

تحلیل سازه‌های جدار نازک با استفاده از اجزای محدود خمشی - پیچشی

حسن حاجی کاظمی* و محمود عرب**

دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

نیروی دریایی جمهوری اسلامی ایران

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۶/۴)

چکیده - در این مقاله یک جزء محدود تیری برای تحلیل سازه‌های جدار نازک معادله‌سازی شده و اثر تنشهای برشی ثانویه بر تغییر شکل‌های طولی در نظر گرفته شده است. از مشخصه‌های این جزء محدود، آن است که عناصر ماتریس سختی به طور صریح به دست می‌آید و نیاز به انتگرالگیری عددی نیست. تابع درونیاب مورد استفاده برای این جزء، مبتنی بر پاسخ معادله دیفرانسیل پیچش گیردار است. بنابراین دقت و همگرایی آن بسیار زیاد است و فقط با به کار بردن یک جزء می‌توان به نتایج مناسب دست یافت. افزون بر آن، به خاطر همگرایی خوب این جزء محدود، می‌توان از آن در تحلیل انواع تیرهای جدار نازک مستقیم یا منحنی و با مقطع باز، بسته و نیمه بسته نیز استفاده کرد.

Analysis of Thin-Walled Structures Using Torsional-Bending Elements

H. Haji-Kazemi and M. Arab

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Navy Force of Islamic Republic of Iran

ABSTRACT- *In this paper a new element for analysis of thin-walled structures is presented, and the effects of secondary shear stresses on longitudinal displacements are examined. Since the Interpolation Functions are based on non-uniform torsional differential equations, the analysis of stiffness matrix is facilitated. Therefore, its ability to produce accurate results with the least number of elements is considerably improved. Furthermore, this element can be used in the analysis of all kinds of thin-walled, straight or curved beams with open or closed sections.*

* دانشیار ** کارشناس ارشد

فهرست علائم	
{a}	بردار ضرایب نامعین
[B θ'] [B Ψ']	لنگر پیچشی متمرکز M_z
[B $\Psi\theta'$]	لنگر پیچشی گسترده $m(z)$
{F}	یکنواخت
[G]	ماتریسهای توابع شکل $[N\theta]$ و $[N\Psi]$
I_p	ممان اینرسی چرخشی $[P\theta]$
I_ω	ممان اینرسی تابیدگی U
J	ضریب ثابت پیچش V
[K]	ماتریس سختی w
M_B	زوج لنگر متمرکز
$\Psi(z)$	تابع تابیدگی
θ_x و θ_y	دوران حول محورهای مختصات
$\varepsilon(z, s)$	کرنش محوری
$\gamma(z, s)$	کرنش برشی
σ_ω	تنش محوری
τ	تنش برشی
$\{\phi_n\}$	بردار تغییر مکان گره‌ی
Π_p	انرژی پتانسیب

۱ - مقدمه

تغییر شکل طولی ناشی از تابیدگی از معادله زیر محاسبه می‌شود [۲].

$$w(z, s) = -\omega(s) \theta'(z) \quad (1)$$

در معادله (۱)، $\theta'(z)$ تغییرات پیچش و ω مختصات قطاعی است. این معادله برای محاسبه تغییر شکل‌های طولی مقاطع جدارنازک باز مناسب است، ولی برای مقاطع بسته که مقدار تنشهای یکنواخت روی مقطع قابل ملاحظه است دقت مناسبی ندارد. از این رو برای محاسبه تنشها و تغییر شکل‌های طولی در مقاطع جدارنازک بسته و نیمه‌بسته بهتر است از نظریه بنسکوتر [۳] استفاده شود. در این نظریه، اثر تنشهای برشی ثانویه بر تغییر شکل‌های طولی در نظر گرفته می‌شود. بر اساس نظریه بنسکوتر، تابیدگی مقطع از معادله زیر به دست می‌آید [۴]:

$$w(z, s) = -\omega(s) \Psi(z) \quad (2)$$

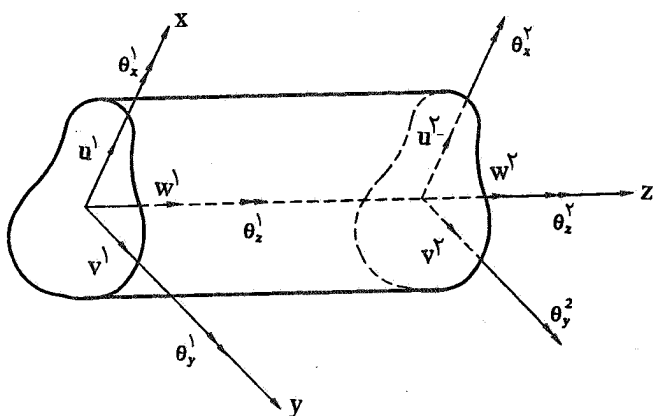
در معادله (۲)، $\Psi(z)$ تابع تابیدگی است و جایگزین $\theta'(z)$ در معادله و لاسوف می‌شود و ω مختصات قطاعی است که برای مقاطع باز شبیه معادله (۱) بوده ولی برای مقاطع بسته متفاوت است.

در این مقاله یک جزء محدود تیری بر اساس نظریه بنسکوتر معادله‌سازی شده و اثر تنشهای برشی ثانویه بر تغییر شکل‌های طولی

در مهندسی سازه همواره سعی می‌شود که با حفظ یک مشخصه مقاومتی معین، وزن سازه به‌ویژه برای سازه‌های حجیم کاهش یابد. افزایش وزن به‌طور مستقیم باعث زیاد شدن نیروهای جانبی ناشی از زلزله می‌شود. یکی از روشهای افزایش مقاومت سازه بدون افزایش وزن، کاربرد مقاطع جدارنازک است. سازه‌های جدارنازک در ساخت پل‌های جعبه‌ای، تیرهای منحنی و هسته‌های برشی کاربرد گسترده‌ای دارند. سازه‌های جدارنازک از نظر شکل هندسی مقطع به دو گروه باز و بسته تقسیم می‌شوند. مقاطع باز در برابر پیچش بسیار حساس‌اند و مقاومت پیچشی کمی از خود نشان می‌دهند. ولی مقاطع بسته به‌ویژه مقاطع مدور، دارای مقاومت پیچشی بالایی هستند.

هنگامی که یک تیر جدارنازک تحت اثر پیچش یا بارهای عرضی خارج از مرکز برش قرارگیرد، ممکن است مقطع آن علاوه بر چرخش دچار تابیدگی نیز بشود. اگر تیر قادر باشد که به‌آزادی تاب بردارد، در این صورت لنگر پیچشی وارده، تنها توسط تنشهای برشی سن‌ونان تحمل خواهد شد. همچنین اگر از تابیدگی آزادانه تیر جلوگیری شود، لنگر پیچشی اعمالی توسط ترکیبی از تنشهای برشی سن‌ونان و پیچش تابیدگی، تحمل خواهد شد.

پایه‌گذار نظریه پیچش تابیدگی اعضای جدارنازک و لاسوف [۱] است. در نظریه و لاسوف، تغییر شکل‌های طولی ناشی از تابیدگی مقطع در نظر گرفته می‌شود ولی از اثر تنشهای برشی ثانویه بر تغییر شکل‌های طولی صرف نظر می‌شود. بر اساس نظریه و لاسوف،



شکل ۱- جزء تیری ولاسوف

دیفرانسیل پیچش مقاطع بسته به دست می آید، استفاده می شود. در ادامه، توابع شکل و ماتریس سختی جزء معادله سازی می شوند. چون ماتریس سختی مربوط به درجات آزادی انتقالی و دورانی در بسیاری از کتابهای تحلیل سازه ها آمده است، در اینجا فقط ماتریس سختی مربوط به درجات آزادی پیچشی و تابیدگی جزء ارائه می شود.

۲-۱ روابط تنش - کرنش

با فرض اینکه مقطع عرضی جزء درحین تغییرشکل ثابت بماند، آن گاه تغییرشکل های ناشی از پیچش نایکنواخت که در هر نقطه از مقطع جزء محدود تیری، شامل دو بخش طولی (z) و مماسی (s) هستند از معادله های زیر به دست می آیند:

$$w(z, s) = -\omega(s) \cdot \Psi(z) \quad (3)$$

$$v(z, s) = P_R \cdot \theta(z) \quad (4)$$

P_R فاصله قائم از مرکز چرخش یا مرکز برش تاخط مماس برمقطع و $\theta(z)$ زاویه چرخش است. ω مختصات قطاعی است و درحالت کلی از معادله زیر محاسبه می شود:

$$\omega(s) = \int_0^s (P_R - \frac{\psi}{t}) ds \quad (5)$$

در معادله (۵)، t ضخامت جداره و ψ تابع پیچشی است و برابر

در نظر گرفته شده است. از مشخصه های اصلی این جزء آن است که عناصر ماتریس سختی آن به طور صریح به دست می آیند و نیاز به انتگرال گیری عددی نیست. چون تابع درونیابی انتخابی برای این جزء، یک تابع نمایی و مبتنی بر پاسخ معادله دیفرانسیل پیچش گیردار است، لذا دقت و همگرایی آن بسیار زیاد بوده و با به کار بردن آن می توان به نتایج قابل قبولی دست یافت. افزون بر آن، به خاطر همگرایی خوب این جزء، می توان از آن برای تحلیل تیرهای جدارنازک مستقیم و منحنی با مقطع باز، بسته و نیمه بسته نیز استفاده کرد.

در ادامه، نخست معادله سازی جزء برای محاسبه ماتریس سختی آن تشریح شده و سپس نتایج حل دو مثال عددی با نتایج حاصل از روشهای موجود، از جمله روش ولاسوف و روش تفاضلهای محدود مقایسه می شود.

۲- معادله سازی جزء محدود

جزء تیری ولاسوف دارای دو گره است و هر گره دارای هفت درجه آزادی، شامل سه درجه آزادی انتقالی و سه درجه آزادی دورانی و یک درجه آزادی مربوط به تابیدگی مقطع است.

برای معرفی این جزء محدود از یک سیستم مختصات محلی (x, y, z) ، مانند شکل (۱)، استفاده می شود. محور z در راستای محور طولی جزء و صفحات xz و yz، صفحات اصلی آن هستند. درجات آزادی انتقالی این جزء محدود در راستای محورهای مختصات محلی با (u^k, v^k, w^k) و درجات آزادی دورانی حول محورهای x و y با $(\theta_x^k = -dv/dx, \theta_y^k = du/dy)$ نشان داده می شوند. دو درجه آزادی دیگر مربوط به چرخش و تابیدگی مقطع است که با $\theta_{z,z}^k$ و θ_z^k معرفی می شوند. اندیسه های بالا معرف موقعیت گره های جزء و علامت (,) معرف مشتق است.

بر پایه روش عمومی اجزای محدود ارتباط بین تغییر مکانهای گرهی با تغییر مکانهای داخلی جزء، باید از توابع شکل استفاده کرد. توابع شکل اجزای یک بعدی برای تغییر مکانهای محوری (w) خطی اند و برای تغییر مکانهای عرضی (v و u) از چند جمله ایهای هرمیتی استفاده می شود. برای تغییرشکل های پیچشی می توان از توابع شکل مختلفی استفاده کرد. اکثر پژوهشگران برای این تغییرشکلها نیز، از توابع هرمیتی استفاده کرده اند [۴ و ۵]. در اینجا برای افزایش دقت و همگرایی جزء محدود پیشنهادی، از توابع نمایی که از پاسخ معادله

باید توجه داشت که انرژی کرنشی محاسبه شده از معادله (۹) مربوط به تغییرشکل‌های مماسی و طولی جزء است و برای محاسبه انرژی کرنشی کل باید انرژی کرنشی ناشی از تنشهای برشی سن و نان که دارای توزیع خطی روی مقطع اند با آن جمع شود. انرژی کرنشی سن و نان مطابق معادله (۱۰) است:

$$U_s = \frac{1}{\gamma} \int_0^L GJ_s \theta'^2(z) dz \quad (10)$$

در معادله (۱۰)، $J_s = \frac{1}{\gamma} \int_A t^2 dA$ ضریب ثابت پیچش مربوط به تنش برشی سن و نان است.

انرژی کرنشی کل از مجموع معادله‌های (۹) و (۱۰) به دست خواهد آمد:

$$U = U_1 + U_s = \frac{1}{\gamma} \int_0^L \{GJ \theta'^2(z) + EI_\omega \Psi'^2(z) + G(I_p - J_B)(\Psi(z) - \theta'(z))'^2 dz \quad (11)$$

در معادله (۱۱)، J ضریب ثابت پیچش کل است و برابر $J = J_s + J_B$ است. انرژی پتانسیل ناشی از بارهای خارجی نیز از معادله (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$V = \int_0^L m(z) \theta(z) dz - M(L) \theta(L) - M(0) \theta(0) - M_B(L) \Psi(L) - M_B(0) \Psi(0) \quad (12)$$

در معادله (۱۲)، $m(z)$ لنگر پیچشی گسترده، $M(z)$ لنگر پیچشی متمرکز و $M_B(z)$ زوج لنگر متمرکز در گره‌ها یند.

انرژی پتانسیل کل، Π_p ، از مجموع معادله‌های (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آید. اگر تابع انرژی پتانسیل کل کمینه شود، معادله (۱۳) برقرار خواهد شد:

$$\delta \Pi_p = \delta(U - V) = 0 \\ = \int_0^L \{GJ \delta \theta'(z) + \delta \theta'(z) + EI_\omega \Psi'(z) \delta \Psi'(z) + G(I_p - J_B)(\Psi(z) - \theta'(z)) \delta (\Psi'(z) - \theta'(z)) - m(z) \delta \theta(z)\} dz - M(L) \delta \theta(L) - M(0) \delta \theta(0) - M_B(L) \delta \Psi(L) - M_B(0) \delta \Psi(0) = 0 \quad (13)$$

در این معادله τ_B تنش برشی یکنواخت $\psi = \frac{\tau_B t}{G \theta'(z)} = \frac{\gamma A}{\phi ds/t}$ روی مقطع (برای مقاطع بسته)، G مدول برشی و A سطح محصور توسط خط میانی مقطع است. برای مقاطع جدارنازک باز، τ_B صفر است، لذا ψ نیز صفر بوده و در نتیجه معادله (۵) به معادله (۶) تبدیل می‌شود:

$$\omega(s) = \int_0^s P_R ds \quad (6)$$

کرنشهای طولی و برشی با استفاده از معادله‌های (۳) و (۴) به دست می‌آیند:

$$\varepsilon(z,s) = \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\omega(s) \Psi'(z) \\ \gamma(z,s) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} = \frac{\psi}{t} \theta'(z) + \left(\frac{\psi}{t} - P_R\right)(\Psi(z) - \theta'(z)) \quad (7)$$

با فرض اینکه رفتار مواد از قانون هوک پیروی کند، می‌توان تنشهای طولی و برشی را با استفاده از معادله‌های بالا به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sigma_\omega = E \varepsilon(z,s) = -E \omega(s) \Psi'(z) \\ \tau(z,s) = G \gamma(z,s) = G \left(\frac{\psi}{t} \theta'(z) + \left(\frac{\psi}{t} - P_R\right)(\Psi(z) - \theta'(z))\right) \quad (8)$$

انرژی کرنشی ناشی از تغییرشکل‌های جزء، پس از جایگزینی تنشها و کرنشهای معادله‌های (۷) و (۸) در معادله انرژی، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_1 = \frac{1}{\gamma} \int_0^L \{GJ_B \theta'^2(z) + EI_\omega \Psi'^2(z) + G(I_p - J_B)(\Psi(z) - \theta'(z))'^2 dz \quad (9)$$

در معادله (۹)، L طول تیر، $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$ ممان اینرسی قطاعی و $I_p = \int_A P^2 dA$ ممان اینرسی قطبی است که نسبت به مرکز برش محاسبه می‌شود و $J_B = \int_A P_R \frac{\psi}{t} dA$ ثابت پیچش در شرایط توزیع یکنواخت تنش برشی است.

در معادله (۱۸)، $[P\theta]$ و $\{a\}$ به ترتیب تابع چندجمله‌ای و بردار ضرایب نامعین‌اند و عبارت‌اند از:

$$[P\theta] = [e^{\gamma z} \quad e^{-\gamma z} \quad z \quad 1]$$

$$\{a\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T$$

با استفاده از معادله (۱۶) می‌توان تابع تابیدگی را به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(z) = [\frac{dp\theta}{dz} + \alpha \frac{d^2 P\theta}{dz^2}] \{a\} = [P\Psi] \{a\}$$

$$[P\Psi] = [(\gamma + \alpha\gamma^3) e^{\gamma z} \quad -(\gamma + \alpha\gamma^3) e^{-\gamma z} \quad 1 \quad 0] \quad (۱۹)$$

معادله بین تغییر مکانهای گرهی و ضرایب نامعین به صورت زیر است:

$$\{\phi_n\} = [G] \{a\}, \quad \{\phi_n\} = \{ \theta(0) \Psi(0) \theta(L) \Psi(L) \} \quad (۲۰)$$

ماتریس $[G]$ ، ماتریس هندسی جزء است و از قرارداد مختصات معلوم‌گره‌ها در معادله‌های بالا به دست می‌آید:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ (\gamma + \alpha\gamma^3) & (\gamma + \alpha\gamma^3) & 1 & 0 \\ e^{-\gamma L} & e^{\gamma L} & L & 0 \\ (\gamma + \alpha\gamma^3)e^{\gamma L} & -(\gamma + \alpha\gamma^3)e^{-\gamma L} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

پس از وارون کردن ماتریس $[G]$ ، ضرایب نامعین محاسبه می‌شوند و با جایگزینی آنها در معادله‌های (۱۸) و (۱۹)، توابع تغییر مکان زیر به دست خواهند آمد:

$$\theta(z) = [P\theta][G]^{-1} \{\phi_n\} = [N\theta] \{\phi_n\}$$

$$\Psi(z) = [P\Psi][G]^{-1} \{\phi_n\} = [N\Psi] \{\phi_n\} \quad (۲۲)$$

$[N\Psi]$ و $[N\theta]$ به ترتیب توابع شکل چرخشی و تابیدگی

اکنون معادله بین تابع تابیدگی $\Psi(z)$ و زاویه چرخش $\theta(z)$ معادله دیفرانسیل پیچش در حالت همگن (حالت $m(z)=0$)، تعیین می‌شود. با استفاده از حساب تغییرات و سپس انتگرالگیری جزء به جزء، معادله (۱۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta\Pi_p = - \int_0^L \{ [G(I_p + J_s) \theta''(z) - G(I_p - J_B) \Psi'(z)] \delta\theta(z) - [EI_\omega \Psi'''(z) + G(I_p - J_B) (\Psi(z) - \theta'(z)) \delta\Psi(z)] \} dz + [G(I_p + J_s) \theta'(z) \delta\theta(z)]_0^L + [EI_\omega \Psi'(z) \delta\Psi(z)]_0^L - [G(I_p - J_B) \Psi(z) \delta\theta(z)]_0^L - \delta V = 0 \quad (۱۴)$$

چون تغییرات در کرانه‌ها صفر است و $\delta\theta$ نیز مخالف صفر است، بنابراین برای برقراری معادله بالا باید مقدار انتگرال صفر شود. با صفر قراردادن انتگرال، دو معادله زیر به دست می‌آید.

$$G(I_p + J_s) \theta''(z) - G(I_p - J_B) \Psi'(z) = 0 \quad (۱۵)$$

$$EI_\omega \Psi'''(z) + G(I_p - J_B) (\theta'(z) - \Psi(z)) = 0 \quad (۱۶)$$

پس از مشتقگیری معادله (۱۵) نسبت به z و جایگزینی $\Psi'''(z)$ در معادله (۱۶)، مقادیر (Ψ) و (θ) به صورت زیر خواهند شد:

$$\Psi(z) = \theta'(z) + \alpha \theta''(z), \quad \alpha = \frac{EI_\omega (I_p + J_s)}{G(I_p - J_B)}$$

$$\theta'''(z) = \gamma^2 \theta''(z), \quad \gamma^2 = \frac{GJ(I_p - J_B)}{EI_\omega (I_p + J_s)} \quad (۱۷)$$

۲-۲ توابع شکل و ماتریس سختی

برای محاسبه ماتریس سختی باید نخست توابع شکل را محاسبه کرد. چنانچه تابع تغییر مکان، پاسخ معادله دیفرانسیل پیچش گیردار برگزیده شود، پاسخ معادله دیفرانسیل پیچش گیردار معادله (۱۷) به صورت زیر خواهد شد:

$$\theta(z) = [P\theta] \{a\} \quad (۱۸)$$

جزء هستند.

برای محاسبه ماتریس سختی جزء، پس از مشتقگیری از معادله‌های (۲۲) و جایگزینی در معادله (۱۵) و سپس در معادله (۱۳) نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$\delta\{\phi_n^t\} \int_0^L \{ [GJ] [b_\theta]^T [b_\theta] + EI_\omega [B_\Psi]^T [B_\Psi] + G(I_P - I_B) [B_{\Psi\theta}]^T [B_{\Psi\theta}] \} \{\phi_n\} - \delta\{\phi_n\}^T m(z) [N_\theta]^T dz - \delta\{\phi_n\}^T \{M(\cdot) M_B(\cdot) M(L) M_B(L)\} = 0 \quad (23)$$

برای ساده‌سازی معادله بالا، از معادله‌های زیر کمک گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} [K_{\theta 1}] &= GJ \int_0^L [B_\theta]^T [B_\theta] dz \\ [K_{\theta 2}] &= EI_\omega \int_0^L [B_\Psi]^T [B_\Psi] dz \\ [K_{\theta 3}] &= G(I_P - I_B) \int_0^L [B_{\Psi\theta}]^T [B_{\Psi\theta}] dz \\ \{F_\theta\} &= \int_0^L m(z) [N_\theta]^T dz \\ \{F_m\} &= \{M(\cdot) M_B(\cdot) M(L) M_B(L)\} \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگزینی مقادیر بالا در معادله (۲۳)، معادله (۲۵) به دست می‌آید:

$$[K_\theta] \{\phi\} = \{F_\theta\} + \{F_m\}, [K_\theta] = [K_{\theta 1}] + [K_{\theta 2}] + [K_{\theta 3}] \quad (25)$$

در معادله‌های بالا، $\{F_\theta\}$ بردار بارهای گرهی معادل، $\{F_m\}$ بردار بارهای متمرکز درگره‌ها، $[K_{\theta 1}]$ ماتریس سختی پیچش آزاد، $[K_{\theta 2}] + [K_{\theta 3}]$ ماتریس سختی پیچش گیردار و $[K_{\theta 3}]$ ماتریس سختی مربوط به اثر تنشهای برشی ثانویه روی تغییرشکل‌های تابیدگی مقطع است. همان طور که پیش ازین نیز اشاره شد ماتریس سختی به دست آمده قابل استفاده برای تحلیل مقاطع جدارنازک باز، بسته و نیمه بسته است. برای مقاطع جدارنازک باز، $J_B = 0$ و $J = J_S$ است. ماتریس سختی جزء محدود در پیوست ارائه شده است.

۲-۳ تنشها و نیروهای داخلی در جزء محدود

تنشهای داخلی در هر نقطه از جزء را می‌توان با کاربرد معادله‌های (۸)، محاسبه کرد و سپس نیروهای داخلی ناشی از تغییرشکل‌های

جزء محدود را به دست آورد. با ترکیب معادله‌های (۸) و (۲۰)، زوج لنگر و تنش محوری نیز محاسبه می‌شوند. تنشهای برشی در روی مقطع، شامل دو بخش اند. بخش اول ناشی از پیچش مربوط به تنش برشی سن و نان است که با $\tau_{zs}^{s,v}$ نشان داده می‌شود و بخش دیگر تنش برشی مربوط به تابیدگی مقطع است. تنش برشی مربوط به تابیدگی مقطع ناشی از پیچش گیردار است که با τ_{zs}^ω معرفی می‌شود. تنش برشی سن و نان از معادله (۸) به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\tau_{zs}^{sv} = G \left(\frac{\psi}{t} \Psi(z) - P_R \Psi(z) + P_R \theta'(z) \right) \quad (26)$$

در معادله (۲۶)، $\theta'(z)$ با استفاده از ماتریس کرنش معادله (۲۲) محاسبه می‌شود. تنش برشی مربوط به تابیدگی از معادله تعادل به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \tau_{zs}^\omega}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{zs}^\omega}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

اندیس بالای ω در معادله (۲۷)، معرف تنشهای تابیدگی است. با ترکیب معادله‌های (۸) و (۲۷) و سپس انتگرالگیری از معادله به دست آمده، معادله (۲۸) حاصل خواهد شد:

$$\tau_{zs}^\omega - (\tau_{zs}^\omega)_0 = -E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} S_\omega, S_\omega = \int^s \omega(s) ds \quad (28)$$

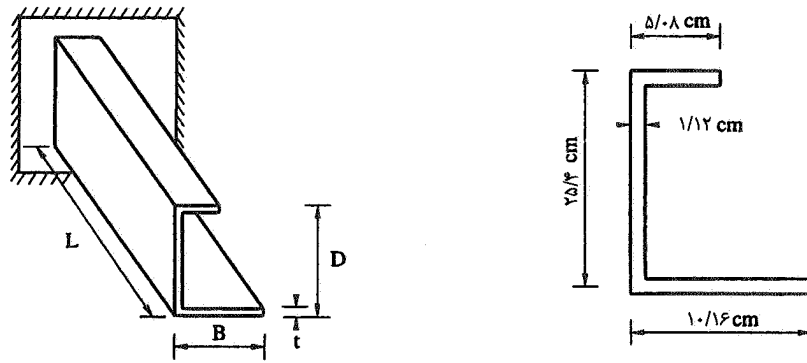
در این معادله فقط تنش برشی (τ_{zs}^ω) مجهول است که پس از محاسبه آن، تنشهای برشی ناشی از تنشهای برشی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M(z) &= \int_A P_R G \left(\frac{\psi}{t} \Psi(z) - P_R \Psi(z) + P_R \theta'(z) \right) dA \\ &+ (\tau_{zs}^\omega)_0 \int_A dA - E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \int_A S_\omega dA \end{aligned} \quad (29)$$

در این معادله فقط تنش برشی (τ_{zs}^ω) مجهول است که پس از محاسبه آن، تنشهای برشی ناشی از تابیدگی مقطع نیز از معادله (۲۸) به دست می‌آید.

۲-۴ بارهای گرهی معادل

بارهای گرهی معادل با استفاده از معادله (۲۴) و توابع شکل معادله (۲۲) به دست می‌آیند:



شکل ۲- تیرطره‌ای با مقطع باز نامتقارن

جدول ۱- مقایسه نتایج تحلیل با روش ولاسوف و روش پیشنهادی

زوج لنگر در $x = 0$ t/cm^2	تاییدگی rad/cm	زاویه چرخش rad	تعداد جزء	روش تحلیل
۰/۰۰۴۸۹	۰/۰۰۱۰۲۷۱	۰/۲۱۷۷۵	۱	
۰/۰۰۴۸۷	۰/۰۰۱۰۲۰۹	۰/۲۱۷۲۷	۴	روش پیشنهادی
۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۱۰۲۰	۰/۲۱۷۱۰	۸	
۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۱۰۸۴۶	۰/۲۱۷۱۹	-	روش ولاسوف [۷]

۳-۱ تیرجدارنازک بامقطع باز نامتقارن

یک تیرطره‌ای با مقطع باز نامتقارن مطابق شکل (۲)، تحت اثر لنگر پیچشی متمرکز که در انتهای آن است مورد تحلیل قرار می‌گیرد. مقدار لنگر پیچشی مؤثر $23/06 t.cm$ و طول تیر $254 cm$ است. مدول الاستیسیته و مدول برشی برابرند با $E = 2111 t/cm^2$ و $G = 810 t/cm^2$. پارامترهای سازه‌ای عبارت‌اند از:

$$I_{\omega} = 19070 cm^6, J_s = 27/75 cm^4, J_b = 0$$

$$I_p = I_{xc} + I_{yc} = 27/75 cm^4$$

نتایج تحلیل با استفاده از روش ولاسوف و روش پیشنهادی در جدول (۱) درج شده است.

اعداد مندرج در جدول (۱) نشان می‌دهند که اختلاف بسیار کمی بین نتایج روش ولاسوف و روش پیشنهادی وجود دارد. از این رو می‌توان چنین برداشت کرد که تنشهای برشی ثانویه در مقاطع باز

$$\{F\} = \int_0^L m(z)[N\theta]^T dz \quad (30)$$

اگر در معادله بالا، $[N\theta]$ از معادله (۲۲) جایگزین شود، بارهای گرهی معادل به صورت زیر خواهند شد:

$$\{F\} = \{M(z)_1, M_B(z)_1, M(z)_2, M_B(z)_2\} \quad (31)$$

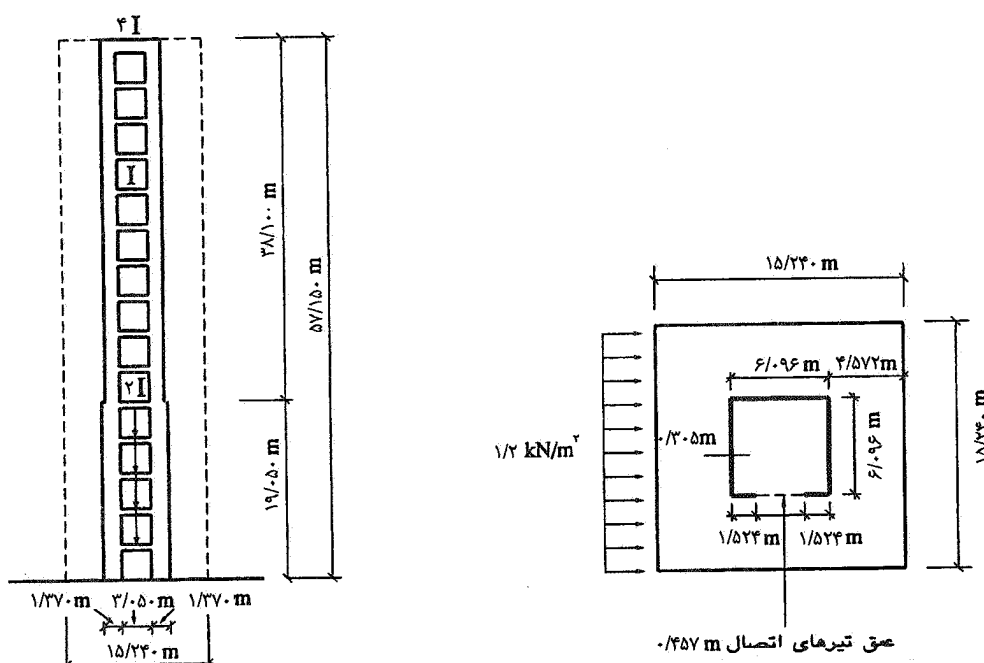
$M(z)$ لنگر پیچشی گرهی و $M_B(z)$ زوج لنگر گرهی $M(z)$ از معادله‌های ارائه شده در پیوست محاسبه می‌شوند. در صورتی که علاوه بر بارهای گسترده، بارهای متمرکز نیز بر گره‌های جزء وارد شوند، باید با بارهای گرهی معادل جمع شوند.

۳- مثال

در مثالهای زیر ابعاد اعضای مشابه کار پیشین در نظر گرفته شده و صرفاً به منظور مقایسه انتخاب شده‌اند.

جدول ۲ - پارامترهای سازه‌های هسته باز یا مقطع متغیر

پارامترها	واحد	تراز	تراز	تراز
e_x	m	۳/۲۵	۳/۳۶	۳/۳۶
t	m	۰/۶۱	۰/۳۰۵	۰/۳۰۵
J_s	m^4	۱/۵۳۴	۰/۳۰۵	۰/۱۹۲
J_b	m^4	۲/۹۳	۱/۴۶۴	۵/۸۵۵
I_ω	m^6	۶۰۰/۴۴	۳۰۰/۲۲	۳۰۰/۲۲
I_p	m^4	۲۷۵/۸۳	۱۶۱/۹۳	۱۶۱/۹۳
I_b	m^4	$۱۹/۸۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۹۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳۹/۶۴ \times ۱۰^{-۴}$



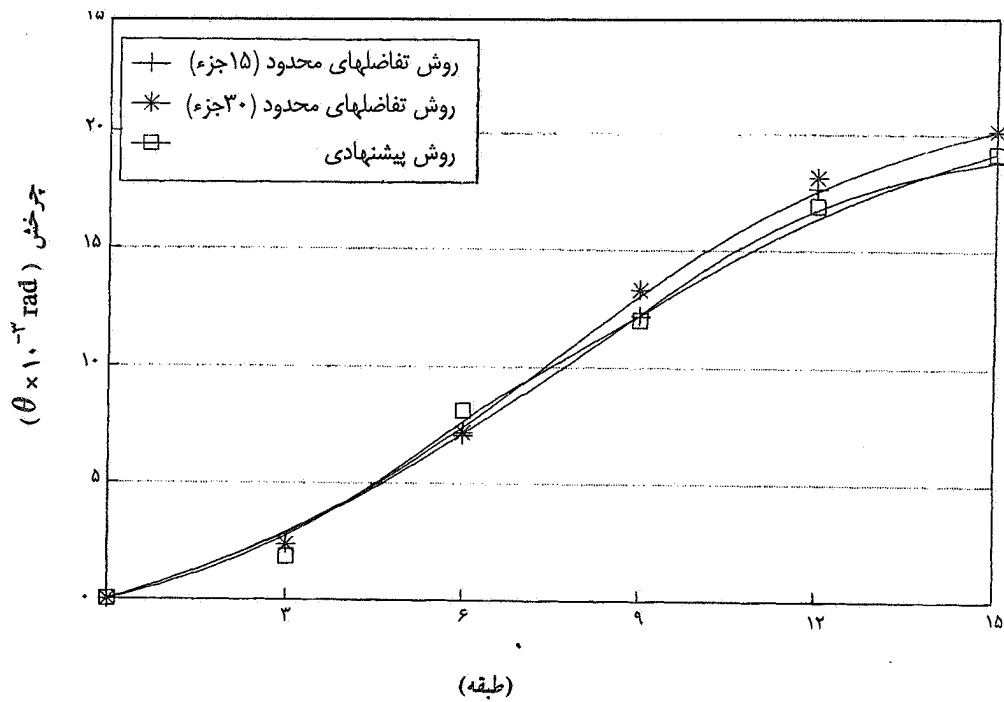
شکل ۳ - پلان ساختمان و نمای هسته برشی

آن در ارتفاع تغییر می‌کند، تحمل می‌شود. این هسته در تراز طبقات توسط تیرهای اتصالی بسته شده است. ضخامت این هسته در ۵ طبقه اول ۰/۶۱ متر و در بقیه طبقات ۰/۳۰۵ متر است. عمق تیرهای اتصالی برابر ۰/۴۵۷ متر و عرض آنها برای ممان اینرسی I برابر $۰/۱۲۵ m^4$ است. مدول الاستیسیته و مدول برشی هسته به ترتیب $۲۷/۶ \times ۱۰^۶ kN/m^2$ و kN/m^2 ۱۲×۱۰^۶ هستند. پارامترهای سازه‌ای این هسته در جدول (۲) نوشته شده است.

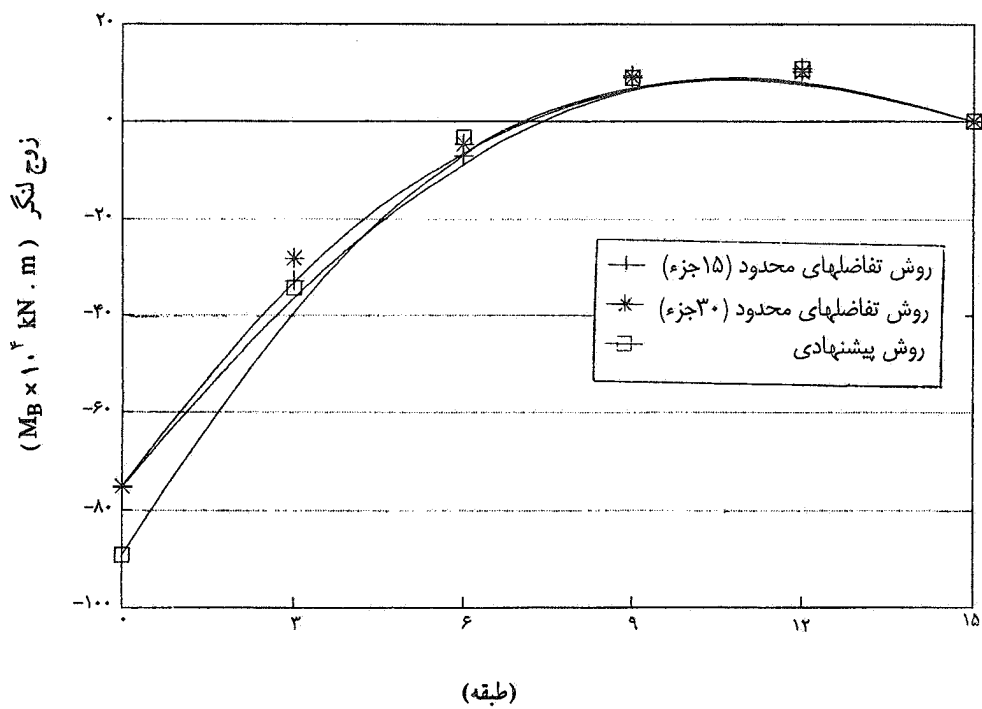
عملاً برابر صفرند. بنابراین، صرف نظر کردن از تغییر شکل‌های برشی در روش ولاسوف برای مقاطع جدارنازک باز قابل توجیه است.

۲-۳ هسته برشی باز با مقطع متغیر

یک ساختمان به ارتفاع ۵۷/۱۵ متر شامل ۱۵ طبقه ۳/۸۱ متری، مطابق پلان شکل (۳)، تحت فشار گسترده باد به شدت $۱/۲ kN/m^2$ قرار گرفته است. بارهای ناشی از فشار باد و پیچش در این ساختمان توسط یک هسته آسانسور با مقطع باز که سطح مقطع



شکل ۴ - چرخش هسته برشی در تراز طبقات



شکل ۵ - زوج لنگر در تراز طبقات

۴ - نتیجه گیری

کنشهای خمشی سازه‌های جدارنازک رامی توان مانند یک طره قائم تحلیل کرد. کنشهای تابیدگی سازه‌های جدارنازک با مقطع یکنواخت و تحت اثر پیچش نیز توسط معادله‌سازی و حل معادلات

این هسته برشی با استفاده از روش تفاضلهای محدود [۷و۶] و جزء پیشنهادی تحلیل شده است که نتایج تحلیل در شکلهای (۴) و (۵) با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

دیفرانسیل پیچش محاسبه می‌شود. رفتار سازه‌هایی را که خواص هندسی آنها در برخی از ترازهای ارتفاعی، متغیر است، نمی‌توان به‌آسانی با کاربرد معادلات دیفرانسیل پیچش تبیین کرد. محاسبه تغییرشکل‌های این سازه‌ها نیازمند یک تحلیل سه بعدی است. تحلیل رفتاری سازه با کمک اجزای محدود مناسبترین روش موجود است. نتایج تحلیل عددی جزء محدود پیشنهادی نشان می‌دهد که صرف‌نظر کردن از تنشهای

برشی ثانویه در مقاطع جدارنازک بسته و نیمه بسته بین ۱۰ درصد تا ۲۰ درصد خطا خواهد داشت، ولی این خطا در مقاطع باز نزدیک به صفر است. همچنین صرف‌نظر کردن از تغییرشکل‌های برشی سبب افزایش زوج لنگر در تکیه‌گاه و کاهش تابیدگی در انتهای بسته می‌شود. جزء محدود پیشنهادی ضمن سهولت و تسریع در تحلیل رفتاری تیرهای جدارنازک، در مقایسه با روشهای دیگر نتایج دقیقتری ارائه می‌دهد.

مراجع

1. Vlasov, V. Z., *Thin-Walled Elastic Beams*, Translated from Russian by Y. Schechtman, National Science Foundation, Washington D.C., 1961.
2. Vlasov, V. Z., " A Vlasov Beam Element," *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 1, pp. 187-196, 1989.
3. Bencotter, S. U., " A Theory of Torsion and Bending of Multicell Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 21 , No. 1, March 1954.
4. Chen, B. Z., and Y. R. HU, " The Torsional Stiffness Matrix of a Thin-Walled Beam and its Application to Beams Under Combined Loading," *Computers and Structures*, Vol. 28, No. 3, pp. 421-431, 1988.
5. Rutenberg, A., " Torsional Analysis Method for Perforated Cores," *Journal of Structural Engineering Division*, ASCE, Vol. 112, No. 6, pp. 1207-1227, June 1986.
6. Tso, W. K., and J. K. Biswas, " Analysis of Core-Wall Structures Subjected to Applied Torque," *Building Science*, Vol. B, pp. 251-257, 1973.
7. Liauw, T. C., and W. K. Luk, " Torsion of Core-Wall of Non-Uniform Sections," *Journal of Structural Engineering Division*, ASCE, pp. 1921-1931, September 1980.

ماتریس سختی جزء محدود پیشنهادی از سه بخش تشکیل شده است. بخش اول شامل اثرات پیچش خالص، بخش دوم اثرات تابیدگی و بخش سوم اثر تنشهای برش ثانویه روی تغییرشکل‌های تابیدگی بوده و به صورت زیر است.

$$[k\theta] = [k\theta_1] + [k\theta_2] + [k\theta_3]$$

$$\begin{aligned}
 [K\theta_1] &= GJ \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & -S_1 & S_2 \\ S_2 & -S_2 & S_2 & S_2 \\ \text{Sym} & S_1 & -S_2 & \\ & & & S_2 \end{vmatrix} \\
 [K\theta_2] &= EI\omega \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_2 & A_2 & A_2 \\ & & A_1 & -A_2 \\ \text{Sym} & & & A_2 \end{vmatrix} \\
 [K\theta_3] &= G(I_p - J_B) \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & -C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_2 & C_2 & C_2 \\ & & C_1 & -C_2 \\ \text{Sym} & & & C_2 \end{vmatrix} \\
 [K\theta] &= \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & -K_1 & K_2 \\ K_2 & -K_2 & K_2 & K_2 \\ & & K_1 & -K_2 \\ \text{Sym} & & & K_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$K_1 = GJS_1 + EI\omega A_1 + G(I_p - J_B)C_1 \quad K_2 = GJS_2 + EI\omega A_2 + G(I_p - J_B)C_2$$

$$K_3 = GJS_3 + EI\omega A_3 + G(I_p - J_B)C_3 \quad K_4 = GJS_4 + EI\omega A_4 + G(I_p - J_B)C_4$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{\Delta p} \{ \gamma e^{\gamma Hy} (a+b-d)^2 - \Delta a b e^{-Hy} (a+b-d) - \Delta a b e^{-Hy} (a-b-d) - \gamma e^{-\gamma Hy} (a-b-d)^2 \\
 &\quad + \gamma H [a^2 (\gamma b^2 - \gamma^2) + 2 a d \gamma^2 + \gamma^2 (b^2 - d^2) + b (\gamma a^2 - a (\gamma d + \gamma) + d \gamma)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{1}{\Delta p} \{ \gamma e^{\gamma Hy} (a+b-d) (H(b-d) - c + s + 1) - \gamma e^{-Hy} (H a b (b-d) - a (b(c - \gamma s - 1) + d(c-1)) \\
 &\quad + (b-d)(bs-d)(c-1) + \gamma e^{-Hy} (H a b (b+d) - a (b(c + \gamma s - 1) - d(c-1)) + (bs-d)(c-1)(b+d)) \}
 \end{aligned}$$

$$+ \gamma e^{-\gamma H y} (\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{d})(\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1) + \gamma \mathbf{H}(\mathbf{a}(\gamma \mathbf{b}^{\gamma} \mathbf{s}-\mathbf{b}(\gamma \mathbf{c} \mathbf{d}+\gamma)-\gamma \gamma^{\gamma} \mathbf{s})$$

$$+ \gamma \gamma (\mathbf{d} \gamma \mathbf{s}-\mathbf{b}(\mathbf{c} \gamma-\mathbf{d}-\gamma)) + \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b} \mathbf{s}+(\gamma-\mathbf{r} \mathbf{d})(\mathbf{c}-1))-\mathbf{b} \mathbf{s}(\mathbf{r} \mathbf{d}-\gamma)+\mathbf{d}(\mathbf{r} \mathbf{d}-\gamma)(\mathbf{c}-1))\}$$

$$S_{\gamma} = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma e^{\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)^{\gamma} - \lambda e^{\mathbf{H} y} (\mathbf{b} \mathbf{s}-\mathbf{d}(\mathbf{c}-1)) (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)$$

$$+ \lambda e^{-\mathbf{H} y} (\mathbf{b} \mathbf{s}-\mathbf{d}(\mathbf{c}-1)) (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) - \gamma e^{-\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1)^{\gamma} + \mathbf{r} (\mathbf{H}^{\gamma} \gamma^{\gamma} (\mathbf{b}^{\gamma}-\mathbf{d}^{\gamma}))$$

$$+ \mathbf{H}^{\gamma} \gamma (\gamma \mathbf{d} \gamma \mathbf{s}-\mathbf{b}(\gamma \mathbf{c} \gamma-\mathbf{d}-\gamma)) + \mathbf{H}(\gamma \mathbf{b}^{\gamma} \mathbf{s}^{\gamma}-\mathbf{b} \mathbf{s}(\gamma \mathbf{c} \mathbf{d}+\gamma)) + \mathbf{c}^{\gamma} (\gamma \mathbf{d}^{\gamma} + \gamma^{\gamma})$$

$$- \mathbf{c} \gamma (\mathbf{d} + \gamma \gamma) \mathbf{b} - \gamma \mathbf{d}^{\gamma} + \gamma (\mathbf{d}-\gamma(1-\mathbf{s})^{\gamma}) + \mathbf{s}(\mathbf{r} \mathbf{b} \mathbf{s}+(\gamma-\mathbf{r} \mathbf{d})(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$S_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma e^{\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) (\mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{c}-\mathbf{s}-1) + \mathbf{r} e^{\mathbf{H} y} ((\mathbf{c}-\mathbf{s}-1) (\mathbf{a}(\mathbf{c}-1)-\mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{d}(\mathbf{c}-1)))$$

$$- \mathbf{H} \mathbf{a} (\mathbf{b}(\mathbf{c}+\mathbf{s}-1) + \gamma \mathbf{d}(1-\mathbf{c})) + \mathbf{r} e^{-\mathbf{H} y} (\mathbf{H} \mathbf{a} (\mathbf{b}(\mathbf{c}-\mathbf{s}-1) + \gamma \mathbf{d}(\mathbf{c}-1)) - (\mathbf{c}+\mathbf{s}-1) - (\mathbf{a}(\mathbf{c}-1)$$

$$- \mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{d}(\mathbf{c}-1))) + \gamma e^{-\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1) (\mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{c}-\mathbf{s}+1) + \mathbf{r} (\gamma \mathbf{H}^{\gamma} \mathbf{a} \mathbf{d} \gamma^{\gamma})$$

$$- \mathbf{H}^{\gamma} \gamma (\mathbf{a}(\mathbf{b} + \gamma \gamma \mathbf{s}) + \gamma \gamma (\mathbf{d} \mathbf{s}-\mathbf{b}(\mathbf{c}-1))) + \mathbf{H}(\mathbf{a}(\mathbf{r} \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{s} + (\mathbf{r} \mathbf{c} \mathbf{d} + \mathbf{r} \mathbf{d}-\gamma)(1-\mathbf{c}) + \gamma (\mathbf{b} \mathbf{s}-\gamma \gamma \mathbf{c}^{\gamma})$$

$$+ \mathbf{c}(\mathbf{d} + \mathbf{r} \gamma) - \mathbf{d} + \gamma \gamma (\mathbf{s}^{\gamma}-1)) + \mathbf{r} \mathbf{s}(\gamma \mathbf{a}(\mathbf{c}-1) - \gamma \mathbf{b} \mathbf{s} + (\gamma \mathbf{d}-\gamma)(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$A_1 = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{\gamma H y} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d})^{\gamma} - \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{-\gamma H y} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d})^{\gamma} + \mathbf{r} \gamma \mathbf{a}^{\gamma} (\mathbf{H} \gamma (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{d} - \mathbf{a})) \}$$

$$A_{\gamma} = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{\gamma H y} (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) + \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{-\gamma H y} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1)$$

$$- \gamma \gamma \mathbf{a}^{\gamma} (\gamma \gamma \mathbf{H}^{\gamma} (\mathbf{a} \mathbf{d} + (\mathbf{b}^{\gamma}-\mathbf{d}^{\gamma})) + \mathbf{H}(\mathbf{a}(\mathbf{b}-\gamma \gamma \mathbf{s}) + \mathbf{r} (\mathbf{d} \gamma \mathbf{s}-\mathbf{b}(\gamma \mathbf{c} + \mathbf{d}-\gamma))) + \mathbf{a}(1-\mathbf{c}) + \mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{d}(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$A_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)^{\gamma} - \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{-\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)^{\gamma} - \mathbf{r} \gamma \mathbf{a}^{\gamma} (\gamma \mathbf{H}^{\gamma} (\mathbf{b}^{\gamma}-\mathbf{d}^{\gamma}))$$

$$+ \mathbf{H}^{\gamma} (\mathbf{a}(\mathbf{b}-\gamma \gamma \mathbf{s}) + \gamma \gamma (\mathbf{b}(\mathbf{c}-1)-\mathbf{d} \mathbf{s})) - \mathbf{H}(\mathbf{a}(\mathbf{c}-1) + \mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{r} \mathbf{c}^{\gamma} \gamma + \mathbf{c}(\mathbf{d}-\mathbf{r} \gamma) - \mathbf{d}(1-\mathbf{s}^{\gamma})) + \mathbf{r} \mathbf{s}(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$A_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda \rho} \{ \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) (\mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{c}-\mathbf{s}-1) + \gamma \mathbf{a}^{\gamma} e^{-\gamma H y} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) (\mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{c}-\mathbf{s}+1)$$

$$- \mathbf{r} \gamma \mathbf{a}^{\gamma} (\mathbf{r} \mathbf{H}^{\gamma} \mathbf{a} \mathbf{d} \gamma + \mathbf{H}^{\gamma} (\mathbf{a}(\mathbf{b}-\gamma \gamma \mathbf{s}) + \gamma \gamma (\mathbf{b}(\mathbf{c}-1)-\mathbf{d} \mathbf{s})) - \mathbf{H}(\mathbf{a}(\mathbf{c}-1) + \mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{r} \gamma \mathbf{c}^{\gamma} + \mathbf{c}(\mathbf{d}-\mathbf{r} \gamma) - \mathbf{d}$$

$$+ \mathbf{r} \gamma (\mathbf{s}^{\gamma}-1)) + \mathbf{r} \mathbf{s}(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda \rho \gamma} \{ e^{\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d})^{\gamma} - e^{-\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d})^{\gamma} - \mathbf{r} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H} \gamma (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}) (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{a} - \mathbf{d})) \}$$

$$C_{\gamma} = \frac{1}{\lambda \rho \gamma} \{ e^{\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) + e^{-\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)$$

$$+ \mathbf{r} (\mathbf{a} + \gamma)^{\gamma} (\mathbf{r} \mathbf{H}^{\gamma} \gamma (\mathbf{a} \mathbf{d} + (\mathbf{b}^{\gamma}-\mathbf{d}^{\gamma})) - \mathbf{H}(\mathbf{a}(\mathbf{b} + \gamma \gamma \mathbf{s}) + \mathbf{r} (\mathbf{b}(\mathbf{c} \gamma - \mathbf{d} - \gamma) - \mathbf{d} \gamma \mathbf{s})) + \mathbf{a}(\mathbf{c}-1) - \mathbf{b} \mathbf{s} + \mathbf{d}(1-\mathbf{c})) \}$$

$$C_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda \rho \gamma} \{ e^{\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1)^{\gamma} - e^{-\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1)^{\gamma} + \mathbf{r} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H}^{\gamma} \gamma (\mathbf{b}^{\gamma}-\mathbf{d}^{\gamma}))$$

$$+ \mathbf{H}^{\gamma} (\gamma \mathbf{d} \gamma \mathbf{s}-\mathbf{b}(\gamma \mathbf{c} \gamma-\mathbf{d}-\gamma)) - \mathbf{H}(\mathbf{b} \mathbf{s}-\gamma \mathbf{c}^{\gamma} + \mathbf{c}(\mathbf{d} + \gamma \gamma) - \mathbf{d} + \gamma (\mathbf{s}^{\gamma}-1) + \mathbf{s}(\mathbf{c}-1)) \}$$

$$C_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda \rho \gamma} \{ e^{\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H}(\mathbf{b}-\mathbf{d})-\mathbf{c}+\mathbf{s}+1) + (\mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{c}-\mathbf{s}-1) + e^{-\gamma H y} (\mathbf{a}-\gamma)^{\gamma} (\mathbf{H}(\mathbf{b}+\mathbf{d})-\mathbf{c}-\mathbf{s}+1)$$

$$\times(H\alpha - c - s + 1) + \gamma(\alpha - \gamma)^{\gamma} (\gamma H^{\gamma} \alpha d \gamma - H^{\gamma} (\alpha(b + \gamma \gamma s) + \gamma \gamma (ds - b(c - 1))) + H(\alpha(c - 1) + bs - \gamma c^{\gamma} \gamma + c(d + \gamma \gamma) - d + \gamma \gamma (s^{\gamma} - 1) + \gamma s(1 - c))\}$$

$$\alpha = (\gamma + \alpha \gamma^{\gamma}) \quad , \quad p = (H\alpha b + \alpha(c - 1) + bs + d(c - 1))$$

$$c = \cosh(\gamma H) \quad , \quad s = \sinh(\gamma H) \quad , \quad b = s\alpha \quad , \quad d = c\alpha$$

بارهای گرهی معادل

$$M_{z_1} = M_{z_2} = m(z) \frac{H}{\gamma}$$

$$M_B(z)_1 = \frac{1}{\gamma \gamma P} \{e^{-Hy} (H\alpha - c - s + 1) - e^{Hy} (H\alpha - c - s - 1)\} + (H^{\gamma} \alpha (c + 1) - \gamma H \gamma s + \gamma (c - 1))\}$$

$$M_B(z)_2 = -M_B(z)_1$$