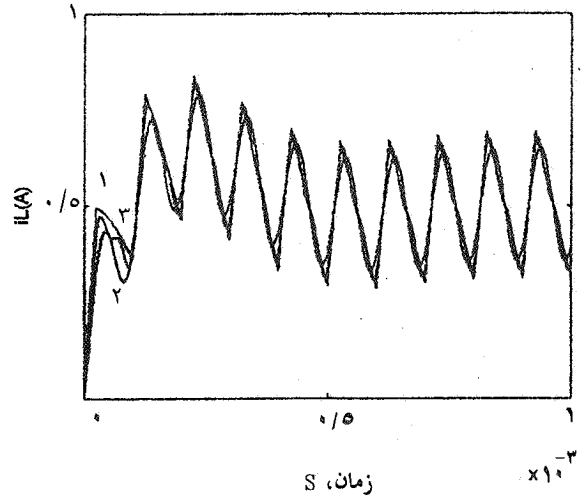
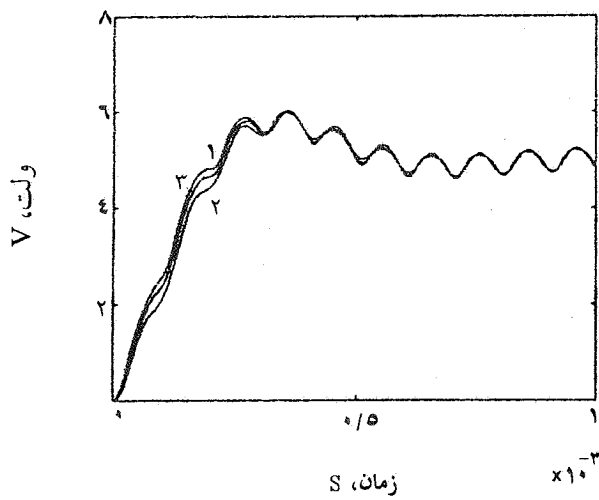
۳-۳ مبدل معکوس کننده ولتاژ^{۱۲}

مدار مبدل شکل (5) را که با تناوب سوئیچینگ T و سیکل کار d کار می‌کند، در نظر می‌گیریم. همانند قبل در وضعیت هدایت پیوسته، معادلات حالت مدار را با استفاده از تابع $u(t)$ که با معادله (9) تعریف شد به صورت زیر می‌نویسم:

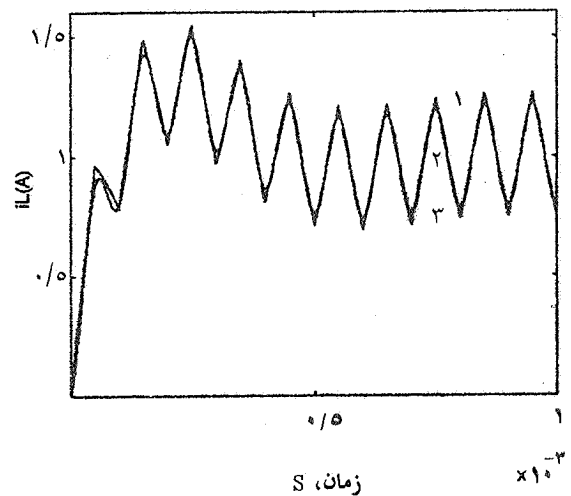
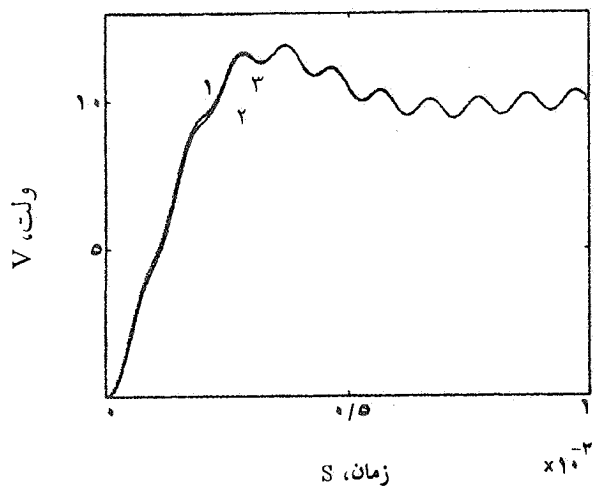
$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_{in} u(t) + v_o(1-u(t))] \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} [-i_L(1-u(t)) - \frac{1}{R} v_o] \end{cases} \quad (19)$$

در اینجا نیز مانند قبل عمل کرده، معادلات حالت نهایی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

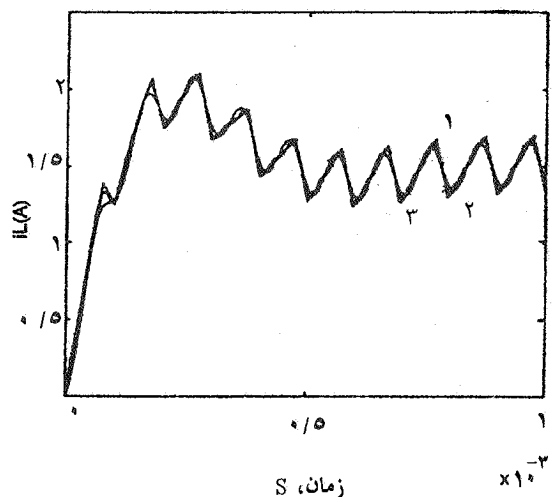
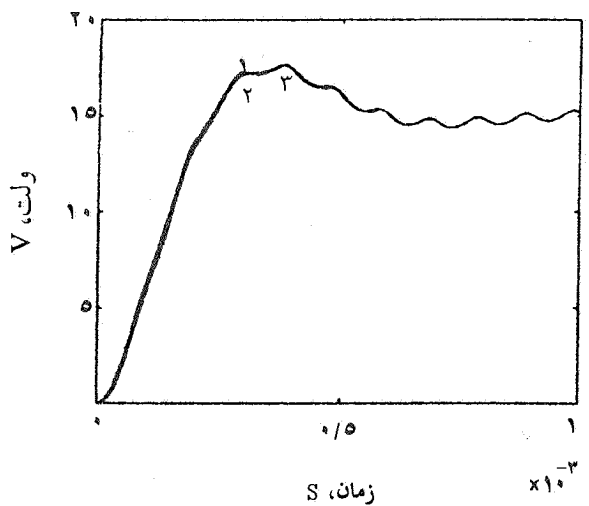
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \circ & \omega & \frac{1-d}{L} & \circ & \circ & \frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L} \\ -\omega & \circ & \circ & \frac{1-d}{L} & \circ & \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi L} \\ \frac{1-d}{C} & \circ & \frac{-1}{Rc} & \omega & \frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C} & \circ \\ \circ & \frac{1-d}{C} & -\omega & \frac{1}{Rc} & \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi L} & \frac{\gamma \sin \gamma \pi d}{\pi L} & \circ & \frac{1-d}{L} \\ \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C} & \frac{\gamma \sin \gamma \pi d}{\pi C} & \circ & \circ & \frac{1-d}{C} & \frac{1}{RC} \end{vmatrix} \mathbf{x} + \begin{vmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \frac{V_{in}}{L} \\ \circ \end{vmatrix} \quad (18)$$



(الف)



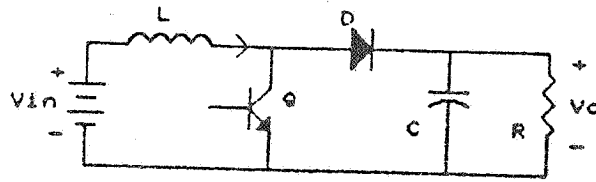
(ب)



(ج)

شکل ۲- مبدل کاهنده ولتاژ (۱: منحنی واقعی، ۲: تقریب مرتبه اول و ۳: تقریب مرتبه دوم)

(الف) $d=0.25$ ، (ب) $d=0.5$ و (ج) $d=0.75$



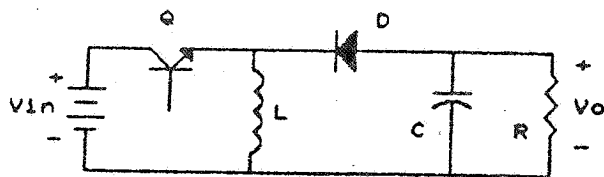
شکل ۳- مبدل افزایشنده ولتاژ

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \circ & \omega & \frac{1-d}{L} & \circ & \circ & \frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L} \\ -\omega & \circ & \circ & \frac{1-d}{L} & \circ & \frac{\sin^2 \gamma \pi d}{\pi L} \\ \frac{1-d}{C} & \circ & \frac{-1}{Rc} & \omega & \frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C} & \circ \\ \circ & \frac{1-d}{C} & -\omega & \frac{1}{Rc} & \frac{\sin^2 \gamma \pi d}{\pi C} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi L} & \frac{\gamma \sin^2 \pi d}{\pi L} & \circ & \frac{1-d}{L} \\ \frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C} & \frac{\gamma \sin^2 \pi d}{\pi C} & \circ & \circ & \frac{1-d}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L} V_{in} \\ \frac{\sin^2 \gamma \pi d}{\pi L} V_{in} \\ \circ \\ \circ \\ \frac{V_{in}}{L} \\ \circ \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} [V_{in} - v_c(1-u(t))] \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C_r} [-i_{Lr} u(t) + i_{L1} (1-u(t))] \\ \frac{di_{Lr}}{dt} = \frac{1}{L_r} [-v_o + v_c u(t)] \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C_1} [i_{Lr} - \frac{v_o}{R}] \end{cases} \quad (21)$$

در این حالت، دوازده متغیر حالت حقیقی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle i_{L1} \rangle_1 &= x_1 + jx_2 \\ \langle v_c \rangle_1 &= x_3 + jx_4 \\ \langle i_{Lr} \rangle_1 &= x_5 + jx_6 \\ \langle v_o \rangle_1 &= x_7 + jx_8 \\ \langle i_{L1} \rangle_0 &= x_9 \\ \langle v_c \rangle_0 &= x_{10} \\ \langle i_{Lr} \rangle_0 &= x_{11} \\ \langle v_o \rangle_0 &= x_{12} \end{aligned} \quad (22)$$



شکل ۵- مبدل معکوس کننده ولتاژ

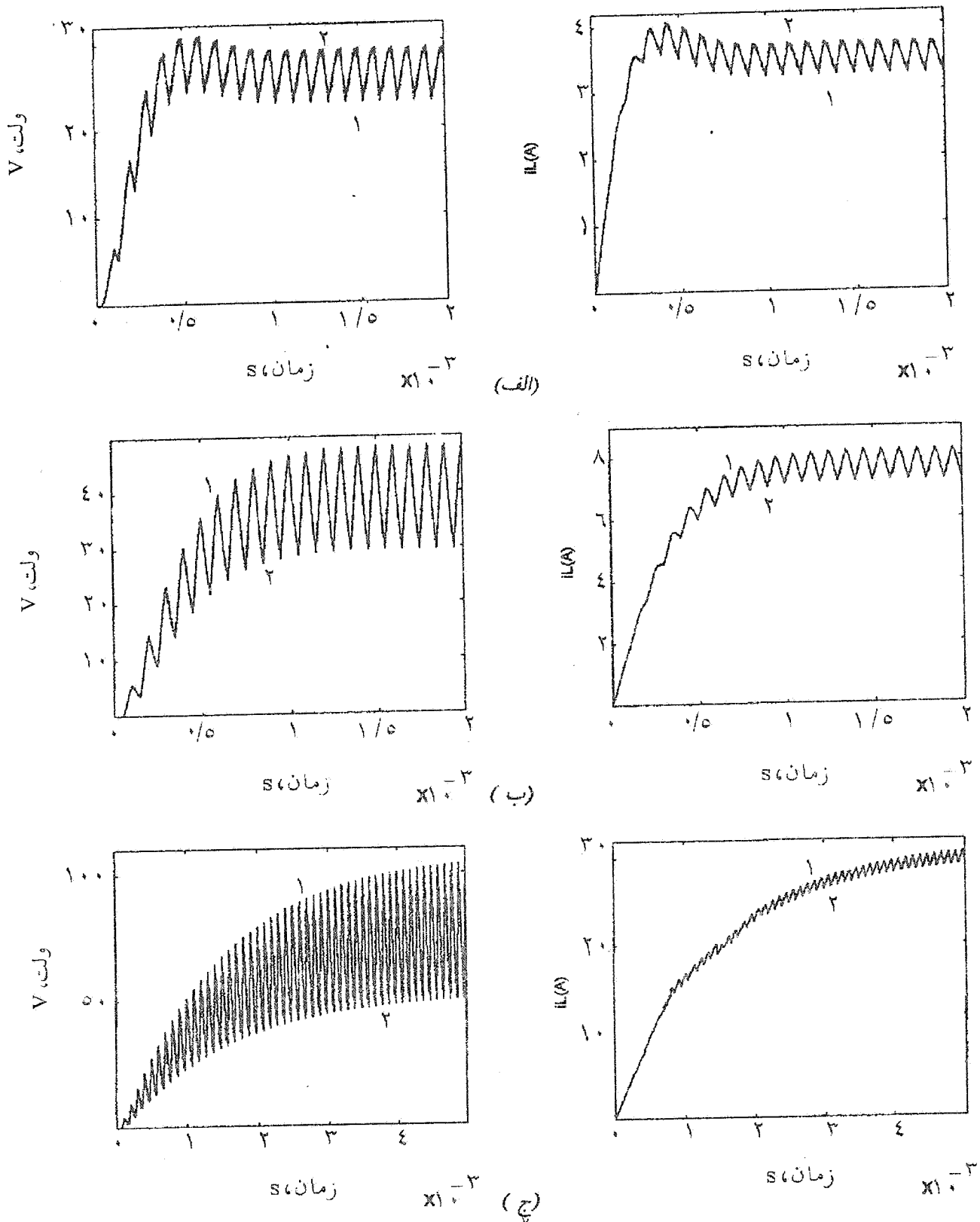
\$i_{L1}\$ و \$v_o\$ را به ازای سیکل کارهای \$d=0/75\$ و \$d=0/5\$، \$d=0/25\$ تقریب مرتبه اول به دست می آوریم. نتایج به دست آمده و جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (۶) آورده شده اند.

۴- تحلیل مبدل چوک ۱۳

در این بخش روش بهبود یافته متوسط گیری فضای حالت را در مورد مبدل چوک که تحلیل آن نسبت به مبدلهای قبلی سخت تر است به کار می بریم و نشان خواهیم داد که روش تقریب مرتبه اول به خوبی رفتار مدار را برای سیکل کارهای نزدیک ۰/۵ توصیف می کند. همچنین روش ساده تری که در واقع نوعی متوسط گیری است را در این مبدل بررسی کرده، نتایج آن را مورد دقت قرار می دهیم.

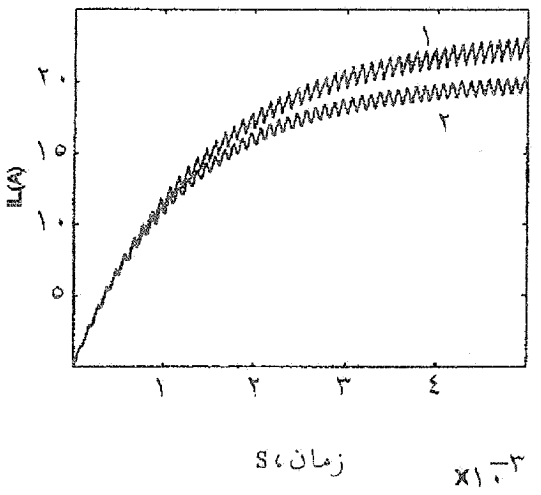
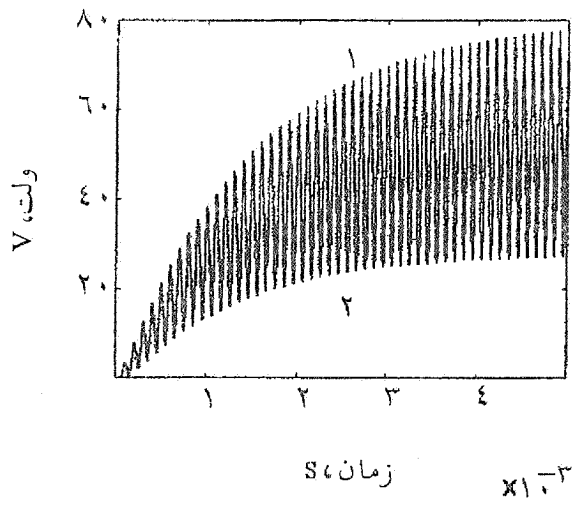
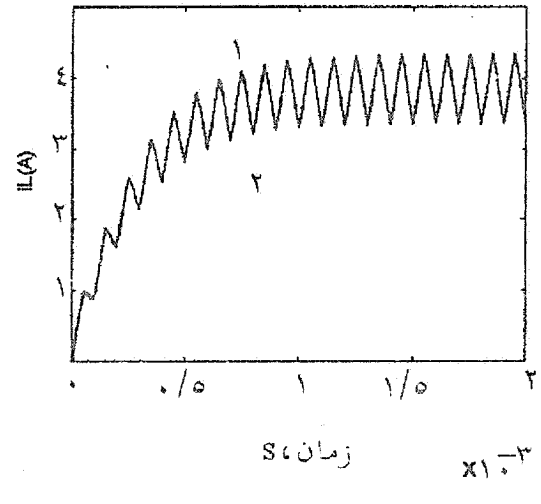
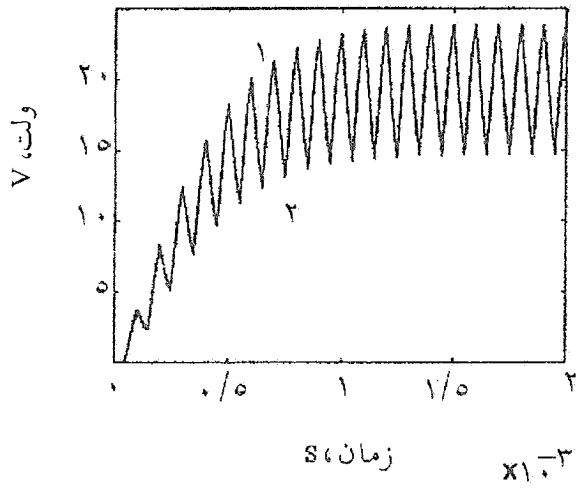
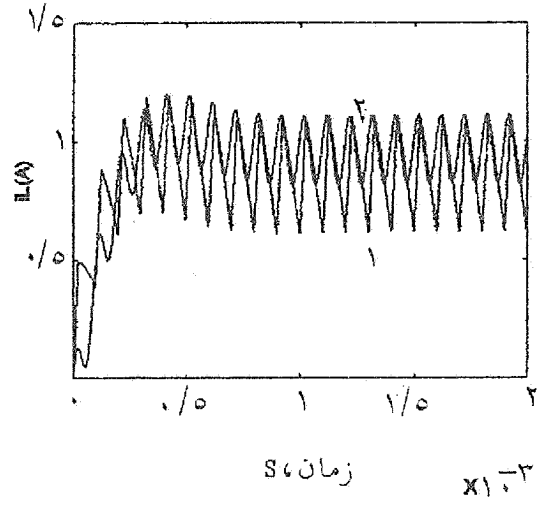
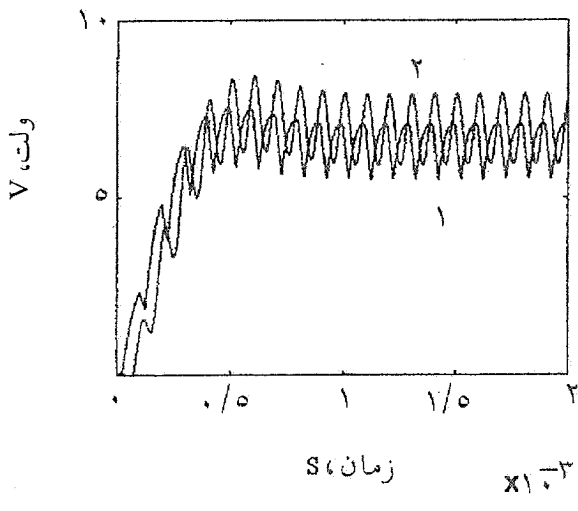
۴-۱ روش تقریب مرتبه اول

مدار مبدل شکل (۷) را که با تناوب سویچینگ \$T\$ و سیکل کار \$d\$ کار می کند، در نظر می گیریم. در وضعیت هدایت پیوسته، معادلات حالت مدار را با استفاده از تابع \$u(t)\$ که با معادله (۹) تعریف شد به صورت زیر می نویسیم:



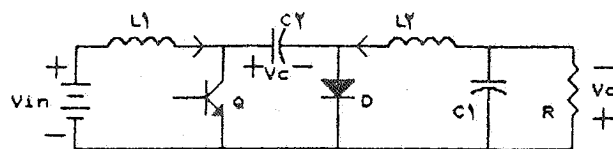
شکل ۴- مبدل افزایشنده ولتاژ (۱: منحنی واقعی و ۲: تقریب مرتبه اول)

الف) $d=0/25$ ، ب) $d=0/5$ و ج) $d=0/75$

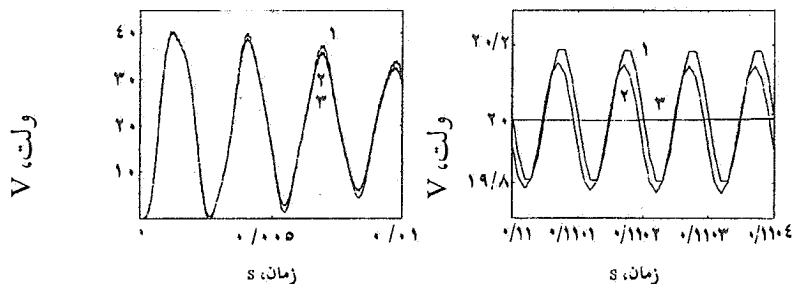


شکل ۶ - مبدل معکوس کننده ولتاژ (۱) منحنی واقعی و (۲) تقریب مرتبه اول

(الف) $d=0.25$ ، (ب) $d=0.5$ و (ج) $d=0.75$



شکل ۷- مبدل چوک



شکل ۸- مبدل چوک (۱: منحنی واقعی، ۲: تقریب مرتبه اول

و ۳: روش متوسط گیری فضای حالت) $d=0.5$

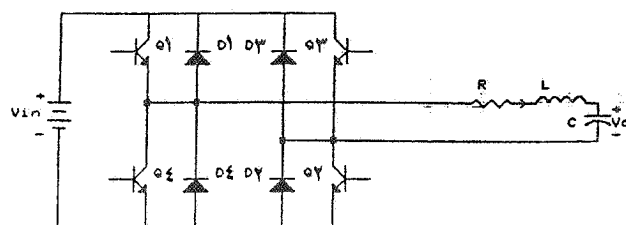
می کند ولی برای سیکل کارهای کوچک یا بزرگ خطای به دست آمده قابل ملاحظه است. بدین ترتیب نتایج فقط برای سیکل کار $d=0.5$ در شکل (۸) آورده شده اند.

۴-۲ روش متوسط گیری فضای حالت

همان طور که در ابتدا بیان شد در یک مبدل الکترونیک قدرت برای هر یک از وضعیت سوئیچها می توانیم معادلات حالت را بنویسیم و اگر بتوانیم یک سیستم معادلات حالت ارائه کنیم که دربرگیرنده تمام وضعیتها باشد، قادر به تحلیل آسانتر مبدل خواهیم بود. در مبدل چوک برای حالت هدایت پیوسته دو وضعیت داریم که در معادلات (۲۱) آنها را با استفاده از تابع $u(t)$ که در معادله (۹) تعریف شد، ترکیب کرده ایم. حال اگر در معادله (۲۱) به جای $u(t)$ از سیکل کار d استفاده کنیم $(u(t)=d, 1-u(t)=1-d)$ در واقع نوعی متوسط گیری وزن دار انجام داده ایم و می توانیم با این معادلات جدید سیستم را تحلیل کنیم. نتایج به دست آمده از این روش نیز در شکل (۸) آورده شده است و همان طور که ملاحظه می شود این روش به خوبی متوسط شکل موجها را دنبال می کند. مزیت این روش در سادگی و محاسبات کمتر آن است.

۵- تحلیل مبدلهای DC/AC

مدار شکل (۹) را که یک اینورتر ولتاژ است در نظر می گیریم. با



شکل ۹- مدار یک اینورتر ولتاژ

پارامترهای مدار را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$V_{in} = 207$$

$$T = 10^{-4} \text{ sec.}$$

$$R = 10 \Omega$$

$$C_1 = 220 \mu F$$

$$C_2 = 200 \mu F$$

$$L_1 = 180 \mu H$$

$$L_2 = 150 \mu H$$

(۲۴)

مبدل چوک با پارامترهای فوق برای سه مقدار سیکل کار $d=0.25$ ، $d=0.5$ و $d=0.75$ با استفاده از روش فوق تحلیل شد. نتایج به دست آمده از این روش، همچنین جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (۸) آورده شده اند. لازم به ذکر است که برای سیکل کار $d=0.5$ روش ارائه شده رفتار مدار را به خوبی توصیف

(۲۳)

ω	$\frac{1-d}{L}$	ω	$\frac{1-d}{L_1}$	ω	$\frac{1-d}{L_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
$-\omega$	ω	$\frac{1-d}{L_1}$	ω	ω	$\frac{1-d}{L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
$\frac{1-d}{C_1}$	ω	$\frac{1-d}{C_1}$	ω	$\frac{1-d}{C_1}$	ω	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
$\frac{1-d}{C_1}$	$-\omega$	$\frac{1-d}{C_1}$	ω	$\frac{1-d}{C_1}$	ω	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
ω	$\frac{d}{L_1}$	ω	$\frac{d}{L_1}$	ω	$\frac{d}{L_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
ω	ω	$\frac{d}{L_1}$	ω	ω	$\frac{d}{L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi L_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
ω	ω	$\frac{1}{C_1}$	ω	$\frac{1}{C_1}$	ω	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
ω	ω	$\frac{1}{C_1}$	ω	$\frac{1}{C_1}$	ω	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\gamma \pi C_1}$	ω	$\frac{1}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-d}{C_1}$	$\frac{d}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$
$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{\sin \gamma \pi d}{\pi C_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-\cos \gamma \pi d}{\pi L_1}$	$\frac{1-d}{C_1}$	$\frac{d}{L_1}$	$\frac{1}{RC_1}$	$\frac{V_{in}}{L_1}$

$\dot{x} =$

(۲۹)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \omega & \frac{1}{L} & 0 \\ -\omega & \frac{R}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \frac{1}{C} & -\omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\pi L} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اینورتر موج مربعی با پارامترهای (۲۷) برای سه حالت $\omega = \omega_0$ ، $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ و $\omega = 3\omega_0$ با استفاده از روش تقریب با هارمونیک اول تحلیل شد. نتایج به دست آمده از این روش، همچنین جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (۱۰) آورده شده‌اند. همان طور که ملاحظه می‌شود روش تقریب با هارمونیک اول برای $\omega = 3\omega_0$ رفتار مدار را به خوبی توصیف می‌کند، ولی برای $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ به علت وجود هارمونیک سوم خطای قابل توجهی وجود دارد که برای رفع آن باید هارمونیک اول را همراه با هارمونیک سوم در نظر گرفت. باید توجه کرد که پهنای باند مدار RLC در حذف $\omega = 3\omega_0$ و حذف نکردن $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ بسیار موثر است که نتایج فوق به دست آمده‌اند.

۲-۵ اینورتر PWM سینوسی

در این بخش یک اینورتر PWM سینوسی که در آن مرجع سینوسی با دامنه V_{cont} و فرکانس f و موج مثلثی با دامنه V_{tri} و فرکانس f_s هستند در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ضریب مدولاسیون برابر M باشد. تابع کموتاسیون $u(t)$ شکل موج خروجی اینورتر البته با دامنه‌های $+1$ و -1 است. ولتاژ خروجی اینورتر را با فرض $\frac{f_s}{f} \geq 9$ با هارمونیک اول آن تقریب می‌زنیم، به عبارت دیگر به جای محاسبه عبارت $\langle V_{in} u(t) \rangle_1$ از تقریب زیر استفاده می‌کنیم:

$$\langle V_{in} u(t) \rangle_1 \cong M \frac{V_{in}}{2} \quad (30)$$

معادلات حالت مدار به صورت زیر به دست می‌آیند:

استفاده از تابع کموتاسیون $u(t)$ که نوع کنترل اینورتر آن را تعیین می‌کند، معادلات حالت طرف AC اینورتر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_{in}u(t) - Ri_L - v_c] \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} [i_L] \end{cases} \quad (25)$$

در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم. در حالت اول فرض می‌کنیم که مبدل فوق یک اینورتر موج مربعی و در حالت دوم فرض می‌کنیم که یک اینورتر PWM سینوسی^{۱۴} باشد. در هر دو حالت با توجه به ماهیت بار از روش تقریب با هارمونیک اول استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب چهار متغیر حالت حقیقی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle i_L \rangle_1 &= x_1 + jx_2 \\ \langle v_c \rangle_1 &= x_3 + jx_4 \end{aligned} \quad (26)$$

در صورتی که فرکانس نوسانات آزاد بار RLC برابر ω_0 و فرکانس کار اینورتر ω فرض شوند تحلیل اینورترها را در سه حالت $\omega = \omega_0$ ، $\omega > \omega_0$ و $\omega < \omega_0$ انجام خواهیم داد. پارامترهای مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} V_{in} &= 10V \\ R &= 5 \Omega \\ C &= 10 \mu F \\ L &= 1 \text{ mH} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/sec.} \end{aligned} \quad (27)$$

۱-۵ اینورتر موج مربعی

در این بخش تابع کموتاسیون $u(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & , \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (28)$$

و دارای هارمونیک اول با دامنه $\langle u \rangle_1 = -j\frac{2}{\pi}$ است. پس از انجام محاسبات ریاضی معادلات حالت نهایی به دست می‌آیند:

فرکانسهای نزدیک به f_0 و بزرگتر از آن توصیف می‌کند.

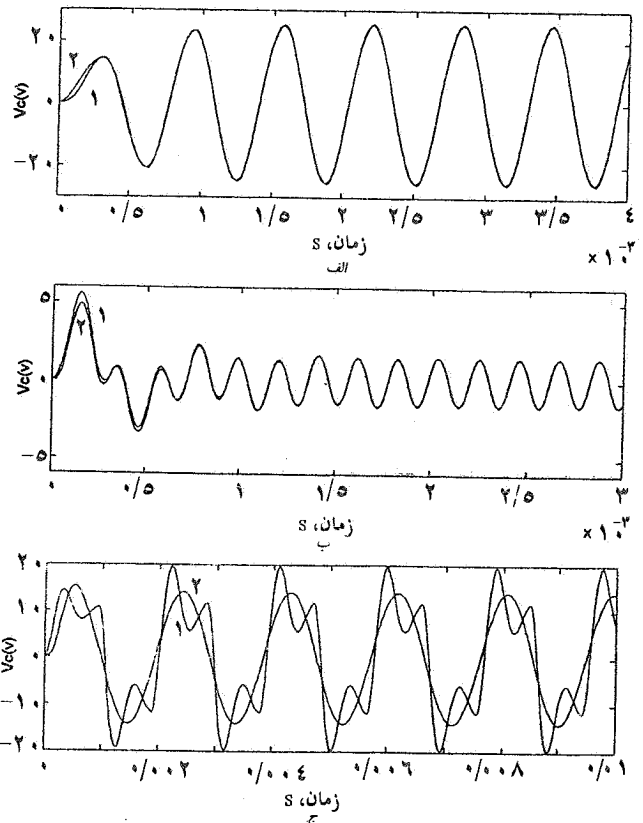
۶- تأثیر پارامترهای مختلف بر روش بهبود یافته

متوسط‌گیری فضای حالت

همچنان‌که بیان شد در هر کاربردی بنا به دقت مورد نیاز از یکی از تقریبهای این روش استفاده می‌شود. اگر در موردی از تقریب مرتبه k استفاده شود، از ضرایب فوریه مختلط مراتب بالاتر صرف‌نظر خواهد شد. از طرفی تغییرات سریع در شکل موج یک متغیر حالت متناظر به حضور ضرایب فوریه هارمونیکهای بالاست. بدین ترتیب طبیعی است که تقریب مرتبه یک و یا دو نتوانند به طور کامل تغییرات سریع را دنبال کنند. چنان‌که در شکل موجها نشان داده شد جریان سلف دارای قله‌های تیز است و در نتیجه در دنبال کردن شکل موج جریان توسط روش مورد بحث خطای بیشتر در این قسمت‌ها رخ داده است. در مقابل شکل موج ولتاژ خروجی دارای تغییرات آرامتری است و در نتیجه در مورد آن خطای کمتری دیده می‌شود.

هرچه پیچیدگی دینامیک مبدل مورد نظر افزایش یا به عبارت دقیقتر عناصر غیرصفر ماتریس متغیرهای حالت آن بیشتر شود، مبدل دیرتر به حالت پایدار می‌رسد. در این مورد مبدل معکوس‌کننده ولتاژ دارای دینامیک پیچیده‌تری نسبت به مبدل کاهنده ولتاژ است. حال اگر منحنیهای شکل (۲) و شکل (۶) را با هم مقایسه کنیم، درمی‌یابیم که در حالت‌های مشابه (سیکل کارهای یکسان) مبدل معکوس‌کننده ولتاژ دیرتر به حالت پایدار می‌رسد. نکته دیگر آنکه در کنار دینامیک مبدل نوع متغیر حالت هم در سرعت میراشدن حالت گذرا موثر است. به عبارت دیگر برای متغیرهای حالت ولتاژ خروجی و جریان سلف سرعت میرایی حالت گذرا یکسان نیست، بلکه در مورد ولتاژ خروجی بسیار بیشتر است.

همچنین هرچه پیچیدگی دینامیک مبدل مورد نظر افزایش یابد، با فرض ثابت بودن پارامترهای مبدل، خطای دنبال کردن منحنی واقعی در روش مورد بحث بیشتر می‌شود. به طور مثال خطای دیده شده برای مبدل کاهنده ولتاژ کمتر از خطای دیده شده برای مبدل معکوس‌کننده ولتاژ است. به عبارت دیگر دینامیک مبدل بر صحت مدل تأثیر دارد. به این ترتیب که هر چه یک ماتریس مربعی به شکل



شکل ۱۰- اینورتر موج مربعی (۱): منحنی واقعی و (۲): تقریب با هارمونیک اول

الف) $\omega = \omega_0$ (ب) $\omega = 3\omega_0$ (ج) $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$

(۳۱)

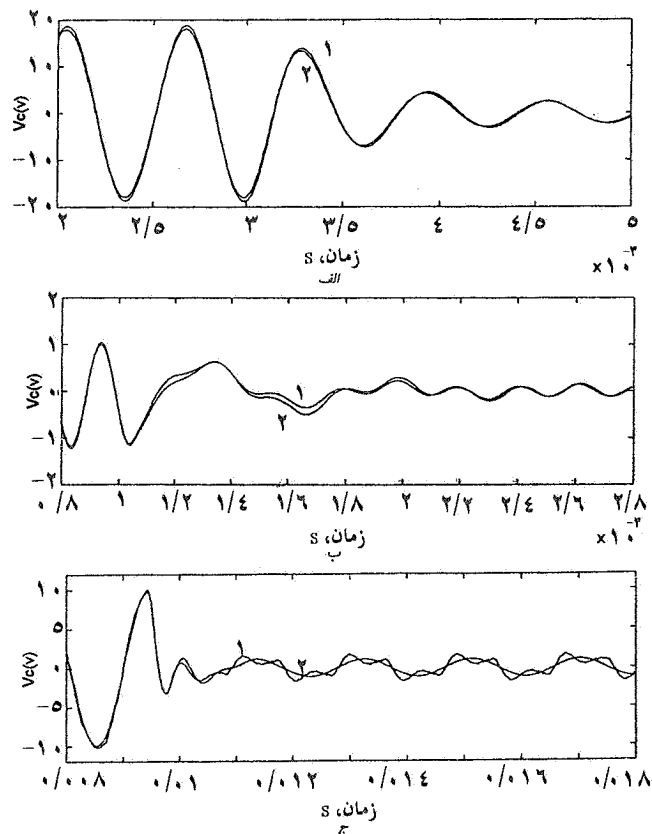
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \frac{R}{L} & \omega & \frac{1}{L} & \circ \\ -\omega & \frac{R}{L} & \circ & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \circ & \circ & \omega \\ \circ & \frac{1}{C} & -\omega & \circ \end{vmatrix} \mathbf{x} + \begin{vmatrix} \frac{V_{in}}{2L} M \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{vmatrix}$$

اینورتر فوق با پارامترهای (۲۷) و با فرض $\frac{f_s}{f} = 9$ برای سه حالت $\omega = \omega_0$ ، $\omega = 3\omega_0$ و $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ با استفاده از روش تقریب با هارمونیک اول تحلیل شد. برای هر یک از سه حالت فوق تغییراتی در ضریب مدولاسیون به صورت پله از $0/9$ به $0/1$ بررسی شد. نتایج به دست آمده و جوابهای حاصل از حل دقیق زمانی سیستم در شکل (۱۱) آورده شده‌اند. همان طور که ملاحظه می‌شود روش تقریب با هارمونیک اول به خوبی رفتار مدار را مخصوصاً برای

طرفی دیگر برای یک مبدل خاص با تغییر یکنواخت سیکل کار پیچیدگی دینامیک آن مبدل و در نتیجه خطای شبیه‌سازی آن به صورت یکنواخت تغییر نمی‌کنند. چون اولاً تمام عناصر غیرقطری ماتریسهای متغییرهای حالت تابعی از سیکل کار نیستند و ثانیاً برخی از این عناصر با افزایش سیکل کار کوچکتر و برخی بزرگتر می‌شوند. روند کلی به نحوی است که با فاصله یافتن سیکل کار مبدلها از ۰/۵، شبیه‌سازی آنها به وسیله روش ذکر شده دشوارتر می‌شود. طبیعتاً در چنین حالتی مدل سیگنالهای بزرگ^{۱۸} با استفاده از این روش مرتکب خطا شده و مدل تنها برای سیگنالهای کوچک^{۱۹} یعنی تغییرات کوچک حول نقطه کار خوب خواهد بود. علت تأثیر قابل توجه سیکل کار را بر روش ارائه شده می‌توان در محتوای هارمونیک تابع کموتاسیون $u(t)$ جستجو کرد. بدین صورت که در بسط تابع کموتاسیون به صورت (۱) تنها جملات $+1$ و 0 و -1 را در نظر می‌گیریم. اگر سیکل کار نزدیک ۰/۵ باشد در تقریب فوق خطای کمی مرتکب شده‌ایم ولی اگر سیکل کار از ۰/۵ دور شود، جملات مرتبه بالاتر در (۱) مطرح می‌شوند که باعث دور شدن مدل به دست آمده از مدل واقعی می‌شوند.

۷- نتیجه

محدودیت‌های روش متوسط‌گیری فضای حالت در تحلیل بسیاری از مدارهای الکترونیک قدرت بیان شد. روش بهبود یافته متوسط‌گیری فضای حالت را که دارای این محدودیتها نیست به جای آن معرفی کردیم و به توضیح کامل آن پرداختیم و خواص ریاضی مهم آن را بررسی کردیم. نحوه به کارگیری این روش کلی را در مدارهای الکترونیک قدرت با استفاده از آن در تحلیل مبدل‌های DC/DC پایه و همچنین DC/AC نشان دادیم. مبدل‌های کاهنده ولتاژ، افزایشنده ولتاژ، معکوس‌کننده ولتاژ، چوک و اینورترهای موج مربعی و PWM را به طور کامل با این روش تحلیل کردیم و به مقایسه نتایج حاصل با جوابهای به دست آمده از حل دقیق زمانی سیستم پرداختیم. نهایتاً در مورد تأثیر تغییرات سریع، تأثیر دینامیک مبدل بر میراشدن حالت گذرا و صحت مدل، تأثیر سیکل کار و فرکانس کار در این روش توضیح دادیم. همچنین تقریب مرتبه دوم را در مبدل کاهنده ولتاژ نشان دادیم و همان طور که دیده شد، در این حالت خطای کمتری نسبت به تقریب مرتبه یک وجود دارد.



شکل ۱۱- اینورتر PWM سینوسی (۱): منحنی واقعی و (۲): تقریب با هارمونیک اول

$$\text{الف) } \omega = \omega_0 \text{ (ب) } \omega = 3\omega_0 \text{ (ج) } \omega = \frac{1}{3}\omega_0$$

جردن^{۱۵} و در حالت ایده‌آل به شکل قطری^{۱۶} نزدیکتر باشد بررسی آن طبق نظریه سیستمهای کنترل ساده‌تر است. چون می‌توان آن را به مجموعه‌ای از سیستمهای با درجات پایین‌تر تفکیک کرد. در مقابل هرچه عناصر غیرقطری یک ماتریس مربعی (عناصری که در خارج از بلوکهای جردن قرار دارند) بیشتر باشد، ماتریس از حالت نزدیک قطری^{۱۷} خارج شده و طبق نظریه سیستمهای کنترل پیچیدگی سیستم مربوطه افزایش می‌یابد. این همان مسئله‌ای است که تحت عنوان پیچیدگی دینامیک مبدلها به آن اشاره شد.

در مبدل‌های DC/DC همان‌طور که ملاحظه شد، سیکل کار تأثیر قابل توجهی در روش ارائه شده دارد. به این ترتیب که در تمامی موارد مدل به دست آمده برای سیکل کارهای نزدیک ۰/۵ رفتار مدار را به خوبی توصیف می‌کند و هرچه سیکل کار از ۰/۵ دورتر می‌شود، خطا افزایش می‌یابد. هرچه پیچیدگی دینامیک مبدل بیشتر شود، این مسئله با شدت بیشتری نمایان می‌شود. از

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| 1. refined state space averaging method | 8. pulse-width modulation | 14. sinusoidal pulse-width modulation |
| 2. state space averaging method | 9. buck converter (step-down converter) | 15. jordan |
| 3. fourier series | 10. commutation function | 16. diagonal |
| 4. duty cycle | 11. boost converter(step-up converter) | 17. sparse matrix |
| 5. single ended | 12. buck-boost converter | 18. large signal |
| 6. convolution | 13. cuk converter | 19. small signal |
| 7. square wave inverters | | |

مراجع

- | | |
|---|---|
| 1. Sanders, S. R., Noworolski, J. M. Liu, X. Z. and Verghese, G. C., "Generalized Averaging Method for Power Conversion Circuits," <i>IEEE Transactions on Power Electronics</i> , Vol. 6, No. 2, April 1991. | Theoretical Basis," <i>IEEE Power Electronic Specialists Conference</i> , Records pp. 1165-1172, 1992. |
| 2. Krein, P. T., Bentsman, J., Bass, R. M. and Lesieutre, B., "On the Use of Averaging for the Analysis of Power Electronic Systems," <i>IEEE Transactions on Power Electronics</i> , Vol. 5, No. 2, pp. 182-190, 1990. | 4. Sanders, S. R. and Noworolski, J. M., "Generalized in-Place Circuit Averaging," <i>IEEE Power Electronic Specialists Conference</i> , Records pp. 445-451, 1991. |
| 3. Sun, J. and Grotstollen, H., "Averaged Modelling of Switching Power Converters: Reformulation and | 5. Verghese, G. and Mukherdji, U., "Extended Averaging and Control Procedure," <i>IEEE Power Electronic Specialists Conference</i> , Records pp. 329-336, 1981. |

$$\langle i_L \rangle_T = x_V + jx_A \quad (A1)$$

$$\langle v_C \rangle_T = x_q + jx_i.$$

معادلات حالت مدار به صورت زیر به دست می آیند:

پیوست: تقریب مرتبه دو برای مبدل کاهنده ولتاژ

علاوه بر شش متغیر حالت حقیقی که در تقریب مرتبه اول تعریف شدند، چهار متغیر حالت حقیقی دیگر که مربوط به هارمونیک دوم هستند را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \circ & \omega & \frac{1}{L} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ -\omega & \circ & \circ & \frac{1}{L} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{1}{C} & \circ & \frac{1}{RC} & \omega & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \frac{1}{C} & \omega & \frac{1}{RC} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{L} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 2\omega & \frac{1}{L} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -2\omega & \circ & \frac{1}{L} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{C} & \circ & \frac{1}{RC} & 2\omega \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{C} & -2\omega & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\sin 2\pi d}{2\pi L} V_{in} \\ \frac{\sin^2 \pi d}{\pi L} V_{in} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \frac{\sin 2\pi d}{2\pi L} V_{in} \\ \frac{\sin^2 \pi d}{\pi L} V_{in} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$