

تعیین ضریب کمانش صفحات مستطیلی تحت بارهای میانی و انتهایی داخل صفحه به روش نوار محدود اسپلین

محمد هادی انفرادی* و مجتبی ازهری**

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۱۲/۷ - دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۱/۲۰)

چکیده - هدف اصلی این مقاله بررسی کمانش موضعی صفحات مستطیلی تحت بارهای میانی و انتهایی (داخل صفحه) است. در این صفحات علاوه بر بارهایی که در دو انتها وجود دارد، بارهای میانی نیز موازی لبه های بارگذاری شده وارد می شود که باعث پیچیده تر شدن کمانش این صفحات می شود. با توجه به اینکه حل مسائل صفحات با روشهای تحلیلی برای بعضی شرایط تکیه گاهی و بارگذاری معمولاً سخت و طولانی است، استفاده از روشهای عددی بهتر به نظر می رسد. برای حل این مسئله با توجه به محدودیت های دو روش نوار محدود عادی و مختلط، روش نوار محدود اسپلین انتخاب شده است. در این روش از توابع چند جمله ای اسپلین (B_3) در جهت طولی و از توابع شکل هرمیتی در جهت عرضی، برای درونبایی مقادیر گره ای استفاده می شود. روش نوار محدود اسپلین به خاطر داشتن درجه آزادی کمتر در گره ها و داده های ورودی کمتر، به روش المان محدود برتری دارد و سریعتر به جواب همگرا می شود. برای بعضی حالات بارگذاری و تکیه گاهی نمودارهایی از ضریب کمانش موضعی صفحات با بارهای میانی و انتهایی تنظیم شده است. از این ضرایب کمانش در طراحی صفحات قائم که مجبور به تحمل بارهای میانی (صفحات افقی متصل به آنها) هستند استفاده می شود.

واژگان کلیدی: بارهای داخل صفحه، کمانش موضعی، نوار محدود اسپلین، اندرکنش

Stability Criteria for Rectangular Plates Subjected to Intermediate and End Inplane Loads Using Spline Finite Strip Method

M.H. Enferadi and M. Azhari

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: This paper is concerned with elastic local buckling of rectangular plates subjected to intermediate and end inplane loads. In this application, plates (or walls) may carry intermediate loads (whose direction is parallel to end loads) in addition to end loads. Since closed form solution for buckling analysis of plates with different end conditions and subjected to intermediate loads is complicated, numerical methods are more useful. Because of restrictions on the two finite strip methods (classical method and complex method), the spline finite strip method is used to solve the buckling. In spline finite strip method, the longitudinal B_3 spline expressions combined with conventional transverse shape functions are used as displacement functions. This method is computationally more efficient than the finite element method, more flexible in boundary treatment, and more accurate in dealing with point forces and axial loads than the conventional finite strip method. Local buckling coefficients are presented for plates under intermediate and end inplane loads which are useful for design of steel walls or plates that support intermediate floors/loads.

Keywords: Inplane loads, Local buckling, Spline finite strip, Interaction

فهرست علائم

A	مساحت ورق	$[K_g]$	ماتریس هندسی کل ورق
B	ضریب فاصله بار میانی نسبت به بار انتهایی	S	تکیه‌گاه ساده
B_3	نوع تابع چند جمله‌ای اسپلاین (درجه ۳)	U_f	انرژی ارتجاعی ورق
$[B_f]$	ماتریس کرنش سختی خمشی	V_p	انرژی پتانسیل نیروهای خارجی
$[B_g]$	ماتریس کرنش پایداری	a	طول ورق
C	تکیه‌گاه گیردار	b	عرض ورق
D	سختی خمشی ورق	bs	عرض نوار
$[D_f]$	ماتریس سختی ورق ایزوتروپ	f	تابع تغییر مکان روی یک خط گره
E	مدول الاستیسیته ورق	h	فاصله نقاط روی یک خط گره
M_x	لنگر خمشی حول محور y	i	شماره نقاط روی یک خط گره
M_y	لنگر خمشی حول محور x	k	ضریب کماتش موضعی هنگامی که بار میانی وجود نداشته باشد
M_{xy}	لنگر پیچشی حول محورهای x و y	k_1	ضریب کماتش برای بارهای انتهایی
N	توابع شکل هرمیتی	k_2	ضریب کماتش برای بارهای میانی
N_1	نیروی فشاری وارد بر انتهای ورق	$[k_f]$	ماتریس سختی برای یک نوار
N_2	نیروی فشاری میانی	$[k_g]$	ماتریس هندسی برای یک نوار
N_x	نیروی فشاری وارد بر لبه x	m	تعداد تقسیمات روی یک خط گره
N_{xy}	نیروی برشی وارد بر لبه‌های ورق	t	ضخامت ورق
N_y	نیروی فشاری وارد بر لبه y	w	تغییر مکان جانبی ورق
$[K_f]$	ماتریس سختی کل ورق		

x	محور عرضی ورق	[σ]	ماتریس نیروهای خارجی وارد بر ورق
y	محور طولی ورق	[σ_1]	ماتریس نیروهای وارد بر ورق تحت بار میانی و انتهایی
Π	انرژی پتانسیل کل	[σ_2]	ماتریس نیروهای وارد بر ورق تحت بار میانی و انتهایی
α	ضرایب نامعین چند جمله‌ای اسپلاین	ν	ضریب پواسون
θ	دوران نقاط حول محور طولی نوارها	Ψ	تابع چند جمله‌ای اسپلاین

۱- مقدمه

ورقهای نازک و مقاطع ساخته شده از آنان به دلیل دارا بودن مقاومت بالا و وزن کم، به طور روزافزون در صنایع هوا فضا، اتومبیل سازی و دیگر صنایع مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مسئله کمانش ورقهای مستطیلی تحت بارهای انتهایی (بارهایی که در لبه‌ها وارد می‌شوند) یکی از اساسیترین مسائل پایداری صفحات است و حل آن در بسیاری از مقالات و کتب پایداری صفحات موجود است [۱]. پس از استخراج معادله دیفرانسیل کمانش صفحات توسط سنت و نانت، محققان بسیاری به حل کمانش انواع صفحات (صفحات نازک، صفحات ضخیم، صفحات اورتوتروپ و...) تحت حالت‌های مختلف بارگذاری و شرایط لبه‌ای پرداختند. در اغلب مسائل حل شده فرض بر این بوده که بارها در لبه‌های ورق وارد شوند. اما در بعضی حالات، ممکن است بارهای داخل صفحه در قسمتی از طول ورق وارد شوند. معمولاً این نوع بارگذاری در صفحات قائم که چند صفحه افقی به آنها متصل‌اند به وجود می‌آید. این حالت را می‌توان شبیه به بارگذاری بعضی ستونها دانست که در قسمتی از طول آنها بارهای فشاری وارد می‌شوند.

گی‌یر و کارتر ضرایب کمانش و اندرکنش بین بارهای میانی و انتهایی ستونهای با سطح مقطع متغیر و تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف را به دست آورده و جداول و نمودارهایی برای استفاده مهندسان ارائه کرده‌اند [۲]. در رابطه با مسئله کمانش صفحات نیز می‌توان تاثیر بارهای میانی، علاوه بر بارهای انتهایی را نیز در نظر گرفت. شکل (۱) نحوه بارگذاری

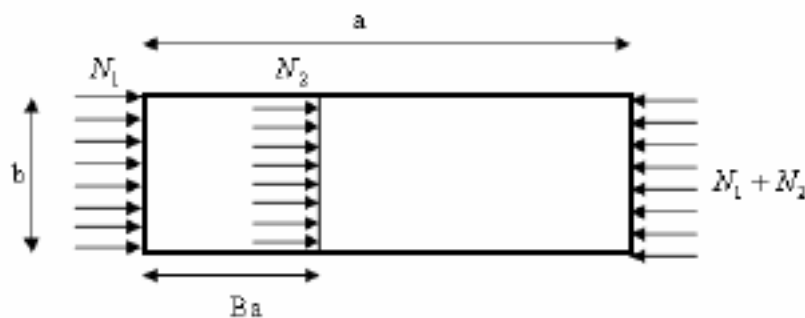
این صفحات را نشان می‌دهد.

پایداری الاستیک این نوع صفحات توسط ژیانگ و همکارانش به روش تحلیلی (روش لوی) ارائه شد و نتایج آن برای ورقهای مستطیلی ایزوتروپیک با شرایط لبه‌ای ساده برای تکیه‌گاه‌های موازی بارهای وارده و شرایط لبه‌ای ساده، گیردار و

یا آزاد برای دو لبه دیگر تنظیم شده است [۳].

حل این صفحات با روشهای تحلیلی به این ترتیب است که ابتدا صفحه از محل وارد شدن بارهای میانی به دو قسمت تقسیم شده و با حل مجزای هر قسمت و همساز کردن جابه‌جایی و شیب در محل تأثیر بارهای میانی، جواب نهایی مسئله به دست می‌آید. در این روش حجم محاسبات زیاد است و برای شرایط تکیه‌گاهی غیر ساده به محاسبات عددی پیچیده نیاز است.

با دقت به نمودارهای به دست آمده توسط ازهری و برادفورد [۴] برای ضرایب کمانش موضعی صفحات تحت بارهای لبه‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که تاثیر تکیه‌گاه‌های طولی در تعیین ضریب کمانش بیشتر است. به طوری که با زیاد شدن نسبت $\frac{a}{b}$ (a طول ورق و b عرض ورق) تاثیر تکیه‌گاه بارگذاری شده کاهش می‌یابد. از طرفی حل کمانش ورقهای با نسبتهای محدود $\frac{a}{b}$ و تحت بارهای میانی و انتهایی به روش تحلیلی (روش ژیانگ) برای تکیه‌گاههای طولی ساده، نمی‌تواند حل کاملی باشد. علاوه بر این، با وجود این که در مواردی می‌توان جوابهای دقیق معادله حاکم بر رفتار کمانشی ورق را به روش تحلیلی به دست آورد، لیکن مشکلات محاسباتی نظیر همگرایی کند سریها و یا معادلات فوق‌العاده



شکل ۱ - ورق تحت بارهای میانی و انتهایی داخل صفحه

عملی مهم است افزایش می‌دهد. در این مقاله نیز به حل عددی (روش نوار محدود اسپلاین) کماتش موضعی ورقهای تحت بارهای میانی و انتهایی و تعیین اندرکنش بین بارهای میانی و انتهایی پرداخته می‌شود.

۲ - روش نوار محدود اسپلاین

یکی از روشهای تحلیل و بررسی کماتش صفحات و پوسته‌ها استفاده از روش قدرتمند نوار محدود است. با این روش می‌توان با استفاده از توابع شکل، مسائل دو بعدی را به صورت یک بعدی تحلیل کرده و معادلات دیفرانسیل جزئی (پاره‌ای) ورقها را حل کرد. رابطه‌سازیهایی اخیر روش نوار محدود براساس فرضیه تغییر شکل است. روشهای اولیه معمولاً با فرض یک تابع چند جمله‌ای ساده در جهت عرضی نوارها و توابع مثلثاتی پیوسته یا سری توابع هذلولی مثلثاتی در جهت طولی نوارها تحلیل را انجام می‌دادند. شکل نهایی تابع تغییر مکان حاصل از ضرب چند جمله‌ایها و سریها خواهد بود. در حالت کلی همه سریهایی که بتوانند حداقل شرایط مرزی را در لبه‌های نوار برآورده کنند، قابل کاربردند.

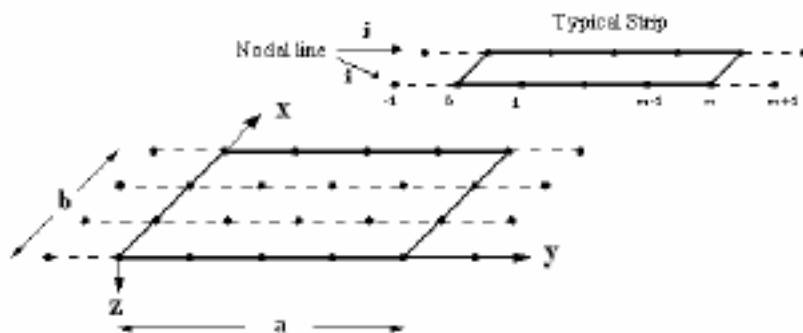
انتخاب توابع درونیاب مناسب برای نوار براساس فرضیه جداسازی متغیرها، یکی از مراحل مهم در تحلیل است. انتخاب نادرست آن ممکن است موجب رسیدن به جوابهای نادرست و یا عدم همگرایی شود. با توسعه اخیر نوارهای اسپلاین و نوارهای با توابع شکل محاسباتی، این امکان فراهم شده که به جای سریهای مثلثاتی و هایپربولیک، از توابع اسپلاین استفاده

پیشیده باعث می‌شود که در حل مسائل صفحات به جای روشهای تحلیلی از روشهای عددی استفاده کنیم.

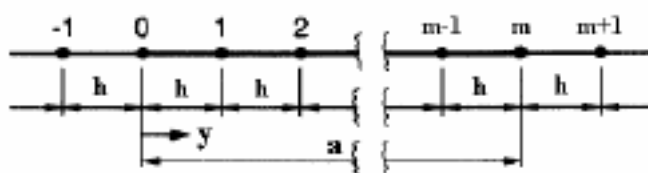
مراجع مربوط به تحلیل پایداری صفحات تحت بارهای میانی و انتهایی برای لبه‌های بارگذاری نشده غیر ساده در راستای طولی، به صورت فراگیر یافت نمی‌شود. برای تعیین ضریب کماتش این صفحات با هر نوع شرط لبه‌ای می‌توان از روش نوار محدود اسپلاین استفاده کرد. روش نوار محدود اولین بار توسط چونگ ارائه شد که انواع آن عبارت‌اند از نوار محدود عادی، نوار محدود مختلط و نوار محدود اسپلاین. تفاوت این سه روش نوار محدود در نحوه درونیابی مقادیر گره‌ای در راستای طولی است. هر یک از این روشها به نوعی معایب یکدیگر را برطرف کرده و دارای ویژگی‌ها و کاربردهای به‌خصوصی‌اند. ماهیت توابع اسپلاین به گونه‌ای است که قادر به مدل کردن انواع شرایط مرزی همراه با تکیه گاههای الاستیک است.

در ارتباط با مسئله کماتش صفحات (بار میانی وجود نداشته باشد)، تحلیل و بررسیهای با ارزشی با استفاده از انواع روشهای نوار محدود انجام شده به طوری که می‌توان این روش را بهترین راه حل برای مسائل صفحات دانست. به عنوان نمونه می‌توان به نتایج و بررسیهای از هری و برادفورد [۵ و ۴] (نوار محدود عادی و مختلط) و داو [۶] (نوار محدود اسپلاین) اشاره کرد.

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد، برای تحلیل کماتش صفحات تحت بارهای میانی و انتهایی با هر نوع شرط لبه‌ای، می‌توان از روش نوار محدود استفاده کرد. استفاده از شیوه‌های عددی توانایی مهندسان را در حل مسائل طراحی که از نظر



شکل ۲ - ورق تقسیم‌بندی شده به روش نوار محدود اسپلاین



شکل ۳ - خط گره یک نوار در روش نوار محدود اسپلاین برای ورق مستطیلی به طول a

که در آن $\psi_i(y)$ یک تابع اسپلاین موضعی است و α_i ها به گونه‌ای هستند که تابع $f(y)$ را تخمین می‌زنند. تخمین جابجایی روی یک خط گره طبق معادله (۱) برای هنگامی است که طول نوار را به m قسمت تقسیم شده باشد (شکل ۳). علاوه بر این، دو گره نیز در دو انتهای هر خط گره برای اعمال شرایط لبه‌ای و اصلاح توابع اسپلاین در نظر گرفته می‌شود. توابع اسپلاین براساس درجه چند جمله‌ای تقسیم بندی می‌شوند. تابع B_3 یکی از بهترین انتخاب برای حل مسائل صفحات و پوسته‌هاست. پیوستگی مسائل صفحات و پوسته‌ها از نوع C_2 است و یک چند جمله‌ای درجه ۳ به راحتی می‌تواند این پیوستگی را ایجاد کند [۷]. شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب تابع اسپلاین محلی و ترکیب خطی توابع اسپلاین را برای یک خط گره نشان می‌دهند.

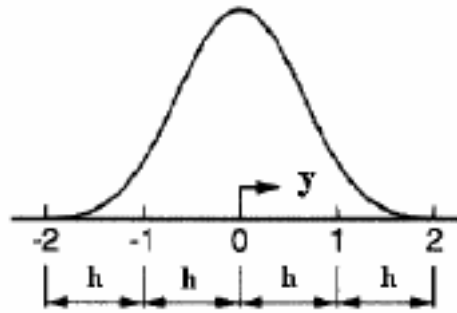
هر تابع اسپلاین محلی در چهار مقطع متوالی مقادیر غیر صفر دارد و بر اساس نقطه y_i نوشته می‌شود. تابع اسپلاین (B_3) که تقسیم بندی آن ثابت است ($h = \frac{a}{m}$ در شکل ۳) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

شود. تابع اسپلاین یک چندجمله‌ای است که در ریاضیات برای درونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

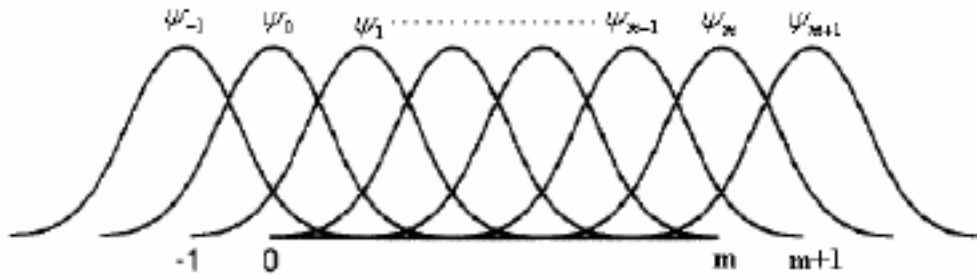
در روش نوار محدود اسپلاین بر خلاف دو روش دیگر نوار محدود (نوار محدود عادی و مختلط)، گره‌هایی نیز در راستای طولی نوارها در نظر گرفته می‌شود. برای درونیابی مقادیر گره‌ای (شیب و جابه‌جایی) از توابع هرمیتی در راستای عرضی نوارها و از چند جمله‌ای اسپلاین در راستای طولی نوارها استفاده می‌شود. برای کماتش موضعی (تغییر شکلهای خمشی) درجات آزادی هر یک از گره‌ها تغییر مکان قائم (w) و دوران حول محور طولی نوارها (θ_y) هستند. شکل (۲) نحوه تقسیم‌بندی ورق به روش نوار محدود اسپلاین و شکل (۳) یک خط گره را نشان می‌دهد.

اگر $f(y)$ تابع تغییر مکان روی یک خط گره باشد و بخواهیم $f(y)$ را با ترکیب خطی توابع اسپلاین تخمین بزنیم، خواهیم داشت:

$$f(y) = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \psi_i(y) \quad (1)$$



شکل ۴ - تابع اسپلاین محلی ψ_0



شکل ۵ - ترکیب خطی توابع اسپلاین برای یک خط گره

$$\{\delta_f\}^T = \left\{ \alpha_{-1i}, \alpha_{0i}, \dots, \alpha_{m+1i}, \theta_{-1i}, \theta_{0i}, \dots, \theta_{m+1i}, \right. \\ \left. \alpha_{-1j}, \alpha_{0j}, \dots, \alpha_{m+1j}, \theta_{-1j}, \theta_{0j}, \dots, \theta_{m+1j} \right\}_{1 \times 4(m+3)} \quad (6)$$

در معادله فوق α_i ها و α_j ها به ترتیب تغییر مکان قائم گره‌ها روی خط گره i و j و θ_i ها و θ_j ها به ترتیب دوران گره‌ها حول محور y ، روی خط گره i و j هستند.

در این روش هر نوع شرط تکیه‌گاهی را می‌توان به‌آسانی مدل کرد. نحوه ارضای شرایط مرزی در راستای هر نوار (تکیه‌گاه میانی یا انتهایی) به این ترتیب است که با نوشتن هر شرط تکیه‌گاهی در هر نقطه می‌توان توابع اسپلاین را اصلاح کرد. لازم به ذکر است که شرایط لبه‌هایی که موازی خط گره‌ها قرار دارند (تکیه‌گاههای راستای طولی)، هنگام سوار کردن ماتریسها اعمال می‌شود. در این قسمت نحوه اعمال شرط تکیه‌گاهی ساده در ابتدای نوار توضیح داده می‌شود [۸].

فرض می‌کنیم در ابتدای نوار شرایط لبه‌ای به صورت ساده باشد. دو شرط اصلی برای تکیه‌گاه ساده عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{و} \quad w = 0 \quad \Leftarrow \quad y = 0 \quad \text{در}$$

$$\psi_i(y) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (y-y_{i-2})^3 & y_{i-2} \leq y \leq y_{i-1} \\ h^3 + 3h^2(y-y_{i-1}) + 3h(y-y_{i-1})^2 - 3(y-y_{i-1})^3 & y_{i-1} \leq y \leq y_i \\ h^3 + 3h^2(y_{i+1}-y) + 3h(y_{i+1}-y)^2 - 3(y_{i+1}-y)^3 & y_i \leq y \leq y_{i+1} \\ (y_{i+2}-y)^3 & y_{i+1} \leq y \leq y_{i+2} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین با استفاده از توابع شکل هر میستی و چند جمله‌ای اسپلاین می‌توان تابع تغییر مکان را برای کل ورق به صورت زیر نوشت:

$$w = [N][\psi]\{\delta_f\} \quad (3)$$

که در آن:

$$[N] = [N_1, N_2, N_3, N_4]_{1 \times 4} \quad (4)$$

$$N_1 = 1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3 \quad N_2 = x(1 - 2\bar{x} - \bar{x}^2)$$

$$N_3 = (3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3) \quad \bar{x} = x/b$$

$$N_4 = x(\bar{x}^2 - \bar{x})$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \langle \psi \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \psi \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \psi \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \psi \rangle \end{bmatrix}_{4 \times 4(m+3)} \quad (5)$$

$$\langle \psi \rangle = \langle \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m+1} \rangle_{1 \times 4(m+3)}$$

جدول ۱ - اصلاح توابع اسپلاین برای اعمال شرایط مرزی هنگامی که تکیه‌گاه در ابتدای نوار باشد

	$\bar{\psi}_{-1}$	$\bar{\psi}_0$	$\bar{\psi}_1$
تکیه‌گاه آزاد	ψ_{-1}	ψ_0	ψ_1
تکیه‌گاه ساده	حذف	حذف	$\psi_1 - \psi_{-1}$
تکیه‌گاه گیردار	حذف	حذف	$\psi_1 - 0.5 \psi_0 + \psi_{-1}$
تکیه‌گاه پیوسته	$\psi_{-1} - 0.25 \psi_0$	حذف	$\psi_1 - 0.25 \psi_0$

$$w(y) = -\alpha_1 \psi_{-1} + 0 \times \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \dots$$

$$+ \alpha_{m-1} \psi_{m-1} + \alpha_m \psi_m + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}$$

$$\Rightarrow w(y) = \alpha_1 [\psi_1(y) - \psi_{-1}(y)] + \alpha_2 \psi_2(y) + \dots$$

$$+ \alpha_{m-1} \psi_{m-1} + \alpha_m \psi_m + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}$$

اگر فرض کنیم $\bar{\psi}_1 = \psi_1 - \psi_{-1}$ آن‌گاه:

$$w(y) = \alpha_1 \bar{\psi}_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_{m-1} \psi_{m-1} \quad (12)$$

$$+ \alpha_m \psi_m + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}$$

مشاهده می‌کنید که با اعمال دو شرط مرزی دو جمله از تابع اسپلاین حذف شده و تابع $\bar{\psi}_1$ به ψ_1 اصلاح می‌شود. این اصلاح را می‌توان برای تمامی خط‌گره‌ها که تکیه‌گاه ساده در ابتدا دارند به کار برد. برای تکیه‌گاه انتهای نوار نیز می‌توان به همین ترتیب عمل کرد. جدول (۱) توابع اسپلاین اصلاح شده را برای شرایط لبه‌ای مختلف نشان می‌دهد.

مطابق با تابع تغییر مکان انتخاب شده (w) می‌توان درایه‌های ماتریسهای سختی و هندسی کل ورق را با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج کرده و با حل یک مسئله مقدار ویژه، بار کمانشی صفحات را به دست آورد.

۳ - استخراج ماتریسهای سختی و هندسی

یک سازه الاستیک (خطی و یا غیر خطی) زمانی در حال تعادل است که در اثر تغییر مکان جزئی اختیاری هیچ‌گونه تغییر در مقدار انرژی پتانسیل کل آن پیدا نشود. اگر U_r نشان دهنده انرژی تغییر شکل خمشی ورق در محدوده الاستیک (انرژی الاستیک) و V_p انرژی پتانسیل نیروهای خارجی باشد، مجموع این دو کمیت ($U_f + V_p$) را انرژی پتانسیل کل (Π) می‌نامیم. بیان ریاضی قضیه ایستایی انرژی پتانسیل به صورت زیر است:

تابع تغییر مکان روی یک خط‌گره به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w(y) = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \psi_i(y) \quad (7)$$

برای یک خط‌گره این دو شرط را نوشته و در توابع اسپلاین جاگذاری می‌کنیم. بسط معادله (۷) عبارت است از:

$$w(y) = \alpha_{-1} \psi_{-1} + \alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_{m-1} \psi_{m-1} \quad (8)$$

$$+ \alpha_m \psi_m + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}$$

با توجه به دو شرط تکیه‌گاهی برای تکیه‌گاه ساده می‌توان نوشت:

$$w(0) = 0 = \alpha_{-1} \psi_{-1}(0) + \alpha_0 \psi_0(0) + \alpha_1 \psi_1(0) + \dots$$

$$+ \alpha_{m-1} \psi_{m-1}(0) + \alpha_m \psi_m(0) + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}(0)$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_{-1} \times \frac{1}{6} + \alpha_0 \times \frac{4}{6} + \alpha_1 \times \frac{1}{6} + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{-1} \times \frac{1}{6} + \alpha_0 \times \frac{4}{6} + \alpha_1 \times \frac{1}{6} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_{-1} \psi_{-1}''(0) + \alpha_0 \psi_0''(0) + \alpha_1 \psi_1''(0) + \dots$$

$$+ \alpha_{m-1} \psi_{m-1}''(0) + \alpha_m \psi_m''(0) + \alpha_{m+1} \psi_{m+1}''(0)$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_{-1} \times \frac{1}{h^2} + \alpha_0 \times \frac{2}{h^2} + \alpha_1 \times \frac{1}{h^2} + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{-1} + 2\alpha_0 + \alpha_1 = 0 \quad (10)$$

می‌توان با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰) مقادیر α_{-1} و α_0 را بر حسب α_1 به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{cases} \alpha_{-1} = -\alpha_1 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

با جایگزین کردن مقادیر α_{-1} و α_0 در معادله (۸) معادله زیر به دست می‌آید.

در معادله فوق $[D_f]$ ماتریس صلبیت الاستیکی ورق است که برای ورقهای ایزوتروپیک به صورت زیر است.

$$[D_f] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن E مدول الاستیسیته، t ضخامت ورق و ν ضریب پواسون است.

اگر معادلات (۱۷) و (۱۹) را در معادله (۱۴) قرار دهیم، انرژی الاستیک ورق به صورت زیر درمی آید.

$$U_f = \frac{1}{2} \iint \{\delta_f\}^T [B_f]^T [D_f] [B_f] \{\delta_f\} dx dy \quad (21)$$

با خارج کردن $\{\delta_f\}$ از داخل انتگرال خواهیم داشت:

$$U_f = \frac{1}{2} \{\delta_f\}^T \left(\iint [B_f]^T [D_f] [B_f] dx dy \right) \{\delta_f\} \quad (22)$$

معادله فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$U_f = \frac{1}{2} \{\delta_f\}^T [k_f] \{\delta_f\} \quad (23)$$

که در آن $[k_f]$ ماتریس سختی خمشی یک نوار اسپلین است. اگر b_s عرض نوار و a طول نوار باشد، آن گاه:

$$[k_f] = \int_0^{bs} \int_0^a [B_f]^T [D_f] [B_f] dy dx \quad (24)$$

برای ورق تحت بارهای فشاری N_x و N_y و نیروی برشی N_{xy} (نیرو بر واحد طول) انرژی پتانسیل نیروهای خارجی طبق معادله زیر به دست می آید.

$$V_p = -\frac{1}{2} \iint [N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right)] dx dy \quad (25)$$

اگر $[B_g]$ به صورت زیر تعریف شود:

$$[B_g] = \left[\frac{\partial([N][\psi])}{\partial x}; \frac{\partial([N][\psi])}{\partial y} \right]^T \quad (26)$$

آن گاه با استفاده از معادلات (۳) و (۲۶)، معادله (۲۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V_p = -\frac{1}{2} \iint \{\delta_f\}^T [B_g]^T [\sigma] [B_g] \{\delta_f\} dx dy \quad (27)$$

که در آن:

$$\delta \Pi = \delta(U_f + V_p) \quad (13)$$

معمولاً وقتی که یک راه حل دقیق (تحلیلی) برای حل مسائل در دسترس نباشد و یا راه تحلیلی طولانی و پیچیده باشد، از روش انرژی پتانسیل در تحلیل عددی استفاده می شود. انرژی پتانسیل کل مینیمم بیانگر حالت تعادل پایدار و انرژی پتانسیل کل ماکزیمم بیانگر حالت تعادل ناپایدار است. تعادل خشی حالتی است که در آن انرژی پتانسیل کل نه ماکزیمم و نه مینیمم است. برای تعیین بار بحرانی صفحات باید باری را پیدا کنیم که ورق تحت اثر آن بار می تواند بین هر دو شکل مستقیم و کمی خم شده در حال تعادل باشد. در این حالت عضو در حالت تعادل خشی است.

با استفاده از روابط الاستیسیته (تنش - کرنش و انحنا) می توان انرژی الاستیکی و پتانسیل یک ورق تحت بارهای وارده را طبق معادلات زیر به دست آورد.

$$U_f = \frac{1}{2} \iint_A [\sigma_f]^T [\epsilon_f] dx dy \quad (14)$$

که در آن

$$[\sigma_f] = [M_x; M_y; M_{xy}]^T \quad (15)$$

و

$$[\epsilon_f] = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (16)$$

در معادلات فوق M_x لنگر خمشی حول محور y ، M_y لنگر خمشی حول محور x ، M_{xy} لنگر پیچشی حول محورهای x و y و w تغییر مکان عمود بر سطح ورق است. با جایگزینی معادله (۳) در (۱۶) می توان نوشت:

$$[\epsilon_f] = [B_f] \{\delta_f\} \quad (17)$$

که در آن

$$[B_f] = \left[-\frac{\partial^2([N][\psi])}{\partial x^2}; -\frac{\partial^2([N][\psi])}{\partial y^2}; 2\frac{\partial^2([N][\psi])}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (18)$$

رابطه بین تنش و کرنش را نیز می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$[\sigma_f] = [D_f][\epsilon_f] \quad (19)$$

به ذکر است که برای ورق با بارهای میانی و انتهایی باید به محل اثر بارها و مقدار بار در هر قسمت از نوار توجه کرد و ماتریس هندسی را در هر قسمت به طور جداگانه محاسبه کرد. ماتریس هندسی کل نوار از مجموع ماتریسهای هندسی هر قسمت نوار به دست می آید.

۴ - نتایج

همان طور که در مقدمه مقاله گفته شد، حل ورقهای مستطیلی تحت بارهای میانی و انتهایی به روش تحلیلی برای اغلب شرایط مرزی غیر ساده بسیار طولانی و وقتگیر است. لذا بر اساس معادلات فوق یک برنامه رایانه ای (به روش نوار محدود اسپلاین) تدوین شده که به کمک آن می توان ضرایب کمانش موضعی ورقهای تحت بارهای میانی و انتهایی با هر نوع شرط مرزی را تعیین کرد.

۴-۱- صحت نتایج

به منظور کنترل و بررسی صحت نتایج برنامه و مقایسه با نتایج به دست آمده به روشهای تحلیلی، دو مقایسه زیر آورده شده است. برای تعیین شرایط لبه ای ورقها از حروف S (تکیه گاه ساده) و C (تکیه گاه گیردار) استفاده شده است. شرایط لبه ای یک ورق مستطیلی با چهار حرف و به صورت راستگرد نشان داده می شود.

۱- برای ورق مربع شکل ($a=b$) چهار طرف گیردار (CCCC) تحت بارگذاری لبه ای (بار میانی وجود نداشته باشد $N_2 = 0$)، ضریب کمانش موضعی به دو روش نوار محدود اسپلاین (برنامه رایانه ای) و روش لوی به صورت زیر است [۹] جدول (۲).

حل به روش لوی: $k = 10.07$

حل به روش نوار محدود اسپلاین: $k = 10.08$

۲- جداول (۳) و (۴) ضرایب کمانش موضعی صفحات مستطیلی تحت بارهای میانی و انتهایی را به دو روش تحلیلی و نوار محدود اسپلاین برای دو ورق با شرایط

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

با خارج کردن $\{\delta_f\}$ از داخل انتگرال خواهیم داشت:

$$V_p = -\frac{1}{2} \{\delta_f\}^T \left(\iint [B_g]^T [\sigma] [B_g] dx dy \right) \{\delta_f\} \quad (29)$$

معادله فوق را نیز می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$V_p = -\frac{1}{2} \{\delta_f\}^T [k_g] \{\delta_f\} \quad (30)$$

که در آن $[k_g]$ ماتریس هندسی یا پایداری یک نوار اسپلاین است.

$$[k_g] = \int_0^b \int_0^a [B_g]^T [\sigma] [B_g] dy dx \quad (31)$$

ماتریس نیروهای فشاری ($[\sigma]$) برای ورق تحت بارهای میانی و انتهایی به صورت زیر است.

$$0 \leq y \leq Ba \Rightarrow [\sigma_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$Ba \leq y \leq a \Rightarrow [\sigma_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_2 + N_1 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای سختی خمشی $[k_f]$ و هندسی $[k_g]$ هر نوار اسپلاین را می توان طبق معادلات (۲۲) و (۲۸) به دست آورد. ماتریس سختی خمشی کل ورق $[K_f]$ و ماتریس هندسی کل ورق $[K_g]$ ، از سوار کردن درایه های ماتریسهای سختی و هندسی همه نوارها (بر اساس درجات آزادی مشترک گره ها و ارضای شرایط تعادل و همسازی در مرزهای ورق) به دست می آید. با داشتن ماتریسهای سختی خمشی و هندسی کل ورق، رابطه انرژی پتانسیل کل برای تمام سطح ورق به صورت زیر نوشته می شود.

$$\delta \Pi = \delta (U_f - V_p) \Rightarrow [[K_f] - [K_g]] \{\delta\} = 0 \quad (33)$$

در معادله فوق $[K_f]$ و $[K_g]$ به ترتیب ماتریسهای سختی و هندسی و $\{\delta\}$ بردار تغییر مکان برای کل ورق است. معادله فوق وقتی برای تمامی تغییر مکانهای اختیاری یا مجازی برقرار است که دترمینان ضرایب صفر باشد. یعنی:

$$|[K_f] - [K_g]| = 0 \quad (34)$$

با حل دترمینان فوق می توان بار بحرانی را به دست آورد. لازم

جدول ۲ - ضرایب کمانش ورق CCCC تحت فشار لبه‌ای به دو روش نوار محدود اسپلاین و روش تحلیلی

	روش نوار محدود اسپلاین				روش تحلیلی [۱]	درصد خطا (%)
	m=۴	m=۶	m=۸	m=۱۰		
$\frac{a}{b} = 1$	۱۰/۱۳	۱۰/۱	۱۰/۹	۱۰/۸	۱۰/۷	۰/۹۹
$\frac{a}{b} = ۲$	۷/۹۳۲	۷/۹۲۹	۷/۹۲۵	۷/۸۹۳	۷/۸۸	۰/۱۶

جدول ۳ - ضرایب کمانش موضعی صفحات تحت بارهای میانی و انتهایی به دو روش تحلیلی و نوار محدود اسپلاین

برای ورق SSSS هنگامی که بار انتهایی وجود نداشته باشد $N_1 = 0$

	B= ۰/۳	B= ۰/۵	B= ۰/۷
روش تحلیلی [۳]	۵/۳۱۳۴	۶/۳۷۷۹	۶/۶۴۴۳
روش نوار محدود اسپلاین	۵/۳۲۴۹	۶/۳۹۰۱	۶/۶۵۳۷

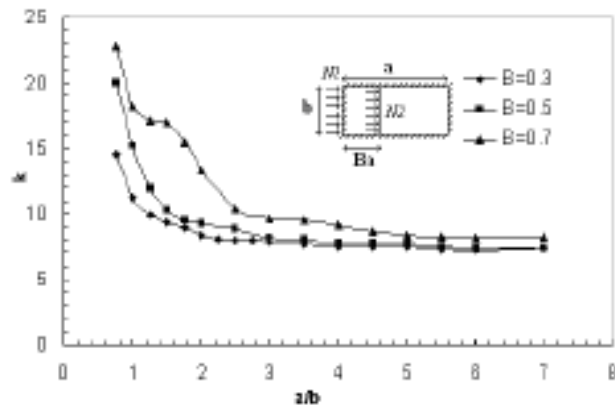
جدول ۴ - ضرایب کمانش موضعی صفحات تحت بارهای میانی و انتهایی به دو روش تحلیلی و نوار محدود اسپلاین

برای ورق SCSC هنگامی که بار انتهایی وجود نداشته باشد $N_1 = 0$

	B= ۰/۳	B= ۰/۵	B= ۰/۷
روش تحلیلی [۳]	۸/۴۷۳۰	۱۲/۰۵۰	۱۳/۳۰۷
روش نوار محدود اسپلاین	۸/۴۹۰۸	۱۲/۰۷۲۹	۱۳/۳۳۶۳

m های مختلف آورده شده است. نتایج این جدول همگرایی بسیار خوب روش نوار محدود اسپلاین را نشان می‌دهد. با مقایسه ضرایب کمانش به دست آمده به دو روش تحلیلی و روش نوار محدود اسپلاین می‌توان گفت، نتایج برنامه رایانه‌ای (روش نوار محدود اسپلاین) بسیار نزدیک به حل تحلیلی است، اما سرعت حل این دو روش قابل مقایسه نیست. با حل عددی و استفاده از برنامه رایانه‌ای در مدت زمان کوتاه می‌توان بارهای بحرانی ورق تحت بارهای میانی با هر شرط مرزی را محاسبه کرد، در حالی که حل تحلیلی به محاسبات عددی پیچیده نیاز دارد و با طولانی شدن راه حل، احتمال اشتباه در محاسبات نیز بیشتر می‌شود. در حل عددی به سادگی می‌توان اثر تغییر ضخامت (ورقهای با ضخامت متغیر یا پله‌ای) و یا تغییر در مدول الاستیسیته (ورقهای ارتوتروپیک) را وارد برنامه کرد. در حالی که بررسی این حالات به روش تحلیلی بسیار وقتگیر و طولانی است.

مرزی متفاوت نشان می‌دهند [۳]. در هر دو روش ضرایب کمانش نسبت به بار میانی محاسبه شده است (بار انتهایی وجود ندارد $N_1 = 0$). در روش نوار محدود اسپلاین برای رسیدن به یک جواب با دقت خوب می‌بایست تعداد نوار و گره مناسبی انتخاب شود. با استفاده از برنامه رایانه‌ای تنظیم شده، ضریب کمانش صفحات با انتخاب تعداد نوارهای مختلف، مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت. اگر تغییرات خاصی در راستای عرضی ورق وجود نداشته باشد (مانند تغییر ضخامت ورق و یا وجود تکیه‌گاه میانی) با انتخاب ۴ نوار می‌توان به یک جواب با دقت خوب دست یافت. اما تعداد تقسیمات ورق در راستای طولی (m) بستگی به شرایط لبه‌های ابتدا و انتهای نوارها دارد. به طوری که با افزایش قیدهای لبه‌ای می‌بایست تعداد تقسیمات را افزایش داد (معمولاً با انتخاب $m=10$ می‌توان به یک جواب با دقت خوب دست یافت). در جدول (۲) ضرایب کمانش برای



شکل ۶ - نمودار تغییرات ضریب کماتش موضعی k ($k = k_2$) نسبت به a/b هنگامی که $N_1 = 0$

N_1 و N_2 نیز به ترتیب بارهای انتهایی و میانی هستند. نمودار شکل (۶) تغییرات ضرایب کماتش را نسبت به $\frac{a}{b}$ های مختلف برای یک ورق چهار طرف گیردار (CCCC) نشان می‌دهد. تغییرات مدهای کماتشی برای حالتی که بار در فاصله نزدیکتری به تکیه‌گاه قرار دارد ($B \geq 0.5$)، ملموستر است. ضرایب کماتش برای دو حالت $B = 0.3$ و $B = 0.5$ تفاوت زیادی با هم ندارند، ولی با افزایش B به 0.7 ، افزایش ضریب کماتش نیز بیشتر است. با دقت به نمودار می‌توان گفت، با بیشتر شدن نسبت $\frac{a}{b}$ برای حالت‌های $B < 0.7$ ، تاثیر محل اعمال بار در تعیین ضریب کماتش کاهش خواهد یافت.

همان‌طور که در قسمت استخراج روابط و ماتریسها به روش نوار محدود اسپلاین توضیح داده شد، تحلیل مسائل پایداری به روش حداقل انرژی پتانسیل کل، در نهایت به یک مسئله مقدار ویژه با یک مجهول منجر می‌شود. اما در ورقهای تحت بار میانی و انتهایی می‌بایست بارهای میانی و انتهایی بحرانی مجهول را هم‌زمان محاسبه کرد. برای تعیین اندرکنش (اثر متقابل) پایداری بارهای میانی و انتهایی به طریق زیر عمل می‌شود.

۱- با صفر قرار دادن یکی از نیروها به عنوان مثال $N_2 = 0$ ، پس از تحلیل پایداری ورق، نیروی بحرانی N_1 به دست می‌آید. با استفاده از معادله (۳۵) می‌توان ضریب کماتش k_1 را تعیین نمود نقطه ۱ در شکل (۷) به مختصات $[k_1, 0]$

علاوه بر این، تا زمانی که شرایط لبه‌های طولی ورقهای تحت بار میانی به صورت ساده باشند، در حل تحلیلی می‌توان از روش لوی استفاده کرد. اما اگر شرایط لبه‌های طولی به صورت غیر ساده و یا متفاوت با یکدیگر باشند، می‌بایست از سریهای مضاعف فوریه که شرایط مرزی را ارضا کند استفاده کرد (استفاده از سری فوریه مضاعف تحلیل را طولانی و پیچیده‌تر خواهد کرد). به طور کلی می‌توان گفت روش نوار محدود بسیار راحت تر از روش تحلیلی است، گستردگی حل مسائل نیز بیشتر است و از همه مهمتر اینکه، جوابها از دقت بالایی برخوردارند.

۲-۴- پایداری موضعی ورق با شرایط مرزی مختلف و بار میانی

نتایج عددی برای دو ورق با شرایط لبه‌ای مختلف و نشان داده شده در شکل‌های (۶، ۸، ۹) و (۱۰ - ۱۲) آورده شده است. برای تعیین ضرایب کماتش ورقهای مستطیلی تحت بارهای میانی و انتهایی از معادلات زیر استفاده می‌شود.

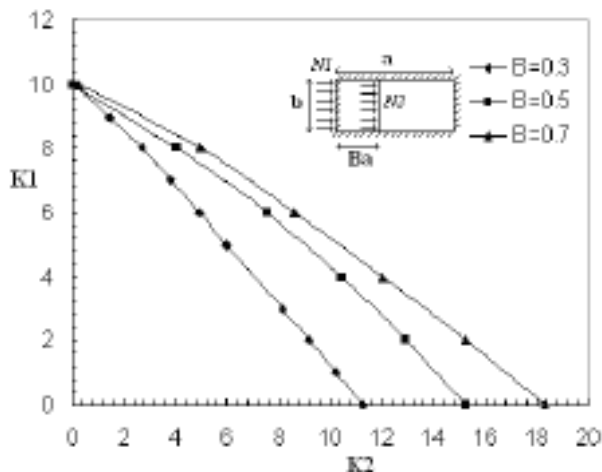
$$k_1 = \frac{N_1 b^2}{\pi^2 D} \quad (35)$$

$$k_2 = \frac{N_2 b^2}{\pi^2 D} \quad (36)$$

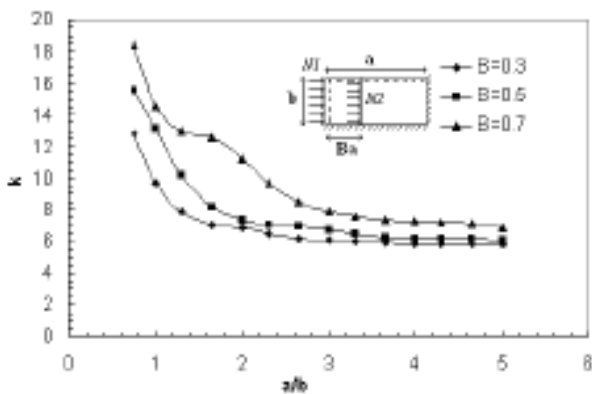
در معادلات فوق k_1 ضریب کماتش نسبت به بار انتهایی، k_2 ضریب کماتش نسبت به بار میانی، D سختی خمشی ورق،



شکل ۷ - نمودار اندرکنش (اثر متقابل) بارهای میانی و انتهایی

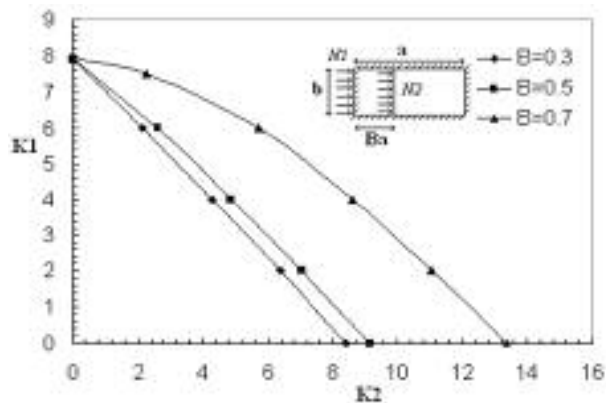


شکل ۸ - نمودار اندرکنش ضرایب کمانش k_1 و k_2 ($a=b$)



شکل ۹ - نمودار اندرکنش ضرایب کمانش

$N_1 = 0$ که هنگامی که a/b نسبت به k ($k = k_2$)



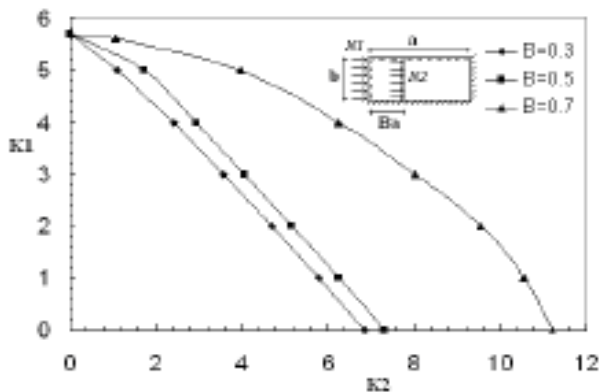
شکل ۱۰ - نمودار تغییرات ضرایب کمانش

و k_2 ($a=2b$)

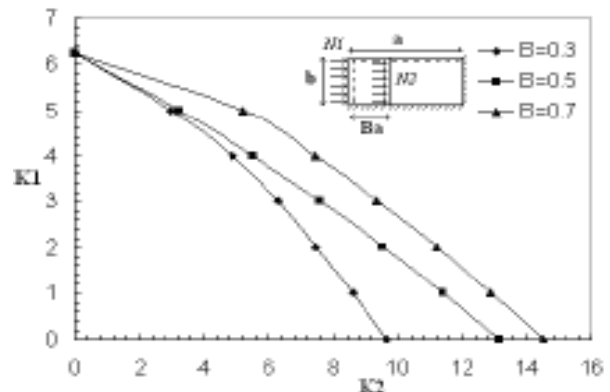
بدین ترتیب نقاط مختلف منحنیهای اندرکنش نیروهای میانی و انتهایی، به دست می آید. بدیهی است نقطه ۳ در شکل (۷) برای حالتی است که ورق تحت تاثیر نیروی محوری N_2 قرار داشته و $N_1 = 0$ است. شکل های (۸) و (۹) به ترتیب اندرکنش بین بارهای میانی و

۲- با فرض αk_1 که در آن $0 < \alpha < 1$ است می توان از معادله (۳۵) نیروی N_1 را تعیین کرد.

۳- با معلوم بودن نیروی N_1 ، بار بحرانی N_2 را از تحلیل پایداری ورق تعیین کرده و از معادله (۳۶)، k_2 محاسبه می شود، نقطه ۲ در شکل (۷) به مختصات $[\alpha k_1, k_2]$.



شکل ۱۲ - نمودار اندرکنش ضرایب کمانش k_1 و k_2 ($a=2b$)



شکل ۱۱ - نمودار اندرکنش ضرایب کمانش k_1 و k_2 ($a=b$)

انتهایی را برای دو ورق با شرایط مرزی مشخص شده در نمودارها، و برای نسبتهای $\frac{a}{b}=1$ و $\frac{a}{b}=2$ نشان می‌دهند. واضح است که با طول‌تر شدن ورقها ($\frac{a}{b} > 1$) برای حالت‌های

$B < 0.7$ ، انحنای نمودارها کاهش می‌یابد.

شکل (۱۰) نیز تغییرات ضرایب کمانش را نسبت به $\frac{a}{b}$ های مختلف برای ورق SSCC نشان می‌دهد. شکل‌های (۱۱) و (۱۲) اندرکنش بین بارهای میانی و انتهایی را برای دو ورق با شرایط مرزی SSCC و مشخصات هندسی مشخص شده در نمودارها، نشان می‌دهند.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

تحلیل پایداری ورقها، تحت اثر بارهای میانی و انتهایی با شرایط مرزی مختلف، با استفاده از روشهای تحلیلی معمولاً طولانی و وقتگیر است. در این مقاله نشان داده شد که با استفاده از روش عددی نوار محدود اسپلاین، می‌توان پایداری ورق تحت بارهای میانی و انتهایی با هر شرط مرزی را تحلیل کرد. در این تحقیق پایداری صفحات تحت بارهای میانی و انتهایی برای شرایط لبه‌ای و نسبت طول به عرضهای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نمودارهای ضرایب کمانش و

نمودارهای اندرکنش بارهای میانی و انتهایی بحرانی نیز برای این صفحات تنظیم گردید. از این نمودارها می‌توان در طراحی ورقهای قائمی که ورقهای افقی به آنها متصل‌اند، استفاده کرد. با توجه به نتایج به دست آمده برای شرایط لبه‌ای و هندسی مختلف می‌توان گفت، با زیاد شدن نسبت طول به عرض صفحات، تاثیر محل اعمال بار میانی در تعیین ضریب کمانش صفحات کاهش می‌یابد.

هنگامی که ورق تحت بار میانی قرار دارد (بار انتهایی وجود نداشته باشد)، با کم شدن فاصله بار میانی از لبه تحت فشار، بار بحرانی افزایش یافته و به سمت بینهایت میل می‌کند. در ورقهای تحت بار میانی (بار انتهایی وجود نداشته باشد)، با کاهش نسبت طول به عرض صفحات، تغییر مدهای کمانشی در نمودارهای ضریب کمانش، افزایش می‌یابد. در طراحی این ورقها می‌توان ضخامت قسمتی از ورق را که تحت فشار قرار نمی‌گیرد، کمتر در نظر گرفت.

در ورقهای تحت بار میانی و انتهایی در صورتی که بتوان بارهای میانی را در فاصله نزدیکتری نسبت به لبه تحت فشار اعمال کرد و یا در مسائل طراحی طول ورق را کمتر در نظر گرفت، بار بحرانی ورق افزایش یافته و باعث اقتصادی شدن طرح می‌شود.

1. Allen, H. G., and Bulson, P. S., *Background to Buckling*, Mc Graw-Hill, London. 198.
2. Gere, J. M., and Carter, W.O., "Critical Buckling Loads for Tapered Columns," *Civil Eng.*, Vol. 128, 1963.
3. Xiang, Y., Wang, C. M., and Kitipornchai, S., "Stability Criteria for Rectangular Plates Subjected to Intermediate and End Inplane Loads," *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, PP. 119-136, 2004.
4. Bradford, M. A., and Azhari, M., "Buckling of Plates with Different End Conditions Using the Finite Strip Method," *Computers and Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 75-83, 1995.
5. Azhari, M., and Bradford, M. A., "Local Buckling by Complex Finite Strip Method Using Bubble Functions," *J. Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 1, PP. 43-57, 1994.
6. Dawe, D. J., and Wang, S., "Postbuckling Analysis of Thin Rectangular Laminated Plates by Spline FSM," *Thin-Walled Structures*, Vol. 30, Nos. 1-4, PP. 159-179, 1998.
7. Tham, L. G., Li, W. Y., and Cheung, Y. k., "Bending of Skew Plates by Spline Finite Strip Method," *Computer and Structures*, Vol. 22, No. 1, PP. 31-38, 1986.
8. Lau, S. C. W., and Hancock, G. J., "Buckling of Thin-Walled Structures by a Spline Finite Strip Method," *Thin-Walled Structures*, Vol. 4, PP. 269-294.
9. Levy, S., "Buckling of Rectangular Plates with Built-in Edges," *J. Applied Mechanics*, *ASME*, Vol. 9, PP. 171-174, 1942.