

## طراحی کنترل کننده‌های لغزشی با افزایش کران پایداری

امیرحسین زائری\* و فرید شیخ‌الاسلام\*\*

گروه برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر مجلسی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۳/۵/۶ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۷/۳)

**چکیده** - یکی از مباحث مهمی که در کنترل مطرح است، کنترل سیستم‌های غیرخطی است. کنترل لغزشی از جمله کنترل کننده‌های غیر خطی است که می‌تواند سیستم را در حضور نامعینیهای ساختاری و یا غیرساختاری به‌طور مطلوبی کنترل کند. در کنترل کننده لغزشی که به کنترل کننده ساختار متغیر نیز موسوم است، با معرفی یک سطح لغزشی، اهداف اصلی کنترل کننده دنبال می‌شود. از مشکلات اساسی که در کنترل لغزشی ممکن است ایجاد شود نوسانات ناخواسته شدید در اطراف سطح لغزشی است. برای رفع این نوسانات شدید ناخواسته روشهای متفاوتی معرفی شده که یکی از متداولترین آنها استفاده از لایه مرزی ثابت در اطراف سطح لغزشی است. در این مقاله سعی شده است که با ایجاد تغییراتی در کنترل کننده لغزشی با لایه مرزی ثابت، به کاهش نوسانات شدید ناخواسته و افزایش پایداری سیستم پرداخته شود. در نهایت مدل ریاضی یک پاندول معکوس در حضور نامعینی در نظر گرفته می‌شود و نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده‌های معرفی شده بایکدیگر مقایسه می‌شود.

واژگان کلیدی: سیستم‌های غیرخطی، کنترل لغزشی، قضیه لیاپانف، پاندول معکوس

## Increase of Sliding Mode Controller Stability Limit

A. Zaery, and F. Sheikholeslam

Department of Electrical Eng., Islamic Azad University, Majlesi Branch  
Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** An important consideration in control issues is control of nonlinear systems. Sliding control is among those nonlinear controllers that can control the system desirably in the presence of unstructured uncertainties of carelessness in specifying parameters of the system. In sliding control, also called Variable Structure Control, the main objectives of the controller

\* - استادیار

\* - مربی

are achieved by introducing a sliding surface. One of the fundamental problems which may occur in sliding control is the chattering phenomenon on unwanted oscillation around the sliding surface. Different solutions are introduced to eliminate chattering. One of the commonest solutions is using a constant boundary layer round the sliding surface. In this paper, efforts are made to reduce chattering and to increase stability of the system by varying the sliding controller with a constant boundary layer. Finally, the mathematical model of a pendulum/cart in the presence of uncertainty is developed and the result of the simulation of the introduced controllers are compared.

**Keywords:** Nonlinear Systems, Sliding Control, Lyapunov Theorem, Chattering, Pendulum/Cart.

## ۱- مقدمه

یکی از مهمترین روشهای کنترل که خاصیت غیرخطی بودن را همزمان با خاصیت مقاوم بودن داراست، کنترل لغزشی است. این نوع کنترل که به کنترل ساختار متغیر نیز موسوم است. در این روش با تغییراتی که در ساختار کنترل کننده ایجاد می شود، سعی می شود تا همواره اهداف کنترل به طور مطلوبی دنبال شود. در کنترل کننده های با ساختار متغیر معمول مبتنی بر یک سطح لغزشی اند و این سطح به گونه ای تعریف می شود که همواره با سوق دادن حالت سیستم به سمت آن بتوان اهداف مورد نظر کنترل را برآورده کرد [۱-۶].

برای برآورده ساختن اهداف کنترل معمولاً قانون کنترل از دو قسمت مجزا تشکیل می شود که هر قسمت وظیفه خاص خود را انجام می دهد. به عبارت دیگر یک قسمت از کنترل وظیفه سوق دادن سیستم به سمت سطح لغزشی را دارد و قسمت دیگر وظیفه نگهداشتن حالت سیستم بر روی سطح لغزشی را انجام می دهد.

با توجه به اینکه معادلات دینامیکی سیستم دارای نامعینی اند، حالت سیستم نمی تواند بر روی سطح لغزشی باقی بماند و در اطراف آن دارای نوساناتی بسیار شدید می شود که یکی از اصلیتین معایب کنترل کننده های لغزشی است زیرا علاوه بر اینکه خروجی سیستم نمی تواند خروجی مطلوب را دنبال کند، ممکن است این نوسانات باعث تحریک دینامیکهای مدل نشده فرکانس بالای سیستم و حتی ناپایداری سیستم نیز بشود.

تاکنون برای رفع این نوسانات ناخواسته روشهای بسیار زیادی مانند استفاده از لایه مرزی ثابت و متغیر [۲]، کنترل کننده لغزشی انتگرالی [۴ و ۵]، کنترل کننده تطبیقی [۶ و ۷]،

کنترل کننده فازی [۸ و ۹] و کنترل کننده عصبی [۱۰] پیشنهاد شده است. هدفی که در این مقاله دنبال می شود، افزایش پایداری کنترل کننده از طریق کاهش نوسانات ناخواسته در حول سطح لغزشی است. برای این منظور ابتدا ساختار کنترل کننده های لغزشی بررسی می شود و سپس قانون کنترلی جدیدی که پایداری آن از روش قضیه لیاپانف اثبات می شود، معرفی شده و سرانجام عملکرد کنترل کننده لغزشی پیشنهادی با کنترل کننده های لغزشی متداول مقایسه می شود.

## ۲- معرفی قانون کنترل

معادله دینامیکی زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{X}^{(n)} = f(X) + b(X)u \quad (1)$$

در این معادله  $X(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t)]^T$  بردار حالت،  $u(t) \in \mathcal{R}$  ورودی، و  $f(X)$  و  $b(X)$  توابع برداری غیرخطی و دارای عدم قطعیت می باشند. در این صورت بردار خطای حالت را می توان به صورت  $\tilde{X}(t) = [\tilde{x}(t) \quad \dot{\tilde{x}}(t) \quad \dots \quad \tilde{x}^{(n-1)}(t)]^T \in \mathcal{R}^n$  نمایش داد.

در روش کنترل لغزشی همواره قانون کنترل از دو قسمت تشکیل می شود که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد [۲].

$$u = u_{eq} - u_1 \quad (2)$$

در رابطه (۲)، عبارت  $u_{eq}$  عبارت است از قسمتی از ورودی که اگر به سیستم اعمال شود و حالت سیستم بر روی سطح لغزشی قرار داشته باشد، خروجی  $x(t)$  به سمت خروجی مطلوب  $x_d(t)$  همگرا می شود. همچنین  $u_1$  عبارت است از آن بخشی از ورودی که اگر حالت سیستم روی سطح لغزشی قرار نگرفته

باشد، حالت سیستم را به سمت سطح لغزشی همگرا می‌کند. می‌توان نشان داد که برای  $n=2$  مقدار  $u_{eq}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲]

$$u_{eq} = \frac{-1}{\hat{b}} [\hat{f}(X) - \lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d] \quad (۳)$$

که مقادیر  $\hat{f}$  و  $\hat{b}$  مقادیر نامی  $f$  و  $b$  نامیده می‌شوند و از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\hat{f} = \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2} \quad (۴)$$

$$\hat{b} = (b_{\min} \cdot b_{\max})^{\frac{1}{2}} \quad (۵)$$

قانون کنترل  $u_1$  با فرض  $b(X)=1$  و با استفاده از تابع اشباع به صورت زیر قابل محاسبه است [۲]

$$u_1 = (f(X) + \eta) \cdot \text{Sign}(s) \quad (۶)$$

که در آن

$$F = \max |f - \hat{f}| \quad (۷)$$

در رابطه (۷) ماکزیمم گیری روی تمام فضای نامعینی انجام می‌گیرد. همچنین در رابطه (۶) تابع اشباع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Sign}(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases} \quad (۸)$$

### ۳- معرفی یک قانون کنترلی جدید

در این مقاله برای کاهش پدیده چترینگ در حول سطح لغزشی، قانون کنترل به جای رابطه (۲) به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$u = u_{eq} - Q(s, X) - P\dot{s} \quad (۹)$$

که در آن  $u_{eq}$  از رابطه (۳) الی (۵) محاسبه می‌شود. همچنین  $Q$  و  $P$  برابرند با

$$Q = F + (1+P) \cdot A_1 \cdot e^{-\frac{\beta}{|s|}} \cdot \text{Sign}(s) \quad \beta > 0 \quad (۱۰)$$

$$P = \frac{\alpha}{|s| + \alpha} \quad \alpha > 0 \quad (۱۱)$$

که در رابطه (۱۱)

$$A_1 - A > 2F \cdot e^{\frac{\beta}{|s|}} \quad (۱۲)$$

و  $A$  ضریب به کار رفته در کران پایداری بوده که چگونگی انتخاب آن در بخش بعد توضیح داده خواهد شد. همچنین  $F$  از رابطه (۷) حاصل می‌شود. در روابط (۹) الی (۱۲) سعی شده است که با وارد کردن مشتق  $s$  و با استفاده از توابع نمایی (در ساختار  $Q$ ) از نوسانات سیستم جلوگیری شود. آنچه که در طراحی  $Q$  و  $P$  باید مورد توجه قرار گیرد این است که این دو متغیر باید طوری انتخاب شوند که بتوانند شرط پایداری قضیه لیاپانف را برآورده ساخته و باعث شوند که متغیر  $s$  به سمت سطح لغزشی همگرا شود و در نتیجه خروجی واقعی  $x(t)$  بتواند خروجی مطلوب  $x_d(t)$  را تعقیب کند. نحوه طراحی مناسب  $Q$  و  $P$  در بخش چهارم توضیح داده شده است.

### ۴- بررسی پایداری کنترل کننده

اگر تابع لیاپانف را به صورت

$$V(s) = \frac{s^2}{2} \quad (۱۳)$$

در نظر بگیریم، بر اساس روش مستقیم لیاپانف برای پایداری سیستم کافی است ثابت کنیم که مشتق تابع لیاپانف منفی معین است. به عبارتی:

$$\dot{V}(s) = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} = ss < 0 \quad (۱۴)$$

برای برقراری شرط فوق کافی است که داشته باشیم:

$$ss < -A_1 \cdot |s| \cdot e^{-\frac{B}{|s|}} \quad A, B > 0 \quad (۱۵)$$

که در این صورت پایداری سیستم براساس قضیه لیاپانف تضمین شده و  $s$  به سمت صفر همگرا خواهد شد. لذا شرط لغزشی را برای تعیین قانون کنترل (۹) می‌توان به صورت رابطه (۱۵) در نظر گرفت.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم که  $n=2$  باشد که در این صورت معادله سطح لغزشی به صورت زیر

به دست می آید :

$$(f - \hat{f})s + (1+P).A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \leq Qs \quad (26)$$

برای اثبات رابطه فوق، ابتدا باید مسئله براساس علامت  $s$  به دو قسمت تقسیم شود و هر قسمت به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرد :

$$s \geq 0 \quad (\text{الف})$$

باتوجه به مثبت بودن  $s$  می توان رابطه (26) را به صورت زیر نشان داد :

$$(f - \hat{f}) + (1+P).A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \quad (27)$$

بنابراین باتوجه به مفروضات قضیه و فرض  $A_1 > A$ ، برای برقراری رابطه (27) کفایت که مقدار  $Q$  به شکل رابطه (10) انتخاب شود. با برقراری رابطه (10) شرط پایداری قضیه لیاپانف برای  $s > 0$  برقرار شده و حالت سیستم به سمت سطح لغزشی همگرا می شود.

$$s < 0 \quad (\text{ب})$$

در صورت منفی بودن  $s$  رابطه (26) به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$(f - \hat{f})s - (1+P).A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \leq Qs \quad (28)$$

و با حذف  $s$  از طرفین رابطه می توان نوشت :

$$(f - \hat{f}) - (1+P).A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \geq Q \quad (29)$$

اگر فرض شود که طبق قضیه مقدار  $Q$  برابر با رابطه (10) باشد در این صورت با جایگزینی رابطه (10) در رابطه (29) داریم:

$$(f - \hat{f}) - (1+P).A > e^{-\frac{B}{|s|}} \geq F - (1+P).A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \quad (30)$$

باتوجه به مقدار  $P$  که در رابطه (11) فرض شده است، به خوبی مشخص می شود که مقدار تابع  $P$  همواره یک مقدار مثبت است. بنابراین رابطه (30) را می توان به صورت رابطه زیر نشان داد :

$$\frac{(f - \hat{f})}{1+P} - A e^{-\frac{B}{|s|}} \geq \frac{F}{1+P} - A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \quad (31)$$

$$s = (D + \lambda) \tilde{x} \quad (16)$$

حال باتوجه به فرضیات فوق و همچنین قضیه زیر می توان قانون کنترل  $u$  را به گونه ای انتخاب کرد که شرط لغزشی (14) برقرار شود :

**قضیه:** معادلات دینامیکی (1) را در نظر بگیرید. اگر قانون کنترل در روابط (6) الی (12) توصیف شده شود

آن گاه شرط پایداری لغزشی رابطه (14) برقرار است و حالت سیستم به سمت سطح لغزشی همگرا می شود

**اثبات:** اگر در حالت کلی سیستم به صورت  $\ddot{x} = f(x) + u$  در نظر گرفته شود آن گاه طبق رابطه (15) می توان نوشت

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad (17)$$

بنابراین مشتق  $s$  به صورت زیر به دست می آید

$$\dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (18)$$

با جاگذاری مقدار  $\dot{\tilde{x}}$  در رابطه (18) داریم:

$$\dot{s} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (19)$$

اگر مقدار  $u$  طبق رابطه (9) در رابطه فوق قرار داده شود آن گاه

$$\dot{s} = f + u_{eq} - Q - P\dot{s} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (20)$$

باتوجه به اینکه برای سیستم فوق داریم

$$u_{eq} = -\hat{f} + \lambda \dot{\tilde{x}} - \ddot{x}_d \quad (21)$$

آن گاه می توان نوشت :

$$\dot{s} = f - \hat{f} - \lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d - Q - P\dot{s} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \dot{s} = f - \hat{f} - Q - P\dot{s}$$

از معادله (22) نتیجه می شود

$$(1+P)\dot{s} = f - \hat{f} - Q \quad (23)$$

و یا به عبارتی

$$s\dot{s} = \frac{f - \hat{f}}{1+P}s - \frac{Q}{1+P}s \quad (24)$$

اگر رابطه به دست آمده در رابطه (14) جاگذاری شود، رابطه زیر به دست می آید :

$$s.\dot{s} = \frac{f - \hat{f}}{1+P}s - \frac{Q}{1+P}s \leq -A|s|e^{-\frac{B}{|s|}} \quad (25)$$

بنابراین کافی است که ثابت شود:

با ساده کردن رابطه (۳۱) می توان نتیجه گرفت :

$$A_1 - A \geq \frac{F - (f - \hat{f})}{1 + P} \cdot e^{\frac{B}{|s|}} \quad (32)$$

بنابراین برای اینکه قضیه در حالت  $s < 0$  صادق باشد باید  $A_1$  طوری انتخاب شود که رابطه (۳۲) درست باشد و در این صورت مقدار  $Q$  در حالت  $s < 0$  همان مقداری است که در صورت قضیه فرض شده است.

اگر فرض شود که در بدترین حالت در رابطه (۲۹) مقدار  $f - \hat{f}$  برابر  $-F$  باشد، آن گاه

$$A_1 - A \geq \frac{2F}{1 + P} e^{\frac{B}{|s|}} \quad (33)$$

بنابراین اگر رابطه فوق برقرار باشد حکم اثبات شده است. باتوجه به اینکه مقدار تابع  $P$  همواره بین صفر و یک قرار می گیرد بنابراین می توان به رابطه (۱۲) رسید. بنابراین با در نظر گرفتن هر دو حالت (الف) و (ب) اثبات قضیه به پایان می رسد. با در نظر گرفتن قضیه فوق و با استفاده از قضیه لیاپانوف می توان نتیجه گرفت که اگر  $Q$  به صورت رابطه فوق انتخاب شود،  $s$  به سمت صفر همگرا می شود یا به عبارت دیگر خروجی  $x(t)$ ، خروجی مطلوب  $x_d(t)$  را دنبال می کند.

با توجه به اینکه در رابطه (۱۰) از تابع  $\text{Sgn}$  استفاده شده است و با توجه به خاصیت تابع اشباع، برای کاهش پدیده نوسانات شدید در رابطه (۱۰) از تابع اشباع استفاده می شود و مقدار  $Q$  از رابطه زیر به دست می آید :

$$Q = F + (1 + P) \cdot e^{\frac{B}{|s|}} \cdot \text{Sat}\left(\frac{s}{\phi}\right) \quad (34)$$

شایان ذکر است که در رابطه فوق،  $\phi$  لایه مرزی ثابتی است که در حول سطح لغزشی در نظر گرفته می شود.

## ۵- شبیه سازی

سیستمی که برای شبیه سازی انتخاب شده است، سیستم یک پاندول معکوس است که زاویه آن بعنوان پارامتر تحت کنترل مدنظر قرار گرفته است. این سیستم طبق رابطه زیر

تعریف می شود:

$$\ddot{x} = \frac{M \cdot g \cdot \sin x - m \cdot L \cdot \dot{x}^2 \cdot \sin x}{L \left[ \frac{4M}{3} - m \cdot (\cos x)^2 \right]} + \frac{\cos x}{L \left[ \frac{4M}{3} - m \cdot (\cos x)^2 \right]} u \quad (35)$$

در رابطه (۳۵) مقدار پارامترها به صورت زیر است:

$$M = 1 \text{ Kg} \text{ (جرم)}, L = 1 \text{ m}, 9.6 \leq g \leq 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ (طول میله)}, m = 0.1 \text{ Kg} \text{ (جرم میله پاندول)}.$$

در این سیستم برای در نظر گرفتن نامعینی موجود در پارامتر  $g$  از یک موج سینوسی با دامنه ای در محدوده تعریف شده برای آن استفاده شده است.

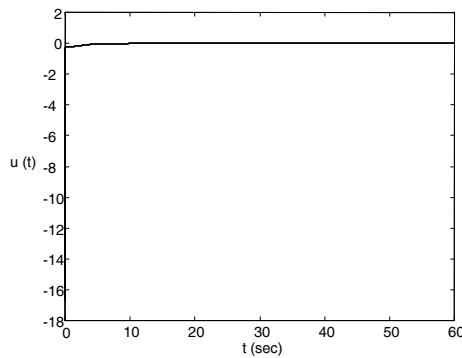
برای طراحی کنترل کننده  $u$  که طبق رابطه (۲) بیان می شود، ابتدا به محاسبه  $u_{eq}$  پرداخته می شود. طبق آنچه که در بخش سوم مقاله آورده شد، مقدار  $u_{eq}$  از رابطه (۳) به دست می آید. در این سیستم مقدار  $\hat{b}$  با مقدار  $b$  برابر است و مقدار تابع  $\hat{f}$  طبق رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\hat{f} = \frac{9.8 \sin x - 0.1 \cdot \dot{x}^2 \cdot \sin x}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} \quad (36)$$

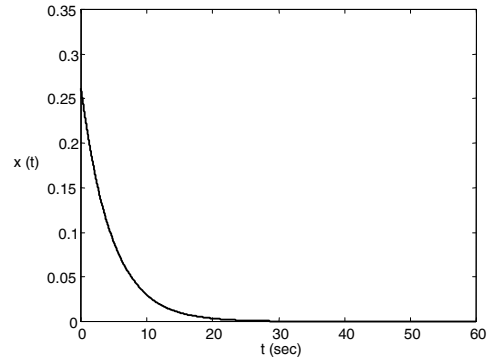
از ترکیب روابط فوق مقدار تابع  $u_{eq}$  به صورت زیر به دست می آید :

$$u_{eq} = \frac{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2}{\cos x} \left[ -\frac{9.8 \sin x - 0.1 \dot{x}^2 \cdot \sin x}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} - \lambda \cdot \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d \right] \quad (37)$$

در شبیه سازیهایی که برای این سیستم صورت می گیرد، مقدار  $\lambda$  برابر ۰.۲ فرض شده است و همچنین  $x_d$  یا همان خروجی مطلوب که در مفهوم واقعی به معنای زاویه مطلوب پاندول معکوس است. به صورت یک تابع پله که دامنه آن در شبیه سازیهای مختلف بر حسب شرایط اولیه فرق می کند، در نظر گرفته شده است.



شکل ۱-ب) ورودی کنترل کننده  $u(t)$  در روش اول  
( $\theta_0=15^\circ$ )



شکل ۱-الف) تغییرات زاویه آونگ به روش کنترلی اول  
( $\theta_0=15^\circ$ )

$$u = u_{eq} - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{1(\cos x)^2}{\cos x}$$

$$\left[ -\frac{9.8 \sin x - 0.1 \dot{x}^2 \cdot \sin x}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} - \lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d \right] \quad (40)$$

$$- \frac{0.2|\sin x|}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} - \left[ 1 + \frac{\alpha}{|s| + \alpha} \right] A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \text{Sat} \left( \frac{s}{\varphi} \right) - \frac{\alpha}{|s| + \alpha} \dot{s}$$

در شبیه‌سازی اول فرض می‌شود که زاویه اولیه برابر با ۱۵ درجه باشد که باید توسط نیروی کنترلی  $u$ ، زاویه نهایی به صفر برسد تا میله به صورت قائم بایستد.

اگر توسط روش اول، سیستم شبیه‌سازی شود آن‌گاه  $u$  از رابطه (۲۱) به دست می‌آید که مقدار  $\varphi=0.05$  و  $\eta=15$  است. در این صورت شکل (۱-الف) نشان دهنده زاویه  $x$  یا  $\theta$  می‌باشد و شکل (۱-ب) نمایشگر ورودی کنترلی  $u$  است. حال اگر از روش پیشنهادی در این مقاله، سیستم شبیه‌سازی شود آن‌گاه  $u$  از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود که در این حالت نیز مقادیر  $\varphi$  و  $\eta$  همان مقادیر قبلی‌اند. همچنین مقادیر  $\alpha=0.01$ ،  $B=0.01$  و مقدار  $A_1$  نیز برای سهولت در شبیه‌سازی مقدار ثابتی که شرایط مورد نظر را برآورده کند (برابر با 10) انتخاب شده است که در این صورت شکل (۲-الف) زاویه خروجی را نمایش می‌دهد و

برای محاسبه  $u_1$  از دو روش متفاوت استفاده شده است که در ادامه بحث به بررسی هر یک از آنها به‌طور جداگانه پرداخته می‌شود و در نهایت نتایج آنها با یکدیگر مقایسه می‌شود.

الف) استفاده از روش کنترل لغزشی با لایه مرزی ثابت:

$$u = u_{eq} - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{0.1(\cos x)^2}{\cos x}$$

$$\left[ -\frac{9.8 \sin x - 0.1 \dot{x}^2 \sin x}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} - \lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d \right] \quad (38)$$

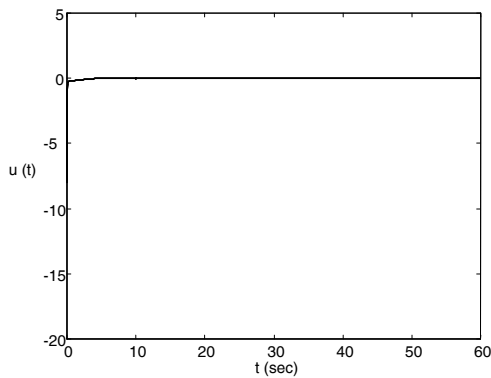
$$- \left[ \frac{0.2|\sin x|}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} + \eta \right] \text{Sat} \left( \frac{s}{\varphi} \right)$$

ب) استفاده از روش کنترل لغزشی جدید:

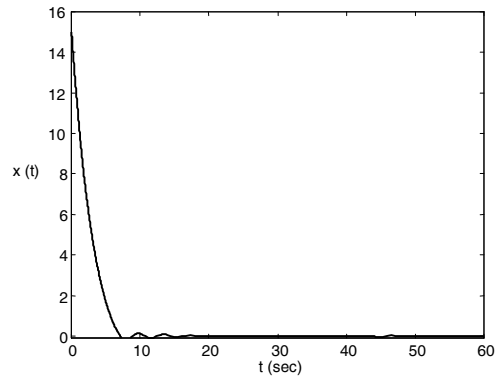
در این روش با توجه به رابطه (۳۵) و قضیه اثبات شده روابط زیر به دست می‌آیند:

$$Q = \frac{0.2|\sin x|}{\frac{4}{3} - 0.1(\cos x)^2} + \left[ 1 + \frac{\alpha}{|s| + \alpha} \right] A_1 e^{-\frac{B}{|s|}} \text{Sat} \left( \frac{s}{\varphi} \right) \quad (39)$$

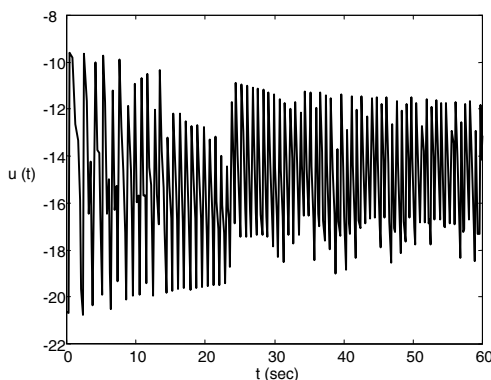
که در این صورت می‌توان قانون کنترل  $u$  را به صورت رابطه (۴۰) نشان داد:



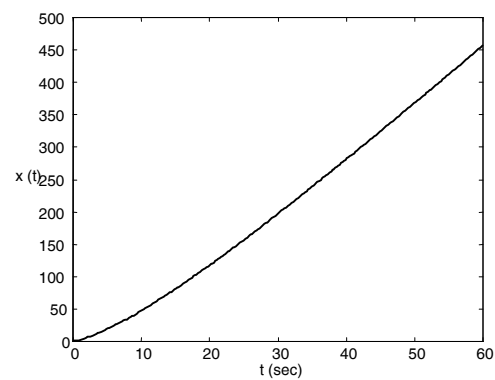
شکل ۲-ب) ورودی کنترل کننده  $u(t)$  در روش دوم  
( $\theta_0 = 15^\circ$ )



شکل ۲-الف) تغییرات زاویه آونگ در روش کنترلی دوم  
( $\theta_0 = 15^\circ$ )



شکل ۳-ب) ورودی کنترل کننده  $u(t)$  در روش اول  
( $\theta_0 = 89^\circ$ )



شکل ۳-الف) تغییرات زاویه آونگ در روش کنترلی اول  
( $\theta_0 = 89^\circ$ )

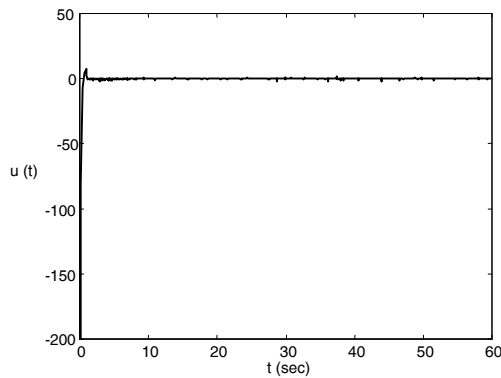
ندارد و سیستم حالت ناپایدار پیدا می‌کند و در ورودی کنترلی نیز مشکل چترینگ ایجاد می‌شود. حال اگر سیستم آونگ وارون توسط روش پیشنهادی در مقاله شبیه‌سازی شود آن‌گاه شکل (۴-الف) برای زاویه خروجی و شکل (۴-ب) برای ورودی کنترلی به دست می‌آید. نتایج حاصل شده به خوبی مؤید این مطلب‌اند که روش پیشنهادی دارای پایداری بیشتر و در نتیجه چترینگ کمتری است که این امر باعث شده تا روش پیشنهادی دارای قدرت کنترلی بهتری در برابر افزایش زاویه اولیه شود.

## ۶- نتیجه‌گیری

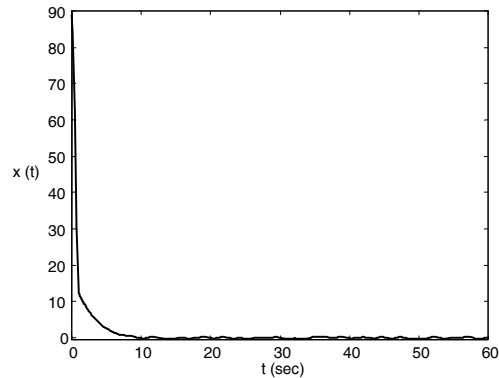
در این مقاله برای افزایش کران پایداری و کاهش پدیده

شکل (۲-ب) معرف ورودی کنترلی است. از مقایسه نتایج فوق به دست می‌آید که هر دو کنترل کننده زاویه آونگ را به خوبی کنترل کرده‌اند هر چند که شرایط طوری انتخاب شده است که کنترل کننده پیشنهادی با سرعت بیشتری توانسته است به پاسخ مطلوب دست یابد. برای شبیه‌سازی دوم فرض می‌شود که زاویه اولیه برابر با ۸۹ درجه باشد که باید توسط کنترل کننده به زاویه صفر میل کند.

اگر این مدل توسط روش اول شبیه‌سازی شود آن‌گاه شکل (۳-الف) زاویه خروجی و شکل (۳-ب) ورودی کنترلی  $u$  را نمایش می‌دهند که به خوبی مشخص است که در این روش برای شرایط اولیه داده شده، امکان کنترل سیستم وجود



شکل ۴-ب) ورودی کنترل کننده  $u(t)$  در روش دوم  
( $\theta_0 = 89^\circ$ )



شکل ۴-الف) تغییرات زاویه آونگ در روش کنترلی دوم  
( $\theta_0 = 89^\circ$ )

ثابت صورت گرفت و به خوبی نشان داده شد که پایداری و کاهش پدیده چتریینگ (به ازای تغییرات زاویه اولیه پاندول معکوس) در روش پیشنهادی بسیار مناسبتر از روش دیگر است.

چتریینگ در کنترل کننده لغزشی، روش جدیدی پیشنهاد شد که پایداری آن توسط قضیه لیاپانف به اثبات رسید. با شبیه سازی کنترل زاویه پاندول معکوس، مقایسه ای بین روش پیشنهادی و روش کنترل کننده لغزشی با لایه مرزی

## مراجع

- Boiko, I., and Fridman, L., "Analysis of Chattering in Continuous Sliding-Mode Controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 9, pp. 1442 – 1446, 2005.
- Slotine, J., and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- Isidori, A., *Nonlinear Control Systems, An Introduction*, Springer-Verlag, 1998.
- Chern T., Chang J., and Chang G., "Dsp-Based Integral Variable Structure Model Following Control For Brushless DC Motor Drivers," *IEEE Trans. on Power Electronics*, Vol.12, No.1, pp. 53-63, 1997.
- Lee J. -H., Allaire P.E., Tao, G., and Zhang, X., "Integral Sliding-Mode Control of a Magnetically Suspended Balance Beam: Analysis, Simulation, and Experiment," *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, Vol. 6, No. 3, pp. 338 – 346, 2001.
- Tan, S.-C., Lai, Y.M., Tse, C.K., and Cheung, M.K.H., "Adaptive Feedforward and Feedback Control Schemes for Sliding Mode Controlled Power Converters," *IEEE Trans. on Power Electronics*, Vol. 21, No. 1, pp. 182 - 192, 2006.
- Wai, R.-J., and Chang, L.-J., "Adaptive Stabilizing and Tracking Control for a Nonlinear Inverted-Pendulum System via Sliding-Mode Technique," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 53, No. 2, pp. 674 - 692, 2006.
- Wai, R.-J., and Su, K.-H., "Adaptive Enhanced Fuzzy Sliding-Mode Control for Electrical Servo Drive," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 53, No. 2, pp. 569 – 580, 2006.
- Chao, P.C.P., Cheng-Kuo S., Chun-Lung H., and Jeng-Sheng H., "Precision Repositioning of the Balancing Ball in an Auto-Balancer System via a Fuzzy Speed Regulator Equipped with a Sliding-Mode Observer," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 13, No. 6, pp. 1107 – 1118, 2005.
- Feipeng, D., "Decentralized Sliding Mode Adaptive Controller Design Based on Fuzzy Neural Networks for Interconnected Uncertain Nonlinear Systems" *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 11, No. 6, pp. 1471 – 1480, 2000.