

## استفاده از روش قاچی اصلاح شده در نورد نامتقارن ورق

فاطمه فرहत نیا\* و محمود سلیمی\*\*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۲/۹/۲۳ - دریافت نسخه نهایی: ۸۴/۷/۱۹)

چکیده - در این مقاله، یک روش تحلیلی بر اساس روش قاچی اصلاح شده ارائه شده تا فرایند نورد نامتقارن به دلیل وجود اختلاف در شعاع غلتکهای کاری، سرعت غلتکها و اصطکاک بین سطوح مورد مطالعه قرار گیرد. تنش برشی اعمال شده بر ماده در طول تماس تابعی از ضریب اصطکاک و شرایط هندسی در شکاف غلتکها در نظر گرفته شده است. معادله متشکله الاستو-پلاستیک با سخت شوندهگی خطی فرض شده است. فاکتورهای عدم تقارن در نظر گرفته شده عبارتند از نسبت قطر غلتکها، عدم انطباق سرعت غلتکها و تفاوت در شرایط اصطکاک بین سطوح. جابه جایی نقاط خنثی در طول تماس ورق با غلتکها نسبت به تغییرات درصد کاهش ضخامت ورق، نسبت سرعتها، شعاعها و تنشهای کششی در ورود و خروج ورق بررسی شده است. مقادیر پیش بینی شده برای نیرو و گشتاور توسط مدل حاضر با مقادیر دیگر محققان مقایسه شده است که موافقت خوبی بین این نتایج مشاهده می شود.

واژگان کلیدی: نورد نامتقارن، روش قاچی، ضریب اصطکاک، شرایط کرنش صفحه‌ای

## Application of Modified Slab Method in Asymmetrical Plate Rolling

F. Farhat-Nia and M. Salimi

Azad Islamic University, Khomanishahr Branch, Khomanishahr, Iran  
Mechanical Engineering Department, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**Abstract:** In this paper, an analytical method based on Modified Slab Method of analysis is presented to study the asymmetrical rolling process due to difference in work rolls radii, rolls speeds and interface frictions. The shear force imposed on material along the contact region is considered to be a function of the frictional factor and the roll gap geometry. Elastic-plastic with linear work hardening constitutive law was assumed. Asymmetric factors considered are roll diameter ratio, roll speed mismatch and differential interface friction conditions. Neutral points' location along the contact region in relation to the

\*\* - استاد

\* - دانشجوی دکترا

variations on thickness reduction, roll speed ratios, roll diameters ratio and front and back tensions are investigated. Predicted values for rolling force and torque from the present analytical model are compared with those of other workers, which are shown to be in good agreement.

**Keywords:** Asymmetrical rolling, Slab method, Friction factor, Plane strain conditions

## فهرست علائم

برش سطحی	$h$	نسبت متوسط تنش برشی در جهت ضخامت به تنش برشی سطح	$c_1, c_2$
تنش کششی در ورود و خروج ورق	$q_{in}, q_{out}$	ضخامت ورق در شکاف غلتکها	$h$
سرعت غلتک های بالا و پایین	$v_1, v_2$	ضخامتهای اولیه و نهایی ورق	$h_i, h_o$
فاصله افقی از نقطه خروجی	$x$	طول تماس ورق با غلتکها	$l$
نقاط خشی بر روی غلتکهای بالا و پایین	$x_{n1}, x_{n2}$	تنش تسلیم ورق در فاصله $x$ از خروجی و متوسط تنش تسلیم	$k, \bar{k}$
زوایای المان قاچی با غلتک های بالا و پایین	$\theta_1, \theta_2$	فاکتور اصطکاک غلتکهای بالا و پایین	$m_1, m_2$
تنشهای نرمال و برشی در هر نقطه از محیط پلاستیک	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	نیروی نورد بر واحد عرض	$P$
تنش تسلیم ورق در فاصله $x$ از خروجی و متوسط تنش تسلیم	$\sigma_f, \bar{\sigma}_f$	فشار متوسط بر روی المان قاچی دیفرانسیلی	$p_1, p_2$
تنشهای برشی حاصل از اصطکاک در سطح مشترک غلتکهای بالا و پایین با ورق	$\tau_1, \tau_2$	متوسط تنش نرمال افقی روی المان قاچی	$q$
متوسط تنش برشی در جهت ضخامت در نیمه بالا و پایین المان قاچی	$\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$	شعاع غلتکهای بالا و پایین	$R_1, R_2$
اختلاف فشار بین غلتکها	$\Delta$	شعاع میانگین غلتکها	$R_m$
		گشتاور غلتکهای بالا و پایین	$T_1, T_2$
		نسبت متوسط تنش برشی در جهت ضخامت به تنش برشی سطحی	$c_1, c_2$

## ۱- مقدمه

نیروی نورد، ضخامت و شکل ورق راحت تر کنترل شده و در میزان انرژی مصرفی صرفه جویی می شود.

از معایب این فرایند، انحنای ناخواسته ورق است که در نورد چند قفسه می تواند به قفسه غلتکها آسیب برساند. علاوه بر این مسئله، به دلیل اشکال در ورود ورق به غلتکها، این انحنا می تواند باعث تاخیر در انجام فرایند شود. در عین حال، نوع نامتقارن نورد، در شکل دهی ورق تخت به ورق منحنی شکل کاربرد داشته و می تواند جایگزین سیستمهای خم سه غلتکی شود.

در زمینه تحلیل فرایند نورد نامتقارن، بررسیهای نظری و

فرایند نورد، یکی از فرایندهای مهم در شکل دهی فلزات است که درصد بالایی از محصولات ورق، لوله، میل و مقاطع شکل دار را به خود اختصاص می دهد. اهداف اولیه در این فرایند، کاهش سطح مقطع قطعه کار است که در عین حال باعث بهبود خواص آن نیز می شود.

در سالهای اخیر، فرایند نورد نامتقارن بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. از مزایای نورد نامتقارن ورق، توزیع فشار کمتری در سطح تماس ورق و غلتک و در نتیجه کاهش نیرو و گشتاور مورد نیاز به منظور انجام فرایند است. با کاهش

تجربی بسیاری انجام شده است. یاماموتو و همکاران [۱] از پلاستیسین به عنوان ماده مورد آزمایش برای انجام فرایند نورد سرد استفاده کرده و نیروی گشتاور مورد نیاز را اندازه گرفتند. گابریل [۲] هم در زمینه اندازه‌گیری تنشهای تماسی به روش فوتوالاستیک تحقیق کرد. سیبل [۳] از روش قاچی به منظور استخراج معادلات تعادل استفاده کرد. ساچز و کلینگر [۴] از همین روش در تحلیل نورد نامتقارن استفاده کردند و نتیجه گرفتند که ناحیه‌ای در محل تماس ورق با غلتکها به وجود می‌آید که نیروی اصطکاک در دو جهت مخالف یکدیگر بر روی غلتکهای بالا و پایین عمل می‌کنند که این ناحیه را ناحیه برش عرضی<sup>۱</sup> نامیدند. کیوچی و همکاران [۵] با استفاده از روش حد بالا<sup>۲</sup>، یک مدل ریاضی را توسعه دادند که قادر به پیش بینی انحنا و محصولات نورد در شرایط نامساوی بودن سرعتها و شعاعهای غلتکهای بالا و پایین بود و همچنین اثر غیر صفر بودن زاویه ورود ورق به داخل غلتکها را به عنوان یک پارامتر دیگر در انحنا و ورق خروجی بررسی کردند. زورسکی و شات [۶] مدلی برای نورد داغ توسعه دادند که اساس آن بر نظریه فشار ناهمگن اوروان [۷] استوار بود. اصطکاک در مدل آنها چسبنده فرض شده بود. هالبروک و زورسکی [۸] هم مدلی برای توزیع نامتقارن فشار غلتکها ارائه کردند. در زمینه تحقیقات تجربی، کندی و اسلامار [۹]، باکستون و برونینگ [۱۰]، چکماروف و نفدوف [۱۱] با پلاستیسین، سرب، فولاد، آلومینیوم، فرایند نورد نامتقارن را مورد آزمایش قرار دادند. کولین و دوهورست [۱۲] از نظریه خطوط لغزش<sup>۳</sup> به منظور بررسی نتایج تجربی با نتایج نظری استفاده کردند. کیوچی و هسیانگ [۱۳] نیز روش نظریه حد بالا را به منظور محاسبه انحنا ناشی از نابرابری شعاع غلتکها به کار گرفتند.

در زمینه روشهای عددی، ریچلسون [۱۴] اثر میزان کاهش ابعاد و ضخامت ورق را در خمش آن به کمک روش المان محدود FEM مورد بررسی قرار داد. شیوپوری و همکاران [۱۵]، لو و همکاران [۱۶] نیز روش المان محدود را به منظور بررسی انحنا و ورق در خروج از غلتکها به کار بردند. گائو [۱۷] نیز یک

تحلیل پلاستیک از المان محدود را به منظور بررسی جریان ماده از نورد نامتقارن با شعاع متفاوت غلتکها ارائه کرد. سیلان ماده و تعیین نقطه خنثی، توزیع کرنش و نرخ آن از موارد بررسی آنها بود. هوانگ [۱۸]، سعی در تحلیل نورد نامتقارن با استفاده از روش توابع جریان کرد. هوانگ و تزو [۱۹-۲۰] نیز یک مدل تحلیلی براساس روش قاچی روی نورد صفحه با فرض ثابت بودن اصطکاک برشی بین ورق و غلتکها، ارائه کردند. سلیمی و ساسانی [۲۱] نیز براساس روش قاچی - تراز اصلاح شده فرایند نورد نامتقارن ورق را مورد تحلیل قرار دادند. لازم به ذکر است که اغلب تحلیلهای ارائه شده تاکنون موضوع کار سختی را در نظر نگرفته‌اند.

هدف این مقاله ارائه یک تحلیل ساده است که در عین سادگی بتواند اثرات نابرابری در شعاع غلتکها و سرعت آنها را در میزان نیرو و گشتاور نورد برای مواد الاستیک-پلاستیک با کار سختی برآورد کند و همچنین اثر پارامترهایی مانند درصد کاهش ضخامت، تنشهای کششی در حین ورود ورق و خروج آن از غلتکها و اثر ضریب اصطکاک بین ورق و غلتکها را در نیرو و گشتاور مورد نیاز نورد مورد مطالعه قرار دهد.

## ۲- فرضیات اولیه

فرضیاتی که برای تحلیل در نظر گرفته شده‌اند، به صورت زیر خلاصه می‌شود.

الف- غلتکها صلب فرض شده، بنابراین از اثرات صاف شدگی غلتکها صرف نظر می‌شود.

ب- فرض می‌شود ماده دارای رفتار الاستو-پلاستیک و دارای سخت شوندهگی خطی است و از معیار تسلیم فون-مایز تبعیت می‌کند.

ج- تغییر شکل پلاستیک به صورت کرنش صفحه‌ای است.

د- مدل تنش اصطکاکی در سطوح تماس ورق با غلتکها می‌تواند به صورت  $\tau = mk$  در نظر گرفته شده که در آن که  $m$  فاکتور اصطکاک و  $k$  تنش برش ماده است.

### ۳- مدل تحلیلی

شکل (۱) نمایی از فرایند نورد نامتقارن را نشان می‌دهد. در فرایند نورد ورق و صفحه قطر غلتکها در مقایسه با طول سطح تماس بزرگ بوده و می‌توان طول سطح تماس غلتکها را با ورق یکسان فرض کرد. مهمترین شاخصه این نوع فرایند، وجود دو نقطه خشی برای ورق در تماس با غلتکهای بالا و پایین است. در صورت عدم برابری سرعتهای دو غلتک با یکدیگر، محل نقطه خشی بر روی غلتک بالا با پایین، متفاوت خواهد بود که در نتیجه سه ناحیه تغییر شکل پلاستیک در طول تماس ورق با غلتک به وجود خواهد آمد. این سه ناحیه در شکل (۱) به وضوح مشخص شده است.

در ناحیه I، سرعت غلتکهای بالا و پایین از ورق بیشتر است، بنابراین جهت تنش اصطکاکی بین ورق و غلتکها به سمت راندن ورق به داخل فضای بین غلتکهاست. اما ناحیه III، سرعت ورق از غلتکها پیشی گرفته، نتیجتاً تنش اصطکاکی در جهت عکس خروج ورق از فضای بین غلتکهاست. ناحیه II، ناحیه برش عرضی نامیده می‌شود که در نتیجه نامتقارن بودن فرایند نورد به وجود می‌آید. اگر سرعت غلتک بالایی از پایینی بیشتر باشد، محل نقطه خشی برای غلتک بالایی به سمت خروجی نزدیکتر است.

با در نظر گرفتن المانی از ورق در هر سه ناحیه تغییر شکل پلاستیک مطابق شکل (۲)، تنشهای اعمال شده بر المان در صفحه ورق  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  هستند که مقادیر این تنشها وابسته به موقعیت المان در نواحی مختلف است. تنش اعمال شده بر المان قاچی عمودی مطابق شکل (۳) به صورت زیر برآورد می‌شود.

با توجه به نامتقارن بودن فرایند و در نتیجه آن، یکسان نبودن توزیع تنش نرمال و برشی نسبت به خط مرکزی ورق، از یک سیستم تنش معادل استفاده می‌شود [۲۱]. مؤلفه افقی تنش نرمال بر روی المان قاچی عبارت است از:

$$q = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy \quad (1)$$

متوسط تنش برشی روی نیمه بالایی برای هر المان قاچی به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} \tau_{xy} dy \quad (1-2)$$

و به طور مشابه، برای نیمه پایینی:

$$\bar{\tau}_2 = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^0 \tau_{xy} dy \quad (2-2)$$

پارامترهای مربوط به غلتک بالا با اندیس ۱ و برای غلتک پایین با اندیس ۲ مشخص می‌شوند.

با انتخاب المانی از ورق در ناحیه I، معادلات دیفرانسیلی تعادل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} d(hq) + [-(\tau_1 + \tau_2) + p_1 \tan \theta_1 + p_2 \tan \theta_2] dx = 0 & (1-3) \\ d(h\tau) + [(-\tau_1 \tan \theta_1 + \tau_2 \tan \theta_2) - (p_1 - p_2)] dx = 0 & (2-3) \end{cases}$$

با تعریف فشار متوسط  $p$  و اختلاف فشار  $\Delta$  به صورت زیر:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 2p \\ p_1 - p_2 = \Delta \end{cases} \quad (4)$$

و جاگذاری  $\tan \theta_1 \approx \theta_1 \approx \frac{x}{R_1}$  و  $\tan \theta_2 \approx \theta_2 \approx \frac{x}{R_2}$  در

معادلات دیفرانسیلی بالا، نتیجتاً:

$$\begin{cases} dq = -\frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (p+q)x - (\tau_1 + \tau_2) \right] dx \\ d(h\tau) = \Delta dx - \left( -\frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2} \right) x dx \end{cases} \quad (5)$$

در معادلات بالا،  $\tau_1$  و  $\tau_2$  تنش اصطکاکی ورق در تماس با غلتکهای بالا و پایین است که مقدار آن برابر با  $\tau_1 = m_1 k_1$  و  $\tau_2 = m_2 k_2$  فرض می‌شود.  $m_1$  و  $m_2$  اعدادی مثبت و کوچکتر از یک را اختیار می‌کنند.

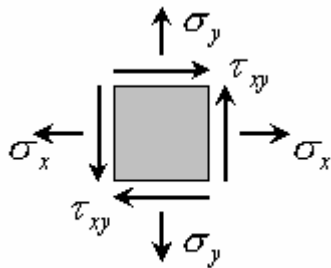
$k$  تنش برشی در تسلیم ماده است که مطابق معیار فون

مایز  $k = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}}$  تعیین می‌شود، در جایی که  $\sigma_f$  تنش جاری

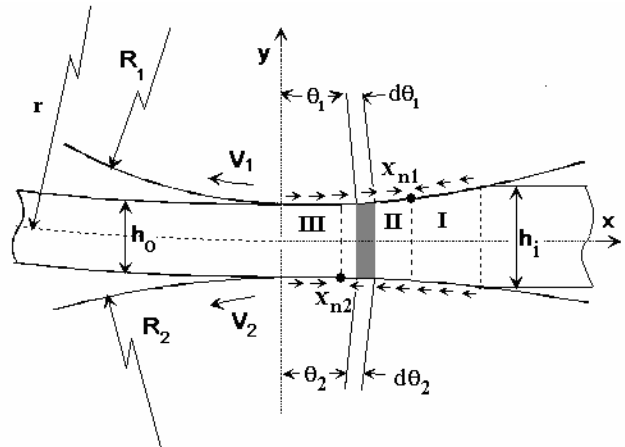
است. از آنجا که بر اساس نظریه خطوط لغزش، تنش برشی در جهت ضخامت ورق از یک مقدار ماکزیمم در سطوح تماس به

مقدار ناچیز در لایه میانی می‌رسد، با توجه به معادلات (۱-۲)

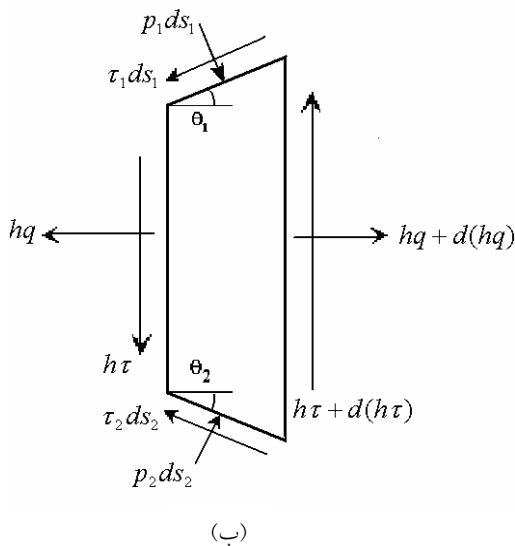
و (۲-۲)، متوسط تنش برشی در نیمه بالایی و پایینی ورق به



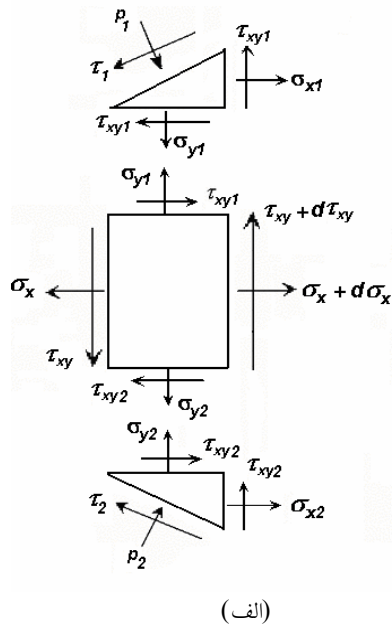
شکل ۲- سیستم تنش فرضی بر هر المان ورق در هر ناحیه



شکل ۱- تصویر شماتیک نورد نامتقارن



(ب)



(ف)

شکل ۳- سیستم تنش اعمالی بر المان قاچی عمودی در ناحیه I در فضای بین غلتکها

#### ۴- معیار تسلیم

با توجه به آنکه تعریض ورق در فرایند نورد ورق و صفحه قابل صرف نظر است، شرایط کرنش صفحه ای برقرار خواهد بود:

$$\epsilon_z = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (7)$$

با صرف نظر کردن از کرنش الاستیک ورق در شکاف غلتکها به دلیل بزرگ بودن مدول الاستیسیته و کم بودن تغییرات تنشها در

صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\bar{\tau}_1 = m_1 c_1 \frac{\bar{\sigma}_{f1}}{\sqrt{3}} \quad (1-6)$$

$$\bar{\tau}_2 = m_2 c_2 \frac{\bar{\sigma}_{f2}}{\sqrt{3}} \quad (2-6)$$

نسبتهای  $c_1$  و  $c_2$  وابسته به پارامترهایی مانند هندسه فضای بین غلتکها بوده و مقادیر آن بین صفر و یک است [۲۰]، در حالی که  $m_1$  و  $m_2$  به ترتیب معرف فاکتور اصطکاک غلتک بالایی و پایینی هستند.

$$\sigma_{xm} - \bar{\sigma}_y = p + \sigma_{xm} - \left(\frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2}\right)x \quad (16)$$

q به عنوان متوسط تنش نرمال افقی و  $\sigma_{xm}$  میانگین تنش نرمال در نقاط مرزی در بالا و پایین المان به صورت  $q = n\sigma_{xm}$  تعریف می شود که n ضریب وابسته ای به چگونگی توزیع پروفیل تنش نرمال افقی در مقطع ورق است. در صورتی که ضخامت ورق زیاد نباشد، می توان این توزیع را به صورت خطی در نظر گرفت که در این حالت  $n=1$  می شود و در نتیجه  $\sigma_{xm}$  و q برابر خواهند شد. حال با اعمال معادله (13) در معادله (16):

$$p + q = \bar{\sigma}_{f1} \left(\frac{1 - m_1^2 c_1^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \bar{\sigma}_{f2} \left(\frac{1 - m_2^2 c_2^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2}\right)x \quad (17)$$

می توان توزیع اختلاف فشار در ورق را از معادله (2-3) طبق روند زیر محاسبه کرد:

$$d(h\tau) = \Delta dx - \left(-\frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2}\right)xdx \quad (18)$$

با مرتب کردن معادله بالا برحسب  $\Delta$ :

$$\Delta = h \frac{d\tau}{dx} + \tau \frac{dh}{dx} + \left(-\frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2}\right)x \quad (19)$$

و با تعریف تنش برشی به صورت متوسط در سه ناحیه تغییر شکل در ناحیه I برابر خواهد بود:

$$\bar{\tau} = \frac{-m_1 c_1 \frac{\bar{\sigma}_{f1}}{\sqrt{3}} h/2 + m_2 c_2 \frac{\bar{\sigma}_{f2}}{\sqrt{3}} h/2}{h} \quad (20)$$

عملا در محاسبات اختلاف بین تنش تسلیم نیمه بالایی با نیمه پایینی ورق قابل صرف نظر کردن بوده، به نحوی که با تقریب مناسبی  $\bar{\sigma}_{f1} \approx \bar{\sigma}_{f2} \approx \bar{\sigma}_f$  برقرار است، نتیجتاً:

$$\bar{\tau} = (m_2 c_2 - m_1 c_1) \frac{\bar{\sigma}_f}{2\sqrt{3}} \quad (21)$$

و در ناحیه II:

$$\bar{\tau} = \frac{-1}{2}(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2) = \frac{-1}{2}(m_1 c_1 + m_2 c_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{\sqrt{3}} \quad (22)$$

به همین ترتیب در ناحیه III:

$$\bar{\tau} = (m_1 c_1 - m_2 c_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{2\sqrt{3}} \quad (23)$$

این نواحی و با استفاده از قانون جریان،  $\sigma_z$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (8)$$

معیار تسلیم فون مایز در هر نقطه دلخواه به صورت زیر نوشته می شود:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_f^2 \quad (9)$$

جاگذاری معادلات (7) و (8) در معادله (9) نتیجه می دهد:

$$\frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_f^2 \quad (10)$$

باتوجه به تعریف تنش برشی متوسط در معادلات (1-6) و (2-6)، معادله (10) را برای بخش بالایی و پایینی ورق می توان چنین نوشت:

$$\bar{\sigma}_{x1} - \bar{\sigma}_{y1} = 2\bar{\sigma}_{f1} \sqrt{\frac{1 - m_1^2 c_1^2}{3}} \quad (11-1)$$

$$\bar{\sigma}_{x2} - \bar{\sigma}_{y2} = 2\bar{\sigma}_{f2} \sqrt{\frac{1 - m_2^2 c_2^2}{3}} \quad (11-2)$$

$\bar{\sigma}_{f1}$  و  $\bar{\sigma}_{f2}$  به ترتیب میزان تنش متوسط تسلیم در نیمه بالایی و پایینی ورق اند که با توجه به شرایط کار سختی در ورق تعیین می شوند. با تعریف متوسط تنشهای q و  $\bar{\sigma}_y$ ، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{x1} + \bar{\sigma}_{x2} &= 2q \\ \bar{\sigma}_{y1} + \bar{\sigma}_{y2} &= 2\bar{\sigma}_y \end{aligned} \quad (12)$$

و با ترکیب معادلات (11):

$$q - \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_{f1} \left(\frac{1 - m_1^2 c_1^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \bar{\sigma}_{f2} \left(\frac{1 - m_2^2 c_2^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

با نوشتن معادله تعادل در راستای x و y برای المان مثلثی بالایی شکل (3-ب) چنین نتیجه می دهد که:

$$(\sigma_{x1} + p_1) \tan \theta_1 - (\tau_1 + \tau_{xy1}) = 0 \quad (1-14)$$

$$(\tau_{xy1} - \tau_1) \tan \theta_1 - (\sigma_{y1} + p_1) = 0 \quad (2-14)$$

با تکرار معادلات تعادل (14) برای المان مثلثی پایینی (در تماس با غلتک پایین) و مرتب کردن این معادلات و با دانستن اینکه

$$\tan \theta_1 \approx \frac{x}{R_1} \quad \text{و} \quad \tan \theta_2 \approx \frac{x}{R_2} \quad \text{و با به کارگیری معادلات زیر:}$$

$$\frac{\sigma_{x1} + \sigma_{x2}}{2} = \sigma_{xm} \quad (15)$$

$$\frac{\sigma_{y1} + \sigma_{y2}}{2} = \bar{\sigma}_y$$

$$\begin{cases} j'_4 = -\frac{j_4 R_m}{2} \\ j_4 = j_1(A+B) + \frac{2}{R_m} j_3 \\ j_3 = -B \\ j_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} j'_5 = j_5 \sqrt{R_m/h_0} \\ j_5 = \frac{2}{R_m} j_2 \tau_e \\ j_2 = k_1(1 - m_1^2 c_1^2)^{\frac{1}{2}} + k_2(1 - m_2^2 c_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (30)$$

A و B در هر ناحیه برابر است با:

$$A = \begin{cases} (m_2 c_2 - m_1 c_1) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} & \text{ناحیه I} \\ -(m_1 + m_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} & \text{ناحیه II} \\ (m_1 c_1 - m_2 c_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} & \text{ناحیه III} \end{cases} \quad (31)$$

$$B = \begin{cases} -\frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2} & \text{ناحیه I} \\ \frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2} & \text{ناحیه II} \\ \frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2} & \text{ناحیه III} \end{cases}$$

از طرفی مطابق معادله (17):

$$p = j_2 + j_3 x - q \quad (32)$$

به عبارتی:

$$p = j_2 + j_3 x - j'_4 \ln \left( \frac{x^2}{R_m h_0} + 1 \right) - j'_5 \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{R_m h_0}} \right) - C \quad (33)$$

با قرار دادن شرایط مرزی مربوط به تنش نرمال در معادله (28)، مقدار ثابت مرزی C در هر ناحیه تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} q_{II} \Big|_{x=x_{n2}} &= q_{III} \Big|_{x=x_{n2}} & q_{II} \Big|_{x=x_{n1}} &= q_I \Big|_{x=x_{n1}} & q \Big|_{x=1} &= q_{in} \\ q \Big|_{x=0} &= q_{out} \\ C_I &= q_{in} - j'_4 \ln \frac{h_i}{h_0} - j'_5 \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{R_m h_0}} \right) \\ C_{II} &= (j'_{II4} - j'_{II4}) \ln \frac{h_2}{h_0} + (j'_{II5} - j'_{II5}) \tan^{-1} \frac{x_{n2}}{\sqrt{R_m h_0}} + q_{out} \\ C_{III} &= q_{out} \end{aligned} \quad (34)$$

مطابق معادلات فوق تغییرات  $\tau$  برحسب  $x$  در نواحی سه گانه صفر در نظر گرفته شده است. معادله زیر تغییرات ضخامت در فضای بین غلتکها را بیان می‌کند.

$$h = h_0 + \frac{x^2}{R_m} \quad (24)$$

$R_m$  شعاع متوسط غلتکهاست. در نتیجه جاگذاری معادلات (24-21) در معادله (19)، معادله اختلاف فشار به دست خواهد آمد:

$$\Delta = \begin{cases} \left[ (m_2 c_2 - m_1 c_1) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} + \left( -\frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2} \right) \right] x & \text{ناحیه I} \\ \left[ -(m_1 c_1 + m_2 c_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} + \left( \frac{\tau_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{R_2} \right) \right] x & \text{ناحیه II} \\ \left[ (m_1 c_1 - m_2 c_2) \frac{\bar{\sigma}_f}{R_m \sqrt{3}} + \left( \frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2} \right) \right] x & \text{ناحیه III} \end{cases} \quad (25)$$

به این ترتیب با ثابت بودن  $\bar{\sigma}_f$  در نواحی سه گانه داخل کרוشه مقدار ثابتی خواهد شد و بنابراین در این نواحی  $\Delta$  با  $x$  به صورت خطی تغییر می‌کند. در این حال اگر کلیه مقادیر شرایط نورد متقارن برقرار و  $\Delta$  برابر صفر می‌شود. با جاگذاری معادله (25) در معادله اول تعادل می‌توان توزیع کشش نرمال یکنواخت را به دست آورد.

$$dq = -\frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta + \frac{2}{R_m} (p+q) + \tau_e \right\} dx \quad (26)$$

$\tau_e$  تنش برشی معادل در هر ناحیه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_e = \begin{cases} -(\tau_1 + \tau_2) & \text{ناحیه I} \\ \tau_1 - \tau_2 & \text{ناحیه II} \\ \tau_1 + \tau_2 & \text{ناحیه III} \end{cases} \quad (27)$$

با انتگرال گیری از معادله (26)، توزیع تنش نرمال در فاصله دلخواه از  $x$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q = j'_4 \ln \left( 1 + \frac{x^2}{R_m h_0} \right) + j'_5 \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{R_m h_0}} \right) + C \quad (28)$$

پارامترهای  $j'_4$  و  $j'_5$  در هر ناحیه چنین مشخص می‌شوند:

$$T_1 = R_1 \left[ - \int_0^{x_{n2}} m_1 \bar{k}_1 dx - \int_{x_{n2}}^{x_{n1}} m_1 \bar{k}_1 dx + \int_{x_{n1}}^1 m_1 \bar{k}_1 dx \right]$$

$$T_2 = R_2 \left[ - \int_0^{x_{n2}} m_2 \bar{k}_2 dx + \int_{x_{n2}}^{x_{n1}} m_2 \bar{k}_2 dx + \int_{x_{n1}}^1 m_2 \bar{k}_2 dx \right] \quad (38)$$

$\bar{k}_1$  و  $\bar{k}_2$ ، تنش برشی متوسط در طول تماس ورق با غلتکهای بالا و پایین است.

$$T_1 = m_1 \bar{k}_1 R_1 (1 - 2x_{n1}) \quad (39)$$

$$T_2 = m_2 \bar{k}_2 R_2 (1 - 2x_{n2})$$

گشتاورکل اعمال شده در جهت انجام فرایند نورد برابر است با:

$$T = T_1 + T_2 = m_1 \bar{k}_1 R_1 (1 - 2x_{n1}) + m_2 \bar{k}_2 R_2 (1 - 2x_{n2}) \quad (40)$$

## ۶- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق، سعی شده است تا اثر پارامترهای مشخصه یک نورد نامتقارن بر نیرو و گشتاور نورد و محل نقطه خنثی مورد بررسی قرار گیرد.

نمودار (۴)، تغییرات نیروی نورد را برای یک ورق با مشخصات داده شده، نشان می دهد. این تغییرات برحسب شعاعهای دو غلتک و برای نسبتهای مختلف از سرعتهای آنها، رسم شده است. مطابق شکل در یک نورد نامتقارن، با شعاعهای نامساوی دو غلتک و برای نسبت مشخصی از سرعت، افزایش نسبت شعاع غلتک با سرعت پایتتر به شعاع غلتک با سرعت بالاتر، منجر به افزایش میزان نیروی لازم برای انجام فرایند نورد می شود. با افزایش نسبت سرعتهای دو غلتک که یکی از مشخصه های نورد نامتقارن است، بر میزان سیلان پلاستیک ورق افزوده شده و نتیجتاً فشار توزیع شده بر روی ورق کاهش یافته و نیروی لازم در انجام فرایند نورد نیز کمتر می شود. با افزایش میزان درصد کاهش ضخامت، میزان نیروی نورد نیز افزایش می یابد، اما می توان میزان این نیرو را با افزایش نسبت سرعت، کاهش داد که در نمودار (۵) این تغییرات رسم شده است.

نمودار (۶)، اثر افزایش نسبت سرعتها و افزایش درصد کاهش

با حل معادله چهارم ( $q_{II}|_{x=x_{n1}} = q_{II}|_{x=x_{n1}}$ ) و استفاده از معادله  $h_1 v_1 = h_2 v_2$  (معادله نقاط خنثی) که به صورت معادله زیر بیان شده:

$$x_{n1} = \left\{ \frac{v_2}{v_1} x_{n2}^2 + \left( \frac{v_2}{v_1} - 1 \right) R_m h_o \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

نقاط خنثی  $x_{n1}$  و  $x_{n2}$  و در نتیجه آن توزیع فشار میانگین  $P$  و تنش نرمال  $q$  تعیین می شوند. معادله ای با یک مجهول (محل نقطه خنثی) است که از حل آن یکی از نقاط تعیین می شود. به منظور محاسبه نقطه خنثی بعدی از معادله فوق استفاده می شود.

$$P = P_I + P_{II} + P_{III} \quad (36)$$

$$P = \int_0^1 p dx = \int_{x_1}^1 p_I dx + \int_{x_2}^{x_{n1}} p_{II} dx + \int_0^{x_{n2}} p_{III} dx$$

$$P_I = (j_2 - C_I)(1 - x_{n1}) + \frac{j_{I3}}{2} (1^2 - x_{n1}^2) - j'_{I4} \left\{ (1 - x_{n1}) \ln \frac{h_i}{h_2} \right\}$$

$$-2(1 - x_{n1}) + 2\sqrt{R_m h_o} \left( \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{R_m h_o}} - \tan^{-1} \frac{x_{n1}}{\sqrt{R_m h_o}} \right)$$

$$P_{II} = (j_2 - C_{II})(x_{n1} - x_{n2}) + \frac{j_{II3}}{2} (x_{n1}^2 - x_{n2}^2) - j'_{II4}$$

$$\left\{ (x_{n1} - x_{n2}) \ln \frac{h_2}{h_1} \right\}$$

$$-2(x_{n1} - x_{n2}) + 2\sqrt{R_m h_o}$$

$$\left( \tan^{-1} \frac{x_{n1}}{\sqrt{R_m h_o}} - \tan^{-1} \frac{x_{n2}}{\sqrt{R_m h_o}} \right)$$

$$P_{III} = (j_2 - C_{III}) x_{n2} + \frac{j_{III3}}{2} x_{n2}^2 - j_{III4}$$

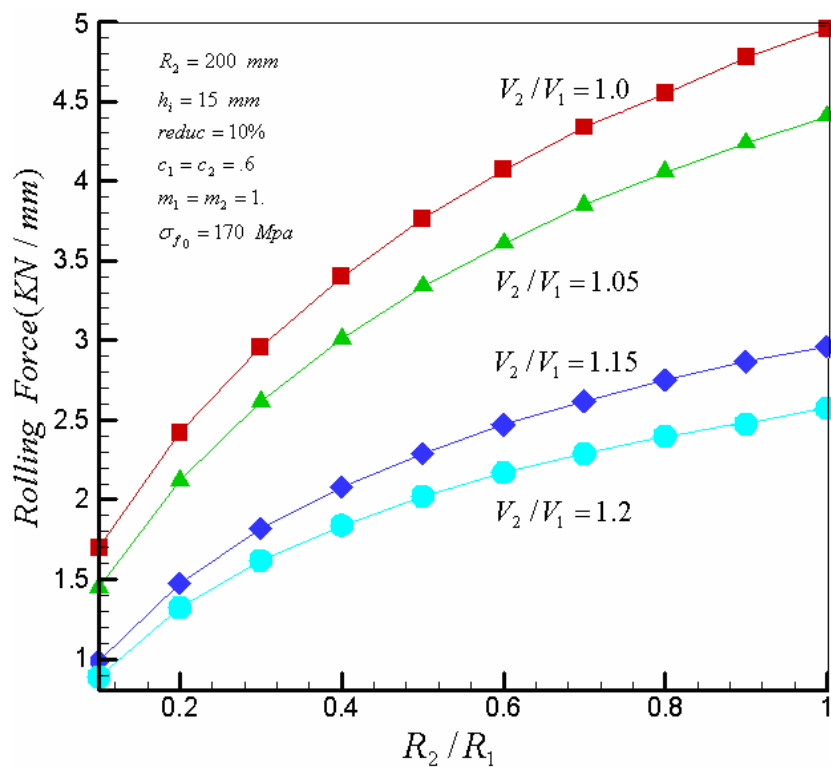
$$\left\{ x_{n2} \ln \frac{h_2}{h_o} - 2x_{n2} + 2\sqrt{R_m h_o} \tan^{-1} \frac{x_{n2}}{\sqrt{R_m h_o}} \right\}$$

(37)

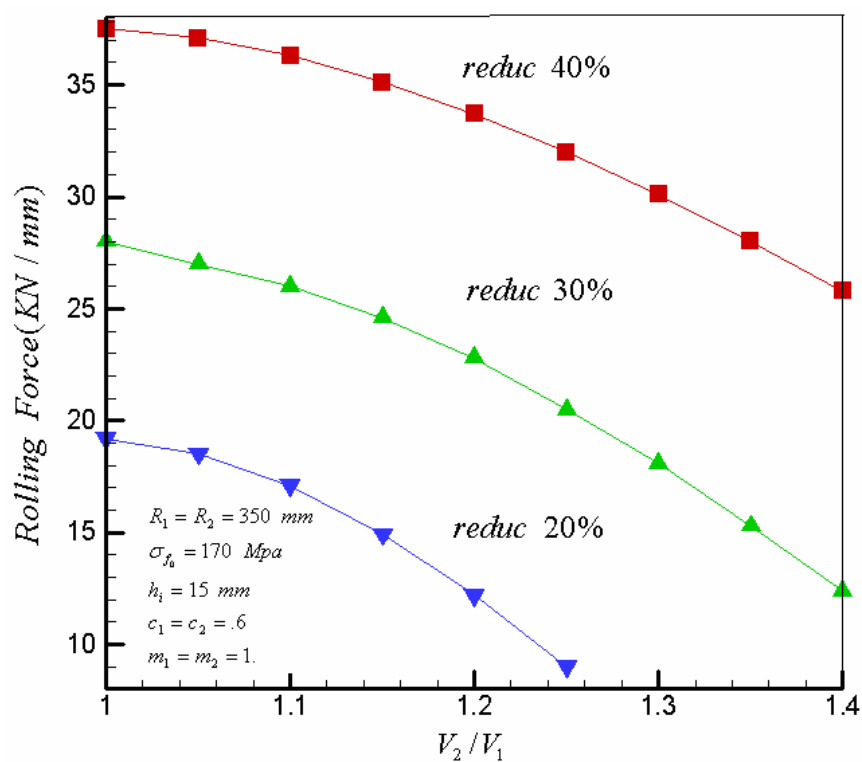
## ۵- محاسبه گشتاور غلتکها

با انتگرال گرفتن از ممان نیروی اصطکاکی در طول قوس تماس،  $T_1$  و  $T_2$  گشتاور غلتکهای بالایی و پایینی به صورت زیر به دست می آید:

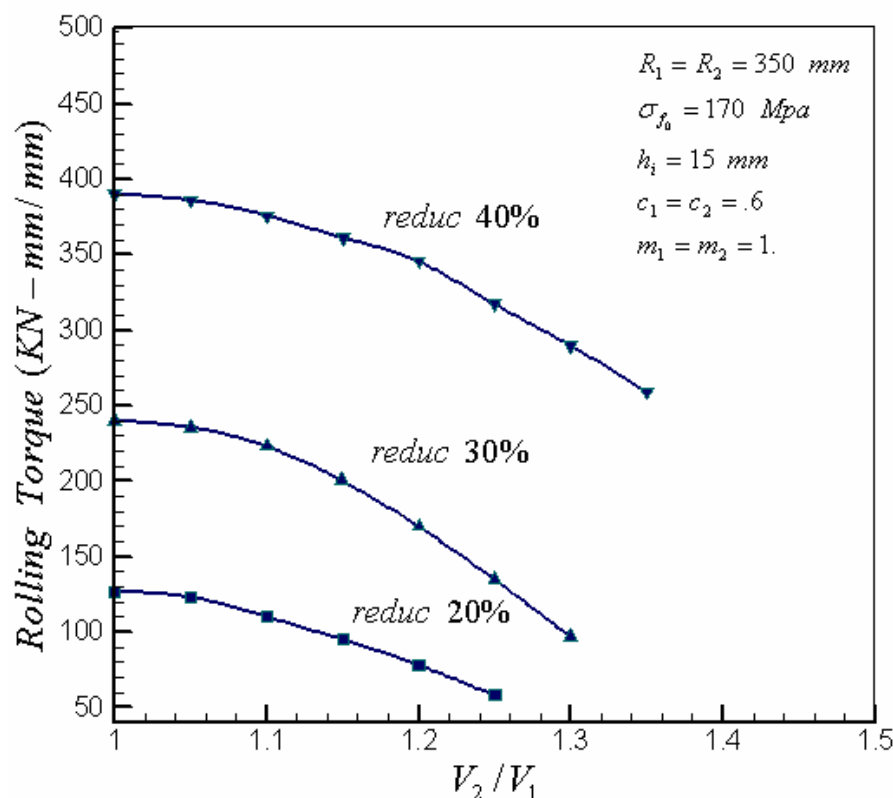




نمودار ۴- تغییرات نیروی نورد با نسبت شعاع غلتکها و نسبت سرعت غلتکها



نمودار ۵- تغییرات نیروی نورد بر حسب نسبت سرعتهای دو غلتک در کاهش ضخامتهای مختلف



نمودار ۶- تغییرات گشتاور نورد با سرعت‌های دو غلتک در کاهش ضخامت‌های مختلف

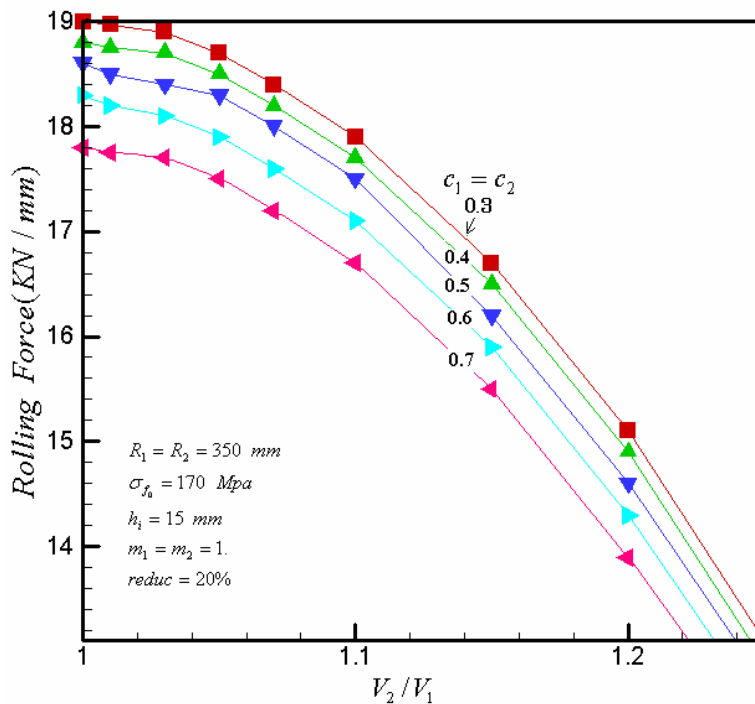
ضخامت بر روی گشتاور لازم نورد نشان می‌دهد. با افزایش میزان درصد کاهش در ضخامت خروجی، میزان توان مصرفی به منظور ایجاد تغییر شکل پلاستیک تا ضخامت خروجی افزوده شده، ولی با ازدیاد نسبت سرعت دو غلتک، موجب جابه جایی نقاط خنثی شده، به طوری که نقطه خنثی روی غلتک بالا به سمت ورودی و برای غلتک پایینی به سمت خروجی حرکت می‌کند و مجموعاً کاهش میزان گشتاور نهایی را به ازای افزایش نسبت سرعت نشان می‌دهد.

نمودار (۷) و (۸)، تاثیر پارامتر  $c$  را برحسب تغییرات نسبت سرعتها، بر روی نیرو و گشتاور مورد نیاز نورد نشان می‌دهد. پارامتر  $c$ ، اثر تنش برشی را در جهت ضخامت ورق مشخص می‌کند. مدل ریاضی اوروان [۷] و سلیمی [۲۱]، مقدار  $c$  را حدود 0.6 پیش بینی می‌کنند. در تحلیل عددی نورد به روش المان محدود مقدار بهینه آن 0.53 است [۲۲]. اگر  $c_1 = c_2 = 0$  در نظر گرفته شود، به معنای آن است که اثر تنش برشی در

جهت ضخامت ورق صرف نظر شده است. با افزایش تنش برشی عرضی بر روی ضخامت ورق، میزان نیرو و گشتاور مورد نیاز انجام فرایند، کاهش می‌یابد. افزایش تاثیر تنش برشی در عمق ضخامت ورق موجب کاهش فشار روی ورق شده، این موضوع توسط معیار تسلیم فون مایزس معادلات (۱۱-۱) و (۱۱-۲) قابل توجیه است.

نمودار (۹)، تاثیر نسبت سرعت غلتکها را برگشتاور مورد نیاز برای انجام فرایند نورد نشان می‌دهد. همان طور که در نمودار مشخص است، افزایش نسبت سرعتها که از مشخصه‌های یک فرایند نورد نامتقارن است، موجب کاهش در میزان مصرف گشتاور نورد می‌شود. با افزایش میزان کاهش در ضخامت ورق نیاز به توان مصرفی بالاتری می‌رود. این موضوع نیز در نمودار (۹) مشهود است.

نمودار (۱۰-الف)، اثر تنش کششی در ورود ورق به داخل فضای بین غلتکها (پس کشش) را بر محل نقطه خنثی نشان



نمودار ۷- تاثیر پارامتر  $c$  بر نیروی نورد در نسبت سرعت غلتکهای مختلف

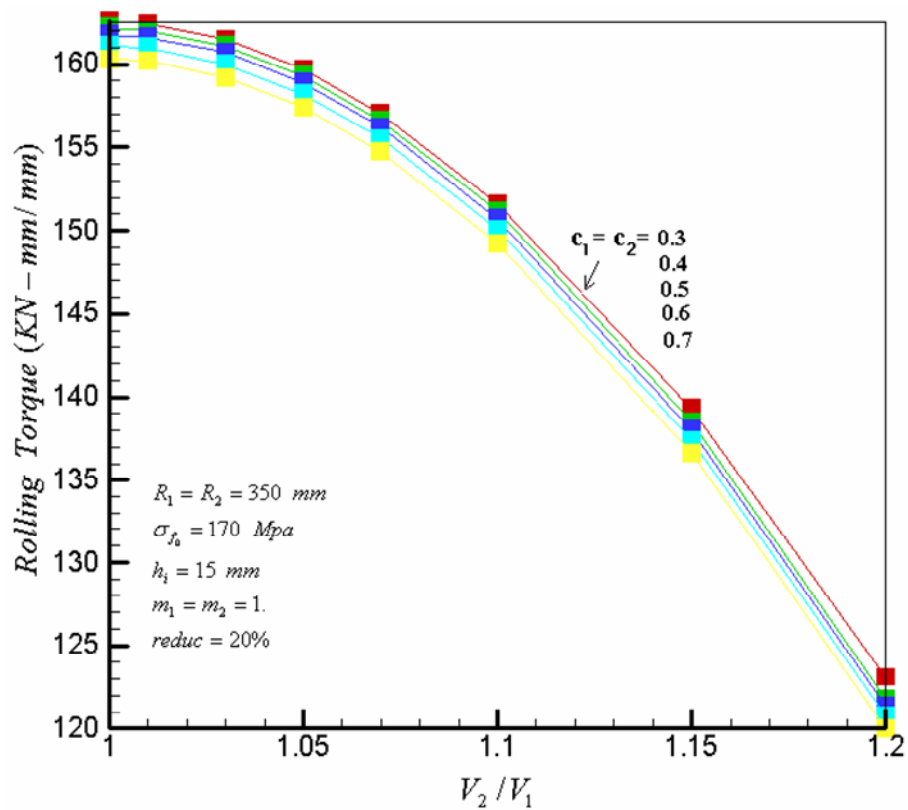
طرف ورودی جابه جا می شود.

نمودار (۱۲) حد افزایش نسبت سرعتهای دو غلتک را نشان می دهد. به عنوان نمونه برای ۲۰٪ کاهش در ضخامت ورق، می توان با افزایش نسبت سرعتها، میزان گشتاور نیروی نورد را کاهش داد. اما این میزان کاهش دارای محدودیتی است. چنانچه اگر این نسبت برای موقعی که تنش کششی خروجی صفر باشد، برابر  $1/3$  باشد، نقطه خنثی در غلتک بالا به نقطه ورود ورق به غلتکها و در غلتک پایین به نقطه خروج ورق از غلتکها، جابه جا می شود و عملاً در این وضعیت، ورق فقط در معرض لغزش قرار دارد و فرایند نورد برای نسبتهای  $1/3$  به بالا، به خوبی انجام نمی شود. این نسبت سرعت، با افزایش میزان تنش کششی در خروج، کاهش می یابد.

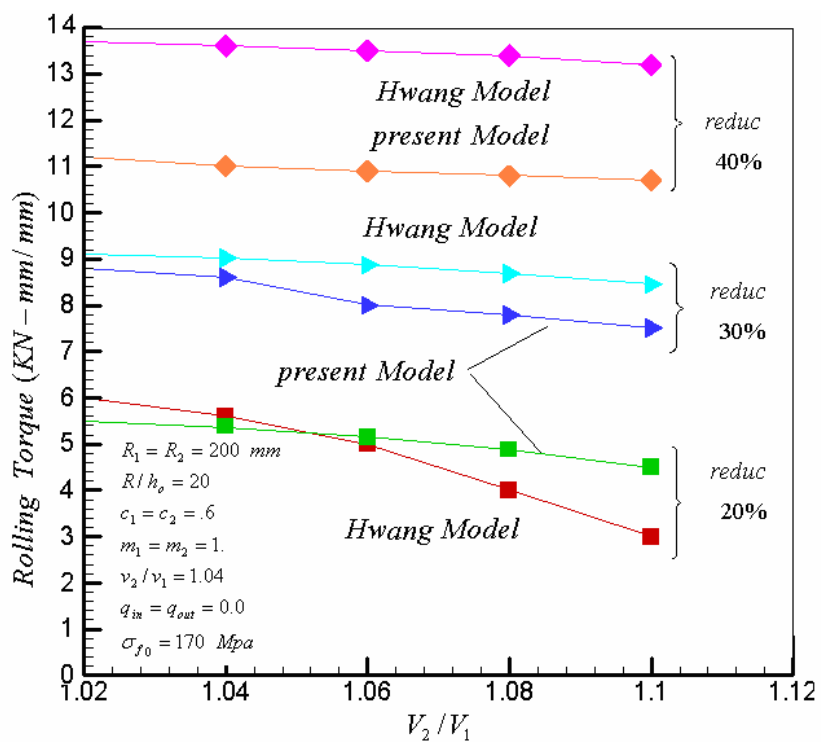
نمودارهای (۱۳) و (۱۴) تغییرات نیروی و گشتاور نورد را بر حسب تغییرات فاکتور  $H$  نشان می دهند. افزایش  $H$  به معنای افزایش میزان سخت شوندگی خطی ورق تحت تغییر شکل پلاستیک و در واقع بالا رفتن تنش تسلیم ورق است. در این حال میزان فشار بیشتری از طرف غلتک بر روی ورق برای

می دهد. اگر میزان تنش کششی افزایش یابد، به منظور بالانس نیروهای افقی وارد بر ورق محل نقطه خنثی به سمت محل خروج ورق حرکت می کند. با افزایش میزان کاهش در ضخامت، به منظور اعمال گشتاور بیشتری برای انجام عمل نورد، نقطه خنثی  $x_{n1}$  به سمت خروجی حرکت می کند. چگونگی تغییرات نقطه خنثی  $x_{n2}$  نیز از معادله (۳۵) قابل حصول است که بیانگر جابه جایی آن به سمت خروجی است. مطابق نمودار (۱۰-ب)، با افزایش میزان تنش کششی در ورود ورق به داخل فضای بین غلتکها، میزان گشتاور مورد نیاز برای راندن ورق به داخل غلتکها افزایش می یابد.

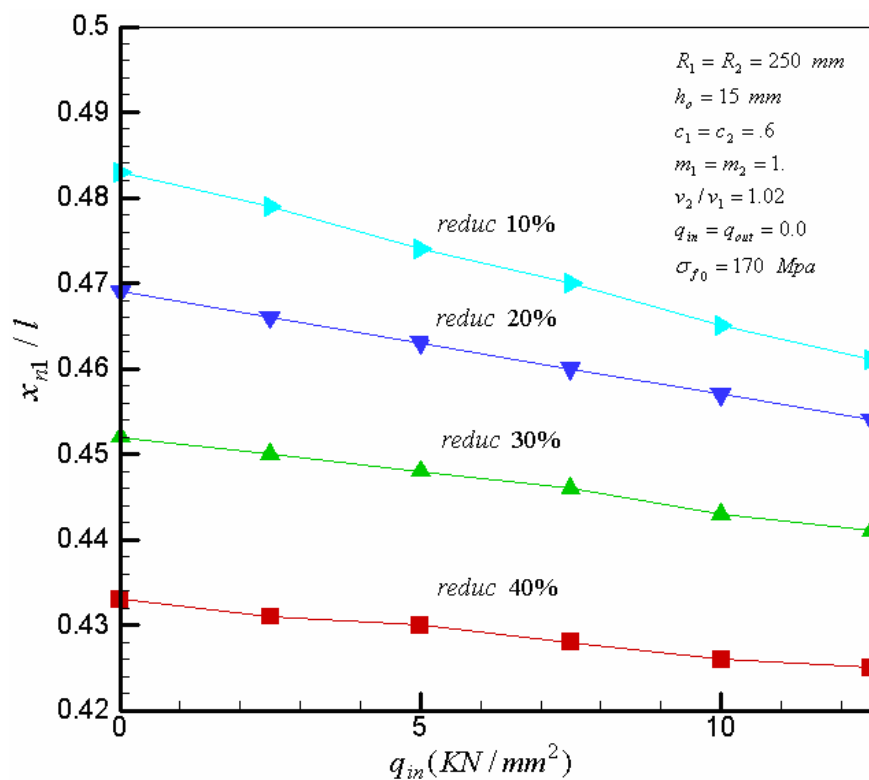
نمودارهای (۱۱-الف) و (۱۱-ب)، اثر افزایش تنش کششی در خروج ورق را بر محل نقاط خنثی و میزان گشتاور نورد نشان می دهند. با افزایش تنش کششی، میزان گشتاور مورد نیاز کاهش می یابد و محل نقطه خنثی بر روی غلتک بالایی به منظور بالانس نیروهای افقی اعمال شده بر ورق به سمت ورودی ورق حرکت می کند و متعاقب آن با توجه به معادله ثبات حجم، معادله (۳۵) نقطه خنثی بروی غلتک پایین نیز به



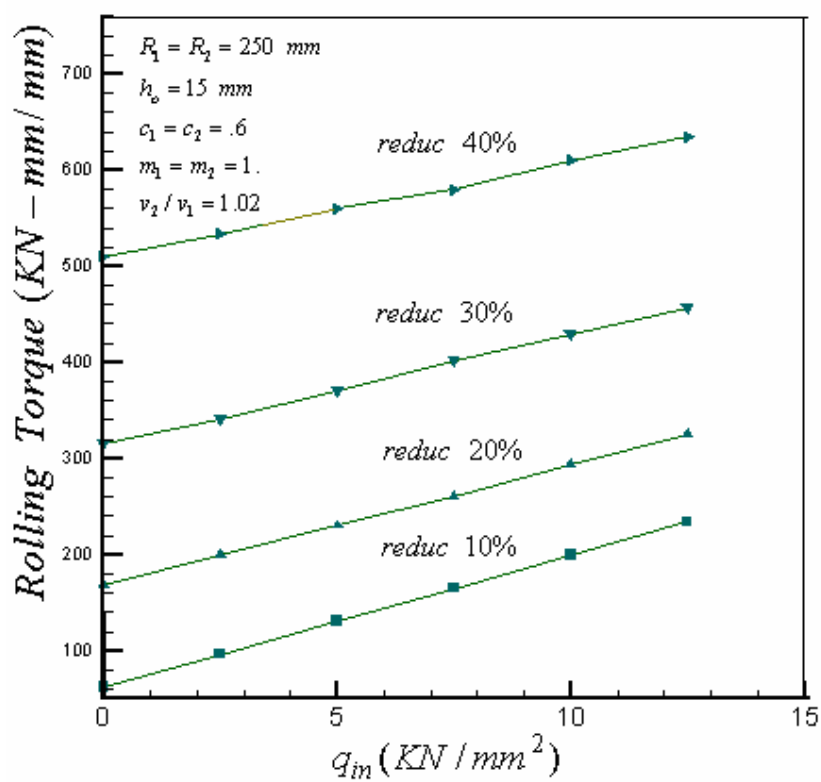
نمودار ۸- تاثیر پارامتر  $c$  بر گشتاور نورد برای نسبت سرعت غلتهای مختلف



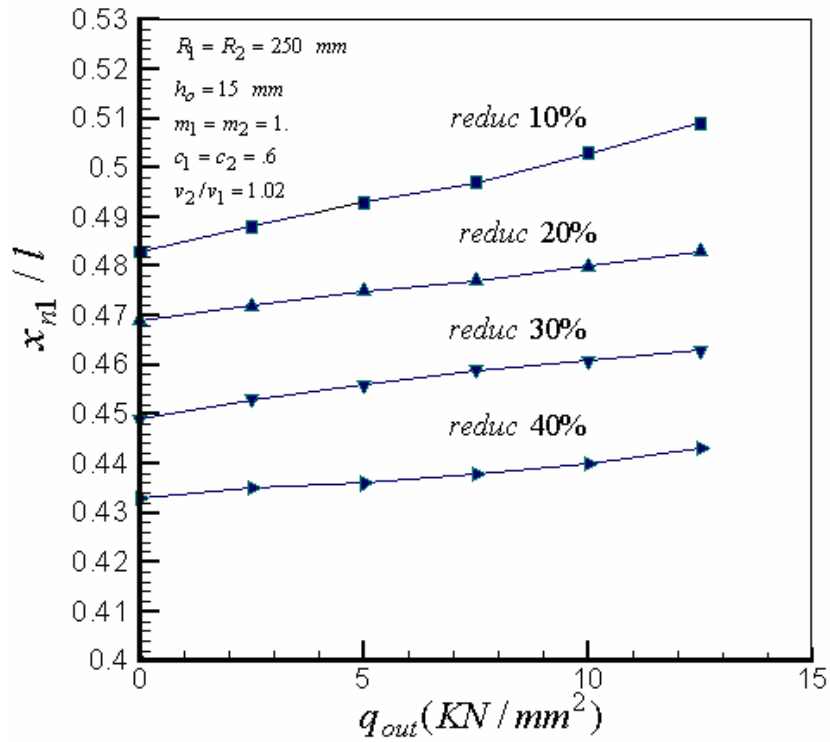
نمودار ۹- مقایسه‌ای از مدل حاضر و مدل هوانگ [۱۹] در رابطه تغییرات گشتاور نورد با نسبت سرعت‌های در غلتک در کاهش ضخامتهای مختلف



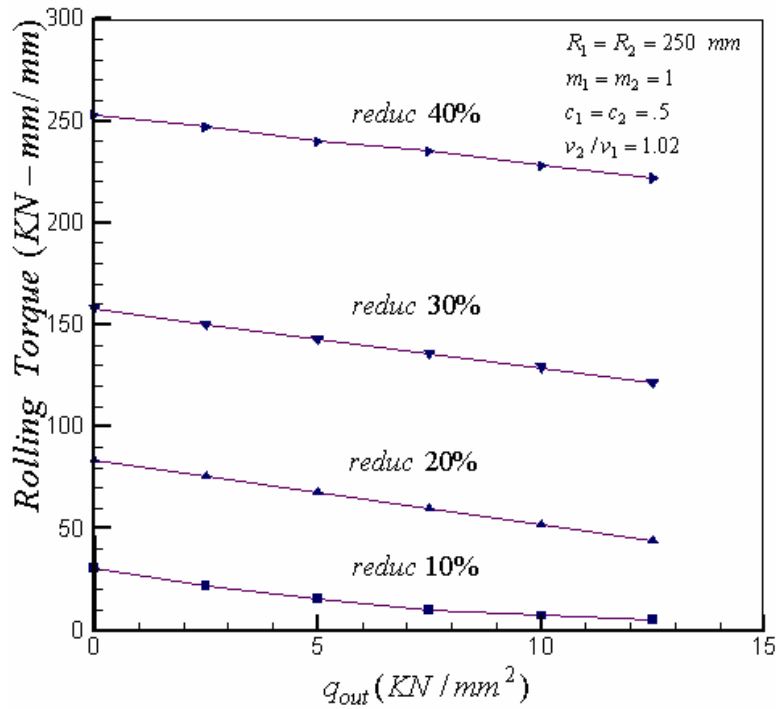
نمودار ۱۰-الف اثر کشش از پشت بر موقعیت نقطه خشی در کاهش ضخامتهای مختلف



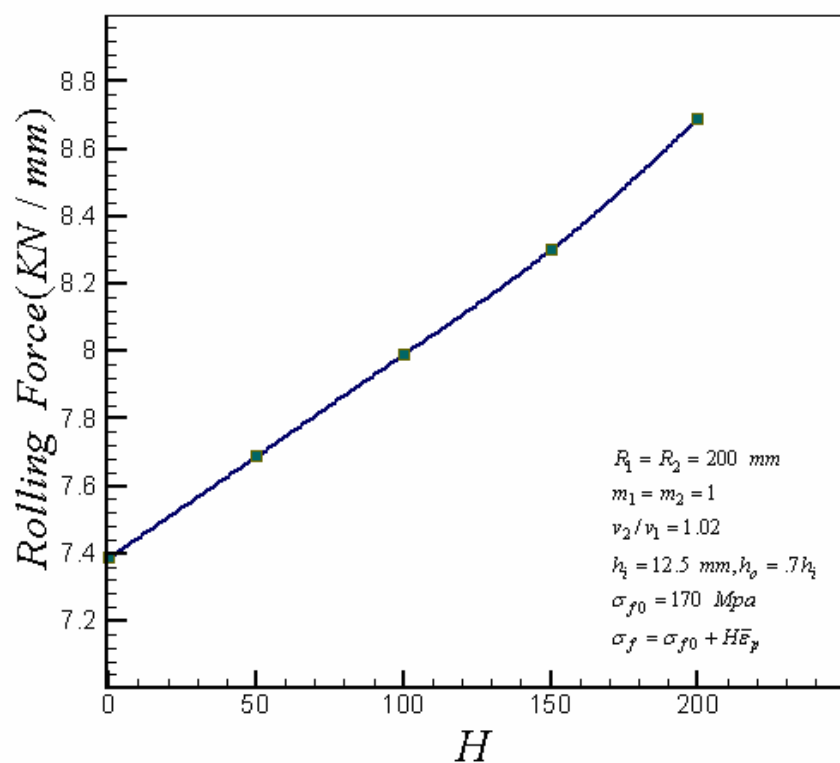
نمودار ۱۰-ب اثر کشش از پشت بر گشتاور لازم برای نورد



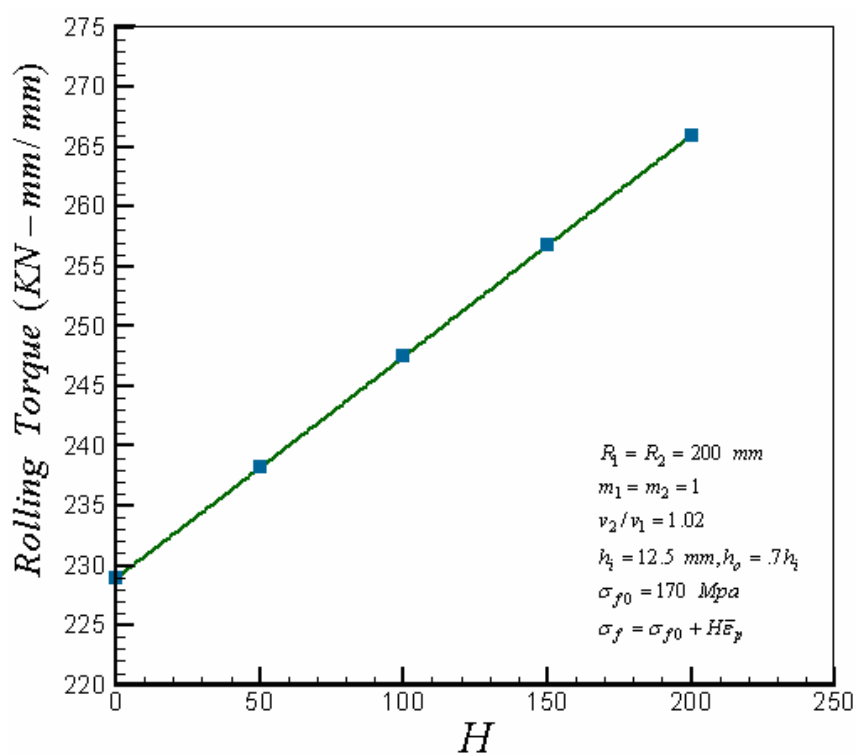
نمودار ۱۱- الف اثر کشش از جلو بر موقعیت نقطه خنثی



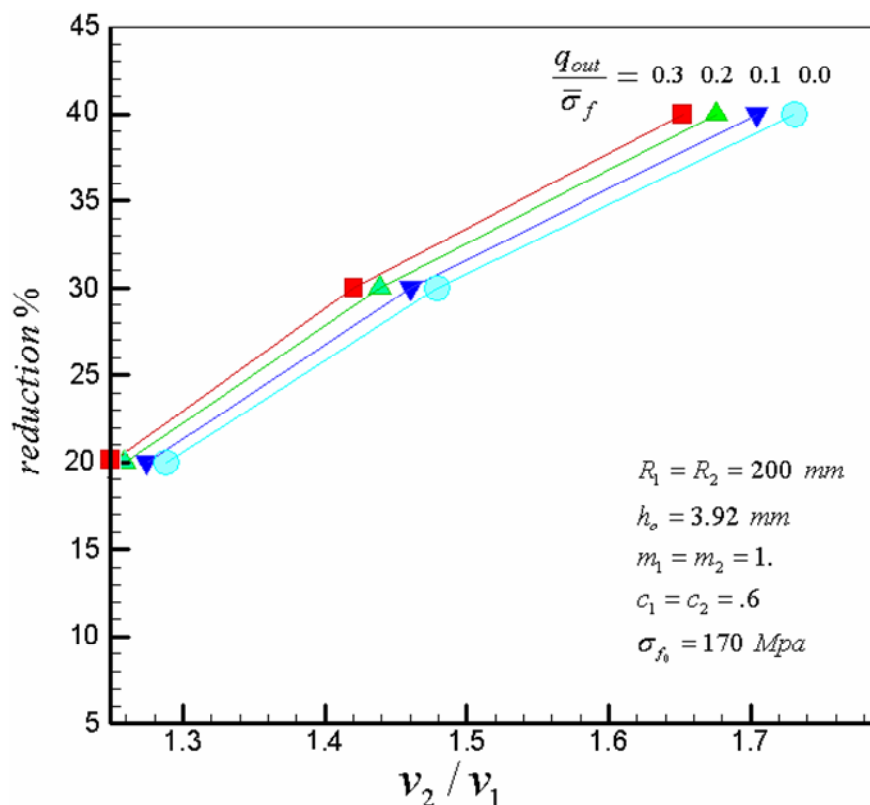
نمودار ۱۱- ب اثر کشش از جلو بر گشتاور لازم برای نورد



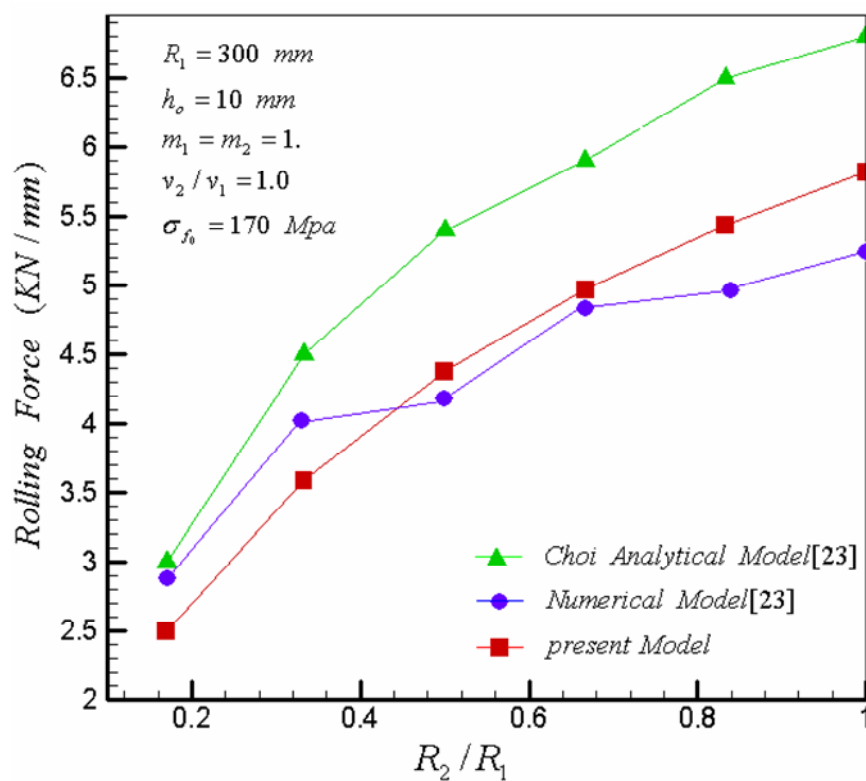
نمودار ۱۲- تغییرات نیروی نورد بر اساس تغییرات ضریب سخت شوندگی خطی ورق



نمودار ۱۳- تغییرات گشتاور نورد بر اساس تغییرات ضریب سخت شوندگی خطی ورق

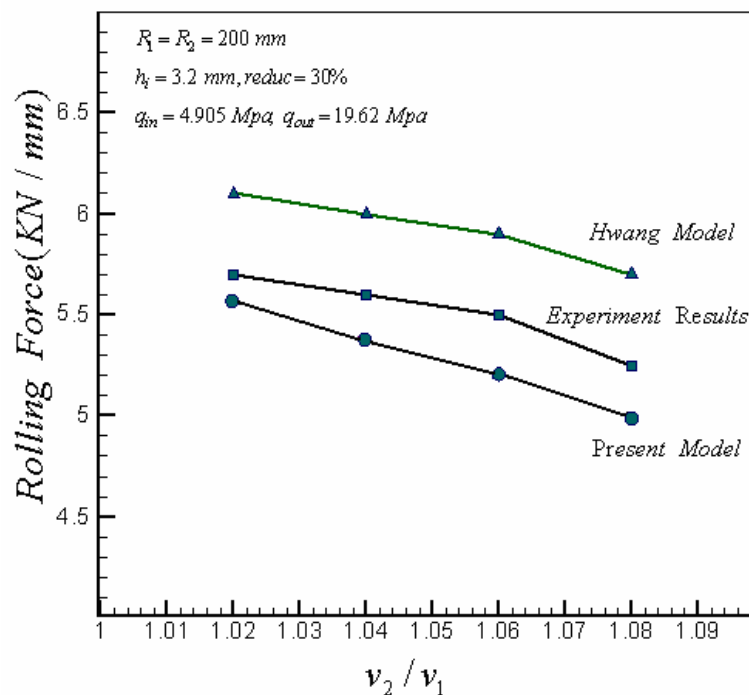


نمودار ۱۴- حد نسبت سرعت غلتکها در نورد متقارن برای کشش از جلوهای مختلف



نمودار ۱۵- تغییرات نیروی لازم برای نورد در نسبتهای شعاع مختلف دو غلتک





نمودار ۱۶- مقایسه نیروی نورد به دست آمده از مدل حاضر با مدل هوانگ [۱۹] و نتایج تجربی [۲۴]

چوی-شین ارائه می‌کند که عمدتاً به دلیل در نظر گرفتن تنش برشی در جهت ضخامت در این مدل است. در نمودار (۱۶)، میزان نیروی نورد به منظور انجام فرایند نورد نامتقارن مطابق مشخصات داده شده، توسط مدل حاضر و مدل هوانگ [۱۹] و نتایج تجربی [۲۴] مقایسه شده است. مدل هوانگ از توزیع تنش برشی در طول ضخامت ورق صرف نظر کرده، در نتیجه فشار بیشتری را بر روی غلتکها به دست آورده که در نهایت نیروی نورد بیشتری محاسبه شده است که از نتایج آزمایشگاهی فاصله بیشتری دارد. مدل حاضر با قابلیت محاسبه و تعیین تنش برشی در طول ضخامت ورق، به مقادیر تجربی نزدیکتر است.

ایجاد تغییر شکل پلاستیک مورد نیاز است. بنابراین بر نیروی مورد نیاز نورد افزوده می‌شود و از آن جایی که گشتاور نورد رابطه مستقیمی با تنش اصطکاکی در سطح تماس ورق با غلتک  $\tau = mk$  دارد، تغییرات گشتاور نیز سیر صعودی پیدا می‌کند.

در نمودار (۱۵) رابطه بین نیروی لازم برای نورد با نسبت شعاعها بررسی شده است. با افزایش نسبت شعاع غلتکها که از مشخصه نورد نامتقارن است، میزان نیروی نورد کاهش یافته است که مدل حاضر با مدل تحلیلی چوی-شین [۲۳] و روش عددی به کار رفته توسط او مقایسه شده است. همان طور که دیده می‌شود مدل حاضر پیش بینی بهتری از مدل تحلیلی

## واژه نامه

1. cross shear region

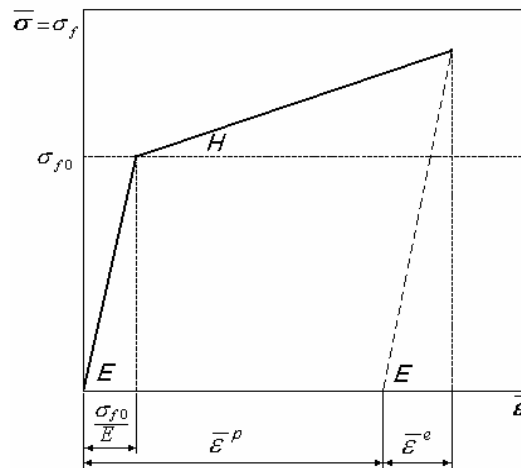
2. upper bound method

3. slip lines method

1. Yamamoto, H., and Kawanami, T., "Study on Asymmetrical Rolling (Plasticine Strain Analysis)," *Proceeding of S. 57 Conference Soc. Technol. Plasticity*, 65, 1987 (In Japanese language). Vol. 65, 1987.
2. Ghobrial, M.A., "A photo-Elastic Investigation on the Contact Stresses Developed in Rolls During Asymmetrical Flat Rolling," *International Journal of Mechanical Science* Vol. 31, p. 75, 1989.
3. Siebel, E., "Zur Theories des Walzvoganges bei Ungleich Angetriebenen Walzen," *Archiv fur das Eisenhuettenwesen* Vol. 15, p. 125, 1941.
4. Sachs, G., and Klingler, L.J., "The Flow of Metals Through Tools of Circular Contour," *J. App. Mech.* Vol.14, p.88,1947.
5. Kiuchi, M., Hsiang, S.H., and Hawang, Y.M., "Analytical Model of Asymmetrical Rolling Process of sheets," *Proc., 4<sup>th</sup> Int. Steel Rolling Conf*, F4.1, 1987.
6. Zorowski, C.F., and Shutt, A., "Analysis of the Load and Torque Characteristics of Single-Roll Drive Mills," *Int. Res. In Prod. Eng. A.S.M.E*, Pittsburgh,1963; P.380.
7. Orowan E. "The Calculation of Roll Pressure in Hot and Cold Flat Rolling,". *Proceeding of Institution of Mechanical Engineers, London*, Vol.150, No.4, p.140, 1943.
8. Holbrook, L., and Zorowski, C.F., "Effects of Non-symmetry in Strip Rolling," *J. Eng. Ind.* B88, 401, 1966.
9. Kennedy, G.E., and Slamar, F. "Turn-up and Turn-Down in Hot rolling," *Iron and Steel Engineer*, Vol. 35, p. 71, 1958.
10. Buxton, S.A, and Browning, S.C., "Turn-up and Turn-Down in Hot Rolling: A Study on a Model Mill Using Plasticine," *J. Mech. Engng. Sci*, Vol. 14, p. 245, 1972.
11. Chekmarev, A.P., and Nefedov, A.A., "Obrabotka Metallov Davleniem, 4, 2 (British Library Translation R.T.S. 8939)," 1956.
12. Collins, I.F., Dewhurst, P., "A Slip-Line Field Analysis of Asymmetrical Hot Rolling," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 17, p. 643, 1975.
13. Kiuchi, M.M., and Hsiang, S., "Analytical Model of Asymmetrical Rolling Process of Sheets," *Proc. 14th NAMRC, Society of Manufacturing Engrs., Minneapolis*, p.384, 1986.
14. Richelsen, A.B., "Elastic –Plastic Analysis of the Stress and Strain Distribution in Asymmetric Rolling," *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 39, p.1199, 1997.
15. Shivpuri, R., Chou, P.C., and Lau, C.W., 'Finite Element Investigation of Curling in Nonsymmetrical Rolling of Sheet,' *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 30, p. 625, 1988;
16. Lu, L-S., Harrer, O-K., Schwenzfeier, W., and Fischer, F.D., "Analysis of the Bending of the Rolling Material in Asymmetrical Sheet Rolling," *International Journal of Mechanical Engineering Sciences* Vol. 42, p. 49, 2000.
17. Cao, G.R., Hall, F.R., Hartly, P., Pillinger, I., Sturgess, C.E.N., Tompson W., and Freshwater, I., "Elastic Plastic Finite Element of Asymmetrical Rolling," *Proc. Of 1<sup>st</sup> Int Conference on Modeling of Metal Rolling Processes, the Institute of Material, London*, pp. 582-552, 1993
18. Hwang, Y.M., and Chen T.H., "Analysis of Asymmetrical Rolling by Stream Function method," *JSME*, Vol. 39, p. 598, 1996.
19. Hwang, Y.M., and Tzou, G.Y., "Analytical and Experimental Study on Asymmetrical Sheet Rolling," *International Journal of Mechanical Science.*, Vol. 39, pp. 289-303, 1997.
20. Hwang Y.M, and Tzou G.Y., "An Analytical Approach to Asymmetrical Hot-Sheet Rolling Considering the Effects of the Shear Stress and Internal Moment at the Rolling Gap," *Journal of Material and Processing Technology*, Vol. 52, pp. 399-434, 1995.
21. Salimi, M., and Sassani, F., "Modified Slab Analysis of Asymmetrical Plate Rolling," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 44, pp.1999-2023, 2002.
22. Lalli L.A., "An Analytical Rolling Model Including Through Thickness Shear Stress Distribution," *ASME Journal of Engineering Material and Technology*, Vol 1 pp.106-116,1984.
23. Choi, Y.R., and Shin, J. G., "Analysis of Asymmetric Roller Forming Using Finite Element Method and Slab Method," *Proceedings of the 2000 Ship Production Symposium, SNAME*, August 2000, Williamsburg, Virginia, U.S.A.
24. Mikami M., Shinya S., Koide S., Shinozaki H., "The Property of the Asymmetrical Hot Strip Rolling," *Proc. 33rd Joint Conf. JSTP*, Vol.9,1982.

## پیوست: تعیین تنش تسلیم ورق با رفتار سخت شونده گی خطی

با توجه به آنکه رفتار ورق الاستو-پلاستیک فرض شده است، بنابراین میزان کرنشی برشی در هر نقطه مجموع کرنشهای الاستیک و پلاستیک است. با فرض آنکه رفتار ماده، الاستوپلاستیک با کار سختی بوده و از معیار تسلیم فون مایزس پیروی کند:



نمودار الف- نمایش رفتار ماده الاستیک-پلاستیک با رفتار سخت شونده گی خطی

$\bar{\epsilon}^e$  در نمودار بالا کرنش موثر الاستیک و  $\bar{\epsilon}^p$  کرنش موثر پلاستیک تعریف می‌شود، نتیجتاً کرنش موثر  $\bar{\epsilon}$  برابر است با:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p \quad (1)$$

در نتیجه با توجه به نمودار (الف) میزان تنش تسلیم ورق تابعی از کرنش موثر خواهد بود:

$$\sigma_f = \sigma_{f0} + H\left(\bar{\epsilon} - \frac{\sigma_{f0}}{E}\right) \quad (2)$$

در نتیجه تنش تسلیم تابعی برحسب کرنش موثر پلاستیک است:

$$\sigma_f = \sigma_{f0} + H\left(\bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p - \frac{\sigma_{f0}}{E}\right) \quad (3)$$

$$\sigma_f = \sigma_{f0} + \frac{H}{1 - \frac{H}{E}} \bar{\epsilon}^p \quad (4)$$

به منظور تعیین کرنش پلاستیک موثر، با توجه به آنکه فرایند نورد را به صورت مسئله کرنش صفحه‌ای تحلیل می‌شود:

$$d\bar{\epsilon}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left( d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p \right)^2 + \left( d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p \right)^2 + \left( d\epsilon_3^p - d\epsilon_1^p \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

و معادله ثبات حجم در محدوده پلاستیک برقرار باشد:

$$d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = 0 \quad (6)$$

$$d \epsilon_1^p = -d \epsilon_2^p \quad \text{و} \quad d \epsilon_x^p = -d \epsilon_y^p \quad (7)$$

$$d \bar{\epsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} d \epsilon_1^p \quad (8)$$

کرنشهای اصلی  $d \epsilon_1$  و  $d \epsilon_2$  بر حسب کرنش  $d \epsilon_x$  و  $d \epsilon_y$  برابر خواهد بود با :

$$d \epsilon_{1,2} = \frac{d \epsilon_x + d \epsilon_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{d \epsilon_x - d \epsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{d \gamma_{xy}^2}{4}} \quad (9)$$

اگر ورق را به دو نیمه بالایی و پایینی تقسیم کنیم، چنانچه در نیمه بالایی ورق متوسط کرنشهای  $d \epsilon_x, d \epsilon_y, d \gamma_{xy}$  را با  $d \bar{\epsilon}_x, d \bar{\epsilon}_y, d \bar{\gamma}$  و در نیمه پایینی ورق با  $(d \bar{\epsilon}_x)_2, (d \bar{\epsilon}_y)_2, d \bar{\gamma}_2$  معرفی کنیم، در نیمه بالایی خواهیم داشت [۲۱]:

$$d \bar{\gamma}_1 = \eta_1 (d \bar{\epsilon}_y)_1 \quad (10)$$

$\eta_1$  در معادله بالا تابعی از  $m_1$  و  $c_1$  است. معادله (۱۰) برای ورق با رفتار صلب-پلاستیک معتبر است و به منظور تحلیل ورق با رفتار الاستو-پلاستیک کامل باید جمله مربوط به رفتار کشسانی را اضافه کرد.

$$\eta_1 = \frac{m_1 c_1}{(1 - m_1^2 c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

با جاگذاری معادله (۱۱) در معادله (۹):

$$d \bar{\epsilon}_{1,2} = \mp (d \bar{\epsilon}_y)_1 \sqrt{1 + \frac{\eta_1^2}{4}} \quad (12)$$

$$d \bar{\epsilon}_{1,2} = \mp \left(\frac{d \bar{\epsilon}_y}{2}\right)_1 \left(\frac{1 - \frac{3}{4} m_1^2 c_1^2}{1 - m_1^2 c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$d \bar{\epsilon}_{1,2} = \mp \zeta_1 (d \bar{\epsilon}_y)_1 \quad (14)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{3}{4} m_1^2 c_1^2}{1 - m_1^2 c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

کرنش  $(d \bar{\epsilon}_y)_1, (d \bar{\epsilon}_y)_2$  را در طول نیمه بالا و پایین ورق یعنی در طول ضخامت ورق، یکسان فرض کرده، به طوری که :

$$(d\bar{\epsilon}_y)_1 = (d\bar{\epsilon}_y)_2 = \frac{dh}{h} \quad (16)$$

$$d\bar{\epsilon}_{1,2} = \bar{\nu}\zeta_1 \frac{dh}{h} \quad (17)$$

کرنش مؤثر پلاستیک  $\bar{\epsilon}^p$  در فاصله  $x$  از خروجی در نیمه بالایی ورق در تماس با غلتک بالا، برابر است با :

$$\bar{\epsilon}^p(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_1 \int_x^1 \frac{dh}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_1 \frac{\frac{2x}{Rm} dx}{h_0 + \frac{x^2}{Rm}} \quad (18)$$

$$\bar{\epsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_1 \ln \frac{h_0 + \frac{l^2}{Rm}}{h_0 + \frac{x^2}{Rm}} \quad (19)$$

یا به عبارتی :

$$\bar{\epsilon}^p(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_1 \ln \frac{h_i}{h(x)} \quad (20)$$

نتیجتاً،  $\sigma_{f1}$  در نیمه بالایی ورق چنین تعیین می‌شود :

$$\sigma_{f1}(x) = \sigma_{f0} + \frac{H}{1 - \frac{H}{E}} \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_1 \ln \frac{h_i}{h(x)} \quad (21)$$

و برای نیمه پایینی ورق نیز مشابهاً عمل می‌کنیم، در نتیجه:

$$\sigma_{f2}(x) = \sigma_{f0} + \frac{H}{1 - \frac{H}{E}} \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_2 \ln \frac{h_i}{h(x)} \quad (22)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \frac{3}{4} m_2^2 c_2^2}{1 - m_2^2 c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

متوسط تنش تسلیم ورق در طول تماس با هر کدام از غلتکها را می‌توان با معادله زیر به دست آورد :

$$\bar{\sigma}_f = \frac{\int_0^1 \sigma_f dx}{1} \quad (24)$$

بنابراین متوسط تنش تسلیم ورق برابر است با :

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_{f0} + \frac{2H}{1 - \frac{H}{E}} \left\{ x \ln \frac{h_i}{h_o} + 2x - 2\sqrt{R_m h} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{R_m h_0}} \right\}_0^l \quad (25)$$

یا به عبارتی :

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_{f0} + (2\zeta) \left( \frac{H}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{h_i}{1 + \omega^2} + 2 - 2 \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \omega \right) \quad (26)$$

$$\omega = \frac{l}{\sqrt{R_m h_0}} \quad (27)$$