

## ارائه الگوریتمی برای مسئله برش دوبعدی با تقاضا

قاسم مصلحی\* و علیرضا رضایی\*\*

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۱/۱۰/۲۹ - دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۸/۱۲)

**چکیده** - در این مقاله مسئله برش دو بعدی<sup>۱</sup> با تقاضا، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مسئله باید با برش ورقهای مستطیل شکل بزرگ، مستطیل‌های کوچکتر مورد نیاز به نحوی تولید شوند که ضمن تامین تقاضاهای آنها، ضایعات یا تعداد ورقهای مصرفی حداقل شد. حل این مسئله در هر صنعتی که برش صفحات در آن مورد نیاز باشد از نظر کاهش ضایعات حائز اهمیت خواهد بود. در اکثر مقالات، تقاضای قطعات در نظر گرفته نشده و تنها به مسئله حداقل کردن ضایعات در یک ورق پرداخته شده است. مسئله برش جزء مسائل **Np-hard** بوده و روشهای دقیق قادر به حل عملی آن نخواهند بود، لذا الگوریتمی فراابتکاری<sup>۲</sup> با استفاده از روش SA<sup>۳</sup> برای حل مستقیم مسئله برش با تقاضا، ارائه شده است. در این الگوریتم جواب اولیه با رویه‌ای قانون گرا ایجاد شده و از یک SA داخلی، در فرایند تولید جواب همسایگی در هر تکرار حلقه SA اصلی استفاده شده است این امر موجب کارایی مناسب الگوریتم شده است. به دلیل وجود نداشتن مسائل نمونه به اندازه کافی، روشی برای تولید مسائل تصادفی برش با تقاضا ارائه شده است و به این ترتیب مسائلی در محدوده ۱۰ تا ۵۰ نوع قطعه و با تقاضای کل حداکثر ۲۴۰۰ تولید و توسط الگوریتم حل شده است. نتایج محاسباتی نشان دهنده قابل قبول بودن الگوریتم است. این الگوریتم توانسته است برای مسائلی با ۳۰ نوع قطعه و تقاضای کل ۵۰۰ جوابی با ضایعات کمتر از ۶ درصد را بیابد.

واژگان کلیدی: مسئله برش دو بعدی، ضایعات، سبک برش، روش SA

## An Algorithm for Two Dimensional Cutting Stock Problems with Demand

GH. Moslehi and A. R. Rezaie

Department of Industrial Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** *In this paper, two-dimensional cutting stock problem with demand has been studied. In this problem, cutting of large rectangular sheets into specific small pieces should be carried out; hence, the waste will be minimized. Solving this problem is important to decrease waste materials in any industry that requires cutting of sheets. In most previous studies, the demand of pieces has not been usually considered. The cutting problems belong to the category of Np-hard problems. So finding a desirable solution in a suitable time is practically impossible and heuristic methods must be used. A meta-heuristic algorithm using SA approach is presented. Then attempt will be made to regulate the SAs parameters. Initial solutions are produced with a rule based*

\*\* - کارشناس ارشد

\* - استادیار

algorithm and two internal and main SAs are used that lead to better performance of the algorithm. Due to lack of benchmark or test problems, two procedures for generating random problems is presented and are used to study efficiency of the algorithm. For this purpose, problems about 10 to 50 types of pieces with maximum demands of 2400 are generated and solved using the proposed algorithm. The results indicate that the algorithm capable of finding a solution with less than 6% of waste for problems with 30 types of pieces and total demands of 500.

**Keywords:** Two dimensional cutting stock problem, Waste, Cutting patterns, Simulated annealing

## فهرست علائم

$a_{ij}$ تعداد قطعه $i$ ام در سبک برش $j$ ام	$n_s$ تعداد ورقهای اصلی مصرفی
$b_i$ حداکثر تعداد قطعه $i$ ام که می توان از یک ورق برش داد	TF دمای انجماد
$c$ درصد ضایعات جواب جاری الگوریتم	TS دمای شروع
$C_j$ هزینه استفاده از سبک برش $j$ ام	$x_i$ تعداد قطعه $i$ ام در یک ورق اصلی
EM حداکثر تکرار حلقه داخلی با بهبود جواب	$X_j$ تعداد ورقی که مطابق سبک برش $j$ ام برش داده می شود
I نشان دهنده SA داخلی	$v_i$ ارزش قطعه $i$ ام
LS طول ورق اصلی	$w$ درصد ضایعات در یک ورق
$m$ تعداد قطعات	$W$ درصد ضایعات کل
$n$ تعداد سبکهای برش	WS عرض ورق اصلی
$N_i$ تقاضای قطعه $i$ ام	$\beta$ ضریب کاهش دما $0 < \beta < 1$

## ۱- مقدمه

فعالیت‌هایی مانند حمل و نقل، انبارداری، بسته بندی، چاپ، می توان مسئله برش و یا مسائل نزدیک به آن را مشاهده کرد. از طرف دیگر، چنانچه فرایند برش بدون استفاده از روشهای علمی صورت گیرد، به خصوص در هنگامی که تعداد و انواع قطعات مورد نیاز زیاد و متغیر باشد، معمولاً مقادیر زیادی ضایعات ایجاد خواهد شد. زیرا تعداد الگوهای (سبکهای برش) که می توان صفحات یا میله های بزرگ را به تکه های کوچکتر مورد نیاز تقسیم کرد بسیار زیاد بوده و تعداد کمی از این الگوها، دارای ضایعات کم هستند. طبیعی است که فقط با اتکا به ادراک شهودی و عمل به صورت استاد کاری، احتمال انتخاب سبکهای برش بهینه از بین تعداد بسیار زیاد آنها، بسیار کم و در حد صفر خواهد بود. بنابراین لازم است تا الگوریتمی ارائه گردد که برای هر ترکیبی از قطعات بتواند به

در فرایند تولید بسیاری از صنایع نیاز است تا قطعات کوچکتری با برش اجسام بزرگتر حاصل شوند یا به طور معادل، قطعه های کوچکتری در یک جسم بزرگتر جای داده شوند. در این عمل معمولاً بخشهایی از جسم بزرگتر به قطعاتی تبدیل می شوند که قابل استفاده در هیچ یک از محصولات تولیدی نبوده و به عنوان ضایعات و دورریز محسوب می شوند. کاهش چنین ضایعاتی نقش مهمی در کاهش هزینه ها داشته و به عنوان یکی از موضوعات علم تحقیق در عملیات و با نام مسئله برش توجه بسیاری از محققان را در نیم قرن گذشته به خود جلب کرده است. در صنایع بسیاری مانند صنایع تولید کننده بدنه اتومبیل، لوازم خانگی، سازه های ساختمانی، کشتی و هواپیماسازی، کاغذ، پوشاک، چرم، سنگ بری و یا در

نحو موثر و کارا روشی را ارائه کند تا با برش طبق آن، ضمن تامین قطعات مورد نیاز، حتی الامکان به حداقل درصد ضایعات دست یافت.

مسئله برش اولین بار توسط کانترویچ [۱] مطرح شده است. وی برای مسئله برش یک بعدی با تقاضا، مدلی را بیان می‌کند که برای حل آن، باید تمامی سبکهای برش یک میله به قطعات مورد نیاز شناسایی شوند، که این امر تنها برای مسائل بسیار کوچک عملی خواهد بود. لذا گیلومر و گموری [۲] روشی به نام تولید ستون<sup>۵</sup> را ارائه داده‌اند که توانایی حل مسائل بزرگتر از کانترویچ را داراست. در این روش ابتدا با چند سبک برش اولیه یک مدل ریاضی موسوم به مدل عمومی برش تشکیل شده و سپس با استفاده از قیمت‌های سایه‌ای<sup>۶</sup> به دست آمده از حل آن، یک مدل کوله‌پشتی<sup>۷</sup> برای یافتن یک سبک برش جدید و مناسب تشکیل و با حل آن، سبک برش جدید حاصله به مدل برش اضافه یا جایگزین می‌شود؛ و این عمل تا هنگامی که بتوان سبکهای برش جدیدی را ایجاد کرد تکرار می‌گردد. گیلومر و گموری، این روش را برای مسئله برش دو بعدی با تقاضا تعمیم داده‌اند [۳، ۴] برای این منظور فرض کرده‌اند که برش یک ورق در دو مرحله با ایجاد نوارهایی از ورق و سپس برش این نوارها به قطعات گوناگون صورت می‌گیرد. این روش به دلیل بزرگ شدن مدل ریاضی آن در ابعاد عملی قابل استفاده نیست.

بیزلی [۵] برای یافتن یک سبک برش بهینه یا به عبارت دیگر حل مسئله برش بدون تقاضا از روش برنامه ریزی پویا استفاده کرده و رابطه‌های بازگشتی را بر این مبنا که حداکثر ارزش یک مستطیل برای تبدیل آن به قطعات، در یکی از سه حالت برش ندادن آن، برش دادن عمودی یا افقی آن می‌تواند ایجاد شود، ارائه می‌کند. همین مسئله با ابعاد مختلف ورق اصلی مورد توجه هایفای [۶] بوده است.

کریستوفید و وایت لاک روش درخت جستجویی [۷] را ارائه کرده‌اند که در آن با انجام برشی افقی یا عمودی در هر گره در یکی از نقاط عرضی یا طولی ورق می‌توان تمامی سبکهای

برش را تولید کرد. این دو محقق برای جلوگیری از تولید سبکهای تکراری قوانینی را مطرح کرده و برای محدود کردن دامنه جستجو در هر گره حد بالایی را با حل یک مدل حمل و نقل و همچنین استفاده از رابطه‌های بازگشتی گیلومر و گموری به دست می‌آورند. کریستوفید [۸] این روش را بهبود داده و با آزاد سازی فضای حالت<sup>۸</sup> حد بالای بهتری را در مسئله استفاده کرده و در نتیجه اندازه درخت جستجو را کوچکتر می‌کند. وی بیان می‌دارد که این رویه عملکرد مناسبی را برای مسائل با اندازه متوسط خواهد داشت. هایفای و عیافی [۶] روش شاخه و کران کاملتری را برای مسئله برش دو بعدی محدود ارائه می‌دهند در این روش در هر گره قطعات به ورق تخصیص داده می‌شود و عمل شاخه زدن با ترکیب افقی یا عمودی قطعه‌ای به ناحیه‌ای که تا آن گره قطعات در آن جایگذاری شده‌اند صورت می‌گیرد. این مولفان برای مسائل بزرگ که جستجوی کامل درخت در عمل امکان ناپذیر می‌شود روشهای ابتکاری را ارائه داده و با قطع کردن تعدادی از شاخه‌های درخت فضای جستجو را محدود می‌کنند. بیزلی نیز روش شاخه و کرانی را [۹] ارائه می‌کند که در آن مسئله برش دو بعدی با یک مدل صفر و یک فرمول بندی و سپس از روش آزاد سازی لاگرانژی<sup>۹</sup> و رویه زیر گرادیان<sup>۱۰</sup> برای حل مدل استفاده شده است.

از جمله روشهای دیگر برای مسئله برش می‌توان به الگوریتم ترکیبی که توسط وانگ [۱۰] ارائه شده است اشاره کرد. در این الگوریتم یک سبک برش با رهیافتی متفاوت و با جفت کردن افقی یا عمودی قطعات و یا ترکیبات حاصله از قطعات به دست می‌آید. در این رهیافت می‌توان گفت که حالت عکس برش قطعات رخ می‌دهد. همچنین رهیافتی ابتکاری برای حل مسئله برش توسط دیتریچ و یاکوتیز [۱۱] بیان شده که یک الگوریتم تک گذری بوده و انتخاب قطعات برای جایگذاری در ورقه‌های اصلی، مطابق یک سری قوانین صورت می‌گیرد. این محققان با مطالعات تجربی سعی کرده‌اند بهترین قوانین را شناسایی کنند.

مسئله برش قطعات مجموعه R از ورق A0 را در دو حالت بدون تقاضا و با تقاضا می‌توان مدل کرد:

در حالت بدون تقاضا هر یک از قطعات مجموعه R دارای ارزش اقتصادی  $v_i$  بوده و با برش یک ورق، از هر قطعه  $i$  حداکثر  $b_i$  تا باید تولید شود. بنابراین باید مشخص شود که ورق A0 به چه گونه‌ای برش داده شود که ضمن حداکثر شدن ارزش کل حاصل از قطعات تولیدی، از هر قطعه حداکثر  $b_i$  تا تولید شود. مدل کلی و ساده شده این مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت [5]:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \end{aligned} \quad (1)$$

$x_i$  عدد صحیح  $i=1, \dots, m$

$x_i$ : متغیر تصمیم بوده و برابر است با تعداد قطعه نوع  $i$ ام که از A0 بریده می‌شود.

در حالت با تقاضا از هر قطعه موجود در مجموعه R حداقل  $N_i$  تا (تقاضای قطعه  $i$ ام) نیاز بوده و باید مشخص شود که ورقهای اصلی A0 به چه نحوی برش داده شوند تا تقاضاهای قطعات با کمترین هزینه ممکن تأمین شود. در این صورت مدل ریاضی مسئله [3] به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n C_j X_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq N_i \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq N_i \quad i=1, \dots, m$   
و عدد صحیح  $X_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$

مدل فوق به تنهایی نمی‌تواند مدل ریاضی مسئله برش باشد زیرا در آن محدودیتهای مربوط به قرار داشتن قطعات در ورقها و همپوشانی نداشتن آنها با هم، به طور صریح در نظر گرفته نشده‌اند. همچنین متغیرهایی که نشان دهنده موقعیت مکانی قطعات در هر ورق باشند وجود ندارند. در این مدل ابتدا باید سبکهای برش شناسایی شوند تا مدل از بین سبکهای برش، ترکیبی از آنها را انتخاب کند که کمترین ضایعات ممکن ایجاد

از روشهای فراابتکاری نیز برای حل مسئله برش استفاده شده است از جمله مقالات ارائه شده در این زمینه می‌توان به مقاله لی و چان [۱۲] که از روش SA، و مقاله بیزلی [۱۳] که از روش GA<sup>۱۱</sup>، و مقاله لئونگ و همکاران [۱۴] که از هر دو روش SA و GA استفاده کرده‌اند، اشاره کرد.

با بررسی سایر مقالات نیز می‌توان نتیجه گرفت که کمتر به مسئله برش دو بعدی با تقاضا، با وجود کاربردی تر بودن آن پرداخته شده است که دلیل آن را می‌توان بزرگ بودن مسئله از بعد ریاضی بیان کرد. مسئله برش بدون تقاضا و بالتبع مسئله کلی تر با تقاضا جزء مسائل Np-hard بوده [۱۲] و برای حل عملی مسائل با اندازه واقعی نیاز به روشهای ابتکاری یا فرا ابتکاری است در این مقاله سعی شده است برای اولین بار یک روش مناسب برای مسائل برش دو بعدی با تقاضا ارائه شده و کارایی آن نشان داده شود.

در بخش دوم مقاله مدل‌های مسئله برش در دو حالت بدون تقاضا و با تقاضا ذکر شده است. در بخش سوم مسئله برش با تقاضای مورد مطالعه به طور دقیق بیان، و چگونگی پیاده سازی روش SA و ارائه یک الگوریتم در بخش چهارم تشریح می‌شود. در بخش پنجم دو روش برای تولید مسائل تصادفی ارائه شده و نتایج حاصله از حل مسائل و کارایی الگوریتم مورد بررسی قرار می‌گیرد در انتها نتیجه گیری کلی از مقاله ارائه شده است.

## ۲- مدل‌های عمومی مسئله برش

فرض کنید ورق اصلی مستطیل شکل A0 با طول L0 و پهنا W0 و مجموعه R متشکل از m قطعه مستطیل شکل با ابعاد  $(L_i, W_i)$  داده شده باشد و ابعاد قطعات مجموعه R به گونه‌ای باشد که در شرط زیر صدق کند:

- در حالتی که چرخش قطعه مجاز نباشد، طول و عرض هر قطعه باید از طول و عرض ورق اصلی کوچکتر یا مساوی باشد.
- در حالتی که چرخش قطعات مجاز باشد، باید ماکزیمم بعد هر قطعه از ماکزیمم بعد ورق اصلی و مینیمم بعد هر قطعه، از مینیمم بعد ورق اصلی کوچکتر یا مساوی باشد.

شود. البته در مسائل با اندازه واقعی تعداد سبکهای برش بسیار زیاد بوده و به طور عملی قابل شمارش نیستند. بنابراین در عمل استفاده از مدل فوق برای حل مسئله برش بسیار مشکل و حتی ناممکن خواهد بود.

### ۳- بیان فرضیات

در این بخش فرضیات و محدودیتهای مسئله برش با تقاضای مورد بررسی بیان می‌شود.

- قطعات مورد نیاز و ورقهای اصلی مستطیل شکل هستند.
- ورقهای اصلی هم اندازه بوده و به تعداد نامحدود در دسترس‌اند.
- ورقهای اصلی همگن و یکنواخت بوده و تمامی نقاط آن قابل برش‌اند و دارای نقیصه‌ای نیستند.
- تعداد قطعاتی که از هر نوع قطعه تولید می‌شوند باید دقیقاً برابر تعداد تقاضا از آن نوع قطعه باشد.
- برشها به صورت غیر گیوتینی<sup>۱۲</sup> است. برش گیوتینی برشی است که از یک ضلع آزاد مستطیل شروع شده و به ضلع آزاد مقابل ختم شود.
- سبکهای برش ارتوگونال<sup>۱۳</sup> هستند یا به عبارت دیگر اضلاع قطعات برش موازی اضلاع ورق اصلی است.
- محدودیتی در مورد حداقل و حداکثر تعدادی که یک نوع قطعه می‌تواند در یک ورق اصلی ظاهر شود اعمال نمی‌شود.
- ارزش هر قطعه متناسب با مساحت آن است، و هزینه هر سبک برش برابر درصد ضایعات آن در نظر گرفته می‌شود و از هزینه‌های مربوط به برش دادن یک سبک برش صرف‌نظر می‌شود. البته در حالتی که این هزینه‌ها نیز مهم و تاثیر گذار باشد به راحتی می‌توان این هزینه‌ها را در الگوریتم وارد کرد، زیرا در الگوریتم تعداد برشها و موقعیت هر برش کاملاً شناخته شده است.
- محل‌های برش قطعات دارای پهنایی نیستند. البته در صورت تاثیر گذار بودن پهنای برش و قابل چشم پوشی نبودن، می‌توان آن را به صورت زیر در مدل وارد کرد.
- فرض کنید ابزار برش، در هر برش قسمت کوچکی از ورق

اصلی را با پهنایی برابر  $s$  از بین ببرد، در این صورت چنانچه طول و عرض هر قطعه مورد نیاز به اندازه  $s$  بزرگتر در نظر گرفته شود [۵ و ۱۰]، بعد از انجام برش قطعه‌ای با طول و عرض دلخواه اولیه خواهیم داشت. و چون قطعه آخر حاصل از ورق اصلی بدون انجام برش تولید می‌شود (به علت رسیدن به لبه آزاد ورق) و در این آخرین قطعه نیازی به پهنای  $s$  نخواهد بود، باید ابعاد ورق اصلی نیز به اندازه  $s$  بزرگتر فرض شود، تا بتواند به طور مجازی قطعه آخر که آن هم ابعادش به اندازه  $s$  قبلاً زیاد تر در نظر گرفته شده است را در خود جای دهد. بنابراین با اضافه کردن پهنای برش به ابعاد قطعات و ورق اصلی، می‌توان محدودیت پهنای داشتن محل‌های برش را به الگوریتم اضافه کرد.

- جهتهای قطعات ثابت نیستند، به عبارت دیگر قطعه با ابعاد  $(I_i, W_i)$  متفاوت از قطعه‌ای با ابعاد  $(w_i, l_i)$  نیست، و الگوریتم پیشنهادی در هر جهتی که امکانپذیر باشد قطعه را جایگذاری می‌کند.

- نقطه مرجع (راس سمت چپ و پایین هر مستطیل) هر ورق اصلی در مبدا مختصات قرار داشته و مختصات نقاط مرجع قطعات جایگذاری شده در آن، نسبت به این نقطه مبدا بیان می‌شوند.

### ۴- تشریح الگوریتم پیشنهادی

روش فراابتکاری SA توسط کریک پاتریک [۱۵] ابداع شد و محققان با توجه به کارایی SA سعی کرده‌اند که در حل مسائل مختلف از آن استفاده کنند. در این مقاله برای اولین بار روش SA در حل مسئله برش دو بعدی با تقاضا به کار گرفته شده است. از خصوصیات مهم روش SA، داشتن پارامترهای مختلفی است که باید به صورت مناسب برای مسئله مورد نظر تنظیم شوند. در شکل (۱) شمای کلی الگوریتم SA نشان داده شده است همان طور که در این شکل مشاهده می‌شود؛ شیوه نمایش مسئله، چگونگی ایجاد جواب اولیه، چگونگی ایجاد جوابهای همسایگی و دیگر خصوصیات پارامترهای SA مانند مقادیر

```

Select an initial solution  $c \in S$ ;
Select an initial temperature  $T = T_0 > 0$ ;
Set temperature change counter  $t=0$ ;
Repeat —Freezing process
  Set repetition counter  $i=0$ ;
  Repeat— Equilibrium process
    Generate an solution  $b$ , a neighbour of  $c$ ;
    Calculate  $\Delta f = f(c) - f(b)$ ;
    If  $\Delta f > 0$  then  $c := b$ 
    else if random  $(0,1) < \exp(\Delta f/T)$  then  $c := b$ ;
   $i := i + 1$ ;
Until  $i = N(t)$ ;
 $t = t + 1$ ;
 $T = T(t)$ ;
Until stopping critcrion true.

```

### شکل ۱ - شمای کلی الگوریتم SA

موقعیت مکانی هر عنصر، با یک شماره ترتیبی تعیین می‌شود که از عدد یک برای اولین عنصر سمت چپ توالی آغاز می‌شود. برای مشخص کردن چگونگی جایگذاری هر قطعه در ورقهای اصلی، مختصات نقاط مرجع و برای جایگذاری قطعات نیز نگهداری می‌شود. در حقیقت توالی را می‌توان به بخشهایی تقسیم کرد که هر بخش نمایش دهنده توالی مربوط به جایگذاری قطعات در یک ورق بوده اصطلاحاً توالی جزئی<sup>۱۴</sup> نامیده شده است.

#### ۴-۲- تولید جواب اولیه

برای ایجاد یک جواب اولیه از یک الگوریتم تک گذری که توسط دیتریچ و یاکوتیز [۱۱] برای مسئله برش با تقاضا ارائه شده اصطلاحاً الگوریتم قانون گرا نامیده می‌شود، می‌توان استفاده کرد. در این الگوریتم انتخاب قطعات برای جایگذاری در ورقهای اصلی تا زمانی که تقاضای تمامی آنان تامین شوند، بر مبنای قوانین ابتکاری صورت می‌گیرد. به طور خلاصه این الگوریتم را می‌توان به شرح زیر بیان داشت:

در ابتدا کل مساحت یک ورق اصلی به عنوان یک حفره<sup>۱۵</sup> یا ناحیه‌ای که در آن قطعه ای را می‌توان جایگذاری کرد در نظر گرفته می‌شود بعد از هر انتخاب و جایگذاری قطعه‌ای در یک حفره، ناحیه مستطیل شکل باقیمانده در مقابل ضلع سمت

دماهای شروع و پایان، نحوه سرد شدن، شرط تعادل در هر دما، موارد اصلی‌اند که برای پیشنهاد یک الگوریتم SA برای مسئله برش باید مشخص شوند. در این مقاله سعی می‌شود چگونگی پیاده‌سازی موارد فوق برای مسئله برش با تقاضا در الگوریتم پیشنهادی و مقادیر مناسب پارامترهای آن تشریح شود.

#### ۴-۱- نمایش مسئله

یکی از موارد بسیار مهم برای استفاده از SA، نمایش مسئله به صورت مناسب برای SA است. در این مقاله از روش زیر برای نمایش مسئله استفاده شده است:

یک مسئله برش با تقاضا را می‌توان با یک توالی از نام (یا شماره) تمامی قطعات نمایش داد. طبیعی است که تعداد عناصر این توالی باید برابر مجموع تقاضاهای تمامی قطعات باشد. و در یک جواب باید بتوان تمامی قطعات را به نحو امکانپذیری در ورقهای اصلی جایگذاری کرد. منظور از امکانپذیری آن است که هیچ دو قطعه‌ای با هم همپوشانی نداشته و کلیه قطعات در داخل ابعاد ورقهای اصلی قرار گرفته باشند. با توجه به این که تمامی قطعاتی که در یک ورق اصلی قرار دارند در توالی پشت سر هم هستند با نگهداری موقعیت مکانی اولین عنصرهایی که در یک ورق اصلی جدید جایگذاری می‌شوند می‌توان کلیه قطعاتی را که در یک ورق هستند را شناسایی کرد.

راست و بالای قطعه جایگذاری شده به عنوان دو حفره جدید در نظر گرفته شده و حفره قبلی حذف می‌شود. سپس امکان گسترش حفره‌های موجود و یا ادغام حفره‌های همسایه بررسی شده و حفره‌ها به هنگام می‌شوند و عملیات انتخاب قطعه‌ای از بین قطعات باقیمانده و جایگذاری تکرار می‌شود، در صورتی که نتوان هیچ یک از قطعات را برای جایگذاری در یکی از حفره‌ها انتخاب کرد تمامی حفره‌های فعلی حذف و یک ورق اصلی جدید به عنوان یک حفره جدید در نظر گرفته می‌شود. عملیات فوق تا بر آورده شدن تقاضای تمامی قطعات ادامه می‌یابد اولویت انتخاب قطعه و حفره‌ای که قطعه در آن جایگذاری می‌شود، بر اساس قوانین تجربی زیر است:

الف- قطعه‌ای که صرف نظر از جهت، دارای ابعاد مساوی با ابعاد حفره‌ای باشد (دارای فیت درجه دو)

ب- در صورت وجود نداشتن قطعه‌ای با فیت درجه دو قطعه‌ای برای جایگذاری در یک حفره، انتخاب می‌شود که دارای یک ضلع مساوی با حفره باشد. (دارای فیت درجه یک)  
ج- در صورت وجود نداشتن قطعه‌ای با فیت درجه یک، قطعه‌ای که دارای ابعاد کوچکتری از ابعاد حفره باشد.

د- در صورتی که چند قطعه با درجه فیت یکسان وجود داشته باشد، از بین این قطعات، قطعه‌ای که دارای بزرگترین مساحت است برای جایگذاری در حفره مربوطه انتخاب می‌شود.

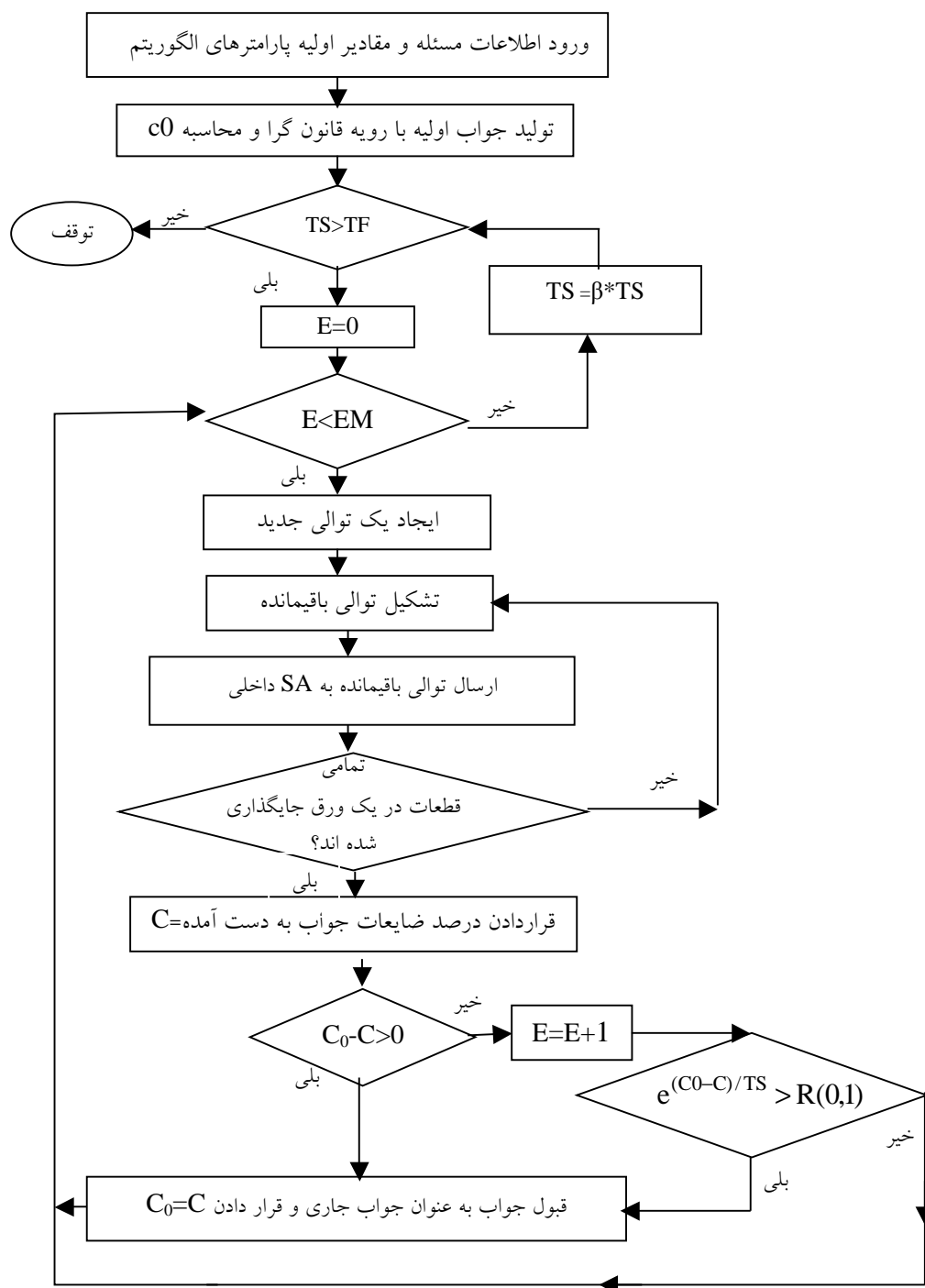
علاوه بر روش فوق، جواب اولیه را نیز می‌توان با فراخوانی متوالی رویه مربوط به مسئله برش بدون تقاضا (این رویه برای ایجاد جواب همسایگی کاربرد داشته و در بخش بعدی تشریح می‌شود) ایجاد کرد. در حقیقت می‌توان جواب اولیه را از الگوریتم پیشنهادی به دست آورد.

مقایسه عملکرد الگوریتم در دو حالت ایجاد جواب اولیه نشان می‌دهد که جواب اولیه به دست آمده توسط خود الگوریتم بهتر از جواب اولیه قانون گراست. به طوری که جواب اولیه قانون گرا دارای ضایعاتی در حدود ۲۰ تا ۳۰ درصد بوده ولی برای همین مسائل جواب اولیه با الگوریتم پیشنهادی حدود ۱۲ تا ۲۰ درصد بوده است. ولی با این وجود استفاده از جواب

اولیه قانون گرا موجب می‌شود تا الگوریتم در زمان کمتری به جواب بهتری نیز دست یابد. دلیل این امر را می‌توان ناشی از آن دانست که در الگوریتم قانون گرا ورقهای اصلی که در ابتدا پر می‌شوند دارای درصد ضایعات جزئی کمی بوده و یا به عبارت دیگر سبکهای برش خوبی هستند، زیرا در ابتدای اجرای الگوریتم قانون گرا قطعات بسیاری در دسترس بوده و طبق قوانین مورد استفاده، قطعاتی که ورق اصلی را به بهترین وجه پر می‌کنند در آن جایگذاری می‌شوند، با ادامه جایگذاری قطعات در ورقها، قطعات در دسترس کمتر شده، و بالتبع قطعات مناسب برای پر شدن بهتر ورق اصلی نیز کاهش خواهد یافت و در نتیجه ورقهای اصلی که در انتها پر می‌گردند معمولاً دارای درصد ضایعات جزئی، بالایی خواهند بود. هنگام ایجاد جوابهای همسایگی در الگوریتم پیشنهادی این ورقهای اصلی انتهایی شانس بیشتری برای انتخاب شدن دارند. انتخاب ورقهای اصلی که در آخر توالی قرار دارند باعث می‌شود تا توالی باقیمانده (رجوع به بند ۴-۳) کوچکتری ایجاد شده و الگوریتم پیشنهادی بتواند در زمان کمتر و نیز با کیفیت بهتری برای این توالی باقیمانده، سبکهای برش ایجاد نماید. هنگامی که جواب اولیه توسط خود الگوریتم پیشنهادی ایجاد می‌شود با توجه به مکانیزم عملکرد این الگوریتم مشخص است که بین درصد ضایعات ورقهای اصلی ابتدایی و انتهایی تفاوت کمتری وجود خواهد داشت.

#### ۴-۳- تولید جواب همسایگی

برای تولید جواب همسایگی همان طور که در نمودار جریانیه شکل (۲) دیده می‌شود ابتدا باید یک ترتیب جدید از توالی ایجاد شود برای این منظور دو توالی جزئی از بین توالیهای جزئی تشکیل دهنده جواب جاری الگوریتم، به تصادف انتخاب می‌شود. این انتخاب به گونه‌ای است که توالیهای جزئی مربوط به ورقهای اصلی با ضایعات بالاتر، احتمال بیشتری برای انتخاب شدن داشته باشند. در این صورت می‌توان انتظار داشت که با تغییر توالیهای جزئی این ورقها بتوان



شکل ۲- نمودار جریان کلی الگوریتم پیشنهادی

کمترین شماره ترتیبی است تا انتهای توالی به عنوان یک توالی باقیمانده در نظر گرفته می‌شود. با این فرض که این توالی باقیمانده امکانپذیر نبوده و یا به عبارت دیگر هیچ کدام از

به سبکهای برش با ضایعات کمتری دست یافت. سپس یکی از توالیهای جزئی در جلوی توالی جزئی دیگر درج می‌شود. و از عنصری که در این دو توالی جزئی منتخب دارای موقعیتی با



عناصر آن، در ورقهای اصلی جایگذاری نشده است؛ برای ایجاد جواب همسایگی کافی است با استفاده از روشی کلیه عناصر موجود در این توالی باقیمانده را مجدداً در ورقهای اصلی جایگذاری و تمام توالیهای جزئی موجود در توالی باقیمانده را تبدیل به توالیهای جزئی امکانپذیر کرد. برای این کار الگوریتمی که توسط لی و همکاران [۱۲] و لئونگ و همکاران [۱۴] برای مسئله برش بدون تقاضا ارائه شده به عنوان یک رویه استفاده می‌شود. در این رویه ابتدا کل توالی باقیمانده برای جایگذاری قطعات آن در یک ورق در اختیار رویه قرار داده می‌شود. معمولاً پس از فراخوانی رویه بدون تقاضا، تمام قطعات توالی در یک ورق جایگذاری نشده و بخشی از آن باقی می‌ماند، که با این قطعات یک توالی باقیمانده جدید تشکیل شده و برای جایگذاری آنان در یک ورق جدید مجدداً رویه بدون تقاضا فراخوانی می‌شود و این عمل تا زمانی که تمامی قطعات در ورقهای اصلی جایگذاری شده و توالی باقیمانده‌ای تشکیل نشود ادامه می‌یابد.

برای یک توالی از قطعات در رویه برش بدون تقاضا، سبک برش خوبی ایجاد می‌شود و یا به عبارت دیگر، از بین قطعات موجود در توالی، باید قطعاتی انتخاب شده و در یک ورق به گونه‌ای جایگذاری شوند که ضایعات آن ورق حداقل شود. در این رویه برای نیل به هدف فوق، از روش SA استفاده می‌شود. از این رویه که در داخل SA اصلی قرار داشته و در هر تکرار SA اصلی، به کار گرفته می‌شود با عنوان SA داخلی یاد می‌شود. بنابراین الگوریتم ارائه شده دارای یک SA داخلی برای یافتن جواب همسایگی و یک SA اصلی برای حل مسئله می‌باشد. الگوریتم SA داخلی در نمودار جریان‌ی شکل (۳) مشاهده می‌شود. در هر مرحله از تکرار SA اصلی یک توالی باقیمانده به SA داخلی تحویل می‌گردد. در SA داخلی سعی می‌شود با تعویض تصادفی جای دو عنصر، یک توالی جدید برای توالی باقیمانده ایجاد شود. برای این منظور در هر تکرار از SA داخلی این توالی ارزیابی شده و درصد ضایعات آن محاسبه و مطابق با روش SA پذیرش یا رد می‌شود. برای ارزیابی هر

توالی در SA داخلی باید قطعات در ورق اصلی چیده شده، سپس ضایعات آن محاسبه شود. این کار توسط رویه‌ای به نام BL<sup>۱۶</sup> انجام می‌گیرد.

رویه BL با روشی ساده سعی می‌کند که قطعات توالی را در چپترین و پایتترین ناحیه ممکن در یک ورق اصلی جایگذاری کند تا سبکهای برش هر چه متراکمتری به دست آید. برای توضیح روش جایگذاری هر قطعه در ورق اصلی فرض کنید که در ابتدا قطعه در بالای سمت راست ورق اصلی قرار دارد. این قطعه تا جایی که امکان دارد (با قطعه دیگری همپوشانی پیدا نکند) در ورق اصلی پایین آورده شده و سپس تا جایی که امکانپذیر باشد به سمت چپ ورق اصلی حرکت داده می‌شود. این فرایند تا هنگامی که حرکت به سمت پایین و چپ در هر مرحله امکانپذیر باشد ادامه می‌یابد تا در نهایت قطعه در پایتترین و چپترین موقعیت ممکن جایگذاری شده یا عدم امکان جایگذاری آن مشخص شود. این عمل برای تمامی عناصر توالی از سمت چپ تا انتهای توالی ادامه می‌یابد. در این رویه جهات قطعات ثابت نبوده و بر خلاف روش لئونگ [۱۴] می‌تواند متغیر باشد.

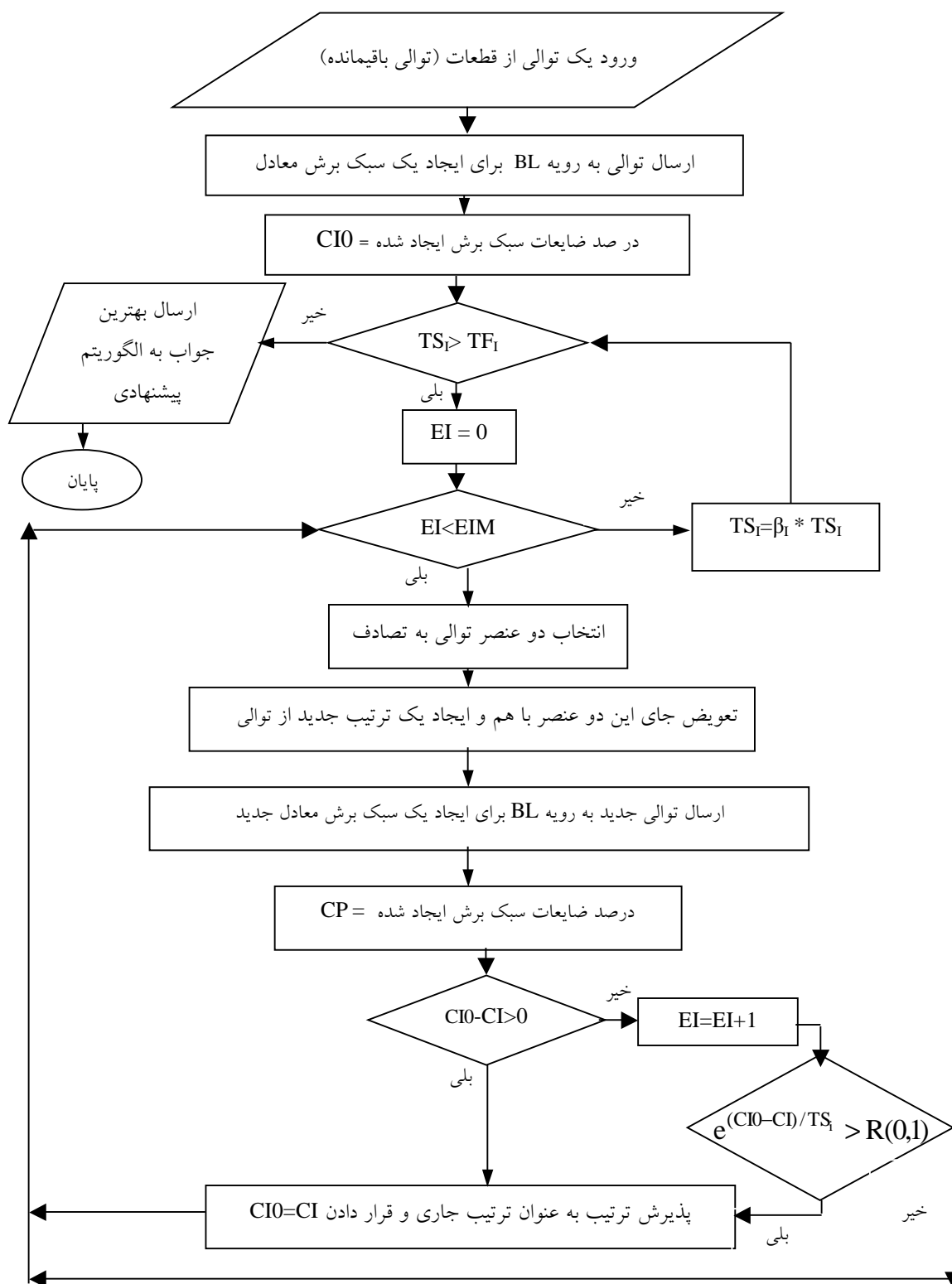
#### ۴-۴-۴- سایر پارامترهای SA

#### ۴-۴-۱- معیار ارزیابی

ارزش هر جواب تنها با درصد ضایعات آن سنجیده می‌شود. درصد ضایعات با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{ns-1} w_i}{(ns-1) * LS * WS} \quad (3)$$

توجه کنید که در محاسبه درصد ضایعات، آخرین ورق مصرفی توسط الگوریتم، در نظر گرفته نشده است. زیرا با توجه به این که در جوابهای الگوریتم پیشنهادی، تعداد هر قطعه تولیدی باید دقیقاً برابر تقاضای آن باشد، در صورت احتساب آخرین ورق در محاسبه درصد ضایعات، جوابهای با ارزش عملی متفاوت، ممکن است دارای یک درصد ضایعات یکسان باشند، ولی در یک جواب مساحت کمتری از آخرین ورق



شکل ۳- رویه SA داخلی

نسبت به جوابهای دیگر استفاده شده باشد به طوری که از باقیمانده مساحت آخرین ورق بتوان برای برشهای بعدی استفاده کرد.

#### ۴-۲- شرط تعادل و توقف

شرط تعادل در هر دما، در SA اصلی و داخلی با آزمایشهای متعدد مشخص شده است. این مقدار در بهترین حالت خود برابر پنج تکرار حلقه داخلی، بدون ایجاد بهبود در جوابهای به دست آمده است. همچنین اجرای الگوریتم نیز در یکی از حالات زیر متوقف می شود:

الف- دمای الگوریتم به دمای انجماد برسد.

ب- به جواب بهینه در مورد مسائلی که مقدار جواب بهینه آنها مشخص است دست یافته شود.

ج- تعداد تکرارها از حداکثر تعداد مجاز تعریف شده بیشتر شود.

#### ۴-۳- رابطه کاهش دما

از دو رابطه کاهش دمای زیراستفاده، و عملکرد الگوریتم در این دو حالت با هم مقایسه شده است:

الف - رابطه کاهش متناسب دما<sup>۱۷</sup>، برای سرد کردن که این رابطه [۱۴] را می توان به صورت زیر نوشت:

$$T_{k+1} = \beta \cdot T_k, \quad 0 < \beta < 1 \quad (4)$$

که در آن  $T_{k+1}$  دمای الگوریتم در تکرار بعدی است.

ب- رابطه ارائه شده توسط لاندی و میز [۱۶] که این رابطه به صورت زیر است:

$$T_{k+1} = T_k / (1 + \alpha T_k), \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

در رابطه های فوق  $\alpha$  و  $\beta$  مقادیر ثابتی اند که مقدار آنها قابل تنظیم است. این مقادیر تعداد کل تکرارهای الگوریتم را کنترل می کند.

استفاده از رابطه کاهش متناسب دما باعث شده است تا الگوریتم عملکرد بهتری داشته باشد. بنابراین در الگوریتم پیشنهادی، این رابطه برای کاهش دما به کار برده شده است.

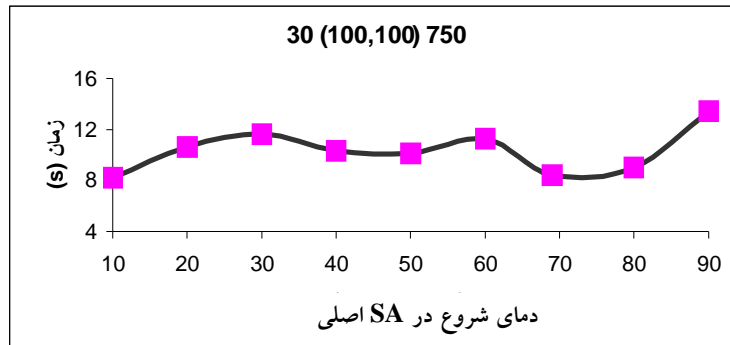
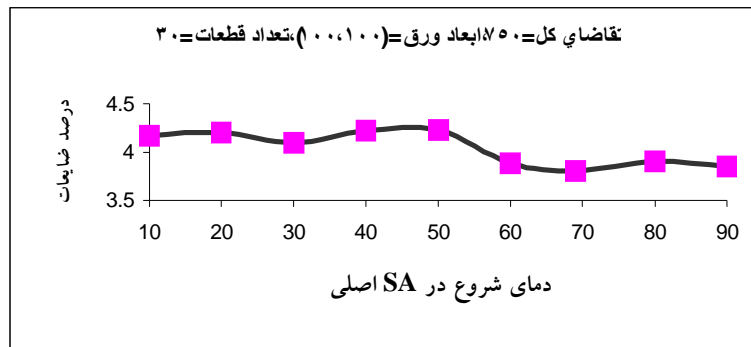
#### ۴-۵- تنظیم پارامترهای الگوریتم

به منظور به دست آوردن مقادیر مناسب پارامترهای SA،

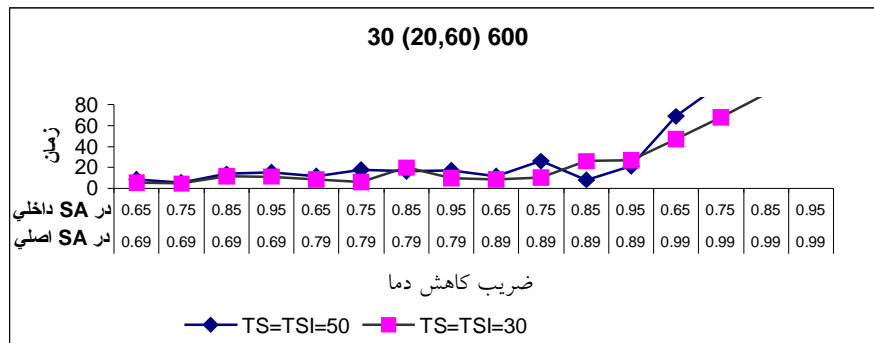
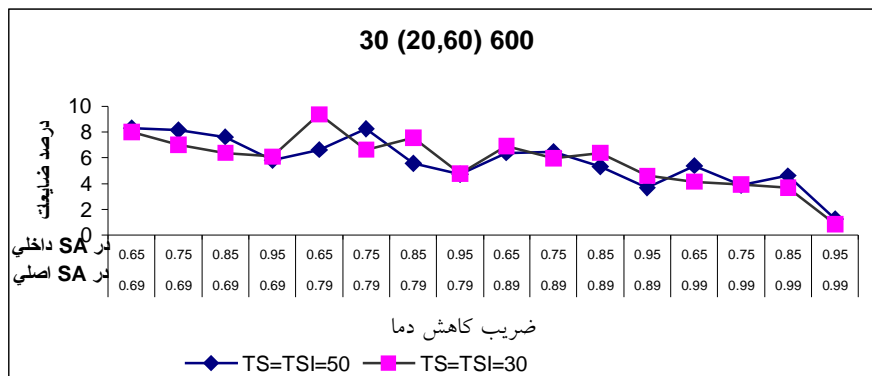
اجرای الگوریتم با استفاده از مسائل نمونه مختلف صورت گرفته است. مسائل نمونه به طور تصادفی و به گونه ای (مطابق بخش ۶) تولید شده اند که جواب بهینه آنها معلوم و برابر صفر باشد. در این مسائل تعداد انواع قطعات از ۱۰ تا ۵۰، تقاضای کل از ۲۰۰ تا ۲۴۰۰، ابعاد ورق اصلی از (۱۰، ۱۰) تا (۱۰۰، ۱۰۰) و از (۱۲۰، ۱۲۰) تا (۲۱۰، ۲۱۰) متغیر بوده است.

برای هر مسئله خاص، الگوریتم در حالتی که مقدار یک پارامتر متغیر و بقیه پارامترهای SA ثابت بوده اند اجرا شده است. تا در کل با مقایسه نتایج حاصله از نظر درصد ضایعات و زمان حل، بتوان مقادیر تقریباً مناسب پارامترها را شناسایی کرد. در شکل (۴) چند نمونه از نمودارهای حاصل از تحقیقات فوق آورده شده است. در شکل (۴-الف) نتایج حل مسئله ای با ۳۰ قطعه و تقاضای کل ۷۵۰ در حالی که دمای شروع SA اصلی از ۱۰ تا ۹۰ متغیر و مقدار دیگر پارامترها ثابت بوده نمایش داده شده است. در این نمودار مشاهده می شود که افزایش دمای شروع از ۱۰ تا ۵۰ تاثیر چندانی در ضایعات نداشته و به طور متوسط زمان حل ۳ ثانیه (۰.۳۷٪) افزایش داشته است. ولی افزایش دمای شروع از ۵۰ تا ۷۰ باعث کاهش ضایعات از ۴/۲٪ به ۳/۷٪ شده است ضمن اینکه در دمای ۷۰، زمان حل نیز کاهش یافته است. افزایش دمای شروع به بیش از ۷۰ باعث شده است تا ضمن بیشتر شدن زمان حل ضایعات نیز کمی افزایش یابد.

در شکل (۴-ب) ضریبهای کاهش دما در هر دو SA از ۰/۶۵ تا ۰/۹۵ متغیر بوده است. نمودار نشان می دهد که هر چه مقادیر ضریبهای کاهش دما افزایش داده شود با صرف زمان بیشتر ضایعات کمتری ایجاد می شود. به طوری که ضایعات از حدود ۸٪ در مقادیر پایین ضرایب به حدود ۱٪ در مقادیر نزدیک یک، کاهش یافته است. ولی از مقداری به بعد افزایش بیشتر مقادیر ضریب کاهش دما باعث افزایش شدید زمان حل خواهد شد ضمن آن که میزان بهبود ضایعات نیز کاهش می یابد. مقایسه نمودارهای شکل (۴) نشان می دهد که افزایش ضریب کاهش دما تاثیر بیشتری را در عملکرد الگوریتم نسبت



شکل ۴- الف) اثر تغییر دمای شروع در عملکرد الگوریتم



شکل ۴- ب) تاثیر افزایش ضریبهای کاهش دما در عملکرد الگوریتم

شکل ۴- تنظیم پارامترهای الگوریتم

به افزایش دمای شروع داراست.

البته نباید از نظر دور داشت که به علت وجود دو حلقه SA در الگوریتم، تنظیم ایدئال پارامترهای آن کاری بسیار مشکل و پرهزینه خواهد بود. زیرا برای یک مسئله خاص، ترکیبهای مختلف مقادیر پارامترها را می‌توان بررسی کرد و از طرف دیگر در مسئله برش با تقاضا، تغییر در یکی از چهار مورد ابعاد ورق اصلی یا قطعات، تقاضای هر قطعه و تعداد انواع قطعات می‌تواند مسائل متفاوتی را ایجاد کند. لذا برای عملی شدن تحقیق در مورد مقادیر مناسب پارامترها به خصوص در مورد SA داخلی، سعی شده است تا از نتایج ارائه شده در [۱۴] استفاده شود.

در زیر خلاصه نتایج حاصله از تحقیق در مورد مقادیر مناسب پارامترها بیان می‌شود:

- مقدار مناسب دمای شروع در SA اصلی ۷۰، در SA داخلی ۵۰، و دمای انجماد در هر دو SA برابر صفر در نظر گرفته شده است.
- افزایش بیشتر دمای شروع، به خصوص در SA داخلی، در مواردی باعث بیشتر شدن درصد ضایعات خواهد شد.
- مقادیر مناسب ضریب کاهش دما در SA اصلی ۰/۸۵ و در SA داخلی برابر ۹۵/ در نظر گرفته شده است.

## ۵- نتایج محاسباتی

الگوریتم پیشنهادی به زبان TURBO C کد شده و روی یک رایانه شخصی پنتیوم II با ۲۵۶ مگابایت حافظه رم اجرا شده است. با توجه به این که مسائل نمونه یا الگوی برش با تقاضا در مقالات مشاهده نشد و اکثر مقالات در مورد مسئله برش بدون تقاضا هستند، برای بررسی کارایی الگوریتم، دو روش برای تولید مسائل تصادفی با جواب بهینه معلوم و برابر صفر پیشنهاد شده است. در این بخش ابتدا به این روشها، اشاره شده و سپس نتایج اجرای الگوریتم برای حل این مسائل بیان می‌شود. همچنین نتایج حل سه نمونه از مسائل عملی بیان می‌شود.

### ۵-۱ - تولید مسائل تصادفی

برای تولید مسائل تصادفی مسائل برش با تقاضا با جواب بهینه

معلوم و درصد ضایعات برابر صفر روشهای زیر پیشنهاد شده است: در روش اول ابتدا ابعاد ورق اصلی و تعداد قطعاتی که ورق باید به آن برش داده شود مشخص می‌شود. سپس ورق اصلی به عنوان یک قطعه تولیدی در نظر گرفته شده و مجموعه‌ای از قطعات تولیدی که در آغاز فقط شامل ورق اصلی است تشکیل می‌شود و تا زمانی که تعداد قطعات تولیدی در آن، به تعداد تعیین شده نرسیده باشد، هر بار قطعه‌ای از آن به تصادف انتخاب و جهت و محل برش روی آن نیز به طور تصادفی تعیین می‌شود و با برش آن، دو قطعه جدید تولید و جایگزین قطعه قبلی در مجموعه می‌شود. نمودار جریان این مرحله از روش در شکل (۵) آمده است.

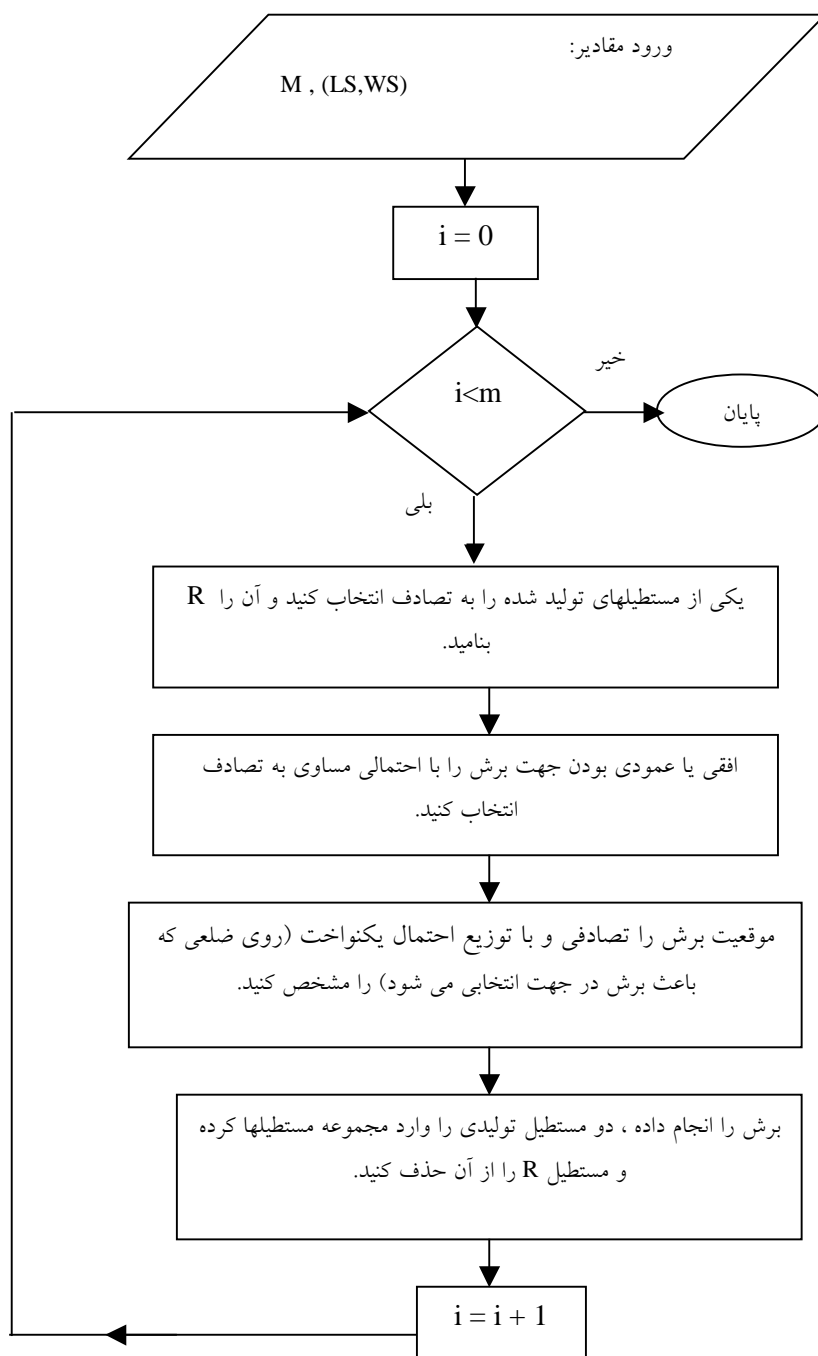
بعد از برش ورق به تعداد قطعات تعیین شده، برای تمامی قطعات تولیدی تقاضای یکسانی در نظر گرفته می‌شود. سپس در بین این قطعات، قطعاتی که صرف نظر از جهت دارای ابعاد یکسانی باشند، شناسایی و به عنوان یک نوع قطعه با تقاضای برابر مجموع، تقاضای قطعات یکسان، در نظر گرفته می‌شوند.

در روش دوم تولید مسائل تصادفی علاوه بر ابعاد ورق اصلی و تعداد کل قطعات، حداکثر تعداد قطعاتی که یک ورق می‌تواند به آن برش داده شود باید مشخص شود. سپس عددی به صورت تصادفی در دامنه یک و حداکثر تعداد تعیین شده، انتخاب می‌شود و یک ورق اصلی همانند روش اول، به این تعداد قطعه بریده می‌شود و تا هنگامی که تعداد کل قطعات تولیدی از میزان مشخص شده کمتر باشد، عملیات فوق برای ورقهای اصلی جدید تکرار می‌شود بعد از تولید قطعات به تعداد کل تعیین شده، قطعات یکسان صرف نظر از جهت، شناسایی شده و تقاضای آنها با هم جمع می‌شود.

با استفاده از روشهای فوق تعدادی قطعه به دست می‌آید که تقاضای آنها نیز مشخص بوده و تامین آنها با ضایعات صفر امکانپذیر است.

### ۵-۲ - حل مسائل

به منظور بررسی کارایی الگوریتم مسائل تصادفی زیر یک بار با روش اول و بار دیگر با روش دوم، تولید و توسط



شکل ۵- نمودار جریان‌ی برش یک ورق به تعدادی مشخص از قطعات

واحد بوده که بدون در نظر گرفتن ورقهای با ابعاد مشابه، مجموعاً ۱۵ نوع ورق وجود داشته است. تقاضای کل در محدوده ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ با دامنه تغییر ۲۰۰ (۵ مورد) و تعداد قطعات برابر ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۴۰، ۵۰، (۷ مورد) است. بنابراین در این حالت تعداد  $15 \times 5 \times 7 = 525$  مسئله

الگوریتم حل شده‌اند. قابل ذکر است حل هر مسئله خاص ده بار تکرار شده و متوسط ضایعات و زمان اجرای به دست آمده در این ده تکرار به عنوان نتیجه اجرای الگوریتم برای آن مسئله در نظر گرفته شده است. الف- ابعاد ورق اصلی در محدوده ۲۰ تا ۱۰۰ با دامنه تغییر ۲۰

مختلف ایجاد شده است.

ب- ابعاد ورق اصلی در محدوده ۱۲۰ تا ۲۱۰ با فاصله ۳۰ واحد متغیر بوده که بدون در نظر گرفتن ورقهای با ابعاد مشابه، مجموعاً ۱۰ نوع ورق وجود داشته است. تقاضای کل از ۲۰۰ تا ۱۸۰۰ با دامنه تغییر ۲۰۰ و تعداد قطعات نیز از ۱۰ تا ۴۰ با دامنه ۱۰ متغیر بوده است. بنابراین در این حالت نیز تعداد  $160 = 4 \times 4 \times 10$  مسئله مختلف ایجاد شده است.

حل تعدادی از مسائل فوق که با روش اول تولید شده اند، در جدول (۱) آورده شده است. در این جدول با ملاحظه درصد ضایعات در هر ردیف مشخص است که در یک تقاضای کل مشخص، هرچه تعداد قطعات بیشتر باشد الگوریتم با مسئله‌ای دشوارتر مواجه بوده و درصد ضایعات بالاتری را برای آن ایجاد می‌کند. افزایش تعداد قطعات بیش از افزایش تقاضای آنها، در دشوار شدن مسئله نقش دارد. ولی با اطمینان می‌توان گفت که الگوریتم برای مسائل با تقاضای کل زیر ۶۰۰ که با روش اول تولید شده‌اند، جوابی با ضایعات کمتر از ۶٪ را می‌یابد. همچنین در این مسائل رابطه خاصی بین ابعاد ورق اصلی و کیفیت جواب مشاهده نمی‌شود.

قابل ذکر است در روش اول تولید مسائل تصادفی هرچه تعداد قطعات بیشتر باشد ابعاد قطعات تولیدی نسبت به ابعاد ورق اصلی کوچکتر بوده و از نظر اندازه متنوع‌ترند. ولی در روش دوم این امر با تعیین حداکثر تعداد تقسیم یک ورق به قطعات، قابل کنترل است. مسائل جدول (۲) با روش دوم ایجاد و حل شده‌اند. ابعاد ورق اصلی و تعداد قطعات این مسائل با مسائل جدول (۱) یکسان بوده و تقاضای کل آنها نیز تقریباً در یک محدوده‌اند. مقایسه کلی جداول (۱) و (۲) نشان می‌دهد که الگوریتم برای این مسائل جوابهای به مراتب بهتری را یافته است. بنابراین به نظر می‌رسد در مسائل، هر چه ابعاد قطعات به ابعاد ورق اصلی نزدیکتر باشد و به تعداد ورقهای اصلی بیشتری برای تامین تقاضاهای آنها نیاز باشد، الگوریتم به نحو کاراتری عمل می‌کند. این مورد را می‌توان در جدول (۲) در ستون ms مشاهده کرد که ms نشان دهنده حداکثر قطعاتی است

که به رویه دوم تولید مسائل تصادفی اجازه داده می‌شود تا یک ورق را به آن تعداد قطعه برش دهد. در جدول (۲) می‌توان دید که با کوچکتر بودن این عدد حتی در مسائل بزرگ، الگوریتم کارایی خوبی داشته است.

با توجه به جداول (۱) و (۲) در مورد امکان مقایسه الگوریتم پیشنهادی با دیگر الگوریتمها می‌توان گفت:

- در بین تمامی مقالات مطالعه شده، تنها مقاله الگوریتم قانون گرا مستقیماً مسئله برش با تقاضا را مورد بررسی قرار داده است که این الگوریتم جواب اولیه الگوریتم پیشنهادی را ایجاد می‌کند.

- در مقالات راجع به مسئله برش بدون تقاضا با حداکثر ۳۵ قطعه، ضایعات زیر ۶ درصد نشان دهنده کارایی خوب الگوریتم می‌باشد [۱۲-۱۴]. ضمن اینکه در این الگوریتمها لازم نیست تمامی قطعات موجود در یک ورق جایگذاری شوند در حالی که در الگوریتم پیشنهادی باید کلیه قطعات در ورقهای اصلی جایگذاری شوند.

### ۵-۳- حل مسائل عملی

در این بخش نتایج حل نمونه‌ای از مسائل عملی که از یک شرکت تولید کننده بدنه اتومبیل اخذ شده اند ذکر می‌شود، هر مسئله شامل کلیه قطعاتی است که در این کارخانه، با یک ضخامت خاص مورد نیاز است. تقاضای هر قطعه بر اساس میزان سفارش آن در هر دوره سفارش برآورد و بنابراین برای کوچک شدن اندازه مسئله، دوره سفارش حتی الامکان کوتاه در نظر گرفته شده است.

هر چند در عمل اقدامات زیادی برای کاهش اندازه‌های مسائل و رسیدن به جوابهای بهتر می‌توان انجام داد ولی چون هدف از ارائه این مسائل بررسی کارایی الگوریتم در دشوارترین حالت بوده است، در هیچ موردی به جز کاهش تقاضا، ساده‌سازی انجام نگرفته است. نتایج حل این مسائل در جدول (۳) آمده است. با توجه به بزرگ بودن اندازه مسئله نسبت به مسائل مطرح در ادبیات مسئله برش، ضایعات حدود ۶٪ را

جدول ۱- حل مسائل تصادفی تولیدی با روش اول

تعداد قطعات برابر ۵۰		تعداد قطعات برابر ۲۵		تعداد قطعات برابر ۱۰		مشخصات مسائل		
زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	تقاضای کل	عرض ورق اصلی	طول ورق اصلی
۲/۲۰	۳/۰۳	۱/۲۶	۱/۲۹	۷/۶۹	۰/۴۵	۲۰۰	۲۰	۲۰
۱۰/۸۶	۵/۳۱	۰/۸۳	۵/۳۸	۸/۷۹	۰/۶۷	۴۰۰	۲۰	۲۰
۱۴/۶۱	۶/۴۱	۲/۷۱	۶/۸۲	۰/۷۸	۲/۹۳	۶۰۰	۲۰	۲۰
۲۳/۰۰	۷/۵۵	۳/۰۸	۷/۳۰	۲/۰۹	۳/۸۶	۸۰۰	۲۰	۲۰
۴/۵۵	۹/۹۶	۶/۷۰	۸/۰۰	۳/۶۷	۳/۹۵	۱۰۰۰	۲۰	۲۰
۲/۱۲	۵/۸۸	۱۰/۴۲	۲/۹۹	۷/۶۳	۰/۳۴	۲۰۰	۸۰	۲۰
۱۲/۱۴	۵/۶۹	۹/۴۷	۴/۹۶	۸/۰۲	۲/۳	۴۰۰	۸۰	۲۰
۲۵/۴۱	۱۰/۶۷	۱۱/۲۵	۶/۰۷	۷/۴۱	۵/۲۲	۶۰۰	۸۰	۲۰
۳۰/۵۱	۱۳/۱۲	۳۰/۸۵	۸/۱۲	۸/۲۸	۵/۵۱	۸۰۰	۸۰	۲۰
۳۳/۲۴	۱۳/۴۷	۴۵/۲۷	۸/۶۸	۹/۹۲	۵/۳۴	۱۰۰۰	۸۰	۲۰
۳/۲۹	۵/۱۲	۵/۹۱	۲/۵۱	۲۶/۳۶	۱/۲	۲۰۰	۱۰۰	۶۰
۸/۸۲	۷/۰۲	۶/۲۳	۵/۱	۲۲/۳۳	۴/۱	۴۰۰	۱۰۰	۶۰
۲۸/۰۱	۱۰/۱۲	۱۸/۵۲	۶/۶۴	۳۸/۴۵	۵/۴۱	۶۰۰	۱۰۰	۶۰
۳۲/۱۷	۱۲/۱۵	۳۵/۳۸	۸/۵۰	۳۳/۲۱	۶/۱۹	۸۰۰	۱۰۰	۶۰
۴۲/۵۲	۱۳/۴۸	۴۹/۵۱	۹/۶۲	۴۱/۴۷	۷/۵۶	۱۰۰۰	۱۰۰	۶۰

جدول ۲- حل مسائل تصادفی تولیدی با روش دوم

ورق اصلی (۱۰۰،۶۰)			ورق اصلی (۸۰،۲۰)			ورق اصلی (۲۰،۲۰)			ms	تعداد قطعات
زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	تقاضای کل	زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	تقاضای کل	زمان اجرا ثانیه	درصد ضایعات	تقاضای کل		
۲/۳۱	۰/۰۲	۲۴۹	۱/۳۳	۰/۰	۱۸۰	۲/۷۶	۲/۸۷	۱۸۰	۵	۱۰
۱/۷	۰/۶۹	۱۷۲	۱/۹۷	۰/۴۳	۴۶۹	۲/۲۶	۱/۰۶	۲۸۳	۱۰	۲۰
۱/۸۲	۲/۵۲	۲۰۵	۲۵/۴۹	۲/۵۹	۷۳۱	۶/۹۲	۴/۱۷	۳۷۸	۱۵	۲۰
۲/۳۱	۰/۶۱	۳۶۸	۳۶/۲۵	۰/۷۵	۱۰۵۰	۱۵۳/۸	۱/۰۱	۸۷۷	۵	۲۰
۱۰/۱۲	۲/۵۴	۱۱۵۲	۱۱/۶۵	۲/۱۱	۱۱۳۰	۵۸/۷۷	۰/۷۱	۹۲۵	۵	۲۰
۳/۷۹	۳/۱۳	۲۹۴	۱/۰۴	۰/۶۶	۲۷۲	۱/۱۵	۰/۳۱	۱۳۶	۵	۳۰
۵/۱۲	۲/۸۴	۴۱۲	۵/۹۹	۱/۰۹	۳۹۳	۵۱/۰۸	۸/۷۹	۷۱۴	۱۵	۳۰
۶/۹۴	۳/۲۱	۶۱۸	۶/۷۲	۲/۱۰	۵۲۱	۱۰۲/۵	۵/۴۵	۸۴۱	۱۰	۳۰
۱۸/۶۹	۵/۴۲	۱۵۰۰	۱۸/۳۵	۵/۸۹	۱۰۰۳	۸۱/۰۷	۷/۱۱	۱۰۵۰	۱۰	۳۰
۵/۲۳	۲/۲۴	۲۸۵	۵/۰۵	۴/۸۴	۱۸۸	۱/۹۲	۰/۶۲	۲۲۵	۲۰	۴۰
۶/۰۱	۱/۳۲	۴۸۷	۱۱/۵۴	۳/۴	۳۶۵	۲/۵۸	۰/۹۹	۲۵۰	۵	۴۰
۱۰/۴۲	۲/۷۱	۶۱۸	۱۰/۲۸	۳/۵۱	۶۲۱	۸۰/۹۶	۰/۵	۱۰۵۷	۵	۴۰
۱۵/۲۴	۱/۹۱	۱۰۲۰	۲۱/۹	۴/۵۳	۱۱۳۷	۲۵۲/۷	۶/۵۷	۱۶۵۵	۱۰	۴۰
۲/۲۶	۱/۶۴	۲۹۹	۴/۰۱	۱/۷۹	۳۴۵	۳/۲	۲/۰۲	۲۳۹	۱۰	۵۰
۲/۴۸	۱/۳۹	۵۶۷	۴/۸۳	۱/۲۶	۴۰۶	۴/۱۷	۳/۱۲	۴۵۱	۱۰	۵۰
۱۲/۷۴	۲/۷۷	۸۰۲	۶/۰۴	۱/۸	۶۵۵	۱۷/۵۸	۵/۲۴	۶۹۷	۲۰	۵۰
۵۲/۴۷	۶/۷۵	۱۴۰۷	۷۰/۴۷	۴/۲۱	۱۲۵۵	۱۷۸/۱	۷/۴۶	۱۲۲۵	۱۰	۵۰
۲۲۸/۲	۸/۳۷	۱۳۰۱	۶۹۶/۲	۶/۱۹	۱۷۳۴	۴۵۵/۹	۲/۰۱	۲۶۳۲	۱۰	۶۰



جدول ۳ - نتایج حل سه نمونه از مسائل عملی

شماره مسئله	تعداد انواع قطعات	تقاضای کل	ابعاد ورق اصلی (mm)	درصد ضایعات	زمان اجرا S
۱	۷۵	۸۹۱	(۲۰۰۰، ۱۰۰۰)	۶/۱	۹۰۰
۲	۳۰	۲۹۴	(۶۰۰۰، ۱۱۰۰)	۶/۳۵	۳۳۷
۳	۲۵	۲۰۸	(۲۰۰۰، ۱۰۰۰)	۴/۲	۸۰

حل می‌کند. جواب اولیه توسط رویه‌ای تک گذری، که جایگذاری قطعات در آن طبق قانونهای ابتکاری صورت می‌گیرد تولید می‌شود. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که استفاده از این رویه، باعث بهتر شدن عملکرد الگوریتم می‌شود. با توجه به نبودن مسائل نمونه و الگو، روشی برای تولید مسائل تصادفی و با جواب بهینه معلوم و برابر صفر ارائه و با حل این مسائل در مقادیر مختلف پارامترهای SA تنظیم شد.

نتایج محاسباتی برای حل مسائل تصادفی در محدوده ۱۰ تا ۵۰ نوع قطعه و با تقاضای کل حداکثر ۲۴۰۰ نشان می‌دهد که این الگوریتم می‌تواند برای مسائلی تا ۳۰ نوع قطعه و تقاضای کل حدود ۵۰۰، جوابی با ضایعات کمتر از ۶ درصد را بیابد، کارایی الگوریتم به تعداد انواع قطعات، بیش از تقاضای قطعات حساس بوده و همچنین در یک تعداد انواع و تقاضای قطعات خاص، هر چه ابعاد قطعات مورد نیاز یکنواختتر باشد، الگوریتم کارایی بهتری را داراست.

در خاتمه پیشنهاد می‌شود برای پیاده سازی و کاربرد این الگوریتم در صنایع مختلف تحقیقات بیشتری انجام شود، زیرا به نظر می‌رسد در صورت شناسایی شرایط و محدودیتهای عملی هر صنعت و اعمال آنها در الگوریتم (مانند قابل قبول بودن برآورده شدن تقاضای قطعات در یک دامنه، به جای یک عدد دقیق، گیوتینی بودن برشها، دسته بندی قطعات و امکان استفاده از ضایعات برای تولید قطعات کوچکتر، دخالت دادن هزینه‌های مربوط به برش در هزینه استفاده از یک ورق و...) می‌توان به نحو موثرتری هزینه‌های ناشی از برش را کاهش داد، علاوه بر این، گسترش الگوریتم برای برش سه بعدی که دارای کاربرد فراوانی نیز هست از زمینه‌های مهم توسعه الگوریتم است.

می‌توان یک جواب خوب دانست. هر چند در عمل می‌توان این مسائل را به صورت مناسبی ساده تر کرده و با به کارگیری الگوریتم به جوابهای بهتری دست یافت.

از طرف دیگر با روش برش فعلی این شرکت در حدود ۱۸ تا ۲۰ درصد ضایعات تولید می‌شود که در صورت عمل مطابق جواب الگوریتم این ضایعات به حدود ۶ درصد خواهد رسید. البته ذکر این نکته ضروری است که بخشی از ضایعات فعلی کارخانه قطعاتی هستند که در یک سفارش به تعداد زیادی تولید شده و به علت مصرف نشدن با گذشت زمان کیفیت خود را از دست داده‌اند و یا به علت کمبود فضا برای نگهداری، به عنوان ضایعات از کارخانه خارج شده اند. بخش کوچکی از ضایعات فوق نیز ضایعات حاصل از تکنولوژی برش است.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله برش دو بعدی با تقاضا مورد بررسی قرار گرفت. اکثر محققان به مسئله برش با هدف کاهش ضایعات در ورق به طور مجزا، بدون در نظر گرفتن تقاضای قطعات پرداخته‌اند، در حالی که اکثر مسائل واقعی برش به صورت مسئله برش با تقاضا هستند. البته این مسئله جزء مسائل Np-hard بوده و نیاز به روشی ابتکاری برای حل عملی آن خواهد بود. لذا در این مقاله الگوریتمی فراابتکاری ارائه شده که با استفاده از روش SA مستقیماً به حل مسئله برش با تقاضا پرداخته است، در این الگوریتم دو SA وجود دارد که از یک SA تحت عنوان SA داخلی، در فرایند تولید جواب همسایگی در هر تکرار SA اصلی استفاده شده است، و SA دیگر مسئله اصلی را

- |  |                           |                            |
|--|---------------------------|----------------------------|
| 1. two dimensional cutting stock problem | 6. shadow prices          | 12. non guillotine         |
| 2. meta heuristic                        | 7. knapsack problem       | 13. orthogonal             |
| 3. simulated annealing                   | 8. state space relaxation | 14. partial sequence       |
| 4. cutting patterns                      | 9. lagrangean relaxation  | 15. hole                   |
| 5. column generation                     | 10. subgraient            | 16. bottom left            |
|  | 11. genetic algorithm     | 17. proportional decrement |

## مراجع

- Kantorovich, L.V., "Mathematical Methods of Organizing and Planning Production," *Manegment Science*, Vol. , pp.363-422, 1939.
- Gilmore, P.C., and Gomory, R.E, "A Linear Programming Approach to the Cutting - Stock Problem," *Operation Research*, Vol.9, PP.849-859, 1961.
- Gilmore, P.C., and Gomory, R.E, "A Linear programming Approach to the Cutting – Stock Problem-part II," *Operation Research* Vol.11, PP.863-888, 1963.
- Gilmore, P.C., and Gomory, R.E, "Multistage Cutting Stock Problems of Two And more Dimensons," *Operation Research*, PP.94-120, 1965.
- Beasley, J.E, "Algorithms for Unconstrained Two-Dimensional Guillotine Cutting," *Operations. Research Society*, Vol.36,No.4,PP.297-306,1985
- Hifi, M., and Ouafi, R., "Best-First Search And Dynamic Programming Methods for Cutting Problems: The cases of One or More Stock Plates," *Computers and Industrial Engearing*, Vol.32, No.1, PP.187-205, 1977.
- Christofides, N., and Whitlock, C., "An Algorithm for Two-Dimensional Cutting Problems," *Operation Research*, Vol.25, No.1, PP.30-44, 1977.
- Christofides, N., and Hadjiconstantinou, E., "An exact Algorithm for Orthogonal 2-D Cutting Problems Using Guillotine Cuts", *European Journal of Operational Research*, Vol.83, pp.21-38, 1995.
- Beasley, J.E., "An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure", *Operation Research*, Vol.33, No.1, PP.49-64, 1985.
- Wang, P.Y., "Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems," *Operation Research*, Vol.31, No.3, PP.573-586, 1983
- Dietrich, R.D., and Yakowitz, S.J., "A Rule-Based Approach to The Trim-Loss Problem", *International Journal of Production Research*, Vol.29, No. 20, PP.401-415, 1991
- Lai, K.K., and Chan, W.M., "Developing A Simulated Annealing Algorithm for The Cutting Stock Problem," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 32, No.1, PP.115-127, 1997.
- Beasley, J. E., "A Population Heuristic for Constrained Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting, <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/jeb.html>, 2000.
- Leung, T.W., Yung, C. H., and Trout, D.M., "Application of Genetic Search and Simulated Annealing to the Two-Dimensional Non- Guillotine Cutting Stock Problem," *Computers & Industrial Engineering*, Vol.40, PP.201-214 , 2001.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., and Vecchi, M. P., "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, Vol. 220, No. 4598, pp. 671-680, 1983.
- Lundy, m., and Mees, A., "Convergence of an Annealing Algorithm," *Mathematical programming*, Vol.34, pp.111-124, 1986.