

## بررسی منحنی پایداری خنثی برای جریان پشت یک صفحه تخت

محسن کهرم\*، کامران علوی\*\* و مجید ملک جعفریان\*\*\*  
گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۸۲/۳/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۳/۲۲)

**چکیده** - تحلیل پایداری خنثی برای یک جریان برشی برای نیمرخ سرعت در پشت صفحه تخت به کمک روش طیفی انجام شده است. پس از نگاشت معادله ماتریسی شده اور سامرفلد و نیمرخ سرعت حاکم توسط تابع تبدیل مناسب، مسئله مقادیر ویژه تعمیم یافته، با سری چند جمله ای کسینوسی چبی شف، تقریب زده شده است. با اعمال یکسری شرطها و توابع بر اساس تعداد جمله های به کار رفته سری و نقاط تصحیح، به انطباق ضرایب سری در نقاط ابتدایی و پایانی دامنه پرداخته می شود و در نهایت با اعمال شرایط مرزی نیومن برنامه محاسبات عددی مورد نیاز تهیه شده است. نتایج به دست آمده به صورت منحنیهای مختلف پایداری خنثی و همچنین جدول نتایج ارائه شده است. درستی و صحت عملکرد روش با نتایج عددی بدست آمده برای حالتی که نتایج عددی و آزمایشگاهی برای آن موجود بوده است برای نیمرخ سرعت در پشت سیلندر انجام شده است. مقایسه نشان می دهد که پاسخ به دست آمده انطباق کامل بر نتایج گزارش شده از روشهای دیگر و نتایج آزمایشگاهی دارد.

واژگان کلیدی: اور سامرفلد، اغتشاش، پایداری خنثی، روش طیفی، سری چبی شف، جریان برشی

## Stability Analysis for Wake Flow Behind a Flat Plate

M. Kahrom, K. Alavie, M. M. Jafaric

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashad

**Abstract:** *Neutral stability limits for wake flow behind a flat plate is studied using spectral method. First, Orr-Sommerfeld equation was changed to matrix form, covering the whole domain of solution. Next, each term of matrix was expanded using Chebyshev expansion series, a series very much equivalent to the Fourier cosine series. A group of functions and conditions are applied to start and end points in the mathematical domain of the solution so as to avoid error accumulation at these points. The scheme ends with two matrices which result from the Orr-Sommerfeld equation. These matrices are solved, in conjunction,*

\* - دانشیار      \*\* - دانشجوی کارشناس ارشد      \*\*\* - دانشجوی دکترا

*with boundary conditions ending up with a curve of neutral points of stability for an assumed velocity profile. Results are compared with other existing numerical methods and experiments, and the accuracy of the method is confirmed.*

**Keywords:** Orr-Sommerfeld, Disturbance, Neutral Stability, Spectral Method, Chebyshev Series, Shear flow

## ۱- مقدمه

در قرن بیستم بخش عمده تحقیقاتی که در دینامیک سیالات انجام شده است، به گونه‌ای با مسئله گذار جریان از آرام به مغشوش مرتبط بوده است. این موضوع که چگونه طراح بتواند مرحله گذار را در رینولدزهای دلخواه خود به انجام برساند، محققان بسیاری را به خود مشغول کرده است. نیاز به کنترل رینولدز نقطه گذار از حرکت سیال در لوله‌ها گرفته تا احتراق در کوره‌ها و روشهای خنک کردن تجهیزات الکترونیکی دارای اهمیت است. هر محقق، بنا به مقتضیات، از روش خاصی برای بررسی و شناخت عوامل مؤثر در تغییر رینولدز نقطه گذار استفاده کرده است. آرنولد سامرفلد [۱]، گری و هلگاسون [۲]، درازین و رید [۳]، آلن [۴] و ... از روشهای ریاضی برای بررسی خود استفاده کرده‌اند.

از آنجا که تحلیل ریاضی از روشهای ساده برای تحلیل رفتار جریان به شمار می‌آید و نگرشی عمیق از تحول را امکانپذیر می‌سازد، گروه بسیاری از محققان با روشهای ریاضی پدیده گذار به مغشوش را بررسی می‌کنند. یکی از روشهای معمول تحقیق ریاضی، روشی طیفی است که تا کنون توسط برخی از محققان همچون اورزاگ [۵] و گوت لیب به کار گرفته شده است [۶]. گروه دیگری نیز بنا به نیاز تحقیقی خود به بسط و توسعه این روش پرداخته‌اند [۷ تا ۱۰].

به دلیل ویژگیهایی که در حل معادله اور-سامرفلد با این روش وجود دارد، در این مقاله تصمیم گرفته شد که مطالعه پایداری زمانی برای نیمرخ سرعت پشت صفحه تخت به کمک این روش انجام شود. در بررسیهای انجام شده، مطالعات مشابه با موضوع این مقاله به دست نیامده است.

برای روش طیفی در مقایسه با روشهای دیگر مانند تفاضل محدود و ... مزایایی ذکر شده است. در روشهای عددی مثلاً

تفاضل محدود، برای اجرای محاسبات مشتقات مراتب مختلف، از اثر تعداد معدودی از نقاط اطراف نقطه محل اجرای محاسبات استفاده می‌شود، در حالی که در روش طیفی برای محاسبه مراتب مختلف مشتق در یک نقطه خاص، اثر کل مجموعه نقاط بر روی نقطه محاسباتی ملحوظ می‌شود. در روشهای عددی، برای دقیقتر شدن محاسبات، نقاط بیشتری از شبکه را در محاسبات مشتق دخالت می‌دهند که شکل و تعداد این نقاط نیز با توجه به ماهیت مسئله به صورت متقارن، یا بالا دست یا پایین دست آن نقطه خاص انتخاب می‌شوند و اگر با این دیدگاه به روش طیفی توجه شود به خوبی می‌توان مشاهده کرد که در نقاط اولیه، پس از هر مرز، فضای محاسباتی تماماً از اثر نقاط پایین دست استفاده می‌کند و در نتیجه دقت بسیار بالایی از خواص فیزیکی را نتیجه می‌دهد. همچنین در محاسبات مربوط به نقاط نزدیک به مرز انتهایی، محاسبه بر اساس تمام مقادیر موجود در بالادست انجام می‌پذیرد. برای محاسبه در نقاط میانی، در این روش، کل نقاط قرار گرفته در اطراف نقطه محاسباتی در محاسبه مشتق در آن نقطه شرکت می‌کنند. بدین ترتیب می‌توان مهمترین مشخصه و مزیت این روش بر روشهای دیگر را مشارکت دادن اثر تعداد بسیار بیشتری از نقاط محاسباتی بر نتایج مربوط به هر نقطه به شمار آورد. عمده ترین مشکل این روش نیز ناشی از همین مزیت محاسباتی است، که تعداد بسیار بیشتر محاسبات را برای به دست آوردن نتایج، نسبت به روشهای دیگر تحمیل می‌کند. برتریهای دیگر این روش را می‌توان در مرجع [۱۱] ملاحظه کرد.

## ۲- معادلات حاکم

می‌توان معادلات حاکم بر رشد یا کاهش دامنه یک اغتشاش را در جریانهای موازی با رابطه اور سامرفلد تقریب زد. اگر چه

با اعمال نظریه اسکواپر و شرط یک بعدی بودن جریان میانگین و حذف فشار از دستگاه معادلات به دست آمده، یک معادله جدید به صورت زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + u' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - v' \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (5)$$

که معادله تاوایی برای اغتشاش است. و با توجه به:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

می‌توان نوشت:

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

که  $\psi(x, y, t)$  یک جزء از تابع جریان اغتشاشی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (8)$$

با جایگزینی (۷) در (۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u' \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d^2 u}{dy^2} = \nu \nabla^2 \xi \quad (9)$$

که در این معادله:

$$\xi = -\nabla^2 \psi = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (10)$$

فرض شده است. همچنین با جایگذاری (۸) در (۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه ۴ برای دامنه اغتشاش،  $\phi(y)$ ، به شرح زیر نتیجه می‌شود:

$$\left( \bar{u} - \frac{\omega}{\alpha} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right) - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \phi = - \quad (11)$$

$$\frac{i\nu}{\alpha} \left( \frac{d^3 \phi}{dy^3} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi \right)$$

$\phi(y)$ ، دامنه تابع جریان اغتشاش و مقداری است مختلط،  $\xi$  نماد تاوایی،  $\omega$  فرکانس زاویه یک جزء اغتشاش و  $\alpha$  عدد موج اغتشاشات اند. با معادله  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$  به طول موج مربوط می‌شود.

یک تحول مغشوش پدیده ای سه بعدی است، اما بر اساس نظریه اسکواپر [۱۲] در جریانهای مداوم می‌توان ناپایداریهای سه بعدی را در هر عدد رینولدز، به مسئله دو بعدی تحلیل ناپایداری تبدیل کرد. در چنین حالتی باید دو محور افقی  $x$  و  $z$  دقیقاً به یک محور در جهت انتقال موج تبدیل شود. با این خلاصه سازی رفتار اغتشاشهای سه بعدی را می‌توان از نتایج حاصل از اغتشاشهای دو بعدی قیاس کرد. استفاده از این نظریه بسیار راهگشا و کاهش دهنده زمان انجام محاسبات است.

اگر سرعت متوسط در جهت اصلی جریان به صورت  $\bar{u}=f(y)$  در نظر گرفته شود و سرعتهای متوسط راستاهای دیگر صفر منظور گردد، می‌توان مولفه های لحظه ای  $u', v', w', p'$  را به مقادیر متوسط مولفه های سرعت و فشار اضافه و در معادلات ناویر استوکس برای جریان تراکم ناپذیر جایگزین کرد. هرگاه اغتشاشات  $u', v', w', p'$  به اندازه کافی کوچک فرض شوند (نظریه پایداری خطی)، مراتب دوم ناشی از حاصلضرب آنها،  $u'v', u'w', u' \frac{\partial u'}{\partial x}$  بسیار ناچیز و قابل چشم پوشی خواهند بود [۱۳]. بدین ترتیب پس از کم کردن معادلات متوسط از معادلات اغتشاشی ناویر استوکس، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \Delta u' \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \Delta v' \quad (2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

عملگر مشتق کامل  $\frac{D}{Dt}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4)$$

با فرض اینکه تغییرات مولفه  $x$  سرعت متوسط، یعنی  $\bar{u}$ ، فقط به  $y$  وابسته باشد، مولفه های  $\frac{\partial}{\partial x}$ ،  $\frac{\partial}{\partial z}$  در میدان جریان صفر می‌شوند.

این معادله به نام اورسامرفلد شناخته شده و اساس نظریه پایداری خطی لایه های آرام در شاره های تراکم ناپذیر را تشکیل می دهد. با به کارگیری سرعت مرجع که در مدل انتخابی این تحقیق مقدار سرعت در وسط نیمرخ است، و طول مرجع، معادله اور سامرفلد به شکل بدون بعد زیر به دست می آید:

$$(u-c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi\right) - \frac{d^2u}{dy^2}\phi = - \quad (12)$$

$$\frac{i}{\alpha R}\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi\right) + \alpha^2\phi$$

در این رابطه تمام متغیرها به صورت زیر بدون بعد شده اند:

$$\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{U_0}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{U_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{D} \quad (13)$$

$$R = \frac{U_0 D}{\nu}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{D}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{D} \quad \text{و}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \cdot D$$

متغیرهایی که بر روی آنها علامت ~ گذاشته شده است، مقدار بدون بعد شده یا مقدار تبدیل به واحد شده همان متغیر است. ولی در معادله (12) و پس از این به منظور صرفه جویی در کار نگارش، از گذاشتن این علامت بر روی متغیرها خودداری می شود، بدون اینکه منظور تغییر مفهوم آنها باشد.

در این معادلات؛  $c = c_r + ic_i$  که در آن  $c = \frac{\omega}{\alpha}$  یا در بعضی مراجع مانند مرجع [13] با معادله  $c = \frac{\beta}{\alpha}$  تعریف می شود که  $c$  سرعت مختلط فاز انتقال اغتشاش و  $D$  مشخصه طولی مثلاً برای نیمرخ سرعت در اطراف استوانه،  $D$  قطر استوانه است.

### ۳- روشهای حل

به علت عدم امکان حل این معادله به صورت تحلیلی (مگر در موارد خاص)، محققان مختلف سعی کرده اند هر یک با بهره گیری از روشهای مختلف به حل این مسئله بپردازند. از جمله این روشها می توان به موارد زیر اشاره نمود:

الف: روشهای تجربی،

ب: روش پرتابی (Shooting Method)

ج: روش  $e^{\lambda y}$  یا روش اسمیت [13]،

د: روشهای طیفی.

الف: در روش تجربی دست یابی به دقت و تجهیزات لازم بسیار دشوار بوده و مسائل اجرایی آنقدر گسترده است که موضوع اصلی مطالعه تحت تأثیر تأمین تجهیزات قرار می گیرد. این مساله تا به آنجا حساس است که حتی استفاده از ظریف ترین ابزار سنجش متغیرهای سیال در لایه مرزی، موجب تغییر رینولدز بحرانی و کوچکتر شدن ناحیه تقویت آشفتگیها می گردد. در نتیجه گردابه های ناشی از تقویت آشفتگیها رینولدزها پایین تر و در فرکانسهای بالاتر انجام می پذیرد. در مراجع [15] و [16] موارد بسیاری از داده های تجربی برای جریانهای خاص وجود دارد که مطالعه آنها با روش آزمایشگاهی میسر بوده است.

ب: در روش پرتابی، معادله اور-سامرفلد به تعدادی معادله خطی  $\phi_y = A\phi$  تبدیل می شود که در شکل ماتریسی به صورت زیر قابل نگارش است:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b(y,c) & 0 & -a(y,c) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

در این رابطه  $\phi_1 = \phi$ ،  $\phi_2 = \phi'$ ،  $\phi_3 = \phi''$  و  $\phi_4 = \phi'''$  فرض شده اند.

به این ترتیب با حدس یک مقدار برای  $c$ ، از یکی از دو مرز آغاز به حل کرده و به سمت مرز دوم پیش می روند و نتایج به دست آمده از این طریق را با شرایط مرزی دوم، که موجود است، مقایسه می کنند. این فرایند آن قدر تکرار می شود تا حل با شرایط مرزی همخوانی و انطباق داشته باشد. روش رانگ کوتای مرتبه 4، معمولاً برای حل در روش پرتابی استفاده می شود. روش پرتابی برای مقادیر ویژه به یک جستجو در صفحه اعداد مختلط نیاز دارد. اگر برای مقادیر ویژه حدسهای مناسب زده نشود یا اگر عدد رینولدز بزرگ باشد، روش پرتابی روش دشواری برای حل این معادله است.

در این روش خیلی دیر می توان به پایداری دست یافت. به

$$B_{ij} = \alpha^2 I_{ij} - D_{ij}^2 \quad (17)$$

$\phi$  بردار ویژه و  $c$  مقدار ویژه است. اکنون باید برای دو ماتریس  $A$  و  $B$ ، دو مقدار  $\phi$  و  $c$  محاسبه شوند.

ماتریسهای  $A$  و  $B$  شامل متغیرهای زیر می شوند: عدد موج  $\alpha$ ، رینولدز  $R$ ، عملگرهای مراتب مختلف مشتق مانند  $D_{ij}^2$ ،  $D_{ij}^4$ ، نیمرخ سرعت،  $u_{ij}$ ، مشتق نیمرخ سرعت  $u_{ij}''$ ، ماتریس یک  $I_{ij}$ .

بنابراین برای تعیین ماتریسهای  $A$  و  $B$  نیاز به تعیین مقدار برای عملگرهای مراتب مختلف مشتق و نیمرخ سرعت و مشتق آن است. باید عملگرهای مراتب مختلف مشتق را بر اساس سری و روش انتخابی که برای تقریب استفاده می شود، تعریف کرد. همچنین از نیمرخ سرعت و مشتقات آن که مربوط به جریان مورد نظر است، استفاده می شود.

#### ۴- انتخاب در روش طیفی

در این تحقیق برای تقریب تابع  $\phi$  از تابع کسینوس استفاده می شود. انتخاب این تابع، به علت حالت خود ارضایی شرایط مرزی در آن است، تا مقداری از پیچیدگیهای اعمال شرایط مرزی کاهش یابد، [۱۱].

لذا سری چند جمله ای چبی شف به صورت زیر که در واقع منطبق بر سری فوریه کسینوسی است، استفاده می شود:

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\eta) \quad (18)$$

$$T_n(\eta) = \cos(n \cos^{-1} \eta) \quad (19)$$

$$\eta_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right) \quad i = 0, \dots, N \quad (20)$$

برای تقریب از خاصیت تعامد استفاده کرده و نسبتهای زیر به دست می آید:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(\eta) T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \delta_{ij} \frac{\pi}{2} c_j \quad (21)$$

که اگر  $\delta_{ij} = 1$  باشد، مولفه موهومی سرعت اغتشاش،  $c_i = 1$  است و اگر  $\delta_{ij} = 0$  باشد،  $c_0 = 2$  می شود.

همین دلیل تمهیدات و روشهای ویژه ای برای رسیدن به حل معادله و رفع مشکلات ارائه شده است. علاقه مندان می توانند به مجموعه تحقیقات ماروسیک از دانشگاه مینوسوتا مراجعه کنند [16]، مراجع دیگری نیز وجود دارد، [۱۷].

ج: در روش  $e^9$ ، مقادیر بدست آمده برای دامنه موج اغتشاش در طول مسیر جریان مورد نیاز است و باید این مقادیر در دست باشند. به عبارت دیگر لازم است تغییرات قسمت موهومی فرکانس نسبت به مکان موجود باشد.

فرض اصلی این روش در دست داشتن نقطه شروع گذار در رینولدز بحرانی با اغتشاش کوچک است، وقتی که  $\alpha_i \neq 0$  (متوسط قسمت موهومی فرکانس اغتشاش مخالف صفر باشد)، دامنه اغتشاش تا نقطه گذار به اغتشاش، با ضریب  $e^9$  تقویت می شود.

تحقیق با این روش ادامه دارد و یکسری تغییرات و تصحیحات بر مطالعات قبلی انجام شده و در مراجع گزارش می شوند، [۱۴]. اما چون استفاده از این حل خود نیاز به آگاهی از نتایج ناپایداری در فاصله به خصوصی پس از رینولدز بحرانی دارد، توجه کمتری در مقایسه با روش طیفی (که در بیشتر موارد حل دقیق را ارائه می کنند) به آن می شود.

د: در این مقاله از روش طیفی برای حل معادله اور-سامرفلد استفاده می شود. در روش ارائه شده ضمن استفاده از سری چند جمله ای کسینوسی، از مزایای تابع نمایی که در روش  $e^9$  بکار رفته است، نیز استفاده می شود.

تحقیق جاری با بهره گیری از امکانات محاسباتی و به صورت عددی مطابق با روش طیفی انجام شده است. در این روش ابتدا معادله اور-سامرفلد به صورت تفکیکی و به شکل ماتریسی نوشته می شود. شکل ماتریسی زیر که منطبق بر یک مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته است، نتیجه می دهد:

$$(\underline{A} - c\underline{B})\underline{\phi} = 0 \quad (15)$$

در این معادله:

$$A_{ij} = \left[ \frac{1}{i\alpha R} D_{ij}^4 + \left( \frac{-2\alpha^2}{i\alpha R} I_{ij} - u_{ij} \right) D_{ij}^2 + \left( \frac{\alpha^4}{i\alpha R} I_{ij} + \alpha^2 u_{ij} + u_{ij}'' \right) \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = f'(y) \quad (28)$$

$$D_{ij}^1(y) = D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (29)$$

$$D_{ij}^r(y) = D_{ij}^r(\eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^r + D_{ij}^r \frac{\partial^r \eta}{\partial y^r} \quad (30)$$

$$D_{ij}^r(y) = D_{ij}^r(\eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^r + r D_{ij}^r \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^{r-1} \eta}{\partial y^{r-1}} + D_{ij}^r(\eta) \frac{\partial^r \eta}{\partial y^r} \quad (31)$$

$$D_{ij}^r(y) = D_{ij}^r(\eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^r + r D_{ij}^r(\eta) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{r-1} \frac{\partial^r \eta}{\partial y^r} + \dots \quad (32)$$

$$D_{ij}^r(\eta) \left[ r \left( \frac{\partial^r \eta}{\partial y^r} \right) + r \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^{r-1} \eta}{\partial y^{r-1}} \right] + D_{ij}^r(\eta) \frac{\partial^r \eta}{\partial y^r}$$

عملگر  $D$  مشتقگیر بوده و در فاصله  $y = \{-1, 1\}$  تعریف شده است. به این ترتیب می توان توسط معادلات بالا با اعمال نیمرخ سرعت و مشتقات آن در دامنه فیزیکی، به معادلهای آنها در دامنه سری چبی شف دست یافت.

## ۵- آزمون روش

در مرحله انتخاب نیمرخ و به منظور ایجاد امکان مقایسه با تحقیقات محققان دیگر، سعی شد تا تحقیق مشابهی را در روش طیفی به دست آورده و پاسخهای این تحقیق را با آن مقایسه کنیم. آنچه که برای این منظور قابل دسترس بوده است، تحقیقی در تحلیل نیمرخ سرعت در پشت سیلندر است، که امکان رسیدن به نتیجه مطلوب با مکاتبات مکرر با محققان آن امکانپذیر شد [۱۶]. در مکاتبات خصوصی متعدد [۱۸ تا ۲۲] و استفاده از سایت اینترنتی دانشگاه مینوسوتا، با انتخاب نیمرخ سرعت در پشت سیلندر که توسط مرجع ۱۶ برای تحلیل استفاده شده است و در مقایسه با نتایج عددی و آزمایشگاهی که صحت آنها برای موارد متعدد تایید شده است، به تحلیل آزمون صحت برنامه تهیه شده پرداخته شد که پاسخهای به دست آمده بر نتایج مذکور انطباق کامل داشته است. شکل (۱)،

می توان مشتقات تابع را به وسیله چند جمله ای  $T_n(\eta)$  با اختلاف جمله به جمله ضرایب  $a_n$  تعریف کرد. چون ضرایب ناشناخته اند، مشتقگیری از چند جمله ایها ساده تر است. به هر حال می توان ضرایب چند جمله ایهای چبی شف را تشخیص داده و به ضرایب اصلی استفاده شده در عملگر مشتقها نسبت داد:

$$\phi^{(k)}(\eta_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^{(k)} a_j T_j(\eta_i) \quad (22)$$

مشتقات مراتب بالاتر، با چند بار اجرای عملگر مشتق به صورت زیر به دست می آیند.

$$D_{ij}^k = (D_{ij}^1)^k \quad (23)$$

برای تطبیق نقاط پایانی در چند جمله ای چبی شف، طبق توابع کاردینال از الگوی زیر که توسط گوت لیب، حسینی و اورزاگ به نام شبکه لوباتو - گوس ارائه شده، استفاده می شود، [6 و 11]. این الگو با اندکی تغییر، متناسب با متغیرهای تحقیق حاضر به صورت زیر تعریف می شود.

$$D_{00}^1 = \frac{2N^2 + 1}{6} = -D_{NN}^1 \quad i = j = 0 \text{ تا } N \quad (24)$$

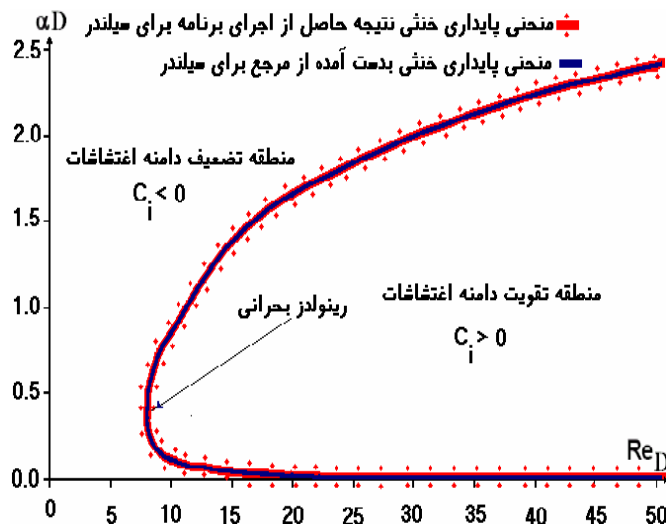
$$D_{ii}^1 = \frac{-\eta_i}{2(1 - \eta_i^2)} \quad i = j, 0 < j < N \quad (25)$$

اگر  $i \neq j$  باشد،  $c_i = 1$  و  $c_0 = c_N = 2$  و معادله به صورت زیر خلاصه می شود که:

$$D_{ij}^1 = \frac{c_j (-1)^{i+j}}{c_i (\eta_j - \eta_i)} \quad (26)$$

دامنه سری چبی شف و عملگرهای مشتق در فاصله  $\eta = \{-1, 1\}$  تعریف شده اند. پس لازم است که توسط یک تابع تبدیل، دامنه فیزیکی نیمرخ سرعت انتخابی، یعنی  $y \in (-\infty, \infty)$  را به دامنه محاسباتی  $\eta \in (-1, 1)$  تبدیل کنیم. برای این منظور از تابع تبدیل  $y = \tan\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)$  استفاده می کنیم. در نتیجه عملگرهای مشتق با توجه به تعریف تابع تبدیل، در دامنه محاسباتی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\eta = f(y) \quad (27)$$



شکل ۱- مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج تجربی به دست آمده برای نیمرخ سرعت در پشت صفحه تخت

$$\frac{d^2u}{dn^2} = U_0 D^2 \left\{ -0.936 \operatorname{Tanh} \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) - 0.4 \right] / \operatorname{Cosh}^2 \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) - 0.4 \right] + 0.936 \operatorname{Tanh} \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) + 0.4 \right] / \operatorname{Cosh}^2 \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) + 0.4 \right] \right\} \quad (35)$$

این معادلات همراه با معادله (۱۵) برای یافتن منطقه تقویت ناپایداری نوسانات اغتشاش در لایه‌های آرام کافی است. محاسبات عددی لازم، توسط یک برنامه رایانه‌ای انجام شده است. این برنامه در محیط برنامه نویسی فرترن نوشته شده و با بهره‌گیری از ۱۰ زیر برنامه کلی که هر کدام به دفعات زیر برنامه های دیگری را فراخوانی می‌کنند، این مسئله بسیار دشوار ریاضی حل شده است [۱۴].

لازم به ذکر است که برای حل مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته، نیاز به استفاده از نرم افزارها یا کدهای مناسب ریاضی به عنوان Solver است که می‌توان از Matlab، Mathematica، Maple، Algebra و Lapack استفاده کرد، یا از انواع روشها و کدهای گسترش داده شده برای این منظور استفاده کرد. [۲] و [۲۳ تا ۲۶]. در تحقیق حاضر برای حل مسئله مقدار ویژه از زیر برنامه ZGGEV موجود در نرم افزار Lapack استفاده شده است، زیرا دسترسی به متن برنامه آن میسر بوده است.

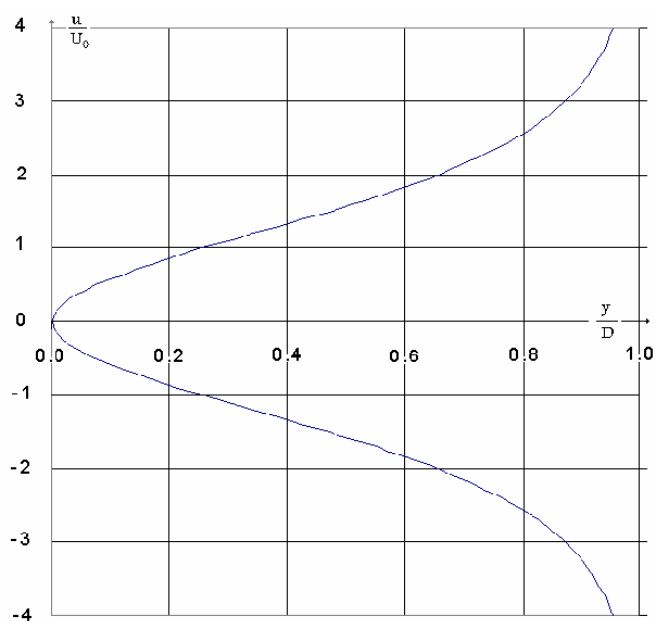
مقایسه منحنیهای پایداری خنثی به دست آمده در پشت سیلندر برای روش حاضر و مرجع ۱۶ دیده می‌شود. در این مقایسه نتیجه به دست آمده، به علت انطباق کامل با نتیجه مرجع، به صورت ستاره در اطراف آن رسم شده اند.

پس از حصول اطمینان از صحت عملکرد برنامه، برای آزمون دیگر، یک نیمرخ سرعت بدون بعد برای پشت صفحه تخت انتخاب شد:

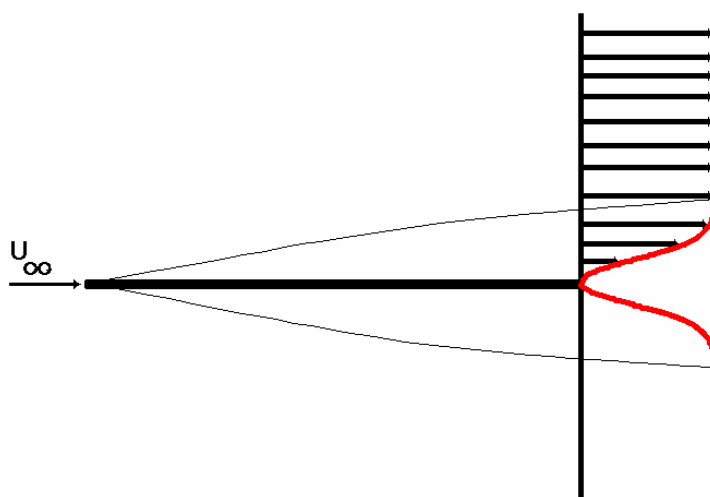
$$\frac{u}{U_0} = 1.3 \operatorname{Tanh} \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) - 0.4 \right] - 1.3 \operatorname{Tanh} \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) + 0.4 \right] + 0.01 \quad (33)$$

که انطباق کاملی بر نیمرخ نشان داده شده در تصویر ۹-۱۰ مرجع [۱۳] دارد و می‌توان این توزیع را در شکل (۲) و موقعیت قرار گیری آن نسبت به صفحه را در شکل (۳) همین مقاله مشاهده کرد. استفاده از معادله نیمرخ سرعت برای محاسبه مشتقات مرتبه های مختلف مورد نیاز روش طیفی است. این مشتقات برای معادله (۳۳) به صورت معادلات زیر نتیجه می‌شوند: مشتقات مرتبه اول و دوم:

$$\frac{du}{dn} = U_0 D \left\{ -0.78 / \operatorname{Cosh}^2 \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) - 0.4 \right] + 0.78 / \operatorname{Cosh}^2 \left[ 0.6 \left( \frac{y}{D} \right) + 0.4 \right] \right\} \quad (34)$$



شکل ۲- نیمرخ لایه برشی آرام در پشت یک صفحه تخت، معادله (۲۳)



شکل ۳- نحوه فرار گرفتن نیمرخ آرام پشت یک صفحه تخت

## ۶- جمع‌بندی و بحث

این قسمت از بحث برای محققانی است که ممکن است علاقه‌مند به ادامه چنین تحقیقاتی باشند. در ادامه اجرای این تحقیق سعی شد که همین روش برای نیمرخ سرعت در لایه مرزی آرام روی صفحه تخت نیز به کار رود که با اشکالاتی مواجه شد. اولین اشکال در انتخاب تابع تبدیل بود که به

صورت تبدیل خطی انتخاب شده بود [۲۷]. اما عمده این اشکالات مسئله تطبیق مقادیر نقاط پایانی در نیمرخ سرعت و روش انتخابی است که برای ایجاد دقت مورد نیاز، احتیاج مبرم به ارائه و به کارگیری تعدادی تابع و شرطهای ویژه دارد. این موضوع به ویژه زمانی اهمیت خویش را مشخص می‌کند که به مفهوم اصلی و علت به کارگیری نقاط پایانی توجه شود. در



اینجا بنا به لزوم توضیح این موضوع و ایجاد راهی برای تحقیقات آینده اشاره ای مختصر می‌شود.

به علت استفاده از انواع مختلف سریها در این روش و به علت قطع جمله های سری از مرتبه N به بعد، لازم است که ضرایب سریها، چنان تعیین شوند که مقادیر ابتدایی و انتهایی (که معروف به نقاط پایانی هستند)، توسط تعدادی توابع و شرطهای مربوط به آنها، بر مقادیر واقعی منطبق شوند.

این موضوع باز هم زمانی حساسیت بیشتر خویش را نشان می‌دهد که توجه شود برای حل یک مسئله، دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی که معمولاً بسیار کوچکتر است، تبدیل و نگاشت شود. که این موضوع به نوبه خود موجب می‌شود تا کوچکترین خطایی در اعمال شرایط نقاط پایانی، تاثیر بسیار گسترده بر کل حل و معنای آن در دامنه فیزیکی داشته باشد.

از سوی دیگر ویژگی بارز این روش حل، استفاده از کل نقاط تعیین شده در دامنه، برای انجام محاسبه در هر یک از نقاط است که موجب شده است تا در بسیاری از تحقیقات، جایگزین حل تحلیلی شود. اما این امر زمانی تحقق می‌یابد که در اعمال شرایط مرزی مسئله به صورت شرایط مرزی نیومن و در اعمال شرایط و توابع مربوط به نقاط پایانی، خطایی ایجاد نشود، زیرا با ایجاد کوچکترین خطایی، این خطا به کل دامنه گسترش می‌یابد.

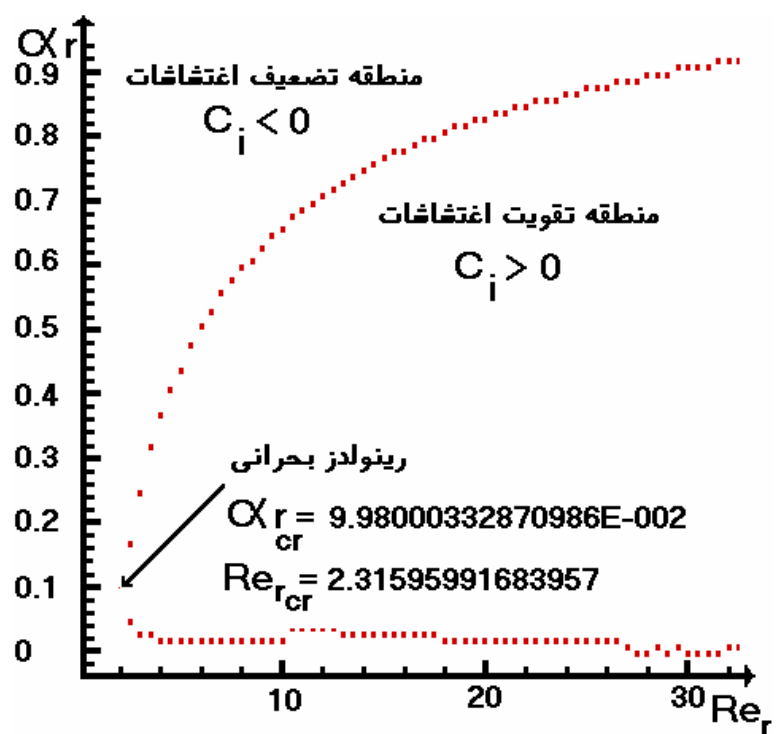
بدین ترتیب لازم بود تا نقاط پایانی مناسبی برای نیمرخ روی صفحه تخت، انتخاب و اعمال شود به ویژه که در بررسی مسئله پایداری خنثی برای روی صفحه تخت حساسترین قسمت، نقطه ابتدایی فیزیکی صفر است که در نگاشت با تابع تبدیل به کار گرفته شده بر 1- منطبق می‌شود. در بین مجموعه توابعی که توسط دیگر محققان برای این منظور ارائه شده است، مورد قابل استفاده ای یافت نشد و لازم بود که تعدادی تابع برای این حالت پیشنهاد شود و درستی آن از جهات مختلف امتحان گردد. به همین دلیل ارائه این تابع به مقاله دیگر واگذار شد و از گزارش برای نیمرخ روی صفحه تخت خودداری می‌شود.

برای نیمرخ سرعت در پشت صفحه تخت، با استفاده از

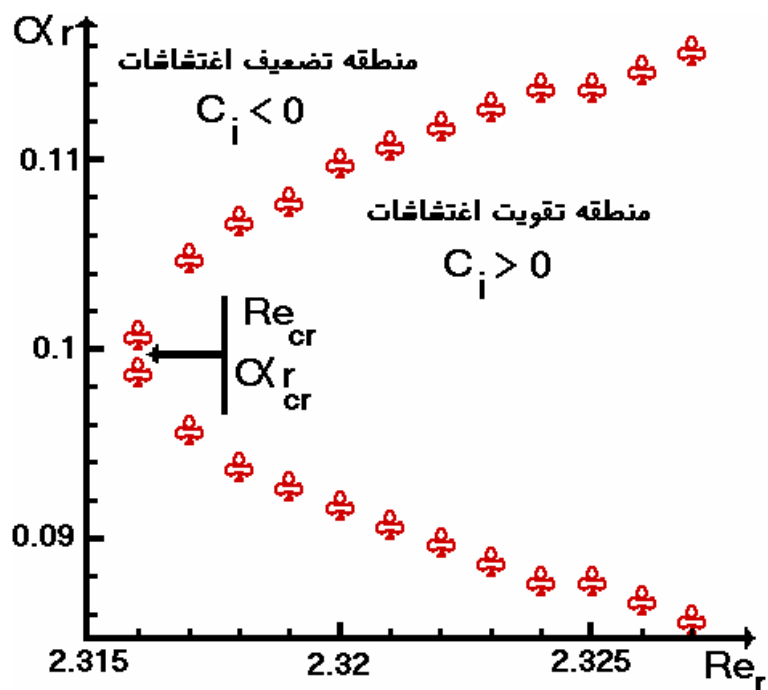
معادله (۳۳)، یا شکل (۴)، برای  $N=100$  منحنی پایداری خنثی مطابق شکل (۵) به دست آمده است که از نظر کیفی نتیجه مناسبی برای این حالت است. به خوبی می‌توان دید، اولین نقطه ای که در آنجا تحریک ایجاد شده و می‌تواند بر دامنه تحریک افزوده شود، در  $Re_{cr} = 2.31$  است که فرکانس مربوطه به این تحریک  $\alpha r_{cr} = 9.98E - 002$  می‌شود. هر تحریک دیگری که قبل از این نقطه ایجاد شود، دامنه آن رو به رو به کاهش گذاشته، میرا خواهد بود. به همین ترتیب اگر تحریکی با فرکانس و رینولدزی که در داخل منحنی پایداری خنثی قرار می‌گیرد، ایجاد شود، تقویت شده و به ناپایداری و ایجاد اغتشاش کمک می‌کند.

سعی شده است تا حد ممکن دقت این محاسبات افزایش یابد. در همین راستا کلیه مقادیر به صورت دقت مضاعف ذخیره سازی و در محاسبات شرکت کرده‌اند، استفاده از دقت مضاعف به حفظ پایداری محاسبات کمک می‌کند. در طول هر دوره از محاسبات مقدار  $C_i$ ، قسمت موهومی سرعت مختلط، به سمت مقداری ثابت (مجانب) میل می‌کند. استفاده از دقت مضاعف موجب می‌شود که در نتیجه گرد کردن اعداد، مقدار  $C_i$  به سمت دیگر مجانب جهش نکند و نهایتاً به سمت بینهایت شروع به انشعاب نکند. استفاده از دقت مضاعف توسط تانگ (۱۶) توصیه شده و در محاسبات این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

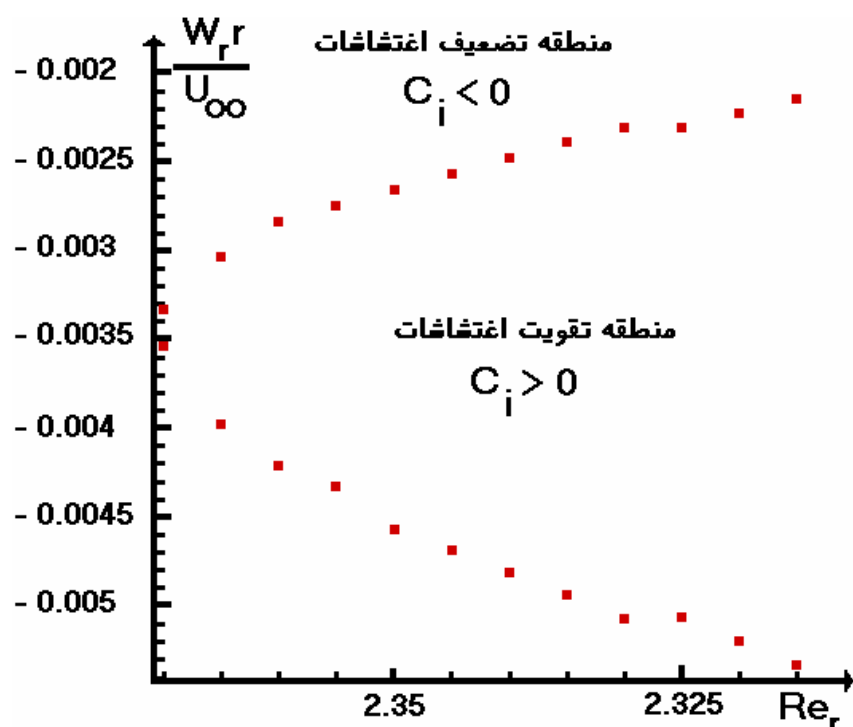
در اجرای این پروژه از یک رایانه شخصی Pentium IV 2000 Full Cache استفاده شده است. اگرچه در حال حاضر با اندازه‌گیری و انجام آزمونهای تجربی هرگز امکان رسیدن به دقت ارائه شده در این مقاله فراهم نمی‌شود، اما بهتر است که برای صرفه جویی در وقت و در عین حال دستیابی به دقتهای بیشتر، با استفاده از سیستم رایانه‌های موازی یا رایانه‌های مادر حل مجدد انجام شود. در شکل (۵) به خوبی می‌توان رینولدز بحرانی را مشاهده کرد. این تصویر منحنی پایداری خنثی زمانی را برای نیمرخ پشت صفحه تخت، نشان می‌دهد. همچنین در شکل (۴) قسمت ابتدایی (دماغه) برای همین منحنی نمایش



شکل ۴- منحنی پایداری خشی پشت یک صفحه تخت



شکل ۵- قسمتهای اولیه (دماغه) منحنی پایداری خشی برای نیمرخ پشت صفحه تخت



شکل ۶- تابعیت پایداری لایه مرزی آرام از فرکانس اغتشاشات در رینولدزهای مختلف، پشت صفحه تخت

می‌باشد. کاربرد مدل برای نیمرخ سرعت پشت مقطع یک استوانه، آزمایش شده است، [۱۶]. نتایج به دست آمده از این روش انطباق دقیق و بسیار خوبی بر نتایج بدست آمده از آزمایش دارند. همین روش مجدداً برای نیمرخ سرعت در پشت صفحه تخت که روابط دقیق توزیع سرعت و مشتقات مرتبه اول و دوم آن در دست بوده اند مورد استفاده قرار گرفته و نتایج آن در همین مقاله گزارش شده است. استفاده از این روش در مورد نیمرخ سرعت روی صفحه تخت (حل بلازیوس) با دشواریهایی مواجه گشت که در بخش ۶ به تشریح این مشکلات پرداخته شده است.

داده شده است و شکل (۶) تغییرات قسمت حقیقی فاز بی بعد شده را برای همین نیمرخ و در قسمتهای اولیه (دماغه) آن نشان می‌دهد. روند همه اشکال تقریباً به یک شکل است. بدیهی است که هر آشفتگی که مشخصات آن در قسمت داخلی منحنی قرار گیرد، تقویت، و به گذار لایه مرزی به توربولنت کمک می‌کند و چنانچه مشخصات فیزیکی نقطه مورد مطالعه در بیرون منحنی قرار گیرد دامنه آن تضعیف خواهد شد. نقاط روی منحنی، تقویت خنثی را نشان می‌دهد.

#### ۸- نتیجه گیری

در این تحقیق، سری چپی شف برای حل معادلات اور-سامرفلد مورد استفاده قرار گرفته است که این معادلات قادر به پیش بینی چگونگی گسترش تحریک خطی در لایه های آرام

1. Sommerfeld, A.: Ein Beitrag Zur Hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussig Keitsbewegungen. Att: del 4. congr. Internat. Dei Mat. III, 116 — 124, Rooma, 1908.
2. Gary, S., and Helgason R., "A Matrix Method for Ordinary Differential Eigenvalue Problems," *Journal of Computational Physics*, V5. pp 169-187, 1970.
3. Drazin, P.G., and Reid W.H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Press, 1981.
4. Allen, L. "Fluid Flow Past a Compliant Surface," University of Surry PhD Thesis, 1999. <http://www.maths.surrey.ac.uk/personal/pg/L.Allen/fvreport.pdf>
5. Orszag, S.A., "Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation," *Journal of Fluid Mechanics*, V50 N4. pp 689-703, 1971.
6. Gottlieb, D., and Orszag S.A., "Numerical Analysis of Spectral Methods," Theory and Applications, SIAM, Philadelphia, 1977.
7. Voight, R.G., Gottlieb D., and Hussaini, M.Y., "Spectral Methods for Partial Differential Equations," SIAM, 1984.
8. Don, W.S., and Solomonoff A., "Accuracy Enhancement for Higher Derivatives Using Chebyshev Collocation and a Mapping Technique," *SIAM Journal on Scientific Computing*, V18 N4, pp. 1040-1055, 1997.
9. Dongarra, J. J., Straughan IB., and Walker, D. W., "Chebyshev Tau/QZ Algorithm Methods for Calculating Spectra of Hydrodynamic Stability Problems," *Journal of Applied Numerical Mathematics*, V22 N4, pp 399-435, 1996.
10. Fox, L., "Chebyshev Methods for Ordinary Differential Equations," *The Computer Journal*, V4 N4, pp 318-331, 1962.
11. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Second Edition John P. Boyd University of Michigan 2001
12. Squire, H. B., *On the Stability for Three Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow*, p9, 1933
13. Schlichting, H., and Gersten K. *Boundary Layer Theory* ISBN 3-540-66270-7 Springer-verlag 2000
14. کرمانی، م. ر. "پایان نامه کارشناسی ارشد"، دانشگاه منچستر.
15. Strykowski, P.S. and Sreenivasan, K.R. "The Control of Vortex Shedding Behind Circular Cylinders at Low Reynolds Numbers," 5th International Symposium on Turbulent Shear Flows, Ithaca, NY., 1985.
16. Marusic, I., Tang, IB. and Had, R. Rayven, Ch. *Stability Analysis of a Cylinder Wake*, University of Minnesota, Pub. AEM 8211 spring 2001
17. Ng B.S. And Reid, W.H., "On the Numerical Solution of the Orr-Sommerfeld Problem: Asymptotic Initial Conditions for Shooting Methods," *Journal of Computational Physics*, V38, pp 275-293, 1980.
۱۸. مکاتبات خصوصی ملک جعفریان با پروفسور ماروسیک، آذر ماه ۱۳۸۱.
۱۹. مکاتبات خصوصی ملک جعفریان با دکتر تانگ، بهمن ماه ۱۳۸۱.
۲۰. مکاتبات خصوصی علوی با دکتر تانگ (شماره ۱).
۲۱. مکاتبات خصوصی علوی با دکتر تانگ (شماره ۲).
۲۲. مکاتبات خصوصی علوی با دکتر تانگ (شماره ۳).
23. Huang, W., and Sloan, D.M., "The Pseudospectral Method for Solving Differential Eigenvalue Problems," *Journal of Computational Physics*, V111, PP 399-409, 1994.
24. Weideman, SAC., and Reddy S.C., "A Matlab Differentiation Matrix Suite," *ACM Transactions on Mathematical Software*, V26 N4, pp 465-519, 2000. [http //uc s. orst. edu/weidemaj/differ.html](http://uc.s.orst.edu/weidemaj/differ.html).
25. Welfert, RD., "Generation of Pseudospectral Differentiaton Matt-ices I," *SIAM Juranl of Numerical Analysis*, V34 N4, pp 1640-165, 1997
26. Ng, B.S., arid Reid, W.H., "An Initial Value Method for Eigenvalue Problems Using Compound Matrices," *Journal of Computational Physics*, V30, pp 125-136, 1979.
۲۷. مکاتبات خصوصی علوی با پروفسور بوید، بهمن ۱۳۸۱.