تحلیل عددی میدان جریان سه‌بعدی حول یک کره در رینولدزهای پایین به روش مختصات منطبق بر مرز

محمدرضا مدرس رضوی*، حمید نیازمند** و سید علی میربزرگی***
گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۱/۲٤ – دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۹/۱)

چکیده : در این پژوهش به بررسی عددی میدان جریان تراکم ناپذیر در اطراف یک کرهٔ جامد در رینولدزهای پایین (تا حدود ۲۷۰) پرداخته شده است. برای توسعهٔ قابلیتهای روش حجم محدود، از روش مختصات منطبق بر مرز استفاده شده است. برای گسسته کردن معادلات دیفرانسیل جزیی به روابط جبری از روش حجم محدود با آرایش مرتب شدهٔ متغیرها[1]، برای مدل کردن شارهای جابه جایی از روش وان لیر و برای مرتبط کردن میدانهای فشار و سرعت، از الگوریتم سیمپل‌سی استفاده شده است. سیستم معادلات جبری حاصل نیز توسط روش TDMA حل شده‌اند. برای بررسی صحت روندها و الگوریتمهای مورد استفاده، میدان جریان حول کرهٔ جامد در رینولدزهای (۲۱۰-۲۰) تحلیل شده و با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه شده است. پس از آن به بررسی میدان جریان حول کرهٔ جامد در رینولدزهای (۲۷۰-۲۱۰) پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از جریان خارجی حول یک کره در رینولدزهای پایین (۲۷۰-۲۱۰) نشان داده است که اگرچه جریان پایدار است اما عدم تقارن پدید آمده در صفحات متعامد به خوبی قابل مشاهده است و مرحلهٔ از بین رفتن تقارن هندسی خطوط جریان در رینولدز ۲۱۱ شروع می‌شود.

واژگان کلیدی : کره جامد، برخاستگی، تحلیل سه‌بعدی، مختصات منطبق بر مرز

Three Dimensional Analysis of Flow Past a Solid-Sphere at Low Reynolds Numbers with the Aid of Body Fitted Coordinates

M. R. Modarres-Razavi, H. Niazmand and S. A. Mirbozorgi
Department of Mechanical Engineering, Mashhad Ferdowsi University

Abstract: ***In this paper, the flow-field of an incompressible viscous flow past a solid-sphere at low Reynolds numbers (up to 270) is investigated numerically. In order to extend the capabilities of the finite volume method, the boundary (body) fitted coordinates (BFC) method is used. Transformation of the partial differential equations to algebraic relations is based on the finite-volume method with collocated variables arrangement. For solving the obtained algebraic relations, the TDMA in periodic state is used. To approximate the convective fluxes, the differencing scheme of Van leer is used and SIMPLEC handles the linkage between velocities and pressures. The verification of the code is checked by the analysis of flow past a solid sphere at low Reynolds numbers of 20 to 210. A good agreement is obtained between the present results and the available experimental and numerical data. The flow-field past a sphere at low Reynolds numbers of 210 to 270 shows that the steady non-axisymmetric regime is going to build up at the Reynolds number of 211.***

Keywords: *Solid-Sphere, Wake, Three Dimensional Analysis, Boundary Fitted Cordinates*

---

* – دانشیار ** – استادیار *** – دانشجوی کارشناسی ارشد

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

فهرست علائم

A	سطح	v	حجم
a	ضرایب معادلهٔ انفصال	X_j	شکل اندیسی معرفی محورهای مختصات عمومی
C_P	ضریب پسای فشاری	X_{wake}	طول گردابهٔ پشت کره
C_L	ضریب برا (نیروی جانبی	X_v, Y_v	مختصات کارتزین مراکز گردابه‌ها
diff	شار پخش		علائم یونانی
D	قطر	α	ضریب زیر تخفیف
f	ضریب انبساط شبکه	δ	ضخامت لایه مرزی
F_x	نیروی پسا در امتداد جریان	δ_v	حجم جزیی یک حجم کنترل
F_y	نیروی جانبی عمود بر جهت جریان	ϕ	متغیر عمومی
g^j	شکل اندیسی بردارهای پایهٔ کانتراوارینت در مختصات عمومی	Γ_ϕ	ضریب نفوذ متغیر عمومی
		μ	لزجت
g^j	شکل اندیسی بردارهای پایه کوارینت در مختصات عمومی	ν	لزجت دینامیکی
g^{ij}	تانسور متریک اقلیدسی	θ_s	زاویه جدایش
$\dot{m}$	نرخ جرم عبوری	ρ	چگالی
Ni	تعداد حداکثر گره‌های یک امتداد در شبکه بندی	ξ,η,ζ	محورهای دستگاه مختصات محاسباتی
Re	عدد رینولدز		زیرنویسها
r_1	شعاع کره	w,e,s,n,l,h	به ترتیب: وجوه غربی، شرقی، جنوبی، شمالی، پایینی و بالایی
S_ϕ	عبارت چشمه برای یک متغیر عمومی در معادلهٔ دیفرانسیلی ممنتم	x,y,z	مشتقات نسبت به محورهای مختصات کارتزین
S_u	عبارت چشمه در معادلهٔ انفصال	ξ,η,ζ	مشتقات نسبت به محورهای مختصات محاسباتی
U_{in} or U_∞	سرعت جریان آزاد		بالانویسها
U_j	شکل اندیسی معرفی مولفه‌های سرعت کارتزین و کوارینت	$'$	(پریم) مقادیر اصلاحی
		$*$	(ستاره) مقادیر قدیمی

۱- مقدمه

بررسی سه‌بعدی جریان عبوری از روی کره، حالت ساده‌ای از جریان سیالات بر روی اجسام است ولی در عین حال اکثر پیچیدگیهای چنین جریانهایی را داراست. مانند جریان روی استوانه، ناپایداریها[۲] عامل ایجاد جریانهای نادائم حتی در حضور تقارن هندسی در جسم‌اند. برخلاف جریانهای دوبعدی، در جریانهای سه‌بعدی، پیچیدگی مسیر حرکت ذرات سیال بسیار بیشتر است و لذا درک آنها به آسانی میسر نمی‌شود.

تاکنون بررسیهای تجربی و عددی متنوعی برای بررسی جریان حول کره در اعداد رینولدز مختلف انجام پذیرفته است از جمله تاندا [۱] روش تجربی آشکارسازی جریان را برای مطالعهٔ برخاستگیهای[۳] پشت کره در رینولدزهای ۳۰۰-۵ مورد

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

استفاده قرار داده است. او در رابطه با پایداری منطقهٔ برخاسته مشاهده کرد که در Re=130 یک حرکت متناوب خفیف با دامنهٔ تناوب خیلی زیاد در پشت حلقهٔ گردابه شروع می‌شود. مگاروی و بی‌شاپ [۲] روش تجربی مرئی‌سازی توسط رنگ را به کار بردند و مشاهده کردند در 210<Re<270 جریان تقارن محوری خود را از دست می‌دهد در حالی که هنوز پایداری خود را حفظ می‌کند.

توم بولیدز [۳] جریان روی کره را به روش عددی المان طیفی[۴] در محدودهٔ 25<Re<1000 بررسی کرده است و اعلام داشت که در Re=212 برخاستگی پشت کره از حالت تقارن پایدار به نامتقارن پایدار تغییر شکل می‌دهد و ناتاراجان و اکریوس [٤] روش عددی المان محدود را به کار بسته و رینولدز ۲۱۰ را برای حالت گذر از متقارن به نامتقارن پایدار معرفی می‌کنند و در آخرین مطالعه انجام شده، جان سون و پاتل [۵] با بررسی جریان سه‌بعدی توسط روش معرفی گام زمانی کاذب[۵]، وجود صفحات متقارن و نامتقارن عمود بر هم را آشکار و عدد رینولدز ۲۱۰ را به عنوان رینولدز گذر از متقارن به نامتقارن پایدار معرفی می‌کنند. قابل ذکر است که آنان معادلات حاکم را برای یک شبکهٔ کاملاً کروی با حدود چهارصد و بیست و هشت هزار گره (۱۰۱×٤۲×۱۰۱) حل کرده‌اند.

از آنجا که هم اکنون بررسی موضوعاتی نظیر جریان حول یک کره، نیازمند به کارگیری گره‌های زیاد است، در نتیجه حجم محاسبات فراتر از توانایی رایانه‌های موجود است. بنابراین هدف ما در اینجا غلبه بر چنین مشکلی با اتخاذ یک شیوهٔ حل عددی است که محاسبات لازم به ازای هر گره را کاهش دهد. در پژوهش حاضر با استفاده از روش حجم محدود با آرایش مرتب شدهٔ متغیرها و همچنین به کارگیری مؤلفه‌های کارتزین سرعت به جای مؤلفه‌های کووارینت یا کانتراوارینت[۶] آنها، حجم محاسبات به شدت کاهش یافته و در نتیجه امکان بررسی جریان حول یک کره و مقایسهٔ نتایج آن با نتایج ارائه شده توسط دیگران فراهم شده است. در ادامه دینامیک جریان حول یک کره در رینولدزهای بین ۲۱۰ تا ۲۷۰، مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات اصل بقای جرم و ممنتم هستند. این معادلات برای سیالات تراکم ناپذیر نیوتنی در شکل تانسوری به صورت زیر بیان می‌شوند [٦]

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1,2,3 \qquad (۲)$$

که در آن $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ و μ لزجت سیال است. معادلات بالا از نوع معادلات با شرایط مرزی و اولیه بوده و لذا جواب آنها کاملاً وابسته به شرایط مرزی است. حل معادلات فوق به جز برای حالات بسیار ساده، از طریق تحلیل ریاضی بسیار مشکل است. لذا باید توسط روشهای دیگری مانند تحلیلی-تقریبی و یا تحلیل عددی به حل آنها پرداخت [۷].

در روش عددی ارائه شده در این مقاله مانند تمام روشهای عددی اجباراً معادلات گسسته می‌شوند و برای تبدیل معادلات با مشتقات جزیی بالا به روابط جبری بین متغیرهای وابسته از روش حجم محدود کمک گرفته می‌شود و برای پرهیز از محاسبات مربوط به مشتقات کووارینت یا کانتراوارینت، معادلات ممنتم برای سرعتها در مختصات کارتزین یعنی u ، v و w به عنوان یک اسکالر حل می‌شوند. نکتهٔ قابل ذکر این است که مختصات به کار رفته در حل، مختصات منحنی‌الخط منطبق بر مرزند و فقط به جای مؤلفه‌های سرعت کووارینت یا کانتراوارینت، مؤلفه‌های سرعت کارتزین به کار گرفته شده‌اند. علاوه بر شکل تانسوری ارائه شده می‌توان یک مدل عمومی واحد به صورت زیر ارائه کرد [۷]. این مدل عمومی به معادلهٔ انتقال متغیر اسکالر عمومی ϕ شهرت دارد و در مقاله حاضر مبنای انفصال معادلات ممنتم است.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j\phi)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+S_\phi \qquad (۳)$$

که در آن Γ_ϕ ضریب نفوذ متغیر عمومی ϕ است و در معادلهٔ ممنتم همان μ است و x_j ها محورهای دستگاه مختصات منحنی‌الخط هستند. اگر شار کل I برابر مجموع شار جابه جایی و شار پخش باشد و عبارت وابسته به زمان در جملهٔ‌چشمه پنهان شود، معادله به شکل سادهٔ زیر در می‌آید

$$\frac{\partial I_j}{\partial x_j}=S_\phi \qquad (٤)$$

$$I_j=\rho U_j\phi-\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \qquad (٥)$$

با انتگرال گیری از معادلهٔ (۵) بر روی یک حجم کنترل دلخواه و با استفاده از قانون معروف گوس، معادله انتگرالی ممنتم به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_A \vec{I}.\vec{dA}=\int_V S_\phi dV \qquad (٦)$$

۳- انفصال معادلات حاکم

شکل نهایی معادلهٔ ممنتم، اکنون آماده است تا در شبکهٔ ایجاد شده در حوزهٔ محاسباتی، روی حجمهای کنترل شکل (۱) منفصل شود. حاصل انفصال چنین است

$$\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_e+\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_w+\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_n+\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_s+\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_h+\left(\vec{I}.\vec{A}\right)_l=S_\phi\delta V \qquad (۷)$$

پس از محاسبهٔ مقادیر شارهای جابه جایی و پخش و همچنین عبارت چشمه برای هر حجم کنترل، می‌توان معادلهٔ بالا را برای گرهٔ مرکزی P به شکل استاندارد زیر خلاصه کرد

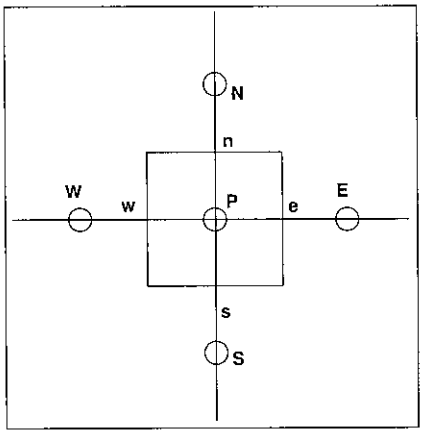
$$a_p\phi_p=\sum a_{NB}\phi_{NB}+S_u \qquad (۸)$$

$$a_p=\sum a_{NB}-S_p \qquad (۹)$$

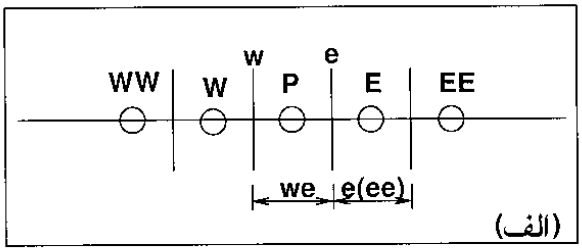
طبق شکل (۱) زیرنویس NB دلالت بر گره‌های مجاور گرهٔ P دارد.

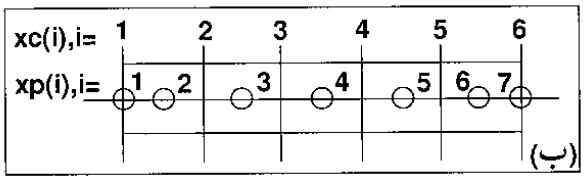
٤- محاسبهٔ شار جابه جایی جرم و متغیر وابستهٔ ϕ

طبق شکل (۲) اگر در محاسبهٔ سرعت بر روی وجوه حجم کنترل از میانیابی خطی برحسب مقادیر آن در مرکز حجم کنترل استفاده شود، باعث ایجاد نوسانات غیرفیزیکی در جوابها



شکل ۱- تصویر دوبعدی حجم کنترل در فضای محاسباتی (بعد سوم عمود بر صفحه است)





شکل ۲- موقعیت گره‌ها و سطوح حجم کنترل در یک‌بعد: (الف) نامگذاری، (ب) شماره گذاری

خواهد شد. برای اجتناب از این مسئله در اینجا از میانیابی رای–چو [۸] استفاده شده است. در این میانیابی، ابتدا گرادیان فشار بین وجوه از مؤلفه‌های سرعت در مرکز حجم کنترل کسر شده سپس میانیابی معمولی انجام شده و در انتها گرادیان فشار بین گره‌های حجم کنترل به آن اضافه شده است. برای مدل کردن شارهای جابه جایی متغیرهای وابسته ϕ از روش وان‌لیر [۹] استفاده شده است. این روش به طور خلاصه، یک روش با دقت مرتبهٔ اول بالادست است که توسط یک جملهٔ تصحیح کننده از دقت مرتبهٔ دوم برخوردار شده است البته به جز در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی که دارای دقت مرتبهٔ اول می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

۵- محاسبهٔ شار پخش

عبارت دوم سمت راست در معادلهٔ (۵) شار پخش است که به صورت زیر محاسبه شده است

$$(\text{diff})_e = \left(-\Gamma_\phi \nabla_\phi . \vec{A}\right)_e = \Gamma_\phi \left(-\vec{A}.\nabla_\phi\right)_e \qquad (۱۰)$$

مقدار $\vec{A}.\nabla\phi$ برای وجه شرقی در مختصات نامتعامد عمومی چنین است

$$\left(-\vec{A}.\nabla\phi\right)_e = -\left(\vec{A}.g^j \frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}\right)_e = -\left(|A|\vec{n}.g_i g^{ij} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}\right)_e \qquad (۱۱)$$

که در آن g_i بردار پایه کوواریانت و g^i بردار پایه کانتراواریانت و g^{ij} تانسورمتریک اقلیدسی است [۱۰].

٦- معادلهٔ اصلاح فشار

برای تبدیل معادلهٔ پیوستگی به معادله‌ای برای فشار، الگوریتم سیمپل‌سی [۱۱] روی شبکه جابه جا نشده اعمال شده است. استفاده از شبکهٔ جابه جا نشده به خاطر پرهیز از محاسبات اضافی در پارامترهای هندسی و همچنین سهولت اعمال شرایط مرزی بوده است. برای شروع، شار جرم وجه شرقی m_e به دو قسمت قدیم به علاوهٔ اصلاحی تفکیک شده است.

$$\dot{m}_e = \dot{m}_e^* + \dot{m}'_e \qquad (۱۲)$$

$$\dot{m}'_e = \rho\vec{A}.\left(U_j\right)'_e \qquad (۱۳)$$

که در آن $\left(U_j\right)'_e$. مقادیر مؤلفه‌های سرعت کوواریانت هستند. این مؤلفه‌ها در روش سیمپل‌سی به صورت زیر با میدان فشار مربوط می‌شوند.

$$U'_j = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{\delta V}{a_p}\frac{\partial P'}{\partial x_j} \qquad (۱٤)$$

با جاگذاری (۱٤) در (۱۳)

$$\dot{m}'_e = \rho\vec{A}.\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{\delta V}{a_p}\frac{\partial P'}{\partial x_j}\right)_e = -\rho\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\delta V}{a_p}\vec{A}_e.\nabla P'_e \qquad (۱۵)$$

که در آن α ضریب زیر تخفیف است.

حال می‌توان معادلهٔ پیوستگی را به شکل معادله‌ای برای اصلاح فشار تبدیل کرد. اگر از معادلهٔ پیوستگی روی حجم کنترل شکل (۱) انتگرال‌گیری شود و همچنین برای اختصار برای یک امتداد در نظر گرفته شود می‌توان نوشت

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w = 0 \qquad (۱٦)$$

با جاگذاری معادلهٔ (۱۵) و (۱۲) در معادلهٔ (۱٦) آن گاه

$$\left(\rho\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\delta V}{a_p}\vec{A}.\nabla P'\right)_w - \left(\rho\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\delta V}{a_p}\vec{A}.\nabla P'\right)_e + \dot{m}_e^* - \dot{m}_w^* = 0 \qquad (۱۷)$$

این معادلهٔ انفصال شدهٔ پیوستگی در یک بعد است که مجهول آن فشار اصلاحی (P') در روش سیمپل‌سی خواهد بود.

۷- روش حل عددی

برای اعمال روش حل عددی، حوزهٔ فیزیکی پیچیده x_j در دستگاه مختصات منحنی‌الخط منطبق بر مرز، شبکه‌بندی می‌شود. این شبکه‌بندی با افراز حوزهٔ فیزیکی توسط ۵ یا ٦ وجهیهای کوچک و عموماً متعامد صورت می‌گیرد و در مرکز هر سلول این شبکه یک گره قرار می‌گیرد. از آنجا که مختصات کارتزین هر کدام از این سلولها به راحتی قابل محاسبه است در گوشهٔ هر یک از آنها یک دستگاه مختصات محلی متعامد تعریف می‌شود که بردارهای پایه آن، اضلاع آن گوشه هستند. در این صورت دیگر نیازی به دانستن رابطهٔ ریاضی صریح بین محورهای مختصات کارتزین و مختصات منحنی‌الخط منطبق بر مرز نیست. در عوض هر جا که به مشتق، نسبت به محورهای کارتزین نیاز باشد با اعمال روش مشتق زنجیره‌ای و به کارگیری بردارهای پایه دستگاه مختصات محلی محاسبه می‌شوند.

پس از انفصال معادلات حاکم به روش حجم محدود برای حل آنها نیازمند روش خاصی می‌باشیم. روش به کار رفته در این پژوهش مبتنی بر حل ضمنی و تکراری معادلات منفصل شده است. ابتدا معادلات ممنتم و سپس معادلهٔ فشار به این طریق حل می‌شوند. حل دستگاه معادلات نیز با کاربرد روش حل ماتریسی سه‌قطری صورت می‌گیرد. در پایان هر تکرار

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

معیار همگرایی ارزیابی می‌شود و معیار همگرایی نیز مجموع قدر مطلق تمام باقی‌مانده‌ها بخش بر جرم ورودی است که باید تا ۰/۰۰۰۱ نزول کند.

۸- شرایط مرزی و اولیه

پس از بررسیهای لازم پیرامون حوزهٔ متأثر از حضور کره در جریان سیال، سرانجام منطقهٔ لازم و کافی در اطراف کره، برای حل معادلات حاکم مطابق شکل (۳) انتخاب شد. تعداد گره‌های انتخاب شده (۳۱×۶۱×۶۱) بوده و ضریب انبساط شبکه در نزدیک کره f=1.07 است که در این صورت حداقل ۱۰ گره در لایه مرزی نزدیک منطقهٔ سکون وجود دارد. قابل ذکر است که حوزهٔ تحدیدشدهٔ انتخابی باعث شده است که با تعداد گره کمتری (حدود یک چهارم مقدار در نظر گرفته شده توسط جانسون و پاتل) بتوان مسئله را تقریباً با همان دقت تحلیل کرد. زمان اجرای برنامه با یک رایانهٔ پنتیوم ۲۳۳ و 32 MB RAM در حدود شش ساعت خواهد بود که با توجه به تعداد ۱۱۵۰۰۰ گره موجود زمان بسیار مناسبی است. شرایط مرزی سرعت و فشار طبق شکل فوق‌الذکر عبارت‌اند از

الف – بر روی سطح کره $\xi(i=1)$ شرط عدم لغزش اعمال شده است.

ب – بر روی مرز خارجی $\xi(i=n_i)$ در ناحیه ورودی $v=\omega=0$ و $u=U_\infty$.

ج – بر روی مرز خارجی $\xi(i=n_i)$ در ناحیه خروجی، گرادیانهای سرعت در امتداد خط جریان محلی صفر است.

د – برای مرزهای عددی $\eta(j=1)$ و $\eta(j=n_j)$ مشتق مرتبهٔ اول و دوم صفر است و از برونیابی کمانی استفاده می‌شود.

ه – برای مرزهای عددی $\zeta(k=1)$ و $\zeta(k=n_k)$ به علت پریودیک بودن از برونیابی و میانگین‌گیری استفاده می‌شود.

و – برای مرزهای فشار همه جا برونیابی انجام می‌شود.

شرایط اولیه برای مؤلفهٔ سرعت، در امتداد جریان، مقدار U_∞ است و برای دو امتداد دیگر صفر در نظر گرفته شده است.

۹- ارائهٔ نتایج و بحث بر روی آنها

الف) جریان حول کره در رینولدز ۲۰-۲۱۰ (رژیم پایدار)

تحلیل میدان جریان بر روی کره در این رژیم جریانی به عنوان آزمون صحت روندها و الگوریتمهای حل انتخاب شده است. پایداری زمانی این رژیم در Δt های مختلف بررسی و تایید شده است. عدم وابستگی نتایج به ابعاد شبکه با چهار شبکهٔ مختلف بررسی شده است. نتایج این بررسیها برای رینولدز ۱۰۰ در جدول (۱) نشان داده شده است.

همان طور که مشاهده می‌شود با تغییر ابعاد شبکه، مشخصات میدان جریان فقط تغییرات ناچیزی را نشان می‌دهد و روند این تغییرات مبین این است که با افزایش تعداد گره‌ها (در محدودهٔ حافظه رایانه) تغییرات مشخصات جریان رفته رفته کاهش یافته است. همچنین عدم وابستگی نتایج به هندسه و توزیع گره‌ها از نقطه نظر قابلیت اطمینان به برنامه، مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که مشخصات این رژیم جریانی قبلاً توسط دیگران به دست آمده و موجود است. لذا بهترین راه آزمون صحت برنامه، مقایسهٔ مشخصات جریان در این رژیم است که به شرح ذیل ارائه می‌شود.

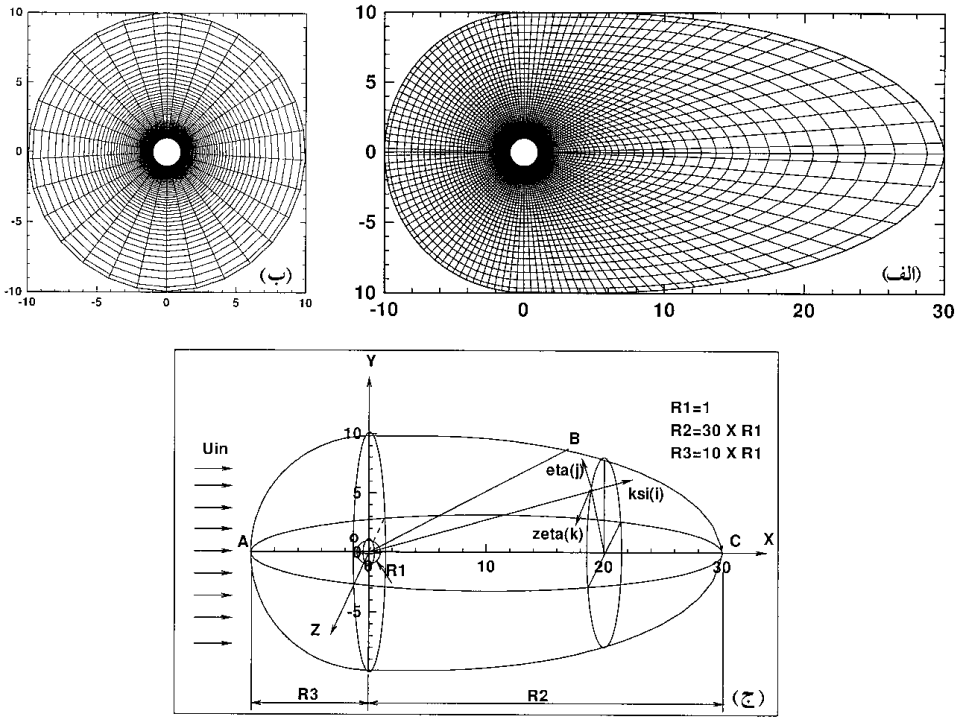
جدایش جریان از روی کره در رینولدز ۲۰ شروع می‌شود و یک گردابه چنبره مانند کوچک در پشت کره تشکیل می‌شود. در اعداد رینولدز بین ۲۰ تا تقریباً ۲۱۰ جریان پایدار و متقارن است و گردابه‌ها دارای تشابه هندسی هستند. محاسبات انجام شده برای اعداد رینولدز نمونه یعنی ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ به خوبی با نتایج مگاروی و بی‌شاب [۲] و با نتایج عددی ناتاراجان و اکریوس [٤] و تومبولیدز [۳] مطابقت دارد.

در شکل (٤) بردارهای سرعت و چند خط جریان نمونه در صفحه (x,z) برای رینولدزهای نمونه نمایش داده شده است. در این اشکال جهت جریان از چپ به راست است. در این شکلها دیده می‌شود که خطوط جریان از سطح کره در زاویه θ_s جدا شده اند (θ_s ، زاویهٔ جدایش، سنجیده شده از نقطهٔ سکون جلو است) و مجدداً در نقطهٔ X_{wake} در امتداد محور جریان به هم رسیده‌اند و در نتیجه یک حباب کامل را تشکیل داده‌اند مرکز

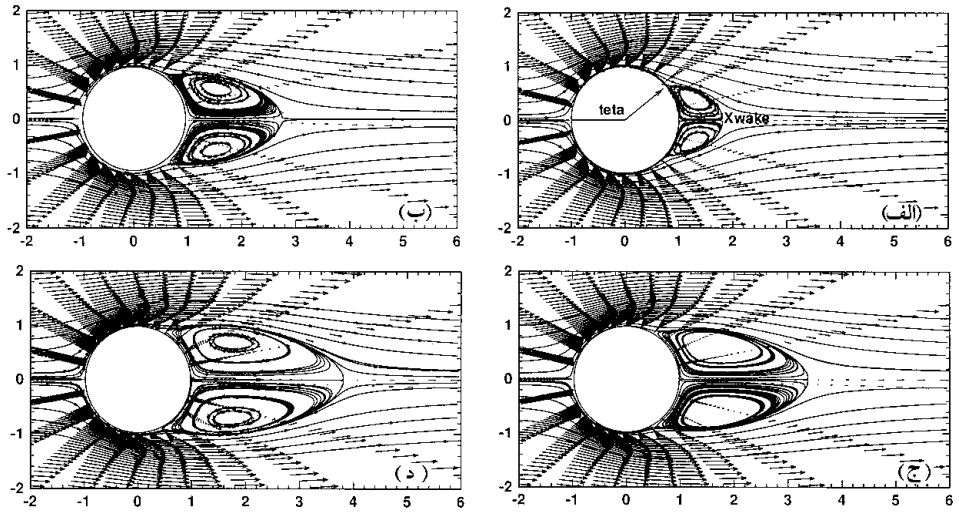
[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

جدول ۱

ابعاد	۳۱×۳۱×۳۱	٤۱×٤۱×٤۱	٥۱×٥۱×٤۱	۳۱×٦۱×٦۱
ضریب دراگ (CD)	۱/۰۷٤۹۰۲	۱/۰۹۱٤٤٤	۱/۰۹۲۱۱	۱/۰۹۲٤۲
نسبت طول گردابه به قطر کره	۰/۸۰٤۳	۰/۸۷۰٦۲	۰/۹۳۱٦	۰/۹۳۳٥
زاویه جدایش برحسب درجه	۱۲٦/۰	۱۲٦/۰	۱۲٦/۰	۱۲٦/۰



شکل ۳- حوزهٔ شبکه‌بندی شده حول کره: (الف) تصویر در صفحهٔ (x-y)، (ب) تصویر در صفحهٔ (y-z)، (ج) شکل شماتیک و دستگاههای مختصات



شکل ٤- بردارهای سرعت و خطوط جریان متقارن عبوری از روی کره: (الف) Re=50، (ب) Re=100، (ج) Re=150 و (د) Re=200

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

حلقه‌های هم مرکز گردابه با (X_v,Y_v) مشخص شده است که در آن سرعت صفر است. X_v و Y_v از مبدأ مختصات کارتزین نصب شده در مرکز کره سنجیده شده است.

برای تمام اعداد رینولدز بین ۲۰ تا ۲۱۰ ساختمان جریان از لحاظ هندسی متشابه‌اند و فقط در محل جدایش θ_s و طول گردابه X_{wake} با یکدیگر متفاوت‌اند.

اگر نتایج عددی پروپاچر، لی‌کلایر و هامیلیک [۱۲] و تومبولیدز [۳] و مگ نادت و ریورو و فایبر [۱۳] و نتایج تجربی تاندا [۱] برای مقایسه انتخاب شوند، در شکل (۵) می‌توان به خوبی انطباق بین نتایج را در مقادیر θ_s و X_{wake} و (X_v,Y_v) ملاحظه کرد تنها انحراف مهم در زاویه جدایش تاندا است که در رینولدزهای بالاتر، تا ۲۰٪ خطا دارد. مقایسه بیشتر با نتایج تجربی می‌تواند توسط اندازه‌گیری ضریب پسا انجام شود. اگر $C_D = F_x \Big/ \left[\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)\right]$ باشد که در آن F_x نیروی هم جهت با جریان است می‌توان در شکل (٦) نتایج حاصله را با نتایج روس و ویل‌مارس [١٤] مقایسه کرد و انطباق خوب آنها را مشاهده کرد. در شکل (۷) می‌توان مشخصه‌های جریان در صفحه (z و y) را مشاهده کرد که در این محدوده از رینولدزها متشابه هستند. در شکل (۷-ج) و (۷-د) تقارن کامل میدان سرعت و فشار مشهود است.

در شکل (۸) کانتورهای فشار در صفحه (z و x) نمایش داده شده‌اند. در رابطه با این شکل قابل توجه است که تا کمتر از رینولدز ۲۰۰ هیچ منطقهٔ فشار کمینه‌ای در صفحهٔ تقارن بالا وجود ندارد. اما در شکل (د)، برای رینولدز ۲۰۰ می‌توان دید که دایره‌های بسته‌ای در منطقه گردابه به وجود آمده‌اند که بیانگر فشار کمینه هستند. علت وجود این فشار کمینه به عدم توازن دو نیرو بر می‌گردد. در اعداد رینولدز کمتر از ۲۰۰ نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش ذرات سیال در گردابه باید توسط نیروی لزجت به عنوان نیروی مقابله کننده با گرادیان فشار شعاعی موازنه شده باشد، لذا منطقهٔ فشار کمینه وجود ندارد اما در اعداد رینولدز بالاتر از ۲۰۰ این توازن به نفع نیروی گریز از مرکز به هم می‌خورد و لذا در مرکز گردابه افت فشار نسبی پدید خواهد آمد و دایره‌ها بیانگر این مطلب هستند. تکامل تدریجی میدان چرخش نیز هنگام افزایش عدد رینولدز در شکل (۹) مشاهده می‌شود و نازک شدن لایه چرخش بر روی سطح کره و افزایش دامنهٔ چرخش در پایین دست جریان با افزایش عدد رینولدز کاملاً مشهود است.

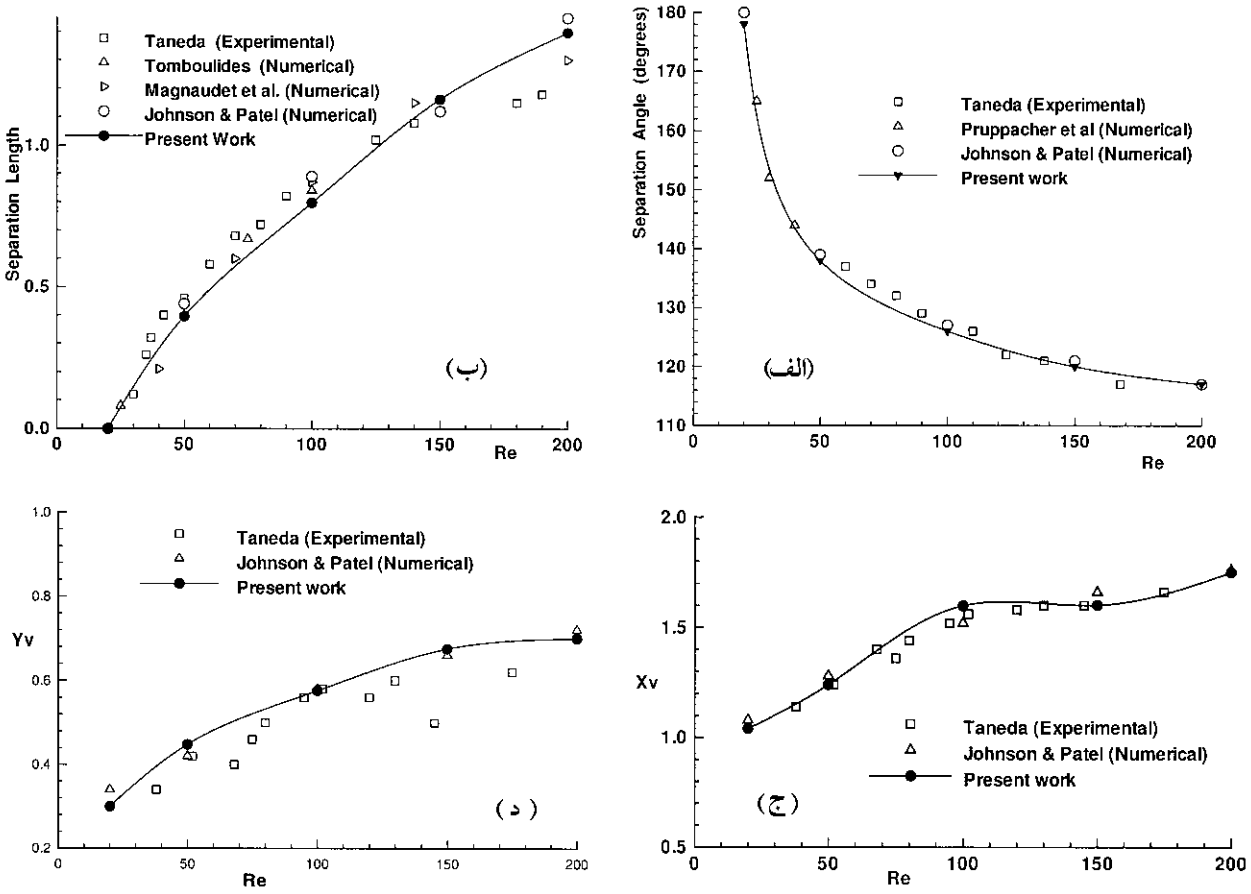
ب) جریان حول کره در رینولدزهای ۲۱۰ تا ۲۷۰

در رینولدز ۲۱۱ تحلیل عددی میدان جریان، دیگر تقارن محوری را نمایش نمی‌دهد. اما جریان هنوز پایدار باقی می‌ماند. پایداری زمانی این رژیم در Δt های مختلف بررسی و تأیید شده است و تحلیل عددی حاضر پایداری این رژیم را تایید می‌کند. با وجود عدم تقارن محوری می‌توان دید که، جریان هنوز دارای یک صفحهٔ تقارن است. محل و موقعیت صفحهٔ تقارن به طور طبیعی و آزادانه شکل می‌گیرد و تغییر محل این صفحه، توسط شیب حل عددی ناشی از جهت جارو شدن در Solver صورت می‌پذیرد و اساساً به علت حضور غیرفیزیکی مرزهای عددی در جهت دوران یا تقارن هندسی، صفحهٔ جریان متقارن بر صفحهٔ $\xi=\xi_{max}$ یا همان صفحهٔ (x,y) قرار می‌گیرد مثلاً در مقالهٔ حاضر در زاویه ۳٤۸ درجه واقع شده است. به همین علت، اطلاعات میدان جریان محاسبه شده در صفحه ۳٤۸ درجه به اندازهٔ ۱۲ درجه چرخیده و در صفحه (x,y) ارائه شده‌اند.

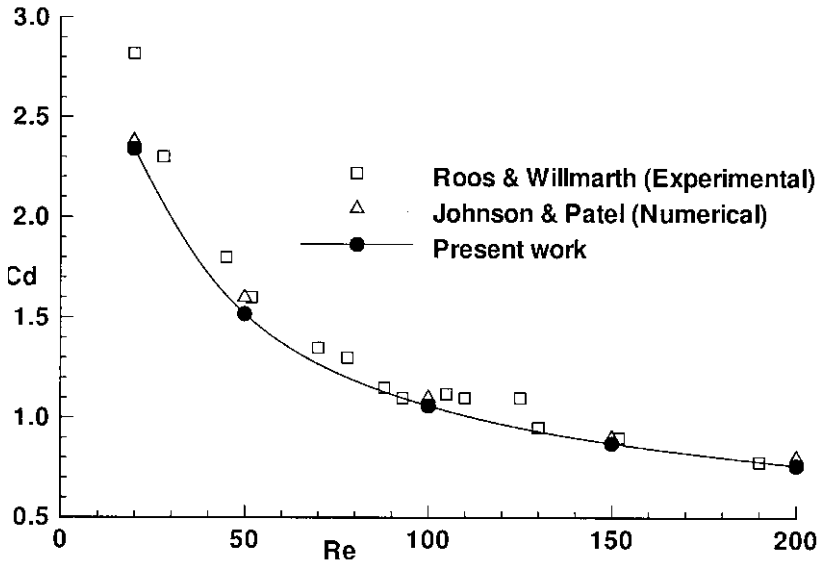
آغاز از بین رفتن تقارن محوری در شکل (۱۰) نشان داده شده است که در آن ضریب برا (نیروی جانبی) C_L در برابر اعداد رینولدز رسم شده است. در صفحهٔ (x,y) که میدان جریان نسبت به آن متقارن است نیروی جانبی به دلخواه در امتداد محور y قرار داده می‌شود و اگر با F_y نمایش یابد آن گاه ضریب برا (نیروی جانبی) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(\pi D^2/4\right)} \qquad (۱۸)$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

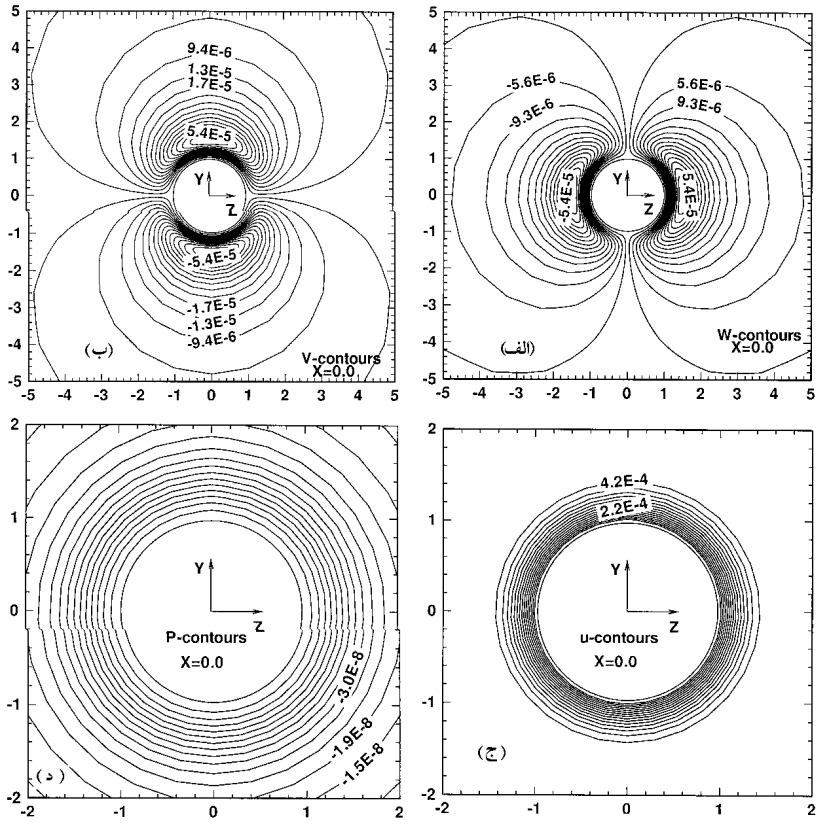


شکل ۵- مشخصات هندسهٔ جریان: (الف) زاویه جدایش θ_s، (ب) طول گردابه X_{wake}، (ج) موقعیت X_v گردابه، (د) موقعیت Y_v گردابه

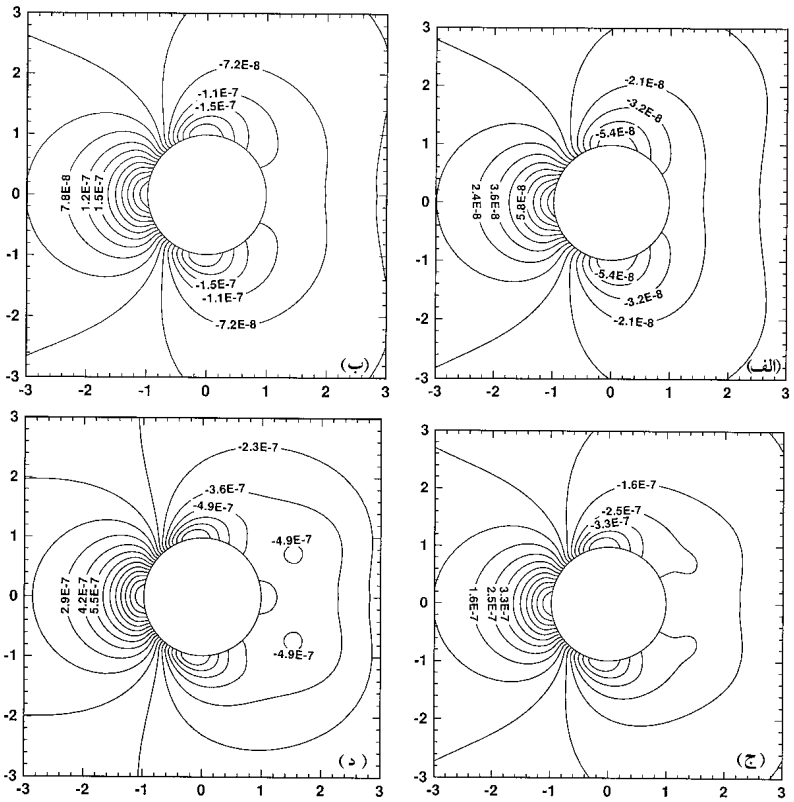


شکل ٦- مقایسهٔ ضریب پسا C_D

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

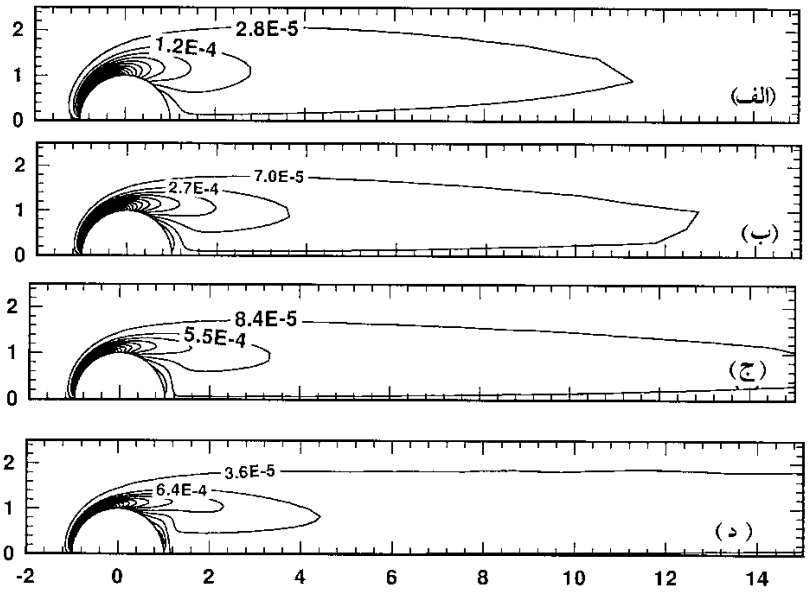


شکل ۷- کانتورهای متشابه در صفحهٔ (y-z) برای رینولدزهای ۲۰-۲۱۰: (الف) کانتور W، (ب) کانتور v، (ج) کانتور u و (د) کانتور p

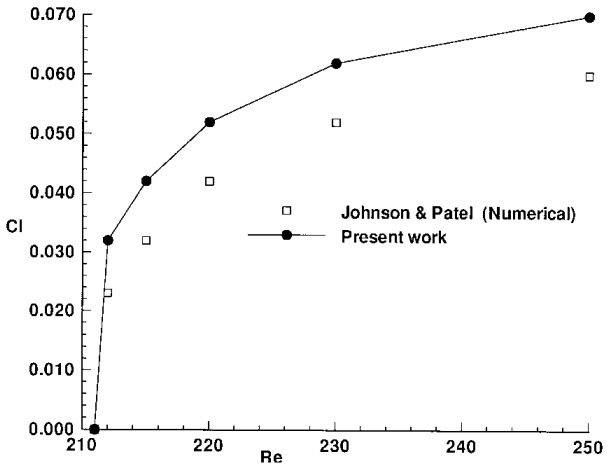


شکل ۸- کانتورهای فشار در رژیم متقارن: (الف) Re=50، (ب) Re=100، (ج) Re=150 و (د) Re=200

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]



شکل ۹- کانتورهای چرخش در رژیم متقارن: (الف) Re=50، (ب) Re=100، (ج) Re=150 و (د) Re=200



شکل ۱۰- ضریب نیروی جانبی C_L

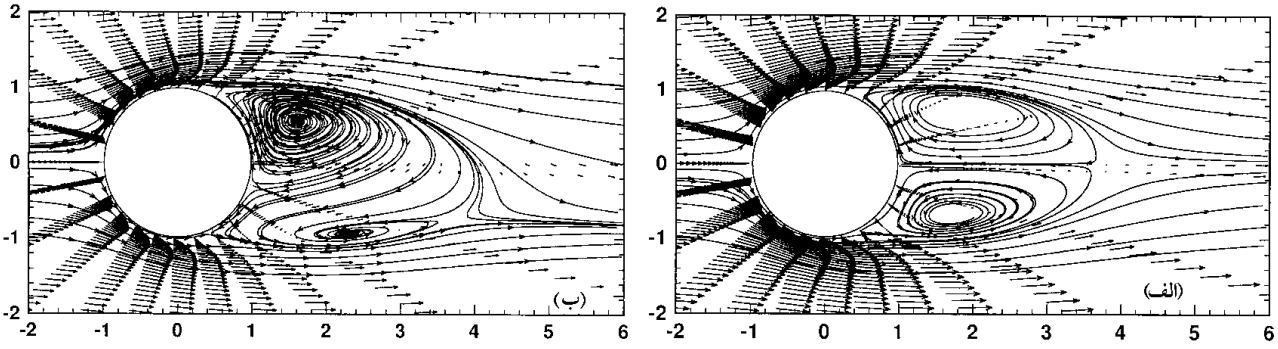
مقدار C_L برای جریان متقارن طبیعتاً صفر است اما بـرای رژیـم حاضر صفر نخواهد بود به طور مثال در رینولدز ۲۱۱ مقـدار آن تقریبـاً ۰/۰۳۷۲۱۷ و در رینولـدز ۲۵۰ برابـر ۰/۰۷۰۷۷۵ اسـت. محدودهٔ جریان نامتقارن پایدار به طور تجربی بین رینولدزهـای ۲۱۰ تا ۲۷۰ گزارش شده است و نتایج مگاروبی و بی‌شاپ [۲] و ناکامورا [۱۵] و تومبولیدز [۳] موید این موضوع است.

نتایج مربـوط بـه تمـام اعـداد رینولـدز در ایـن رژیـم ذاتـاً مشابهت هندسی دارند و لذا در اینجـا تنـها نتـایج رینولـدز۲۵۰ گزارش می‌شود چرا که انحراف از حالت تقـارن کـاملاً مشـهود است. وقتی رینولدز از ۲۷۰ بیشتر می‌شود مشاهده شـده اسـت که جریان ناپایدار است.

در شکل (۱۱) حضور یک صفحه مسبب تقـارن در جریـان دیده می‌شود. در این شکل خطوط جریان متشکل از بردارهـای سرعت تصویر شده در یک صفحه به ترتیب در صفحـات (x,z) و (x,y) نمایش داده شده‌اند. در شکل (۱۱-الف) واضـح اسـت که میدان جریان توسـط صفحـه (x,y) بـه دو قسـمت متسـاوی تقسیم شده است لذا صفحهٔ (x,y) صفحـهٔ ایجـاد کننـدهٔ تقـارن است. لازم به ذکـر اسـت کـه در شـکل (۱۱-الـف) مؤلفـه‌های سرعت خارج از صفحه نیز وجود دارند. بنابراین خطوط جریان در ایـن صفحـه خطـوط سـه‌بعدی واقعـی نیسـتند امـا در شکل (۱۱-ب) که صفحهٔ (x,y) را نشان می‌دهد و میدان جریان نسبت به آن متقارن است، به جز در دو نقطه، هیچ مؤلفهٔ سرعت خارج از صفحه‌ای وجود ندارد و مسـیر حرکـت ذرات در ایـن حالت خطوط جریان واقعی نیستند.

در شکل (۱۱-ب) دیده می‌شود که گردابه‌ها به یـک طـرف کشیده شده‌اند. همچنین اختلاف اندازه گردابه‌های بـالا و پـایین بیانگر ثابت نبودن این اندازه در جهت دوران ϕ (جهـت سـوم

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]



شکل ۱۱- خطوط جریان حاصل از بردارهای سرعت در Re=250: (الف) صفحهٔ (x-z)، (ب) صفحهٔ (x-y)

مختصات منحنی‌الخط کـروی کـه حـول امتـداد جریـان اصلـی دوران می‌کند) است بـه عـلاوه گردابـه‌ها یـک حبـاب کـامل را تشکیل نداده‌اند و برخلاف حالت رژیم متقارن، سـیال در درون گردابه حبس نشده است بلکه در اینجا، کانون چرخش تحتـانی کاملاً از جریان بالادست تغذیه می‌کند و کانون چرخش فوقـانی ذرات سیال را از مرکز خود به سمت بیرون تخلیه می‌کند. البتـه پس از اینکه این ذرات سیال را حول کـانون چرخـش تحتـانی، یک نیمه تابی داد آن گاه به پایین دست جریان تحویل می‌دهد.

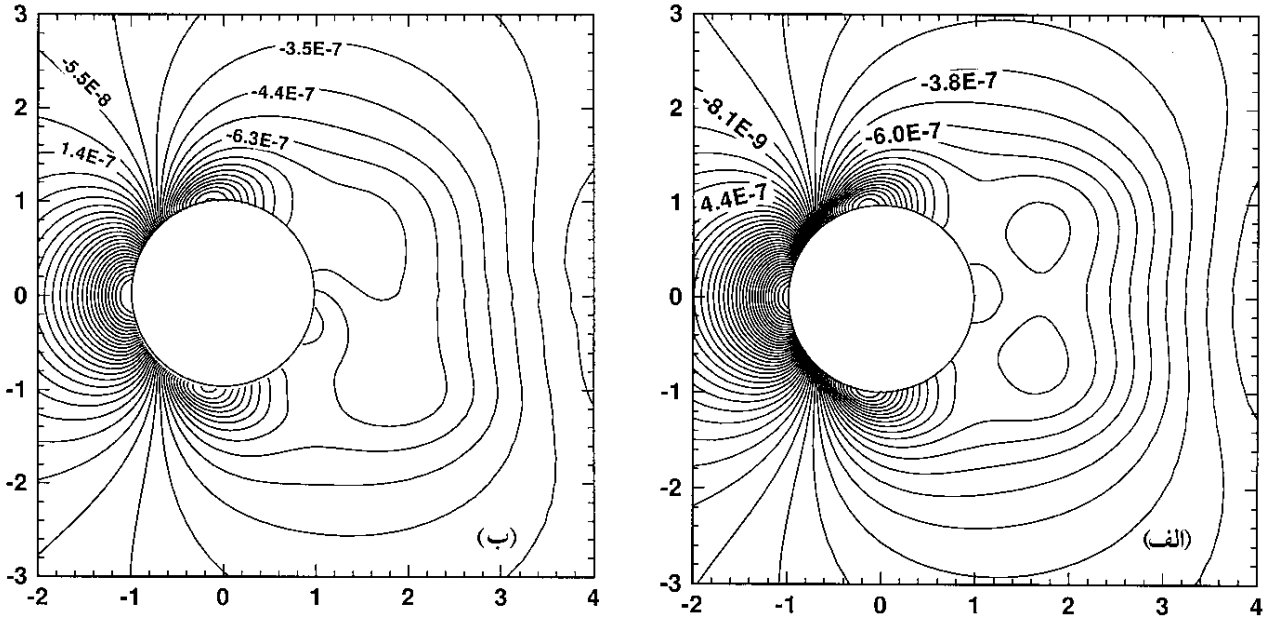
لزوم برقراری اصل بقای جرم ایجـاب می‌کنـد کـه سـیال از کانون چرخش تحتانی خارج شده باشد. همچنین باید سـیال بـه کانون چرخش فوقانی وارد شده باشـد. لـذا بـه علـت برقـراری اصل پیوستگی باید یک جریان از کانون تحتانی به سمت کـانون فوقانی سرازیر شده باشد به طوری که سیال از یکی بـه دیـگری مستقیماً منتقل شود. مسیر ایـن انتقـال در صفحـهٔ (x,y) نیسـت بلکه سیال از مراکز گردابه‌های موجود در امتداد ϕ عبور کـرده و با طی یک مسیر مارپیچ خود را به کانون فوقانی می‌رساند.

در شـکل (۱۲) کانتورهـای فشـار بـرای صفحـات (x,z) و (x,y) نشان داده شـده‌اند. میـدان فشـار در صفحـهٔ (x,z) کـاملاً متقارن و شبیه کانتور فشار در رینولدز ۲۰۰ است. گرچـه فشـار کمینهٔ موجود در مرکز گردابه کمتر از مقدار مربوط بـه رینولـدز ۲۰۰ است. چون که شتاب جانب مرکز گردابه در رینولـدز ۲۵۰ بیشتر از رینولدز ۲۰۰ است. کانتورهای فشـار در صفحـه (x,y) متقارن نیستند و فشار کمینه در کانون چرخش فوقـانی کمـتر از فشار کمینه در کانون چرخش تحتانی است. قابل توجه است که این اختلاف فشار بین دو کـانون، بـاعث ایجـاد گرادیـان فشـار روی مراکز گردابه‌های امتداد ϕ می‌شـود و لـذا یـک جریـان در امتداد محور خمیـدهٔ مراکـز گردابـه‌ها ایجـاد می‌شـود. حضـور جریان یاد شده باعث بر هم خوردن تقارن محوری می‌شود ایـن عمل در رینولدز تقریباً ۲۱۱ شروع می‌شـود و یـک افـت فشـار کلی در مرکز گردابه‌ها اتفاق می‌افتد.

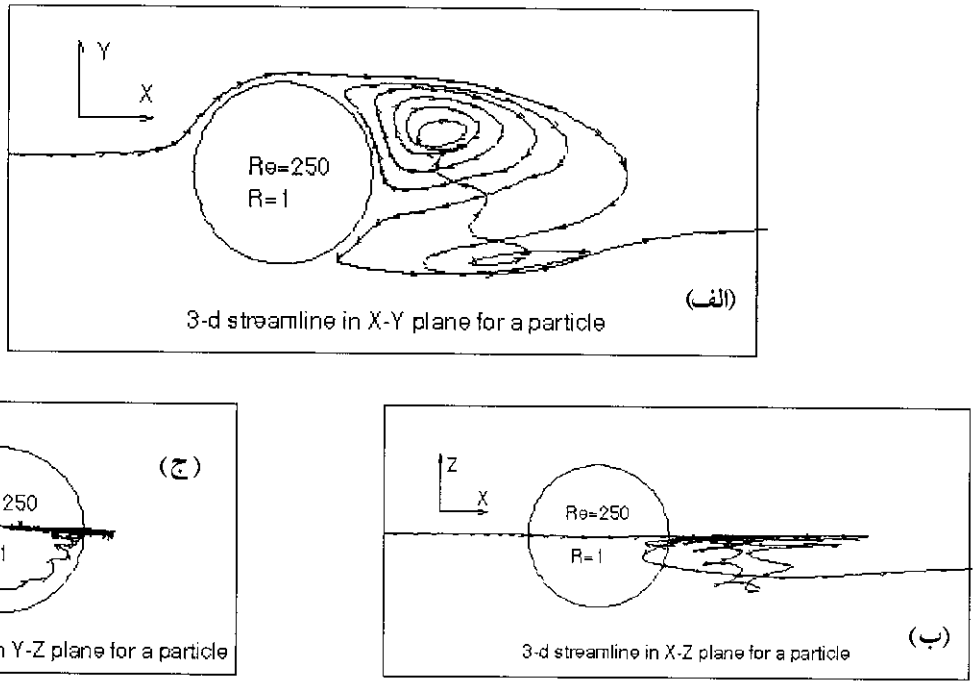
بنابراین واضح است که ناپایداری جریـان متقـارن محـوری مربوط به تولید یک رینگ فشار ضعیف در مراکـز گردابـه‌ها بـه علت حضور شتاب شعاعی است. این رینگ فشار ضعیف بسـتر بسیار مناسبی است تا در صورت حضور اغتشاشـاتی در جریـان اصلی، موجب بروز یک گرادیان فشار در امتداد دوران ϕ داخـل همین رینگ شود و به عبارت دیگر رینگ فشار ضعیف زمینه را برای دخالت اثر اغتشاشات جریان فراهـم مـی‌آورد و درنـهایت موجب بر هم خوردن تقارن هندسی جریان مـی‌شـود. سمـت پرفشار گردابه، تشکیل مارپیچ داخل رونده را می‌دهـد و سـمت کم فشار گردابه، یک مارپیچ خارج رونده را هنگامی که سیال از داخل کانون خودش تخلیه می‌شود تشکیل می‌دهد.

برای مشاهدهٔ مسیر حرکت سه‌بعدی ذره، خـط جریـان سـه بعـدی یـک ذره در شـکل (۱۳) رسـم شـده اسـت. از شکل (۱۳-ب) واضح است که سـیالی کـه از بالادسـت جریـان می‌آید وارد کانون چرخش تحتانی گردابه می‌شـود و در جـهت پادساعتگرد چرخیده و به شکل یک مارپیـچ درونـی عمـود بـر صفحه (x,y) از آن صفحه خارج می‌شود درست مانند این است که بلعیده شده باشد. سپس از طریق یک مسیـر مـارپیـچ بـه

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]



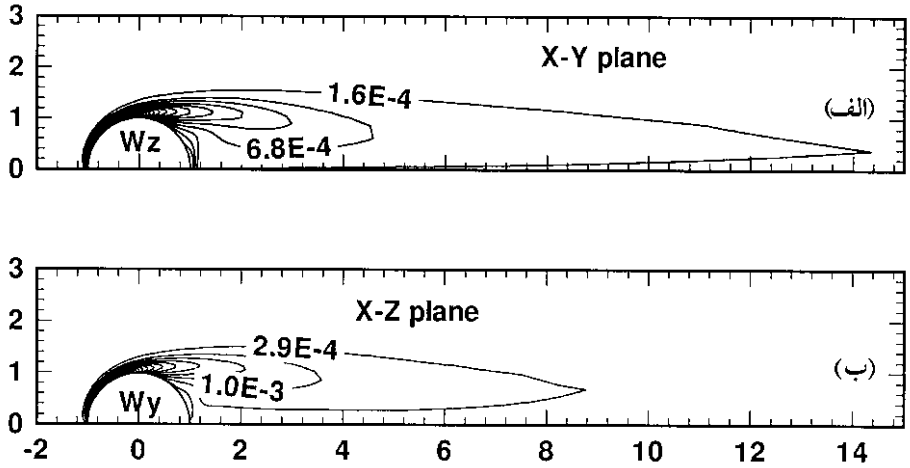
شکل ۱۲- کانتورهای فشار در Re=250: (الف) صفحهٔ (x-z)، (ب) صفحهٔ (x-y)



شکل ۱۳- مسیر حرکت سه‌بعدی در یک ذره در رینولدز ۲۵۰: (الف) در صفحهٔ (x-y)، (ب) در صفحهٔ (x-z)، (ج) در صفحهٔ (y-z)

کانون چرخش فوقانی تزریق می‌شود با این تفاوت که در حین تزریق جهت چرخش آن عوض شده و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت چرخیده و به شکل مارپیچ بیرونی مجدداً وارد صفحه (x,y) می‌شود. آن گاه پس از چرخش در کانون فوقانی سرانجام به پایین دست جریان می‌پیوندد. درشکلهای (۱۳-ب) و (۱۳-ج) حرکت بیرون از صفحه و ساختمان جریان مشاهده می‌شود. دیده می‌شود که جریان چگونه از کانون تحتانی به کانون فوقانی منتقل می‌شود

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]



شکل ١٤- کانتورهای چرخش در Re=250: (الف) w_z در صفحهٔ (x-y)، (ب) w_y در صفحهٔ (x-z)

همچنین از این شکل آشکار می‌شود که سیال اطراف گردابه چگونه به سمت پایین دست جریان از طریق دو دنباله در طرفین صفحهٔ ایجادکنندهٔ تقارن جاری می‌شود. در شکل (١٤) کانتورهای چرخش W_z در صفحه (x,y) و W_y در صفحه (x,z) نشان داده شده‌اند و می‌توان نفوذ چرخش در صفحات متعامد که در این رینولدز برابر نیستند را مشاهده کرد [١٦].

١٠- نتیجه‌گیری

با توجه به بررسیهای انجام شده در این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که

١- مختصات منطبق بر مرز و روش به کار رفته در این برنامه باعث عمومی شدن برنامه شده است. به طوری که می‌توان تقریباً هر جسمی با هر شکلی را (تا جایی که حافظهٔ رایانه اجازه می‌دهد) تحلیل کرد.

٢- استفاده از مؤلفه‌های سرعت کارتزین به جای مؤلفه‌های سرعت کوواراینت یا کانتراواراینت و همچنین به کارگیری روش حجم محدود با آرایش مرتب شدهٔ متغیرها موجب کاهش شدید حجم محاسبات لازم به ازای هر گره شده است، به طوری که تحلیل مسائلی نظیر جریان حول کره که نیازمند گره‌های زیاد است میسر شده است.

٣- حوزهٔ تحدیدشدهٔ انتخابی باعث شده است که با تعداد گرهٔ کمتری (حدود یک چهارم مقدار در نظر گرفته شده توسط جانسون و پاتل) بتوان مسئله را تقریباً با همان دقت تحلیل کرد.

٤- نتایج به دست آمده از جریان خارجی حول یک کره در رینولدزهای پایین (٢١٠-٢٧٠) حاکی از این است که در رژیم مورد بررسی، اگرچه جریان پایدار است اما عدم تقارن پدیده آمده در صفحات متعامد به خوبی قابل مشاهده است و مرحلهٔ از بین رفتن تقارن هندسی خطوط جریان در رینولدز ٢١١ شروع می‌شود.

واژه نامه

1. collocated
2. instabilities
3. wake
4. spectral element
5. pseudo-time steping
6. covariant or contravariant

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]

مراجع

1. Taneda, S., "Experimental Investigation of the Wake Behind a Sphere at Low Reynolds Numbers," *J. Phys. Sco. Japan,* No. 11, pp. 1104-1108, 1956.
2. Magarvey, R. H., and Bishop, R. L., "Transition Ranges for Three-Dimensional Wakes," *Can. J. Phys.,* No. 39, pp. 1418-1422, 1961.
3. Tomboulides, A. G., "Direct and Large-Eddy Simulation of Wake Flows: Flow Past a Sphere," Ph.D. Thesis, Princton University, 1993.
4. Natarajan, R., and Acrivos, A., "The Instability of the Steady Flow Past Spheres and Disks," *J. Fluid Mech.,* Vol. 254, pp. 233-344, 1993.
5. Johnson, T. A., and Patel, V. C., "Flow Past a Sphere Up to a Reynolds Number of 300," *J. Fluid Mech.,* Vol. 378, pp. 19-70, 1999.
6. Ilai, W., Rubin, M. D., and Kremle, E., *Introduction to Continuum Mechanics,* Pergamon Press, 1982.
7. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow,* McGraw Hill, Washington DC, 1980.
8. Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Seperation," *AIAA J.,* Vol. 2, pp. 1527-1532, 1983.
9. Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. ii. Monotonocity and Conservation Combined in a Second-Oreder Scheme," *J. Comp. Phys.,* Vol. 14, pp. 361-370, 1974.
10. Farhanieh, B., "Introduction to Tensor Calculus and General Coordinate System," Publ. PB-91/13-SE, Dept. of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1991.
11. Van Doormal, J. P., and Raithby, G. D., Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows," *Numerical Heat Transfer,* Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
12. Pruppacher, H. R., Le clair, B. P., and Hamiliec, A. E., "Some Relations Between Drag and Flow Pattern of Viscous Flow Past a Sphere and a Cylinder at Low and Intermediate Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.,* Vol. 44, No. 781, 1970.
13. Magnaudet, J., Rivero, M., and Fabre, J., "Accelerated Flows Past a Rigid Sphere or a Spherical Bubble. Part 1. Steady Straining Flow," *J. Fluid Mech.,* Vol. 284, pp. 97-135, 1995.
14. Roos, F. W., and Willmarth, W. W., "Some Experimental Results on Sphere and Disk Drag," *AIAA. J.,* pp. 285-291, 1971.
15. Nakamura, I., "Steady Wake Behind a Sphere," *Phys. Fluids,* Vol. 19, pp. 5-8, 1976.

۱۶. میربزرگی، س. ع.، "تحلیل عددی جریانهای سه‌بعدی داخلی و خارجی به روش مختصات منطبق بر مرز،" پایان نامه کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۸.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1380.20.2.14.1]