# حداقل زمان مانور غلت حول بردار سرعت هواپیما

**محسن بهرامی** * **و سید حسین ساداتی** **

**دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر**

**پژوهشکدهٔ هواپیمایی مؤسسه آموزشی و تحقیقاتی صنایع دفاعی**

(دریافت مقاله: ۷۸/۵/٦ – دریافت نسخهٔ نهایی ۸۰/٤/۱٦)

**چکیده** – *حداقل زمان مانور غلت حول بردار سرعت با در نظر گرفتن سطوح کنترل آیرودینامیکی و بردار تراست (به عنوان کنترلر) محاسبه شده است. مدل ریاضی برای حرکت هواپیما بیان شده است. شرایط لازم مرتبهٔ اول برای بهینگی با استفاده از اصل حداقل پانتریاگن به کار رفته است. روش عددی مورد استفاده تکنیک پرتاب چندنقطه‌ای است. تخمینی از کاهش زمان مانور ناشی از کاربرد بردار تراست هواپیما به دست آمده است.*

**واژگان کلیدی:** *تکنیک پرتاب چندنقطه ای، حداقل زمان، کنترل بهینه، قابلیت مانورپذیری، مداومت*[1]

# Minimum-Time Roll Around the Velocity-Vector Maneuver of Aircraft

**M. Bahrami and S. H. Sadati**

Mechanical Engineering Department, Amir Kabir University of Technology

Aircraft Research Center, Defence Industry Education and Research Institute

**ABSTRACT-** ***In this paper, some results are provided for minimum time roll about velocity vector maneuvering with thrust-vectoring and aerodynamic control in effect. The mathematical model for attitude motions of the aircraft is developed. First order necessary conditions for optimality using Pontryagen principle is applied, and the existence of an extreme family of solutions for the maneuver is shown. Multiple shooting method is used to obtain the numerical results. An estimate of maneuver time reduction resulting from thrust-vectoring is obtained.***

**Keywords:** ***Multiple Shooting Method; Minimum time; Thrust-Vectoring; Maneuverability; Aerodynamics***

---

* – دانشیار

** – کارشناسی ارشد



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

## فهرست علائم

| | | | |
|---|---|---|---|
| P | نرخ غلتش | $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ | کنترلهای آیرودینامیکی |
| q | نرخ پیچش | $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ | کنترلهای بردار تراست |
| r | نرخ سمت | S | سطح مرجع |
| $c_1, C_m, C_n$ | ضرایب ممان آیرودینامیکی | $\overline{C}$ | وتر متوسط آیرودینامیکی |
| $I_x, I_y, I_z$ | ممان اینرسی در جهات x, y, z | b | بازهٔ بال |
| $u_x, u_y, u_z$ | ممان ناشی از بردار تراست در جهات x,y,z | $\alpha$ | زاویهٔ حمله |
| $L_{qr}, M_{rp}, N_{pq}$ | ممانهای ژیروسکوپی | $\beta$ | زاویه لغزش جانبی |
| $L_c, M_c, N_c$ | ممانهای آیرودینامیکی ناشی از سطوح کنترل | $\omega$ | سرعت زاویه‌ای |
| $L_t, M_t, N_t$ | نرخهای دمپینگ | $\psi, \theta, \phi$ | زوایای اویلر |
| $L_{zet}, M_{zet}, N_{zet}$ | ممانهای ناشی از بردار تراست | $\lambda$ | متغیر الحاقی |
| | | $\varepsilon_e. \varepsilon_a, \varepsilon_\xi, \varepsilon_t, \varepsilon_q, \varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l, \varepsilon_r$ | متغیرهای مداومت |

### ۱- مقدمه

طراحی هواپیماهای جنگی مدرن به ویژه هواپیماهای شکاری، فرایند پیچیده‌ای است که نیازمند به کارگیری رشته‌های علمی و فنی بسیاری را داشته و شامل مسائل گسترده‌ای است.

یکی از این قابلیتها، قابلیت مانورپذیری است که بسته به ماموریت هواپیما و ویژگیهای خاص مورد استفادهٔ آن می تواند تغییر کند و به تراست (یا توان موتور)، مسائل آیرودینامیکی و استحکام سازه ربط پیدا کند. قابلیت مانورپذیری هواپیما مشخصه‌ای است که امکان دستیابی به مقادیر لحظه‌ای ارتفاع، سرعت، ضریب بار، انجام مانور سریع مورد نیاز در پرواز را تعیین می‌کند.

تحلیلهای مختلف نشان داده است که روند توسعهٔ موشک و تکنولوژی رادار تاثیر عمیقی بر طراحی اجسام برتر هوایی دارد[۵]. به نظر می‌رسد که در نبرد هوایی نزدیک، هواپیمایی که قابلیت رسیدن به زاویه حمله ($\alpha$) بالا را دارد قطعاً دارای برتری است [۱٤]. قابلیت مانورپذیری بالا را می‌توان ترکیبی از حرکت بعد از واماندگی[۲] و قابلیت اعمال نیروی مستقیم دانست. چالاکی[۳] هواپیما در انجام مانور تاکتیکی کنترل‌پذیر بعد از زاویه حمله حداکثر برا را بیان می‌کند [٦].

قدرت کنترل اضافی در ترکیبی از جریان جلوی بدنه و بردار تراست، می‌تواند هواپیما را به ناحیه PST برساند. با این وجود در حال حاضر، ترجیح داده می‌شود که بردار تراست طوری تعبیه شود که از قدرت جلوبرندگی برای تولید ممان کنترل در زاویه حمله بالا استفاده شود، مخصوصاً در ناحیه بعد از واماندگی که با افزایش زاویه حمله تاثیرپذیری سطوح کنترل آیرودینامیکی سریعاً کاهش می‌یابد. بنابراین بردار تراست بایستی برای نگه داشتن کنترل هواپیما در زوایای حمله بالا ممان تولید کند. در زاویه حمله پایین نیز ممان جلوبرندگی می‌تواند به سطوح کنترل آیرودینامیکی کمک کند و به چالاکی هواپیما اضافه شود.

به منظور به دست آوردن برتری تاکتیکی در یک نبرد موقعیتی، مطلوب است که مانور نبرد در حداقل زمان صورت گیرد. برای استفاده مؤثرتر از هواپیما در حالت جنگی، خلبان نیاز دارد که تکنیکهای مانور را از طریق بهینه به طور مؤثرتر انجام دهد.

مانورهای چرخشی جسم صلب اولین بار در زمینه سیستمهای کنترل فضاپیماها مورد مطالعه قرار گرفتند. اتهانز و فالپ[٤] در سال ۱۹٦٦، کنترل سرعت زاویه‌ای در حالتهای بهینهٔ زمانی و سوخت را در مورد یک جسم صلب متقارن محوری بررسی کردند. استالفورد و هافمن، حداقل زمان بهینه را با در نظر گرفتن بردار تراست برای مانور نیم حلقه به دست آوردند. مانور مورد نظر فقط با در نظر گرفتن مدل طولی حرکت



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

هواپیما به دست آمده است [۱۲]. چندین مانور تاکتیکی در PST با استفاده از معادله‌های جرم متمرکز توسط ول [۱٤] حل شده‌اند. آقای پچتر و همکارانش [۱۵] قوانین کنترلی را با استفاده از کنترل بهینه LQR در مسئلهٔ غلت حول بردار سرعت به دست آورده‌اند. آقای چودهری و همکارانش [۳] حرکتهای بهینه جسم صلب را با در نظر گرفتن سرعتهای زاویه به دست آوردند.

مطالعهٔ حاضر مربوط به حداقل زمان تغییر وضعیت بدنه برای هواپیمای جنگنده است. مدل ریاضی هواپیمای جنگنده شامل کنترل آیرودینامیکی و بردار تراست است که در قسمت دوم بیان می‌شود. در قسمت سوم، مسئلهٔ کنترل بهینه که از تاثیر فرمولها و یک مجموعه از شرایط لازم برای بهینگی با استفاده از اصل حداقل پونتریاگن صحبت می‌شود. در قسمت چهارم نتایج عددی و اکسترمالهای به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲-مدل ریاضی

هواپیما و بیان تاثیر محیط بر آن دارای سیستم دینامیکی پیچیده‌ای است. با این وجود در هر تحلیل، ترکیبی از آگاهی قبلی و با تجربهٔ موجود دربارهٔ مسئله می‌توان با ساده سازی دینامیک مربوط را بیان کرد. مطالعهٔ حاضر مربوط به مانور در عدد ماخ پایین ($M\leq 0.4$) است. به تجربه ثابت شده است که تغییر جهت دادن سریع بدنه در عدد ماخ و فشار دینامیکی بالا به خاطر ایجاد شتاب زیاد، برای خلبان مطلوب نیست. بعضی از تحلیلها توسط شبیه سازی و تجربیات علمی نشان داده است که اگر هواپیما سریعاً از حالت پایدار در یک خط مستقیم پرواز به یک حالت خاص دیگری تغییر جهت بدهد، در حین مانور مرکز ثقل هواپیما از خط اصلی مسیر حرکت تغییر قابل توجهی نمی‌کند (تقریباً ۲ یا ۳ ثانیه).

در حقیقت ساده سازی مدل ریاضی هواپیما و پیرامون آن تاثیر چندانی بر دقت مدل ندارد. بنابراین با حذف حرکت انتقالی هواپیما، فقط حرکت دورانی هواپیما را تحلیل می‌کنیم. بدینسان یک مدل ۳ درجه آزادی مناسب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. می‌توان تصور کرد که هواپیما در داخل تونل باد قرار دارد و با سرعت ثابت آزادانه حول محور گذرنده از مرکز ثقل می‌چرخد.

### ۲-۱- روابط سینماتیکی

مطابق تعریف زوایای $\alpha$ و $\beta$ ماتریس انتقال از محور بدنه ثابت به مختصات محور باد با $L_{wb}(\alpha,\ \beta)=L_z(\beta).L_y(-\alpha)$ که $L_y$ و $L_z$ المانهای ماتریس تبدیل هستند (چرخش به ترتیب تنها حول محور y و z)، به دست می‌آیند.

$$L_y(-\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$L_z(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$L_{w_b}(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}\cos\alpha.\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha.\cos\beta\\ -\cos\alpha.\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha.\sin\beta\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix} \quad (۱)$$

بردارهای واحد $\hat{j}^b$ و $\hat{k}^w$ را در جهتهای $y^b$ و $z^w$ برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای $L_b$ نسبت به $L_w$ در جمله‌های زاویه‌های آیرودینامیکی را انتخاب می‌کنیم. سرعت زاویه‌ای (نسبی) برای محور ثابت نسبت به محور باد از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\overline{\omega}^{rel}=\overline{\omega}^b-\overline{\omega}^w=-\hat{k}^w\frac{d\beta}{dt}+\hat{j}^b\frac{d\alpha}{dt}$$

اگر هر کدام از بردارها در معادله (۳) را در سیستم محور باد بیان کنیم، خواهیم داشت [٤]،

$$L_{wb}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_w\\ q_w\\ r_w\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\frac{d\beta}{dt}+L_{wb}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\frac{d\alpha}{dt}$$



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

یا

$$\begin{bmatrix} p_w \\ q_w \\ r_w \end{bmatrix} = L_{wb}\begin{bmatrix} p \\ q - \dfrac{d\alpha}{dt} \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{d\beta}{dt} \qquad (۳)$$

که $(p,q,r)^T=\omega^{-b}b$ : p، q و r مولفه‌های از سرعت زاویه‌ای (اولیه) هواپیما $\overline{\omega}^b$، در محور بدنه ثابت هستند (نرخ غلتش، نرخ پیچش و نرخ سمت) اساس فرضیات بر این است که $q_w=r_w=0$، بعد از عملیات لازم به یک مجموعه معادله‌های دیفرانسیل می‌رسیم که دینامیک حاکم حالت زوایای هواپیما را بیان می‌کند (معادله‌های سینماتیکی).

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= q - (p\cos\alpha - r\sin\alpha).tg\beta \\ \frac{d\beta}{dt} &= p\sin\alpha - r\cos\alpha \\ \frac{d\mu}{dt} &= p_w = (p\cos\alpha + r\sin\alpha).\frac{1}{\cos\beta} \end{aligned} \qquad (٤)$$

### ۲-۲- روابط دینامیکی

معادله‌های دورانی اویلر برای جسم صلب از مجموعه معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$\overline{M} = \dot{H} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{H} = I\dot{\omega}_b + \overline{\omega}_b \times I\overline{\omega}_b$$

$$\overline{H} = [I].\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$\vec{H}$ مومنتم زاویه‌ای حول مرکز ثقل و $\vec{M}$ ممان کل حول مرکز جرم آن که شامل ممانهای آیرودینامیکی و ممان ناشی از تراست و وزن است. فرض می‌کنیم که ممان اینرسی در طی مانور ثابت است و همچنین هواپیما به صورت متقارن است، با قرار دادن ممانها در معادله‌ها و با ساده سازی، به معادله‌های دورانی اویلر به صورت زیر خواهیم رسید

$$I_x\frac{dp}{dt} = (I_y - I_z)qr + u_x(\delta_x) + \frac{\rho(h)V^2(M,h)}{2}s.b.c_l\left(\alpha,\beta,\delta_a^r,\delta_a^l,p,M,....\right)$$

$$I_y\frac{dq}{dt} = (I_z - I_x)rp + u_y(\delta_y) + \frac{\rho(h)V^2(M,h)}{2}s.\bar{c}.c_m\left(\alpha,\beta,\delta_e^r,\delta_e^l,q,M,....\right)$$

$$I_z\frac{dr}{dt} = (I_x - I_y)pq + u_z(\delta_z) + \frac{\rho(h)V^2(M,h)}{2}s.b.c_n\left(\alpha,\beta,\delta_r^r,\delta_r^l,r,M,....\right) \qquad (۵)$$

### ۲-۳- مدل آیرودینامیکی

نیروها و ممانهای آیرودینامیکی بر روی هواپیما به خاطر وابستگی به زوایای $\alpha$ و $\beta$ و همچنین عدد ماخ، ارتفاع و انحرافهای سطوح کنترل، دارای توابع پیچیده‌ای هستند. به هر حال، تحلیل اطلاعات آیرودینامیکی در زوایای حمله بالا نشان می‌دهد که خیلی از این وابستگیها را می توان برای مسئلهٔ موجود صرف نظر کرد. برای مثال، مرکز ثقل هواپیما نسبت به مرکز آیرودینامیکی مرجع ناشی از جابه جایی و مصرف سوخت تغییر می‌کند. ولی جابه جاییها کوچک است و مرکز جرم تغییر ناچیزی می‌کند. بردار سرعت، ارتفاع، زاویه حمله و زاویه سرش جانبی هواپیما در طی مانور غلت حول بردار سرعت تغییر قابل توجهی نمی‌کند. اساساً حرکات آن قدر سریع‌اند که جابه جاییهای خطی مرکز هواپیما در مسیر اصلی کوچک است. فرض می‌کنیم که نیروهای آیرودینامیکی (نیروی بالابرنده، نیروی مقاوم و نیروی جانبی) تاثیری بر عامل ممان آیرودینامیکی کل هواپیما ندارد. از این گذشته، عدد ماخ و فشار دینامیکی را می‌توان در سراسر مانور ثابت فرض کرد [۱۵]. به دنبال ممان آیرودینامیکی و تاثیرپذیری سطوح کنترل را به صورت یک تابع نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} c_l &\equiv c_l(\alpha,\beta,p,\Delta a) = c_l^0(\alpha,\beta) + c_l^{\xi}(\alpha,p) + c_l^c(\alpha,\Delta a) \\ c_m &\equiv c_m(\alpha,\beta,q,\delta e) = c_m^0(\alpha,\beta) + c_m^{\xi}(\alpha,q) + c_m^c(\alpha,\delta e) \\ c_n &\equiv c_n(\alpha,\beta,r,\delta r) = c_n^0(\alpha,\beta) + c_n^{\xi}(\alpha,r) + c_n^c(\alpha,\delta r) \end{aligned} \qquad (٦)$$

که $c_i^0$ ، $c_i^{\xi}$ و $c_i^c$ $(i\in[l,m,n])$ به ترتیب، نشانهٔ حالت جسم صلب (تمام سطوح کنترل در نقطهٔ خنثی)، نرخ دمپینگ و سهم



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

سطوح کنترل آیرودینامیکی مطابق ضرایب ممـان آیرودینـامیکی هستند [۱۶].

## ۳- شرایط مرزی و تابع هزینه مسئله

ما می خواهیم سیستم را از وضعیت اولیه به یـک وضعیـت نهایی هدایت کنیـم در حـالی کـه زمـان حداقـل شـود. در ایـن وضعیت ما یک مانور را ملاحظه می‌کنیم که با معادلـه‌های زیـر مشخص می‌شود.

*معادله‌های وضعیت*

وضعیت اولیه

$$X_0 = \left[\alpha(t_0), \beta(t_0), \mu(t_0), P(t_0), Q(t_0) R(t_0)\right] = (\alpha_0, \beta_0, \mu_0, 0, 0, 0)^T \quad (۷)$$

وضعیت نهایی

$$X_f = \left[\alpha(t_f), \beta(t_f), \mu(t_f), P(t_f), Q(t_f), R(t_f)\right] = (\alpha_f, \beta_f, \mu_f, 0, 0, 0)^T \quad (۸)$$

که تابع انتقال سیستم

$$\dot{X}(t) = a\big(x(t), u(t)\big)$$

از یک وضعیت اولیه اختیاری $X_0$ به یک وضعیت $X_f$ با حداقـل کردن تابع هزینهٔ زیر است

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f\left[x(t), u(t)\right] dt = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 \quad (۹)$$

که این روش، تعییـن قـانون کنـترل بهینـه بـا اسـتفاده از اصـل حداقل‌یابی پونتریاگن است. متغیرهای الحاقی (ضرایب لاگرانژ) $\lambda = (\lambda_\alpha, \lambda\beta, \lambda_\mu, \lambda_P, \lambda_Q, \lambda_R)^T$ بـا یـک مجموعـه معادلـه‌های دیفرانسیلی به دست می‌آیند که شامل معادله‌های زیرند

$$\frac{d\lambda_\upsilon}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \upsilon} \quad , \quad \upsilon = \alpha, \beta, \mu, P, Q, R \quad (۱۰)$$

که

$$H = H(\lambda, x, u) = \lambda^0 f^0 + \sum_\upsilon \lambda_\upsilon \dot{\upsilon}(x, u) \quad (۱۱)$$

هامیلتوتین سیستم است [۲].

فرض می‌کنیم که مسئله در حالت عادی اسـت ($\lambda^0 = +1 > 0$) هامیلتونین سیستم صریح و به صورت زیر است

$$\begin{aligned} H = {} & 1 + \lambda_\alpha \left[Q - (P\cos\alpha + R\sin\alpha) tg\beta\right] + \\ & \lambda_\beta \left[P\sin\alpha - R\cos\alpha\right] + \\ & \lambda_\mu \left[(P\cos\alpha + R\sin\alpha)\frac{1}{\cos\beta}\right] + \\ & \lambda_P \left[J_x QR + \varepsilon_t J_{sx} a_x \delta_x + \varepsilon_q J_{sx} B_s c_l(\alpha, \beta, p, \delta a\right] + \\ & \lambda_Q \left[J_y PR + \varepsilon_t J_{sy} a_y \delta_y + \varepsilon_q J_{sy} C_s c_m(\alpha, \beta, q, \delta e\right] + \\ & \lambda_R \left[J_z PQ + \varepsilon_t J_{sz} a_z \delta_z + \varepsilon_q J_{zx} B_s c_n(\alpha, \beta, r, \delta r\right] \end{aligned} \quad (۱۲)$$

علائم انتخاب شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_s = 1/2V^2 Sb/u_y, C_s = 1/2V^2 SC/u_y$$

$$J_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, J_{sx} = \frac{I_y}{I_x}, a_x = \frac{u_x}{u_y}$$

$$J_y = \frac{I_z - I_x}{I_y}, J_{sy} = \frac{I_y}{I_y}, a_y = \frac{u_y}{u_y}$$

$$J_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}, J_{sz} = \frac{I_z}{I_y}, a_z = \frac{u_z}{u_y}$$

کنترل بردارهای تراست $\delta x$ ، $\delta y$ و $\delta z$ با قید زیر مرتبط است

$$|\delta x|^2 + |\delta y|^2 + |\delta z|^2 \le 1 \quad (۱۳)$$

معادلهٔ هامیلتونین داده شده در معادلهٔ (۱۲) می‌بایستی برای قیـد کنترل معادله (۱۳) کمینه شود تا جوابی برای مسـئله بـه دسـت آید.

$$\delta_j = \frac{-\mathrm{sgn}(\lambda_i)\left|\lambda_i J_{sj} a_j\right|}{\left[\left|\lambda_P J_{sx} a_x\right|^2 + \left|\lambda_Q J_{sy} a_y\right|^2 + \left|\lambda_R J_{sz} a_z\right|\right]^{1/2}} \quad i=P,Q,R, \quad j=x,y,z \quad (۱۴)$$

در نتیجه کنترلهای اکسترمال بـردار تراسـت (بـرای حداقـل کردن هامیلتونین) از معادلهٔ زیر حساب می‌شوند [۱]

$$\delta_x = -\frac{\lambda_P J_{sx} a_x}{D}$$

$$\delta_y = -\frac{\lambda_Q J_{sy} a_y}{D} \quad (۱۵)$$

$$\delta_z = -\frac{\lambda_R J_{sz} a_z}{D}$$

که در آن

$$D = \left[(\lambda_P J_{sx} a_x)^2 + (\lambda_Q J_{sy} a_y)^2 + (\lambda_R J_{sz} a_z)^2\right]^{1/2}$$

مطابق اصل حداقل‌یابی، کنترلـهای بهینـه بایسـتی هـامیلتونین را حداقل سازند. شـریاط بـه کـار رفتـه در مسـئله حداقـل زمـان،



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

سطوح کنترل آیرودینامیکی به طور خطی و مستقل در سیستم دینامیکی ظاهر می‌شوند، اول بایستی تابع سوییچ را که توسط ترکیبات کنترل بیان می‌شوند تعریف کنیم

$$S_i = \frac{\partial H^c}{\partial u_i}, u_i = (\delta_a, \delta_e, \delta_r)$$

$$S_{\delta a} = \frac{\partial H^c}{\partial \delta_a} = \lambda_P \left[ \varepsilon_q \varepsilon_a J_{sx} \beta_s \frac{\partial C^c l(\alpha, \delta_a)}{\partial \delta_a} \right]$$

$$S_{\delta e} = \frac{\partial H^c}{\partial \delta_e} = \lambda_Q \left[ \varepsilon_q \varepsilon_e J_{sy} C_s \frac{\partial C^c m(\alpha, \delta_e)}{\partial \delta_e} \right]$$

$$S_{\delta r} = \frac{\partial H^c}{\partial \delta_r} = \lambda_R \left[ \varepsilon_q \varepsilon_r J_{sz} \beta_s \frac{\partial C^c n(\alpha, \delta_r)}{\partial \delta_r} \right]$$

وقتی که متغیرهای الحاقی P ، Q و R مساوی صفر نیستند حالت بهینگی توسط اصل حداقل پونتریاگن حاصل می‌شود

$$\delta_a = -\text{sign}\left[ \varepsilon_q \varepsilon_a \lambda_P J_{sx} \beta_s \frac{\partial C^c l(\alpha, \delta_a)}{\partial \delta_a} \right]$$

$$\delta_e = -\text{sign}\left[ \varepsilon_q \varepsilon_e \lambda_Q J_{sy} C_s \frac{\partial C^c m(\alpha, \delta_e)}{\partial \delta_e} \right]$$

$$\delta_r = -\text{sign}\left[ \varepsilon_q \varepsilon_r \lambda_R J_{sz} \beta_s \frac{\partial C^c n(\alpha, \delta_r)}{\partial \delta_r} \right] \qquad (16)$$

نقاطی که متغیرهای الحاقی $\lambda_P$ ، $\lambda_Q$ و $\lambda_R$ (ترانسورسالیتی) صفرند را نقاط سوییچ می‌نامند که نشانهٔ تغییر علامت دادن (کلید زدن) هستند. در این صورت نقاط کنترلی $\delta_a$ ، $\delta_e$ و $\delta_r$ با سوییچ از حداقل به حداکثر و یا به طور معکوس رابطه دارند.

با توجه به مسئلهٔ حاضر که در آن زمان نهایی $t_f$ آزاد است زمان نهایی را می‌توان به صورت یک متغیر اضافی در مسئله با تبدیلی به شکل زیر در نظر گرفت [۱۰]

$$t = t_f \xi$$
$$d/d\xi = t_f \, d/dt$$

که معادله‌های دستگاهی با متغیر مستقل $\xi$ با دامنهٔ $0 \le \xi \le 1$ تبدیل می‌شوند. به علاوه، معادله دیفرانسیل

$$\frac{d}{d\xi} t_f = 0 \qquad (17)$$

به سیستم اضافه می‌شود.

از آنجایی که $t_f$ زمان نهایی، آزاد است و تابع هامیلتونین به طور صریح وابسته به زمان نیست پس بایستی این تابع در طول مسیر بهینه مقدار زیر را داشته باشد (شرایط ترانسورسالیتی) [۲].

$$H^* = H(t_f) = 0 \qquad (18)$$

برای حل عددی، ما ساختار سوییچ را فرض می‌کنیم (یعنی تعداد و موقعیت نسبی بنگ – بنگ در هر لحظه از زمان) و با معرفی یک مجهول جدید (۱۸)، زمان $T=t_f-t_0$ و تعداد نقاط سوییچ، مجموعه شرایط لازم برای بهینه سازی به سوی یک مسئلهٔ عددی با مقدار مرزی چندنقطه‌ای هدایت می‌شود.

## ٤- نتایج عددی

نتایج از حل اکسترمال مانور غلت حول بردار سرعت و یا وضعیت‌های ابتدایی و انتهای $x_0=(\alpha_0,0,0,0,0,0)^T$ و $x_f=(\alpha_f,0,90,0,0,0)^T$ با $\alpha_0=\alpha_f=30$ معلوم برای هواپیمای F18 به دست آمده است.

از آنجایی که پیچیدگی معادله‌ها اجازه نمی‌دهند تا بتوان آنها را به طریق تحلیلی حل کرد، ناگزیریم از حل عددی استفاده کنیم. برای این منظور از روش پرتاب کردن چندنقطه‌ای بهره گرفتیم. در این روش در زمان $t_0$ ($t_f$) شرط مرزی مجهول حدس زده می‌شود و معادله‌ها با استفاده از روش اختلاف پیشرونده (یا پسرونده) حل می‌شوند و در آخر مقدار شرط مرزی انتهایی با مقدار به دست آمده مقایسه می‌شود.

ایدهٔ کلی روش، کاهش مسئلهٔ مقدار مرزی به یک رشته از مسائل با مقدار اولیه است [۱۳]. در این روش، مقادیر

$$Z_j = y(x_j) \quad , \quad j=1,\ldots,m$$

از حل دقیق $y(x)$ در یک مسئله با مقدار مرزی

$$\dot{y}(x) = f(x, y), r(y(a), y(b)) = 0 \qquad (19)$$

در چند نقطه که لازم است (بسته به کاربر آن) ثابت باشد

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

توسط تکرار در هر لحظه حساب می‌شوند. اطلاعات اولیه برای متغیرهای y در دامنه‌های $x_j$ می‌بایست علاوه بر نقاط سوییچ $\tau_k$ $k=1,\ldots,s$ حدس زده شود. $Z_j$ را برای بردارهای $y(x_j)$ و $\tau$ به ازای $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_s)^T$ به عنوان فرض اولیه انتخاب می‌کنیم.



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

فرض می‌کنیم که $y=(x,x_j,z_j)=(y(x,x_j,z_j),\tau)^2$ نشان دهندهٔ جواب مسئلهٔ مقدار اولیه معادلهٔ (۱۹) در دامنهٔ $[x_j,x_{j+1}]$ باشد. سپس یک مسیر $y(x)$ و نقاط سوییچ $\tau_k$ جوابی از مسئلهٔ مقدار مرزی چندنقطه‌ای است اگر و فقط اگر بردار $z=(z_1,\ldots,z_{m-1})^T$ ریشه‌ای از تابع $F(z)=0$ باشد. در اینجا مؤلفه‌های F شامل پیوستگی یا شرایط تطابق[5]

$$F_j(z_1,\ldots,z_{m-1}) = y(x_{j+1}, x_j, z_j) - z_{j+1},$$
$$1 \le j \le m-2 \qquad (۲۰)$$

است.

ریشه‌ای از دستگاه معادله‌های غیرخطی بالا توسط روش اصلاح شدهٔ نیوتن حل می‌شود. روش اصلاح شدهٔ نیوتن برای استفاده در این روش به صورت زیر توصیف می‌شود: تخمین ماتریس ژاکوبین توسط دیفرانسیل‌گیری عددی یا تقریب برویدن به دست می‌آید. در اینجا اساس روش نیوتن بر روی استراتژی تخفیف استوار است. در هر تکرار نیوتن، حل سیستم معادله‌های خطی توسط ماتریسهای جداشدهٔ هوزهولدر حل می‌شود.

$$z_{new} = z_{old} + \lambda.\Delta z \qquad (۲۱)$$

محاسبهٔ تصحیح نیوتن $\Delta z$ توسط

$$M.\ \Delta z = -F(z) \qquad (۲۲)$$

صورت می‌گیرد که M ماتریس ژاکوبین و $\lambda\in[0,1]$ علامت پارامتر تخفیف به منظور همگرایی در تمام حالتها است. چون مسائل کنترل بهینه به حدس اولیه حساس‌اند، پرتاب چندنقطه‌ای می‌تواند با زیردامنهٔ بیشتر (برای این کار ۳۵ زیردامنه) این حساسیت را کاهش دهد. نتیجه‌گیری از NMPBVP برای حل، بی‌نهایت مشکل است. آنها نیاز به یک تخمین ناشناخته خوب از $\lambda(0)$ و T و موقعیت نقاط سوییچ دارند. در تحقیقات از روش مداومت استفاده می‌شود، لذا از معادله‌های ساده‌تر برای حل مسائل پیچیده استفاده می‌شود.

ابتدا نقاط اکسترمال برای مانور غلت حول بردار سرعت پیدا می‌شوند. مدل مورد نظر با پارامتر $\varepsilon_q=0$ متناظر است. علاوه بر این اکسترمالها با افزایش تدریجی از صفر تا ۱ و با میرایی کامل ($\varepsilon_\xi=1$) و بدون هیچ گونه قدرت کنترل آیرودینامیکی ($\varepsilon c=0$) به دست می‌آیند. سپس تاثیر سطوح کنترل آیرودینامیکی با افزایش $\varepsilon_c$ از صفر تا ۱ محاسبه می‌شود. این عمل طی مراحل کمی انجام می‌شود، زیرا تخمین نسبتاً خوبی از موقعیت و ساختار سوییچ برای روشهای عددی مورد استفاده در حل NMPBVP مورد نیاز است. سرانجام پارامتر $\varepsilon_t$ بردار تراست به تدریج از ۱ به صفر کاهش می‌یابد و نتایج برای یک هواپیمای بدون بردار تراست به دست می‌آید.

اساس روش مداومت این است که جواب یک مسئله خاص را می‌توان به عنوان حدس اولیه خوبی برای یک NMPBVP جدید در نظر گرفت، به طوری که با مقدار قبلی به اندازه یک اختلاف جزیی در پارامترهای مدل یا شرایط مرزی فوق دارند [۱۶].

### ٤-۱- تشریح اکسترمالها

جزییات اکسترمالهای ویژهٔ به دست آمده در شکلهای (۱) تا (۱۲) ارائه شده‌اند. این مانور به طوری انجام می‌شود که عملاً $\alpha$ را ثابت نگه داشته و زاویه لغزش جانبی را به صفر نزدیک می‌کنیم. برای مقادیر کوچک $\alpha$، این کار می‌تواند با انحراف کامل انجام شود، در حالی که غلتش و تنظیم الویتور برای ثابت نگه داشتن $\alpha$ و صفر کردن $\beta$ لازم است.

همان طوری که در شکلهای (۱) و (۳) دیده می‌شود، هواپیما در ابتدای مسیر خودش تاب پایین[6]، سپس در انتهای مسیر مانور تاب بالا[7] می‌کند. همان طوری که انتظار داشتیم، غلتها و سمتها[8] در همهٔ زمانها در جهت مثبت‌اند. شکل (۲) وضعیت هواپیما را در هر لحظه از زمان برحسب جمله‌های استاندارد زوایای اویلر (حالت هواپیما در این جمله‌ها راحت‌تر دیده می‌شوند) را نشان می‌دهد. متغیرهای الحاقی $\lambda_P$، $\lambda_Q$ و $\lambda_R$ که پاسخهایی برای تعیین کانتورهای اکسترمال (برای به دست آوردن کنترلها) هستند، در شکل (٤) نشان داده شده‌اند. کنترلهای آیرودینامیکی و بردار تراست را در شکلهای (۵) و (٦) می‌توان دید. طبیعت اصلی این مانور این است که هواپیما



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

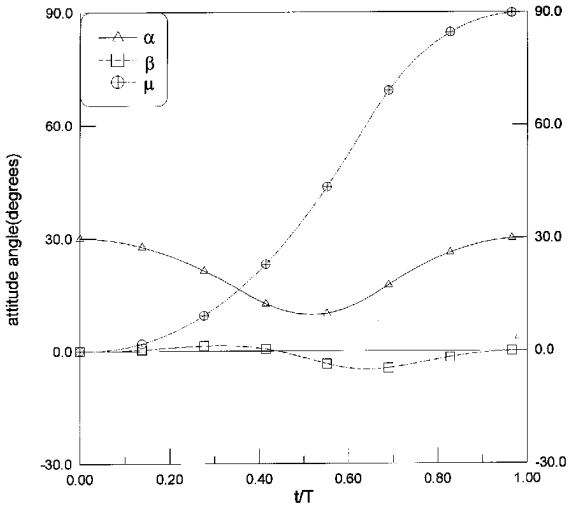
تاب پایین و بالا می‌کند. زیرا که این مانور قدرت تاب زیادی از الویتور و سیستم بردار تراست می‌گیرد و علاوه بر آن در زوایای حمله پایین، ایلورانها دارای قدرت بیشتری هستند. مقدار نسبی قدرت هواپیما برای غلت، تاب و سمت در شکلهای (۷)، (۹) و (۱۱) دیده می‌شوند. همچنین توزیع ممان تراست، ممانهای آیرودینامیکی و ممانهای ژیروسکوپی، معادله‌های (۵)، در آن بیان شده است. طبیعت جالب توجه اکسترمال به دست آمده، این است که در بیشتر زمانها در سراسر مانور، مومنتم ژیروسکوپی تمایل به حمایت از گشتاورهای تولید شده از بردار تراست و سطوح کنترل آیرودینامیکی دارد. هر چند، جملهٔ ژیروسکوپی $L_{qr}$ در کانال غلت ناچیز است، ولی در کانال تاب $M_{rp}$ مقدار بزرگی است و جملهٔ ژیروسکوپی $N_{pq}$ در کانال سمت در طی مسیر مانور بر دیگر ترکیبات غالب است و کاملاً به صورت حمایت‌کننده عمل می‌کند. این یک خصوصیت عالی و مطلوب است و ما می‌توانیم فکر کنیم که ممان ژیروسکوپی یک حامی اضافی برای کنترلهاست که با تاثیرپذیری بیشتری زمان مانور را بهبود می‌بخشد. این چنین رفتار حمایتی جمله‌های ژیروسکوپی نتیجه خصوصیات خانوادهٔ اکسترمال حرکت است.

توزیع مجزای جمله‌های آیرودینامیکی در شکلهای (۸)، (۱۰) و (۱۲) دیده می‌شوند، معادله‌های (۵). این مانور از تاثیر دایهدرال سود زیادی نخواهد برد، زاویه لغزش جانبی در حدود ٤،٩٤٢- درجه باقی می‌ماند که این البته یک خصوصیت عالی و مطلوب است، زیرا $\beta$ بالاتر به معنی شتابهای زیاد جانبی است که برای خلبان قابل قبول نیست. تاثیر دایهدرال به نظر می‌رسد که نقش حمایت‌کننده‌ای فقط در بین زمانهای ۰/٤ تا ۰/٦ دارد، شکل (۸).

از ماهیت مجزای نرخ دمپینگهای $L_\zeta$، $M_\xi$ و $N_\zeta$، می‌توان نتیجه گرفت که این نرخها از عمل کنترل آیرودینامیکی و بردار تراست در قسمت نرخ افزایش شتاب مسیر مخالفت کرده و در قسمت نرخ کاهش شتاب حمایت می‌کنند. بنابراین نرخ دمپینگ، قسمت شتاب مسیر را به تاخیر می‌اندازد. به هر حال تاثیر کل نرخ دمپینگ روی زمان مانور نسبتاً کم است. اگر نرخ دمپینگ به طور فیزیکی وجود نداشت زمان مانور فقط تقریباً ۰/٦٤ درصدی از زمان نهایی سریعتر انجام می‌گیرد.

خصوصیات حرکت در این خانواده کمک می‌کند که سطوح کنترل آیرودینامیکی تاثیرپذیری بیشتری به خصوص در زاویه حملهٔ پایین (در مرکز مسیر) داشته باشد. ایلوران، قدرت کنترل بیشتری را در قدرت کنترل کمتری (توسط طراحی) دارد.

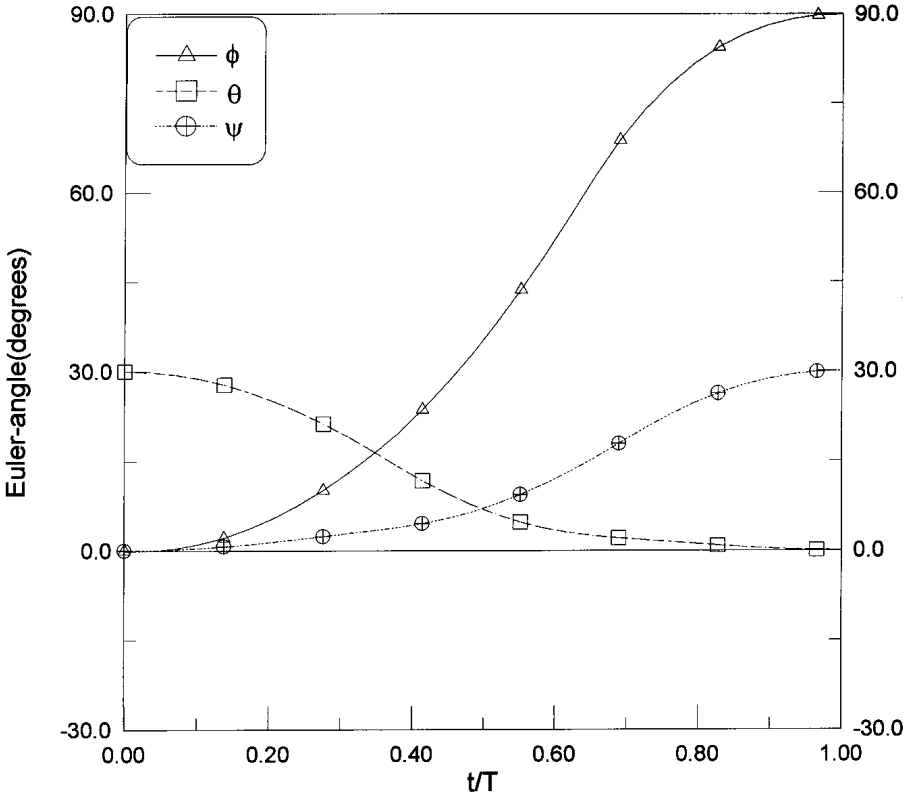
شکل (۱۳) زمان مانور را نشان می‌دهد. خط پایینی با یک مجموعه از پارامترهای اسمی هواپیما مطابقت دارد، در حالی که خط بالا به یک هواپیمای بدون کنترل بردار تراست مطابقت دارد. از این شکل به راحتی می‌توان بهبود زمان مانور



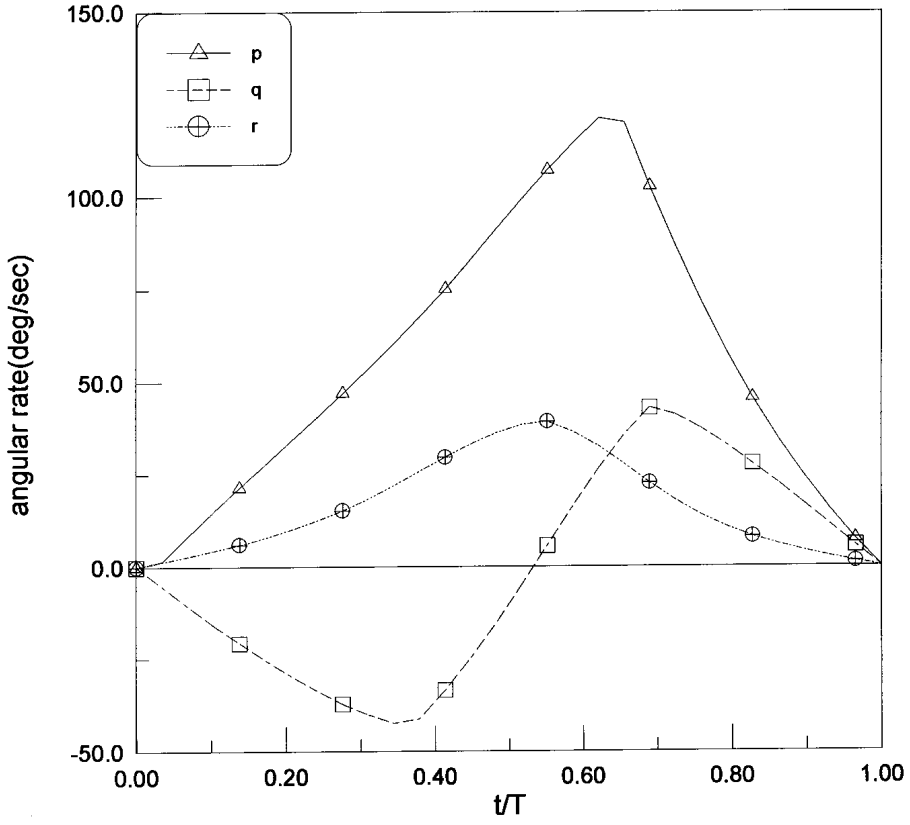

**شکل ۱- زوایای $\alpha$ ، $\beta$ و $\mu$**



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]



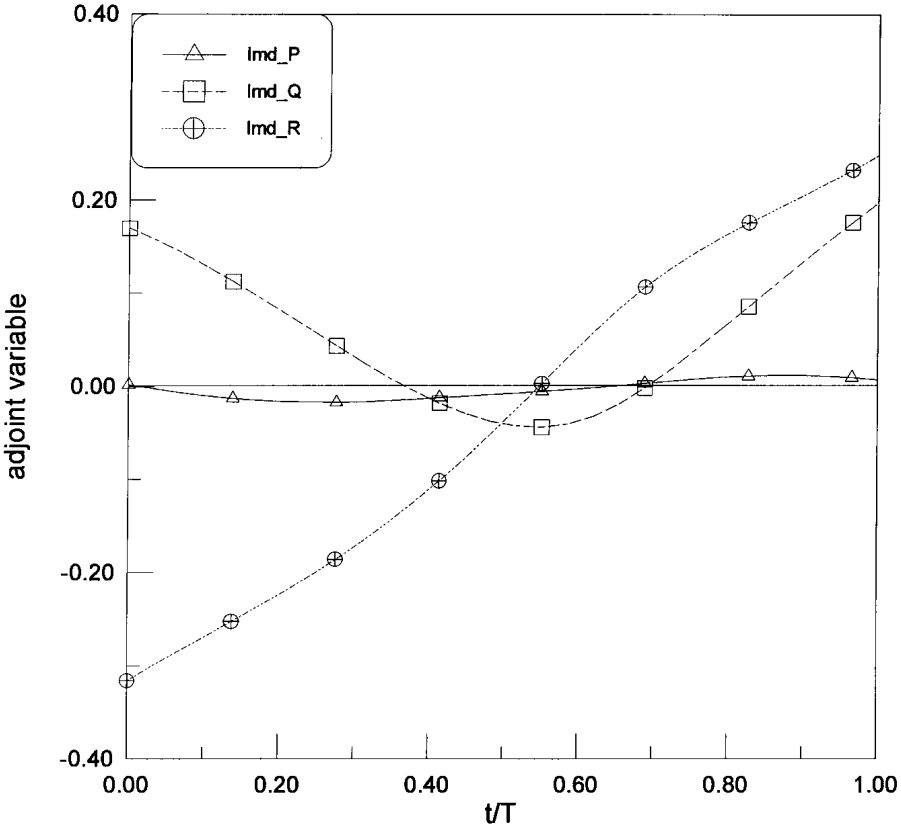

شکل ۲- زوایای $\phi$ ، $\theta$ و $\psi$



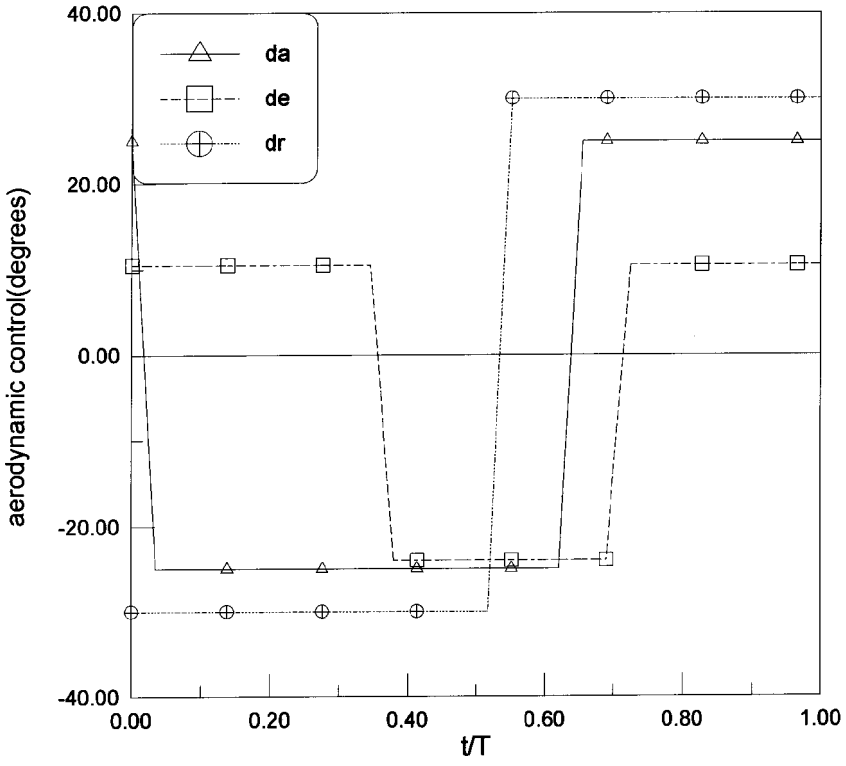

شکل ۳- نرخ زاویه‌ای (غلت، تاب و سمت)



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]



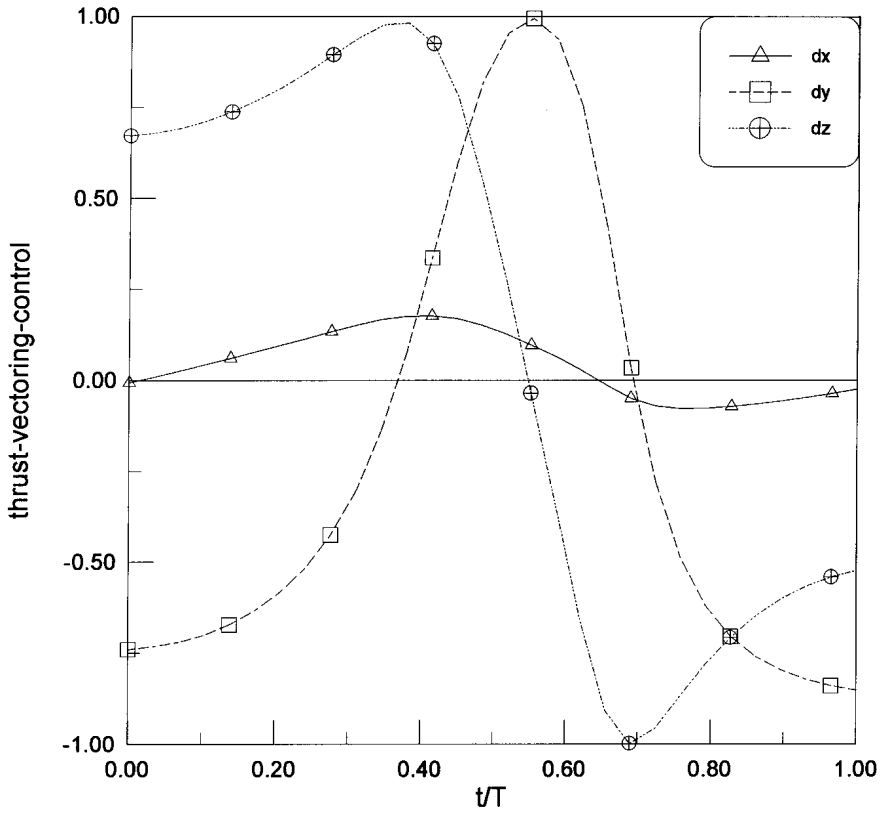

شکل ٤- متغیرهای الحاقی نرخ زاویه‌ای



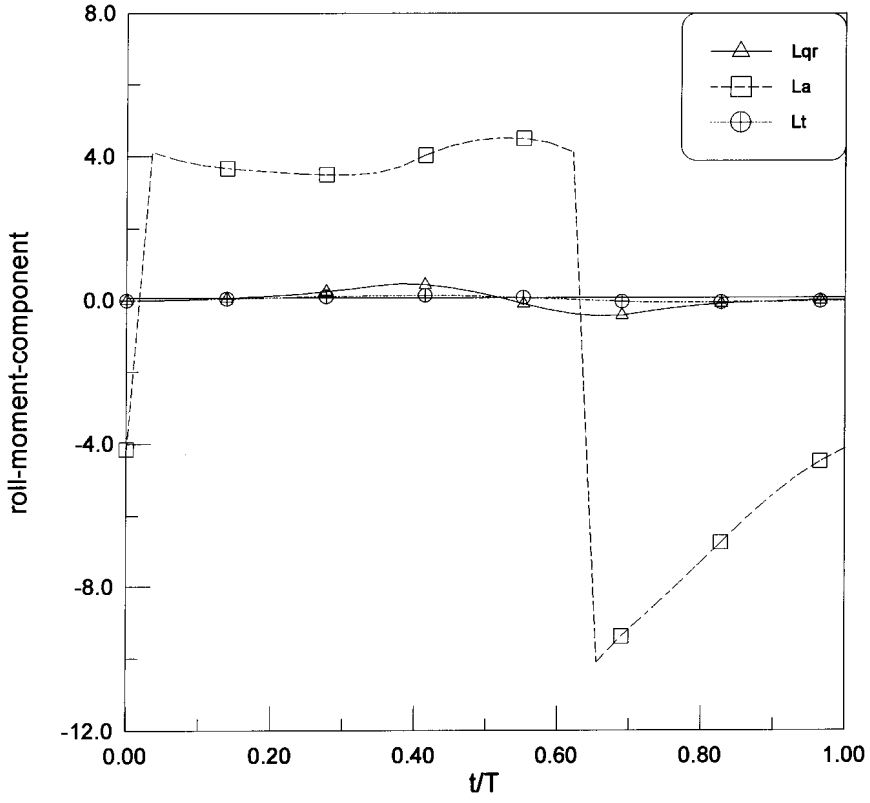

شکل ٥- کنترلهای آیرودینامیکی



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]



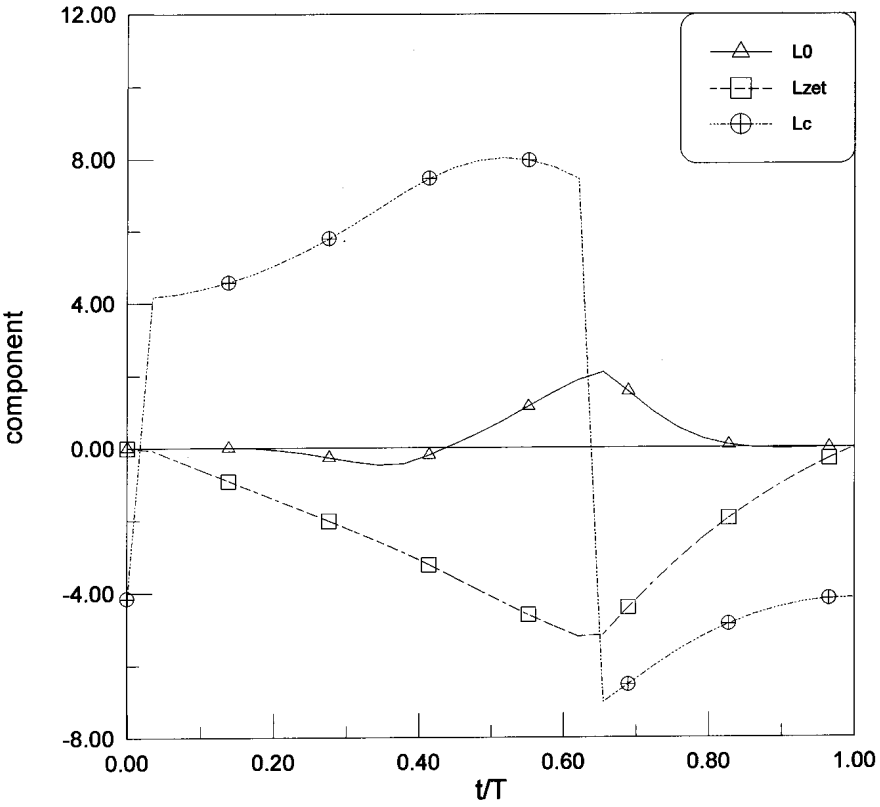

شکل ٦- کنترلهای بردار تراست



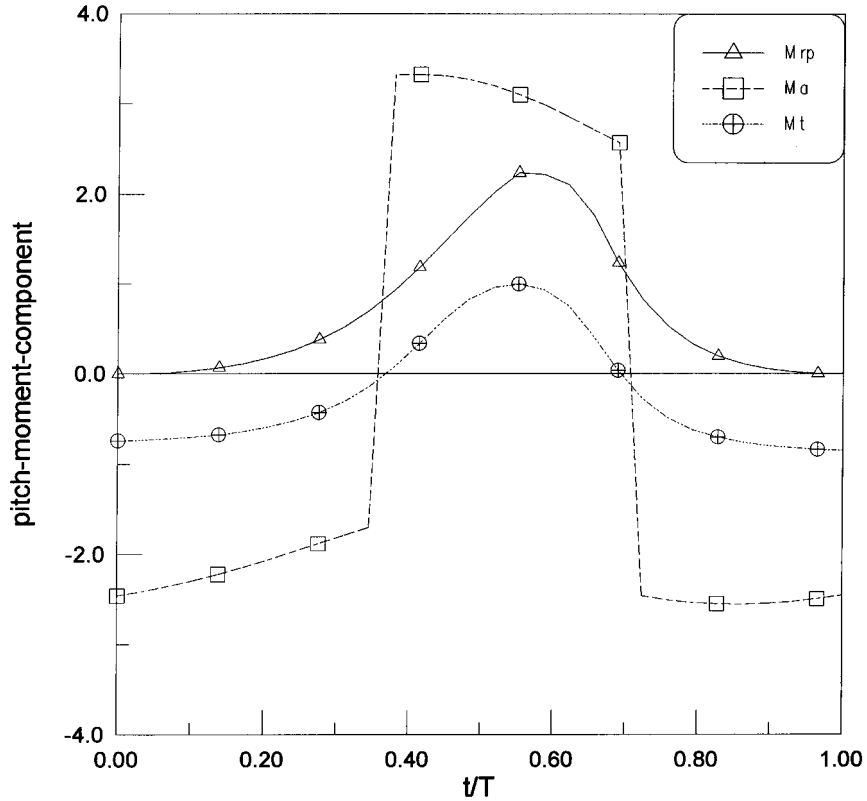

شکل ۷- مؤلفه‌های دینامیکی غلت



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]



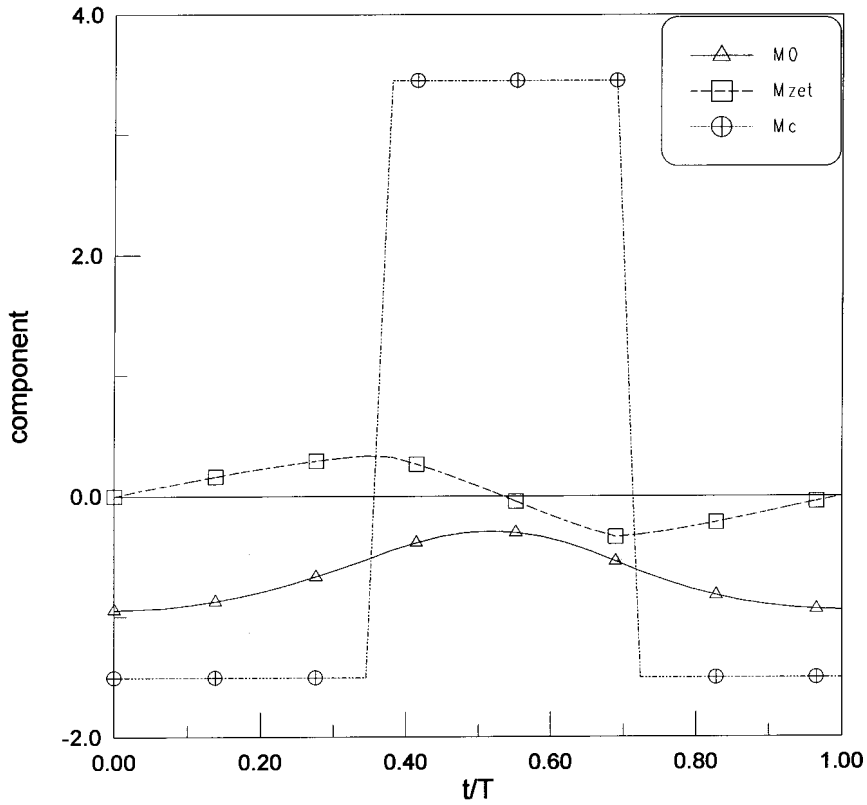

شکل ۸- مولفه‌های آیرودینامیکی غلت



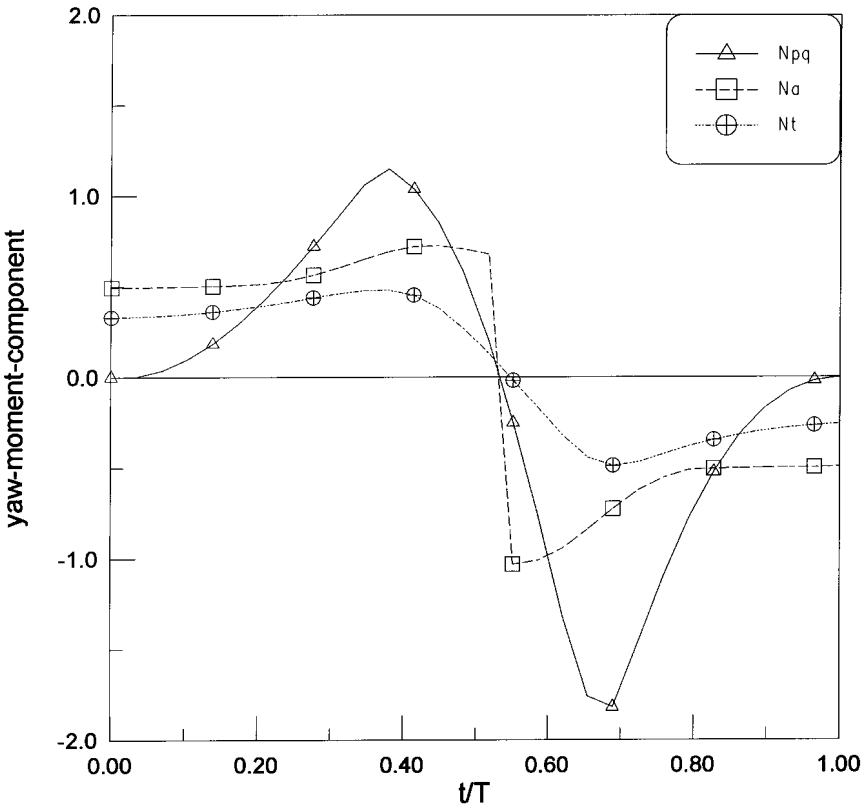

شکل ۹- مولفه‌های دینامیکی تاب



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]



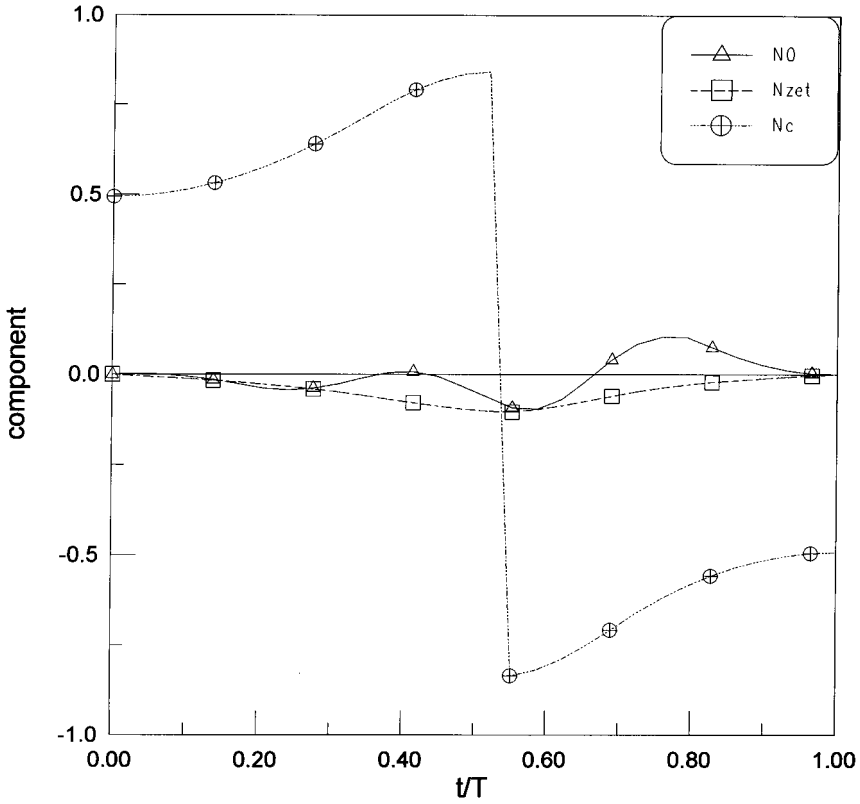

شکل ۱۰- مولفه‌های آیرودینامیکی تاب



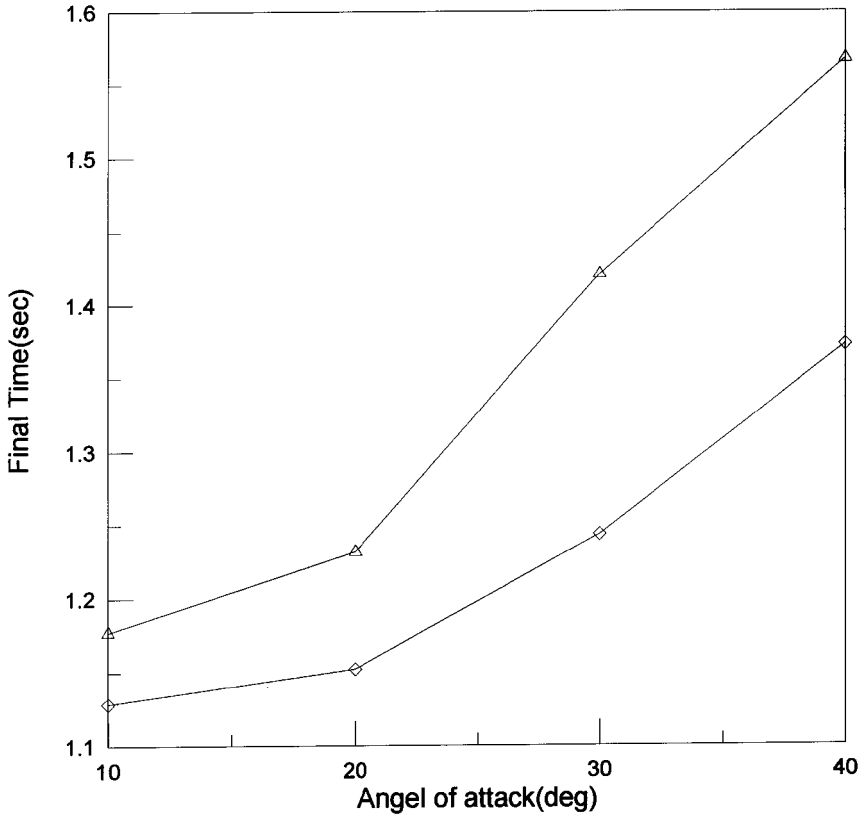

شکل ۱۱- مولفه‌های دینامیکی سمت



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]




شکل ۱۲- مولفه‌های آیرودینامیکی سمت




شکل ۱۳- زمان نهایی در مقابل زاویه حمله



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

غلت حول بردار سرعت را به خاطر اضافه شدن بـردار تراسـت تخمین زد.

## نتیجه‌گیری

در این تحقیق، قانون کنترل بهینه توسـط اصـل حداقـل پانتریـاگن را بـرای مـــدل ســه درجــه آزادی بـا کنترلــهای آیرودینامیکی و بردار تراست به کـار بـرده شـده اسـت. قـدرت کنترل سیستم بردار تراست پـارامتری اسـت کـه روی عملکـرد سیستم تاثیر گذاشته و در مطالعات مربوطه بایستی بررسی شود. نتایج به دست آمده اهمیت افزودن کنترل بردار تراست هواپیمـا با کاستن زمان مانور در حدود ۵ تا ۱۵ درصد را نشان می‌دهـد. توسط تغییر مقدار بردار تراسـت در جـهات مختلـف و تحلیـل نتایج، طراح می‌تواند در مورد تغییر قدرت بردار تراسـت بـرای کنترل هواپیما تصمیم لازم را بگیرد.

با بررسی این خانواده از اکسترمال معلوم می‌شود کـه در طی مانور، دایهدرال تاثیر ناچـیزی دارد. ایـن ناشـی از طبیعـت شرایط مرزی در ابتدا و انتـهای مسـیر اسـت کـه زاویـه لغـزش جانبی را کوچک نگه مـی‌دارد. بدیـن ترتیـب، دایـهدرال ممـان غلت ناچیزی تولید کرده است. با مطالعات انجام شـده مشـاهده می‌شود که توسط حرکت هواپیما (تاب پـایین و کـاهش زاویـه حمله) زمان مـانور را می‌تـوان بـهتر کـرد. ابـزار و روش مـورد استفاده در این مقاله می‌تواند نقطـهٔ شـروع یـک مـدل ٦ درجـه آزادی برای مانور تاکتیکی پیچیده (زوایـای حملـهٔ بـالا) مسـئلهٔ کنترل بهینه به کار برده شود.

## واژه نامه

1. homotopy
2. post stall
3. PST
4. Athans and Falp
5. matching
6. pitch down
7. pitch up
8. yaws

## مراجع


1. Bilimaria, K. D., and Bong wie, "Time-Optimal Three-Axis Reorientation of a Rigid Spacecraft," *Journal of Guidance and Dynamics,* Vol. 16, No. 3, pp. 446-453, 1993.
2. Bryson, A. E., and Ho, Y. C., *Applied Optimal Control*, Hemisphere, Washington D.C.
3. Chowdhry, R. Y., and Cliff, "Optimal Rigid Motions part 1&2," *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 70, No. 2.
4. Etkin, B., *Dynamic of Atmospheric Flight,* Wiley, Newyork, pp. 104-230, 1972.
5. Herbst, W. B., "Dynamics of Air Combat," *Journal of Aircraft,* Vol. 20, No. 7, pp. 594-598, 1983.
6. Herbst, W. B., "Futher Futher Technologies," *Journal of Aircraft,* Vol. 17, No. 8, pp. 561-566, Aug 1980.
7. Keller, H. B., "Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems," J. W. Arrowsmith, Ltd., Bristol 3, England, 1976.
8. Kirk, D. E., *Optimization Control Theory An Introduction,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
9. Maurer, H., "Numerical Solution of Singular Control Problems Using Multiple Shooting Techniques," *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol.. 18, No 2, pp. 153-159, 1990.
10. Oberle, H. J., "Numerical Computation of Singular Control Functions in Trajectory Optimization Problems," *Journal of Guidance and Dynamics,* Vol. 13, No. 1, pp. 153-159, 1990.
11. Oberle, H. J., "Numerical Computation of Singular Control Problems with Application to Optimal Heating and Cooling by Solar Energy," *Applied Mathematics and Optimization,* pp. 297-314, 1979.
12. Stalford, H. L., and Hoffman, Eric, "Thrust Vectoring Effect on Time-Optimal 90 Degrees Angle of Attack Pitch up Maneuvers of a High Alpha Fighter Aircraft," *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation and Control Coference,* Washington, D.C., pp. 840-846, 1989.
13. Stoer, J., and Bulirsch, R., *Introduction to Numerical Analysis,* Springer-Verlag, 1992.
14. Well, K. H., Faber, B., and Berger, E., "Optimization of Tactical Aircraft Manaeuvers Utilizing High Angle of Attack," *Journal of Guidance and Dynamics,* Vol. 5, No.2, pp. 131-137, 1983.
15. Pachter, M., and Chandler, P. R., Maneuvering Flight Control," *Journal of Guidance and Dynamics*, Vol. 21, No. 21, pp. 368-374, 1998.

١٦. ساداتی، س. ح.، "بهینه‌سازی زمان مانور جهت‌یابی مجـدد هـواپیمـا"، پـروژه کارشناسـی ارشـد، دانشـکده مهندسـی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، بهمن ١٣٧٧.





[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]

[ DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.1.13.8 ]