

# بررسی تحلیلی-تجربی ارتعاشات توام خمش - خمش - پیچش پره ناهمگن بالگرد دارای زاویه پیچش اولیه

حسین زمانی\*، سعید ضیایی راد\*\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۶/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۷/۲۴)

**چکیده** - در این مقاله یک روش تحلیلی-تجربی برای بررسی رفتار مودال پره های دوار ناهمگن بالگرد، دارای زاویه پیچش اولیه در ارتعاشات خمشی (در صفحه دوران و خارج از صفحه دوران) و پیچشی مستقل و در حالت کلی ارتعاشات توامان خمش در صفحه دوران با خمش خارج از صفحه دوران و پیچش ارائه گردیده است. در این روش از بسط انتگرالی بر اساس توابع گرین (توابع نفوذ سازه‌ای) برای به دست آوردن معادلات حرکت پره استفاده شده و کد رایانه‌ای بر مبنای روش فوق تدوین و توسعه یافته و سپس از آن برای تحلیل یک پره بدون مفصل (درگیر) استفاده و نتایج حاصل از این روش با نتایج ارائه شده در دیگر مقالات مقایسه شده است. به علاوه چند مثال عددی برای حالت‌های مختلف ارتعاش توام ارائه شده و تطابق بین نتایج حاصل شده و نتایج گزارش شده توسط دیگر محققان نشان داده شده است. در نهایت، از این روش برای استخراج فرکانسهای طبیعی یک پره بالگرد استفاده شده و با نتایج به دست آمده از آزمون مودال بر روی همان پره مقایسه شده است. نتایج حاصل بیانگر آن است که روش فوق علاوه بر سادگی دارای سرعت و کارایی بیشتری نسبت به روشهای دیگر به خصوص روش المان محدود بوده و از آن می‌توان علاوه بر پره بالگرد برای مدل کردن پره های توربو ماشین و ملخهای عمودی هواپیما نیز استفاده نمود.

واژگان کلیدی: ارتعاشات توام - خمش و پیچش - توابع گرین - پره بالگرد - تحلیل و تست مودال

## Coupled Flap-Lag-Torsional Vibration Analysis of Pre-twisted Non-uniform Helicopter Blades

H. Zamani and S. Ziaiee Rad

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** An approximate numerical method is presented for analysis and determination of modal characteristics in straight,

\*\* - دانشیار

\* - دانشجوی کارشناسی ارشد

*pretwisted non-uniform helicopter blades. The analysis considers the coupled flapwise bending (out of plane), chordwise bending (in plane), and torsion vibration of both rotating and non-rotating blades. The proposed method is based on the integral expansion of Green functions (structural influence functions) to develop the equations of motion for a clamped-free blade. Several examples are presented in various states such as flapwise bending, coupled bending-bending, coupled bending-torsion, and coupled bending-bending-torsion vibration analysis. The results obtained were compared with available numerical results in the literature. A modal testing and modal analysis were also carried out on a typical helicopter blade in static condition and the results were compared with the numerical ones. The results indicate that the proposed method is fast and robust and can be used for modeling of turbomachine blades, aircraft propellers and helicopter rotor blades.*

**Keywords:** Coupled vibration, Green functions, Helicopter blade, Modal testing, Modal analysis

## فهرست علائم

طول پره	L	ثابت‌های سطح مقطع پره	$B_1, B_2$
جرم بر واحد طول پره	m	مدول الاستیسیته (مدول یانگ)	E
حداقل مقادیر x یا $\xi$	$\min(x, \xi)$	فاصله بین مرکز جرم و مرکز الاستیک پره	e
تعداد نقاط تقسیم پره	n	فاصله ریشه پره از مرکز دوران	$e_1$
کشش طولی پره	T	فاصله بین مرکز کشش و مرکز الاستیک پره	$e_A$
جابه‌جایی خمشی جانبی در پره <sup>۱</sup>	v	فاصله بین محور الاستیک و محور تغییر زاویه پره در	$e_0$
جابه‌جایی خمشی خارج از صفحه <sup>۲</sup>	w	ریشه (علامت پارامتر هنگامی که محور الاستیک	
مختصات متفاوت استفاده شده در امتداد طول پره	$x, \xi, \xi_1$	عقب تر از محور تغییر زاویه باشد مثبت است)	
تغییر شکل پیچشی پره (مثبت وقتی لبه حمله به سمت بالا است)	$\phi$	مدول الاستیسیته برشی	G
پیش زاویه اولیه مقطع پره	$\theta_B$	ممانهای اینرسی خمشی حول محورهای خنثی اصلی و فرعی	$I_\eta, I_\xi$
زاویه تنظیم کلکتیو <sup>۳</sup>	$\theta_C$	ممان اینرسی پیچشی پره	J
کل زاویه تنظیم مقطع پره	$\theta$	شعاع ژیراسیون قطبی سطح مقطع حول محور الاستیک	$K_A$
سرعت زاویه‌ای دوران پره	$\Omega$	شعاع ژیراسیون قطبی جرمی سطح مقطع حول محور الاستیک	$K_m$
فرکانس ارتعاشی پره	$\omega$	شعاع الاستیک	
مشتق اول	$[\cdot]'$	شعاع ژیراسیون قطبی جرمی سطح مقطع حول محور الاستیک	$K_m^2 = K_{m1}^2 + K_{m2}^2$
مشتق دوم	$[\cdot]''$	شعاعهای ژیراسیون قطبی جرمی سطح مقطع حول محورهای خنثی اصلی و فرعی	$K_{m1}, K_{m2}$
ترانزاده ماتریس	$[\cdot]^T$		

## ۱- مقدمه

آمدن تشدید بین فرکانسهای طبیعی پره و فرکانسهای تحریک نیروهای خارجی، در شرایط کاری پره جلوگیری کند. همچنین به کمک آن می‌توان شرایط لازم برای پایداری دینامیکی پره (پدیده فلاتر و دیورژانس)، خستگی ناشی از ارتعاشات و عمر کاری پره را نیز تخمین زد. در این زمینه مطالعات زیادی توسط

تعیین رفتار دینامیکی پره های دوار در طراحی قطعات مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بررسی ارتعاشات پره های دوار در وسایلی مانند بالگرد، توربین و کمپرسور و دیگر وسایل پرنده به این منظور انجام می‌گیرد تا از به‌وجود

محققان انجام گرفته که مختصری از آن را در اینجا اشاره کرده و سپس به تحقیق حاضر می‌پردازیم.

هوبولت و بروکس [۱] اولین کسانی بودند که معادلات دیفرانسیل حرکت پره بالگرد را در کلیترین حالت حرکت برای یک پره ناهمگن دارای زاویه پیچشی اولیه، به صورت ترکیب حرکات در سه صفحه مختلف شامل خمش خارج از صفحه دوران، خمش در صفحه دوران و پیچش به دست آوردند. از آنجایی که حل این دستگاه معادلات به صورت دقیق و تحلیلی امکانپذیر نیست، لذا روشهای متعددی برای به دست آوردن حل تقریبی آنها ارائه شده که خلاصه آنها در مرجع [۲] آمده است. برای مثال می‌توان از روش ماتریس انتگرال (IMM) که در مراجع [۳-۵] استفاده شده است، نام برد. از این روش علاوه بر محاسبه ارتعاشات تیر گردان برای مطالعه کمانش تیرهای دوار [۶] و تحلیل آیروداستیک بالهای گردان [۷] نیز استفاده می‌شود. مورسی [۸] روش دیگری به نام ماتریس انتقال (TMM) را برای تحلیل خمش - پیچش تیر دوار پیشنهاد کرد. با توجه به اهمیت زیاد ارتعاشات خمشی پره های دوار، بیلوا [۹] در سال ۱۹۹۲ یک بازنگری کلی بر روشهای محاسبه ارتعاشات این اجزا از قبیل روش مایکل استاد، روش گالرکین، ریلی ریتز و روش المان محدود انجام داد. تحلیل دینامیکی تیرهای دوار همگن دارای توزیع جرم و سختی خطی با استفاده از سریهای فریبینوس توسط رایت و همکاران وی انجام گرفته است [۱۰]. تحلیل بر اساس توابع گرین در مقایسه با روشهای دیگر مانند المان محدود دارای مزایایی از جمله سهولت در برنامه نویسی، وابسته نبودن ابعاد ماتریسها به تعداد المانها در پره و سرعت محاسبات است. بحث بیشتر در این مورد در مرجع [۹] آورده شده است.

در مطالعه حاضر معادلات دیفرانسیل حرکت پره بالگرد به صورت انتگرالی بر اساس توابع گرین حل می‌شوند. در این تحلیل رفتارهای مودال در حرکات خمش خارج از صفحه دوران و خمش در صفحه دوران و حرکت پیچشی و نیز ترکیب کلیه این حرکات را می‌توان به دست آورد. این محاسبات برای

پره های دوار و نادوار همگن و ناهمگن و دارای زاویه پیچشی اولیه نیز قابل استفاده است. در این مقاله ابتدا خلاصه‌ای از نظریه روش برای ارتعاشات آزاد پره های دوار ارائه شده و سپس برای حالت کلی ترکیب حرکات خمش - خمش - پیچش در سه صفحه بسط داده می‌شود. قابل ذکر است که این روش به مسائل خطی محدود بوده و برای تحلیل ارتعاشات آزاد به کار می‌رود.

هدف اصلی این روش استفاده از توابع گرین در حل معادلات و همچنین اثر ترکیب حرکات خمش در صفحه دوران و خارج از صفحه دوران و پیچش است. در این روش ماتریسهای وزنی استفاده شده برای انتگرالگیری و مشتقگیری به صورت عددی با معادلات درجه سه تخمین زده شده است. شرایط مرزی نیز با انتخاب نوع تابع گرین برای پره در معادلات اعمال می‌شود. توابع گرین استفاده شده در این مقاله برای حل پره یا تیر یک سر گیر دار است. نتایج عددی به دست آمده با داده های تجربی موجود و دیگر روشهای عددی مقایسه شده و نشان داده که این روش علاوه بر سریع بودن قادر است نتایج قابل قبولی در بررسی رفتار مودال پره های گردان ارائه دهد.

## ۲- ارتعاشات آزاد پره‌های دوار

معادله دیفرانسیل ارتعاش خمشی در راستای خارج از صفحه دوران برای یک تیر دوار مطابق شکل (۱) به صورت زیر استخراج می‌شود [۱]:

$$EI(x)w''''(x) - [T(x)w'(x)]' - m(x)\omega^2 w(x) = 0 \quad (1)$$

که  $EI(x)$  سختی خمشی در راستای عمود بر صفحه دوران و  $T(x)$  نیروی گریز از مرکز برای هر مقطع از ملخ بوده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T(x) = \int_x^L m(x)\Omega^2(x + e_1)dx \quad (2)$$

برای محاسبه تابع گرین، معادله ارتعاش یک تیر غیر دوار در حالت کلی را در نظر می‌گیریم:

$$EI(x)w''''(x) = p(x) \quad (3)$$

یک از انتگرالهای معادله (۸) را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^L f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f_i W_i \quad (9)$$

که در آن  $W_i$  مقادیر وزنی نقاط است و به روش انتگرالگیری عددی استفاده شده، بستگی دارد. در این مقاله از روش انتگرالگیری عددی سیمپسون استفاده شده است. با اعمال معادله (۹) در معادله (۸) داریم:

$$\{w\} = \omega^2 [G][W][M]\{w\} + \Omega^2 [G][W]([M_{in}][D_2] - [M_x][D_1])\{w\} \quad (10)$$

که در آن ماتریسهای  $[M]$  و  $[M_x]$  و  $[M_{in}]$  ماتریسهای قطری‌اند که عناصر روی قطر آنها به ترتیب توسط مقادیر  $m \cdot x$  و  $m \cdot (x + e_1)$  و  $\int_x^L m \cdot (x + e_1) dx$  به دست می‌آیند. ماتریس  $[W]$  یک ماتریس  $(n \times n)$  است که عناصر روی قطر آن به روش انتگرالگیری استفاده شده بستگی دارد. ماتریسهای  $[D_1]$  و  $[D_2]$  ماتریسهای مشتقگیری‌اند که برای به دست آوردن  $\{w''\}$  و  $\{w'\}$  به کار می‌روند. برای استخراج ماتریسهای مشتقگیر می‌توان از مشتق میانی و یا مشتق رو به جلو<sup>۴</sup> و یا مشتق رو به عقب<sup>۵</sup> استفاده کرد. در این مقاله از مشتق میانی و رو به عقب استفاده شده است (در مشتق رو به عقب شیب توسط یک منحنی درجه سه تخمین زده شده است). همان‌طور که از معادله (۱۰) مشخص است برای تیر بدون دوران ( $\Omega = 0$ ) به ماتریسهای مشتقگیری نیازی نیست. معادله (۱۰) را می‌توان به‌طور خلاصه به صورت زیر نوشت:

$$\{w\} = \omega^2 [G_1]\{w\} + \Omega^2 ([G_2] - [G_3])\{w\} \quad (11)$$

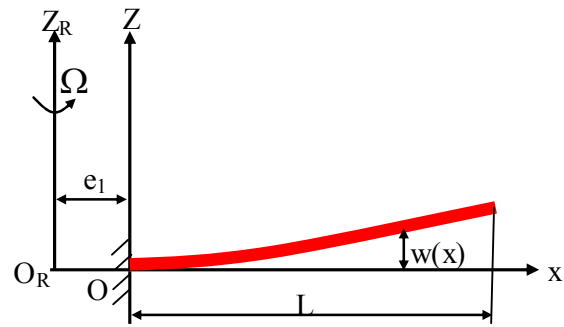
در آن صورت معادله فوق به سادگی به شکل یک مسئله استاندارد مقادیر ویژه درمی‌آید. بنابراین:

$$([A] - \omega^2 [I])\{w\} = \{0\} \quad (12)$$

که

$$[A] = [G_1]^{-1} ([I] - \Omega^2 [G_2] + \Omega^2 [G_3]) \quad (13)$$

با حل معادله (۱۲) فرکانسهای طبیعی ارتعاشی خمشی خارج از



شکل ۱ - حالت خمشی یک پره دوار

حل معادله (۳) بر اساس توابع استاتیکی گرین به صورت زیر است [۱۲]:

$$w(x) = \int_0^L G(x, \xi) p(\xi) d\xi \quad (4)$$

که در آن  $G(x, \xi)$  تابع گرین مسئله مورد نظر است. تابع گرین برای تیر معادله (۳) به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۱]:

$$G(x, \xi) = \int_0^{\min(x, \xi)} \frac{(x - \xi_1)(\xi - \xi_1)}{EI(\xi_1)} d\xi_1 \quad (5)$$

در ادامه معادله (۱) را به شکل استاندارد معادله (۳) نوشته تا بتوان از تابع گرین به دست آمده از معادله (۵) در آن استفاده کرد:

$$[EI(x)w''(x)]' = [T(x)w'(x)]' + m(x)\omega^2 w(x) \quad (6)$$

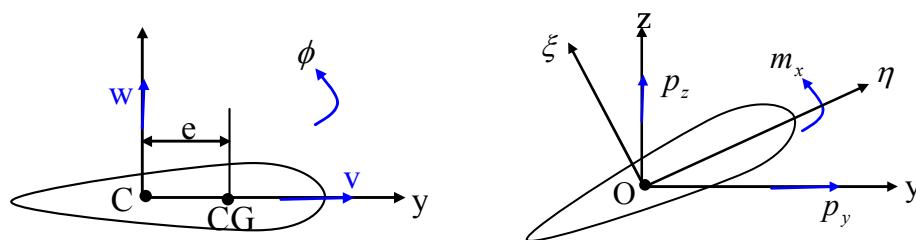
با جاگذاری معادله (۲) در معادله فوق برای  $p(x)$  خواهیم داشت:

$$p(x) = m\omega^2 w - \Omega^2 (m(x + e_1)w' - w'' \int_x^L m(\xi)(\xi + e_1) d\xi) \quad (7)$$

بنابراین با تلفیق رابطه (۷) و (۴) منحنی خمشی تیر به صورت زیر در می‌آید:

$$w(x) = \omega^2 \int_0^L G(x, \xi) m w d\xi - \Omega^2 \int_0^L G(x, \xi) m (e_1 + \xi) w' d\xi + \Omega^2 \int_0^L G(x, \xi) \left[ \int_{\xi}^L m(\xi_1)(e_1 + \xi_1) d\xi_1 \right] w'' d\xi \quad (8)$$

برای حل عددی معادله (۸) تیر را در راستای طولی به  $n$  نقطه تقسیم و انتگرالهای فوق را به صورت عددی محاسبه می‌کنیم. هر



شکل ۲ - مقطع پره و مشخصه‌های هندسی آن

$$\begin{aligned}
 & [(EI_{\xi} - EI_{\eta}) \sin \theta \cos \theta w'' + (EI_{\eta} \sin^2 \theta + EI_{\xi} \cos^2 \theta) v'']'' \\
 & - (Tv')' + (\Omega^2 m x e \phi \sin \theta)' + \Omega^2 m e \phi \sin \theta \\
 & - \omega^2 m (v - e \phi \sin \theta) - \Omega^2 m v = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

اکنون معادلات به دست آمده را به شکل ساده شده تری و به شکل استاندارد معادله (۳) می‌نویسیم در این صورت:

$$\begin{aligned}
 (EI_y w'' + EI_{zy} v'')'' &= (Tw')' + p_{z1} = p_z \\
 (EI_z v'' + EI_{zy} w'')'' &= (Tv')' + p_{y1} = p_y \quad (17) \\
 (GJ\phi)'' + m_x &= 0
 \end{aligned}$$

که  $p_{z1}$  و  $p_{y1}$  و  $m_x$  و  $I_y$  و  $I_z$  و  $I_{zy}$  عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 p_{z1} &= [\Omega^2 e m (x + e_1) \phi \cos \theta]' + \omega^2 m (w + e \phi \cos \theta) \\
 p_{y1} &= -[\Omega^2 e m (x + e_1) \phi \sin \theta]' - \Omega^2 e m \phi \sin \theta \\
 &\quad + \omega^2 m (v - e \phi \sin \theta) + \Omega^2 m v \\
 m_x &= \Omega^2 e m (x + e_1) (v' \sin \theta - w' \cos \theta) - \Omega^2 e m v \sin \theta \\
 &\quad - \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi \cos 2\theta + \omega^2 m k_m^2 \phi \\
 &\quad - \omega^2 e m (v \sin \theta - w \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$I_y = I_{\eta} \cos^2 \theta + I_{\xi} \sin^2 \theta$$

$$I_z = I_{\xi} \cos^2 \theta + I_{\eta} \sin^2 \theta$$

$$I_{zy} = (I_{\xi} - I_{\eta}) \sin \theta \cos \theta$$

معادلات دیفرانسیل (۱۶) توسط زاویه  $\theta$  و فاصله  $e$  (فاصله بین  $ce$  و  $cg$ ، شکل (۲)) به یکدیگر مربوط می‌شوند. برای حل معادلات توام فوق نیاز به شکل مناسبی از توابع گرین است. این توابع برای یک تیر یک سر در گیر با توجه به مرجع [۱۲] عبارت است از:

صفحه دوران و شکل مودهای آن به دست می‌آیند. برای استخراج معادله حرکت در صفحه دوران از روش گرین، می‌توان مشابه روند فوق معادلات را نوشته و ساده سازی کرد که در این حالت فقط در معادله (۱۳) یک عبارت جدید ظاهر می‌شود و این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$[A] = [G_1]^{-1} ([I] - \Omega^2 [G_2] + \Omega^2 [G_3] - \Omega^2 [G_4]) \quad (14)$$

که در آن  $[G_4] = [G][W][M_1]$  بوده و سایر عبارتها مشابه معادله (۱۳) هستند. شکل استاندارد معادلات در این حالت نیز مطابق معادله حرکت خارج از صفحه دوران است.

### ۳- تحلیل ارتعاشات توام خمش - پیچش و خمش - خمش

معادلات دیفرانسیل برای ترکیب حرکات خمش در صفحه دوران و خمش خارج از صفحه دوران و پیچش یک پره با سطح مقطع متقارن مطابق شکل (۲) با فرضهای:

$$k_A = e_A = EB_1 = EB_2 = e_0 = 0 \quad (15)$$

که  $B_1$  و  $B_2$  ثابتهای سطح مقطع پره،  $e_A$  فاصله بین مرکز کشش سطح مقطع پره و محور الاستیک،  $e_0$  فاصله بین محور الاستیک و محور دوران در ریشه پره،  $k_A$  شعاع ژیراسیون قطبی مساحت سطح مقطع حول محور الاستیک‌اند، از مرجع [۱] به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & - \{ [GJ]\phi' \}' + \Omega^2 m x e (-v' \sin \theta + w' \cos \theta) + \Omega^2 m e \sin \theta v \\
 & + \Omega^2 m [k_{m2}^2 - k_{m1}^2] \cos 2\theta \phi - \omega^2 m k_m^2 \phi \\
 & + \omega^2 m e (v \sin \theta - w \cos \theta) = 0 \\
 & [(EI_{\eta} \cos^2 \theta + EI_{\xi} \sin^2 \theta) w'' + (EI_{\eta} + EI_{\xi}) \sin \theta \cos \theta v'']'' \\
 & - (Tw')' - (\Omega^2 m x e \phi \cos \theta)' - \omega^2 m (w + e \phi \cos \theta) = 0
 \end{aligned}$$

در موقعیت  $\xi$  به وجود می‌آید. تابع  $G_t(x, \xi)$  نشان دهنده زاویه پیچشی  $\phi$  در موقعیت  $x$  است که در اثر اعمال گشتاور واحد در موقعیت  $\xi$  به دست می‌آید (شکل (۳) قسمت c). منحنیهای تغییر شکل با توجه به توابع گرین بیان شده برای حرکات ترکیبی به شکل زیر خواهید بود [۱۲]:

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^L G_{ww}(x, \xi) p_z(\xi) d\xi + \int_0^L G_{vw}(x, \xi) p_y(\xi) d\xi \\ v(x) &= \int_0^L G_{vv}(x, \xi) p_y(\xi) d\xi + \int_0^L G_{vw}(x, \xi) p_z(\xi) d\xi \\ \phi(x) &= \int_0^L G_t(x, \xi) m_x(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (19)$$

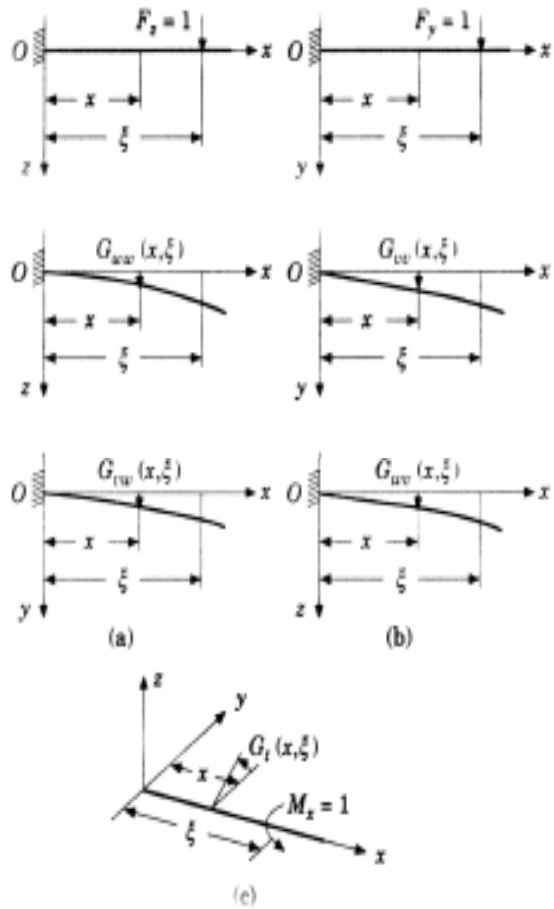
پس از جاگذاری معادلات (۱۹) در معادلات (۱۷)، جداسازی، استفاده از انتگرالگیری عددی و مقداری ساده سازی، معادلات زیر برای تغییر مکانهای  $\{w\}$  و  $\{v\}$  و پیچش  $\{\phi\}$ ، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \{w\} &= \omega^2 [G_{ww}] [W] [M] \{w\} + \Omega^2 [G_{ww}] [W] [M_{in}] [D_2] \\ &\quad - [M_x] [D_1] \{w\} + e\omega^2 [G_{ww}] [W] [M_c] \{\phi\} \\ &\quad + \Omega^2 e [G_{ww}] [W] ([M_{xcl}] + [M_c] - [M_{xstp}] + [M_{xc}] [D_1]) \{\phi\} \\ &\quad + (\omega^2 + \Omega^2) [G_{vw}] [W] [M] \{v\} \\ &\quad + \Omega^2 [G_{vv}] [W] ([M_{in}] [D_2] - [M_x] [D_1]) \{v\} \\ &\quad - e\omega^2 [G_{vv}] [W] [M_s] \{\phi\} \\ &\quad - \Omega^2 e [G_{vv}] [W] ([M_s] + [M_{xsl}] + [M_{xs}] [D_1] + [M_{xctp}]) \{\phi\} \\ &\quad - \Omega^2 e [G_{vv}] [W] [M_s] \{\phi\} \end{aligned} \quad (20)$$

و

$$\begin{aligned} \{v\} &= (\omega^2 + \Omega^2) [G_{vv}] [W] [M] \{v\} \\ &\quad + \Omega^2 [G_{vv}] [W] ([M_{in}] [D_2] - [M_x] [D_1]) \{v\} \\ &\quad - e\omega^2 [G_{vv}] [W] [M_s] \{\phi\} \\ &\quad - \Omega^2 e [G_{vv}] [W] ([M_s] + [M_{xsl}] + [M_{xs}] [D_1] + [M_{xctp}]) \{\phi\} \\ &\quad + \omega^2 [G_{vw}] [W] [M] \{w\} \\ &\quad + \Omega^2 [G_{vw}] [W] ([M_{in}] [D_2] - [M_x] [D_1]) \{w\} \\ &\quad + e\omega^2 [G_{vw}] [W] [M_c] \{\phi\} \\ &\quad + e\Omega^2 [G_{vw}] [W] ([M_{xcl}] + [M_c] - [M_{xstp}] + [M_{xc}] [D_1]) \{\phi\} \\ &\quad - \Omega^2 e [G_{vw}] [W] [M_s] \{\phi\} \end{aligned} \quad (21)$$

و



شکل ۳ - تعبیر فیزیکی توابع گرین

$$\begin{aligned} G_{ww}(x, \xi) &= \int_0^{\min(x, \xi)} \frac{(x - \xi_1)(\xi - \xi_1) I_z(\xi_1)}{EI_\xi(\xi_1) I_\eta(\xi_1)} d\xi_1 \\ G_{vv}(x, \xi) &= \int_0^{\min(x, \xi)} \frac{(x - \xi_1)(\xi - \xi_1) I_y(\xi_1)}{EI_\xi(\xi_1) I_\eta(\xi_1)} d\xi_1 \\ G_{vw}(x, \xi) &= G_{vw}(x, \xi) \\ &= \int_0^{\min(x, \xi)} \frac{(x - \xi_1)(\xi - \xi_1) I_{zy}(\xi_1)}{EI_\xi(\xi_1) I_\eta(\xi_1)} d\xi_1 \\ G_t(x, \xi) &= \int_0^{\min(x, \xi)} \frac{d\xi_1}{GJ(\xi_1)} \end{aligned} \quad (18)$$

تعبیر هندسی توابع گرین فوق در شکل (۳) نشان داده شده است.  $G_{ww}(x, \xi)$  نشان دهنده جابه‌جایی  $w$  در موقعیت  $x$  است که در اثر اعمال بار واحد در راستای  $z$  در موقعیت  $\xi$  به وجود می‌آید، شکل (۳).  $G_{vv}(x, \xi)$  نشان دهنده جابه‌جایی  $v$  در موقعیت  $x$  است که در اثر اعمال بار واحد در راستای  $y$

#### ۴- نتایج عددی - تجربی

تا اینجا شکل ماتریسی معادلات ارتعاشی توامان خمش - خمش - پیچش برای بیم دوار یک سر در گیر ارائه شد. با توجه به ماتریسی بودن معادلات، کد رایانه‌ای در محیط نرم افزار MATLAB تهیه و تدوین شد. در ادامه چندین مثال عددی برای ارتعاشات خمشی در صفحه و خارج از صفحه دوران، ارتعاشات توام خمش - پیچش، توام خمش - خمش و توام خمش - خمش - پیچش حل شده و نتایج آنها با نتایج موجود در دیگر مراجع مقایسه می‌شود. در پایان کد مورد استفاده برای پیش بینی ارتعاشات یک پره فلزی برای مقایسه با پره کامپوزیتی ساخته شده در کشور استفاده و نتایج با نتایج آزمون مودال بر روی همان پره فلزی مقایسه شده است. هدف از انجام این کار اطمینان از یکسان بودن خواص دینامیکی این پره با پره مشابه فلزی و جایگزین نمودن آن با پره فلزی در بالگردهای موجود در کشور است.

#### ۴-۱- ارتعاشات مستقل خمشی پره یک سر در گیر ساده

به‌عنوان مثال اول، پره ساده‌ای با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است:

$$M = 1 \text{ Kg}, \quad L = 1 \text{ m}, \quad EI = 1 \text{ Nm}^2 \quad (25)$$

مثال فوق توسط کد توسعه داده شده برای تعداد المانهای متفاوت و در سرعتهای دورانی ۳، ۶ و ۱۲ دور بر دقیقه حل و نتایج آن برای حالت خمش خارج از صفحه دوران (فلپ) در جدول (۱) آورده شده است. در این جدول فرکانسهای اول تا چهارم در سرعتهای دورانی مذکور نشان داده شده است. همان‌طور که از جدول مشخص است نتایج به‌دست آمده انطباق بسیار خوبی را با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۰] نشان می‌دهند. اعداد جدول نشان دهنده آن هستند که با زیاد شدن تعداد مقاطع در طول پره بر دقت نتایج افزوده می‌شود. همان‌طور که از نتایج مشخص است با افزایش سرعت دوران به دلیل زیاد شدن نیروی گریز از مرکز سختی پره افزایش یافته و به دنبال آن

$$\begin{aligned} \{\phi\} = & \omega^2 [G_t][W][k_m^2[M]\{\phi\} + e[M_c]\{w\} \\ & - e[M_s]\{v\} - \Omega^2 [G_t][W][(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \\ & [M_{2c}]\{\phi\} + e[M_{xc}][D_1]\{w\} - e[M_{xs}][D_1]\{v\} + e[M_s]\{v\}] \end{aligned} \quad (22)$$

ماتریسهای  $[M]$  و  $[M_{in}]$  و  $[M_x]$  و  $[M_c]$  و  $[M_{xc1}]$  و  $[M_{xstp}]$  و  $[M_s]$  و  $[M_{xs1}]$  و  $[M_{xs}]$  و  $[M_{xctp}]$  و  $[M_{2c}]$  و  $[M_{xc}]$  همگی ماتریسهای قطری‌اند که عناصر روی قطر آنها به ترتیب مقادیر  $m \cdot x$  و  $\int_x^L m \cdot (x + e_1) dx$  و  $m \cdot (x + e_1)$  و  $m \cos \theta$  و  $m'(x + e_1) \cdot \cos \theta$  و  $m \cdot (x + e_1) \cdot \theta' \cdot \sin \theta$  و  $m \sin(\theta)$  و  $m \cdot (x + e_1) \cdot \sin \theta$  و  $m' \cdot (x + e_1) \cdot \sin \theta$  و  $m \cdot (x + e_1) \cdot \cos \theta$  و  $m \cdot \cos 2\theta$  و  $m \cdot (x + e_1) \cdot \theta' \cdot \cos \theta$  هستند. ماتریس  $[W]$  یک ماتریس قطری  $(n \times n)$  است که عناصر روی قطر آن به روش انتگرالگیری استفاده شده بستگی دارد. ماتریسهای  $[D_1]$  و  $[D_2]$  ماتریسهای مشتقگیری‌اند که برای به دست آوردن  $\{w'\}$  و  $\{v''\}$  و  $\{v'\}$  و  $\{\phi'\}$  به کار می‌روند. مجدداً معادلات (۲۰) و (۲۱) و (۲۲) را می‌توان به شکل یک مسئله مقدار ویژه استاندارد نوشت. بر این اساس خواهیم داشت:

$$\{z\} = (\omega^2 [A_1] + [B_1](\Omega^2)) \{z\} \quad (23)$$

که در معادله فوق  $\{z\} = [\{w\}, \{v\}, \{\phi\}]^T$  است (بردار  $[A] = [A_1]^{-1}([I] - [B_1])$  است). با تعریف معادله (۲۳) را می‌توان به صورت استاندارد زیر نوشت:

$$([A] - \omega^2 [I]) \{z\} = \{0\} \quad (24)$$

ماتریس  $[A_1]$  و  $[B_1]$  ماتریسهایی با بعد  $(3n \times 3n)$  هستند. اگر  $\theta = 0$  و  $e = 0$  قرار گیرد معادلات فوق به معادله غیر ترکیبی (۱۰) منجر خواهد شد. با حل معادله (۲۴) فرکانسهای طبیعی تیر و رفتار شکل مودهای آن به‌دست می‌آید. برای بررسی ترکیب دو حرکت خمش خارج از صفحه دوران و پیچش بردار  $\{z\}$  که از مرتبه  $(2n \times 1)$  است به صورت  $\{z\} = [\{w\}, \{\phi\}]^T$  نوشته می‌شود. برای ترکیب دو حرکت خمشی در صفحه دوران و خارج از صفحه دوران بردار  $\{z\}$  به صورت  $\{z\} = [\{w\}, \{v\}]^T$  در می‌آید.

جدول ۱ - مقایسه فرکانسهای طبیعی پره (rad/s) یک سر درگیر برای خمش در خارج از صفحه دوران (فلپ) با تعداد المانهای مختلف

فرکانس طبیعی Rad/s	سرعت Rpm	مرجع [۱۰]	روش حاضر (گرین)			
			N=۱۱	n=۳۱	n=۶۱	n=۹۱
$\omega_1$	۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰
	۳	۳/۹۹۷۳	۳/۹۹۷۳	۳/۹۹۷۳	۳/۹۹۷۳	۳/۹۹۷۳
	۶	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴
	۱۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲
$\omega_2$	۰	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۰۳۳۵
	۳	۳۲/۳۱۹۹	۳۲/۳۱۹۹	۳۲/۳۱۹۹	۳۲/۳۱۹۹	۳۲/۳۱۹۹
	۶	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱
	۱۲	۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱
$\omega_3$	۰	۶۱/۶۹۷۲	۶۱/۶۹۷۲	۶۱/۶۹۷۲	۶۱/۶۹۷۲	۶۱/۶۹۷۲
	۳	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰
	۶	۶۶/۶۸۲۰	۶۶/۶۸۲۰	۶۶/۶۸۲۰	۶۶/۶۸۲۰	۶۶/۶۸۲۰
	۱۲	۷۹/۶۱۳۵	۷۹/۶۱۳۵	۷۹/۶۱۳۵	۷۹/۶۱۳۵	۷۹/۶۱۳۵
$\omega_4$	۰	۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲
	۳	۱۲۱/۲۳۶	۱۲۱/۲۳۶	۱۲۱/۲۳۶	۱۲۱/۲۳۶	۱۲۱/۲۳۶
	۶	۱۲۶/۱۲۰	۱۲۶/۱۲۰	۱۲۶/۱۲۰	۱۲۶/۱۲۰	۱۲۶/۱۲۰
	۱۲	۱۲۰/۵۲۲	۱۲۰/۵۲۲	۱۲۰/۵۲۲	۱۲۰/۵۲۲	۱۲۰/۵۲۲

#### ۴-۲- ارتعاشات مستقل خمشی پره یک سر درگیر ناهمگن

به عنوان مثال دوم یک پره ناهمگن، دارای توزیع جرم و توزیع سختی خطی در راستای طولی تیر را در نظر می‌گیریم. توابع توزیع جرم و سختی در این حالت به شکل زیرند:

$$m(x/L) = 1 - \beta \frac{x}{L} \quad \text{و} \quad EI(x/L) = 1 - \gamma \frac{x}{L} \quad (۲۶)$$

ضرایب  $\beta$  و  $\gamma$  اعداد ثابت و بدون بعد هستند. در حالت خاص  $\beta = \gamma = 0$ ، تیر به صورت همگن درمی‌آید. فرکانسهای طبیعی اول و دوم برای چند سرعت دورانی مختلف پره برای  $\beta = 0.9, \gamma = 0.8$  در جدول (۴) ارائه و با نتایج محاسبه شده از روش فریبنیوس در مرجع [۱۰] مقایسه شده است. در شکل‌های (۴) و (۵) تغییرات فرکانس طبیعی در صفحه عمود بر صفحه دوران و در صفحه دوران با شرایط خارج از مرکزیت برابر ۰، ۵٪ و ۲ بر حسب سرعت دوران پره نشان داده

فرکانسهای طبیعی نیز افزایش می‌یابند. اثر خارج از مرکزیت روی فرکانسهای طبیعی در حالت خمش خارج از صفحه دوران نیز در این مثال بررسی شده و نتایج حاصل از آن با نتایج محاسبه شده به روش فریبنیوس در جدول (۲) مقایسه شده است. تطابق خوب نتایج نمایانگر قدرت روش فوق در محاسبه فرکانسهای طبیعی پره گردان است. افزایش خارج از مرکزیت نیز فرکانسهای طبیعی پره را به مقدار کمی افزایش می‌دهد.

مثال فوق برای حالت خمش در صفحه دوران (لگ) با وجود خارج از مرکزیت و در سرعت‌های دورانی مختلف نیز حل شده و نتایج آن در جدول (۳) با نتایج مرجع [۱۳] مقایسه شده است. در این حالت نیز افزایش سرعت دوران باعث صعود فرکانسهای طبیعی می‌شود. همان‌طور که از اعداد مشخص است خارج از مرکزیت در این حالت اثر قابل توجهی بر روی فرکانسهای طبیعی مخصوصاً در سرعت‌های دورانی بالا دارد و با زیاد شدن خارج از مرکزیت، فرکانسهای طبیعی افزایش می‌یابد.



جدول ۲ - مقایسه فرکانسهای طبیعی اول و دوم پره (rad/s) برای خمش در خارج از صفحه دوران (فلپ) با خارج از مرکزیت از روش گرین و فرینئوس [۱۰]

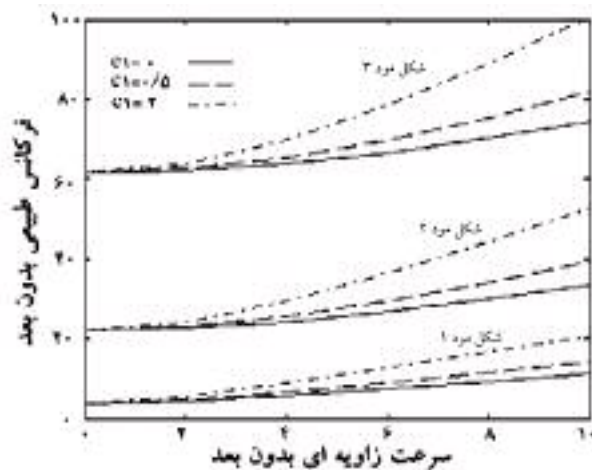
روش محاسبه	سرعت دوران (rpm)	$e=0$		$e=0.1$		$e=0.2$	
		فرکانس طبیعی $\omega_1$	فرکانس طبیعی $\omega_2$	فرکانس طبیعی $\omega_1$	فرکانس طبیعی $\omega_2$	فرکانس طبیعی $\omega_1$	فرکانس طبیعی $\omega_2$
		فرینئوس	۱	۲/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۲۵	۲/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۲۵
حاضر (گرین)	۱	۲/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۲۵	۲/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۲۵	۲/۵۱۶۰	۲۲/۰۳۲۵
فرینئوس	۳	۶/۷۹۷۳	۲۲/۳۲۰۳	۶/۹۲۱۲	۲۲/۲۸۶۳	۶/۰۸۱۸	۲۲/۹۲۷۷
حاضر (گرین)	۳	۶/۷۹۷۱	۲۲/۳۱۹۲	۶/۹۲۰۹	۲۲/۲۸۵۱	۶/۰۸۱۳	۲۲/۹۲۵۲
فرینئوس	۶	۷/۳۶۰۴	۲۶/۸۰۹۱	۷/۷۲۶۰	۲۷/۳۷۹۷	۱۰/۲۳۳۹	۳۲/۰۲۷۲
حاضر (گرین)	۶	۷/۳۵۹۸	۲۶/۸۰۵۵	۷/۷۲۵۴	۲۷/۳۷۵۴	۱۰/۲۳۲۸	۳۲/۰۲۶۳
فرینئوس	۹	۱۰/۲۲۵۷	۳۱/۷۷۰۵	۱۰/۸۰۹۲	۳۲/۸۳۷۷	۱۵/۰۵۴۱	۴۱/۱۱۵۴
حاضر (گرین)	۹	۱۰/۲۲۴۷	۳۱/۷۶۳۷	۱۰/۸۰۸۱	۳۲/۸۲۹۹	۱۵/۰۵۲۰	۴۱/۱۰۱۲
فرینئوس	۱۲	۱۳/۱۷۰۲	۳۷/۶۰۳۱	۱۳/۹۶۹۲	۳۹/۱۸۲۹	۱۹/۷۲۱۵	۵۱/۰۷۰۱
حاضر (گرین)	۱۲	۱۳/۱۶۸۶	۳۷/۵۹۲۷	۱۳/۹۶۵۷	۳۹/۱۷۱۲	۱۹/۷۱۸۱	۵۱/۰۲۹۱

جدول ۳ - مقایسه فرکانسهای طبیعی اول و دوم پره (rad/s) برای حرکت خمش در صفحه دوران با خارج از مرکزیت از روش گرین و مرجع [۱۳]

خارج از مرکزیت	سرعت دوران (rpm)	روش حاضر (گرین)	[۱۳]	روش حاضر (گرین)	[۱۳]
		فرکانس طبیعی $\omega_1$		فرکانس طبیعی $\omega_2$	
		$e=0.0$	۲	۳/۶۲	۳/۶۲
$e=0.0$	۱۰	۵/۰۴	۵/۰۵	۳۲/۱۱	۳۲/۱
$e=0.0$	۵۰	۱۰/۴۲	۱۰/۵	۱۱۶/۱۵	۱۱۶
$e=0.1$	۲	۲/۲۱	۵/۲۱	۲۲/۲۸	۲۲/۳
$e=0.1$	۱۰	۱۳/۲۵	۱۳/۳	۳۳/۲۲	۳۳/۲
$e=0.1$	۵۰	۶۱/۵۷	۶۱/۶	۱۸۱/۷۹	۱۸۲
$e=0.2$	۲	۶/۶۴	۶/۶۵	۲۶/۰۶	۲۶/۱
$e=0.2$	۱۰	۲۷/۷۲	۲۷/۷	۷۱/۳۷	۷۱/۳
$e=0.2$	۵۰	۱۳۵/۳۸	۱۳۶	۳۳۱/۴۱	۳۳۲

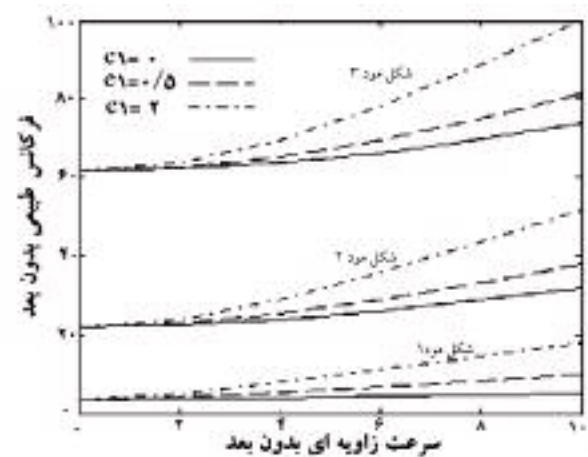
جدول ۴- مقایسه فرکانسهای طبیعی پره از روش گرین و فرینیوس [۱°] برای مقادیر  $\beta = 0.9$  و  $\gamma = 0.8$

سرعت دوران (rpm)	روش محاسبه	$\omega_1$ rad/s	$\omega_2$ rad/s	$\omega_3$ rad/s	$\omega_4$ rad/s	$\omega_5$ rad/s
۰	روش حاضر (گرین)	۵/۲۷۲۸	۲۲/۰۰۲۱	۵۹/۹۷۰۱	۱۱۲/۹۰۹۴	۱۸۳/۰۲۲۲
۰	فرینیوس	۵/۲۷۲۸	۲۲/۰۰۲۱	۵۹/۹۷۰۱	۱۱۲/۹۰۹۹	۱۸۳/۰۲۲۲
۴	روش حاضر (گرین)	۶/۸۹۲۹	۲۵/۶۰۰۸	۶۱/۵۲۰۰	۱۱۳/۲۹۰۱	۱۸۳/۶۱۵۵
۴	فرینیوس	۶/۸۹۲۸	۲۵/۶۰۱۳	۶۱/۵۲۱۲	۱۱۳/۲۹۲	۱۸۳/۶۱۹
۸	روش حاضر (گرین)	۱۰/۲۳۸۱	۲۹/۸۸۸۶	۶۶/۰۲۰۲	۱۱۹/۱۰۳۶	۱۸۹/۳۱۱۸
۸	فرینیوس	۱۰/۲۳۷۹	۲۹/۸۸۹۲	۶۶/۰۲۲۲	۱۱۹/۱۰۷	۱۸۹/۳۱۶
۱۲	روش حاضر (گرین)	۱۳/۰۳۱۵	۳۵/۹۰۵۰	۷۲/۸۵۲۵	۱۲۶/۳۹۴۰	۱۹۶/۸۷۰۴
۱۲	فرینیوس	۱۳/۰۳۱۳	۳۵/۹۰۶۲	۷۲/۸۵۶۵	۱۲۶/۴۰۱	۱۹۶/۸۸۰



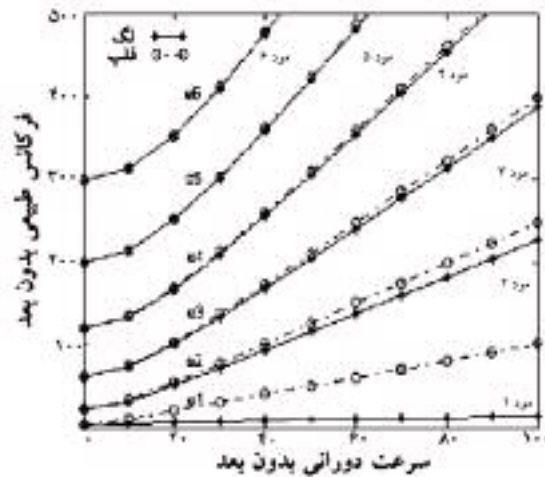
شکل ۵ - تغییرات فرکانس طبیعی پره یک سر گیردار بر حسب سرعت دوران در صفحه دوران (لگ) برای مقادیر مختلف خارج از مرکزیت ( $\beta = 0.9, \gamma = 0.8$ )

شده‌اند، معهذاً فرکانسهای طبیعی ارتعاش پره در خارج از صفحه دوران همواره از فرکانسهای ارتعاش پره در صفحه دوران بیشتر است. دلیل این امر را می‌توان در مقایسه بین معادلات (۱۳) و (۱۴) دید. وجود عبارت  $G_4$  در معادله مربوط به ارتعاش در صفحه دوران که از لحاظ فیزیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز می‌باشد، سبب این تفاوت گردیده است. البته قابل ذکر است که در پره واقعی سختی در صفحه دوران (لگ) به

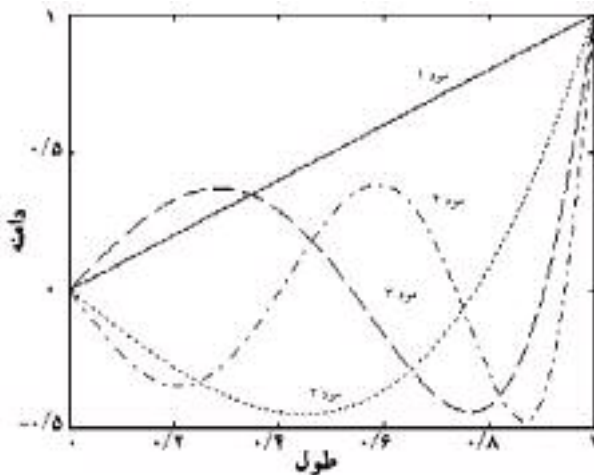


شکل ۶ - تغییرات فرکانس طبیعی پره یک سر گیردار بر حسب سرعت دوران در خارج از صفحه دوران (فلپ) برای مقادیر مختلف خارج از مرکزیت ( $\beta = 0.9, \gamma = 0.8$ )

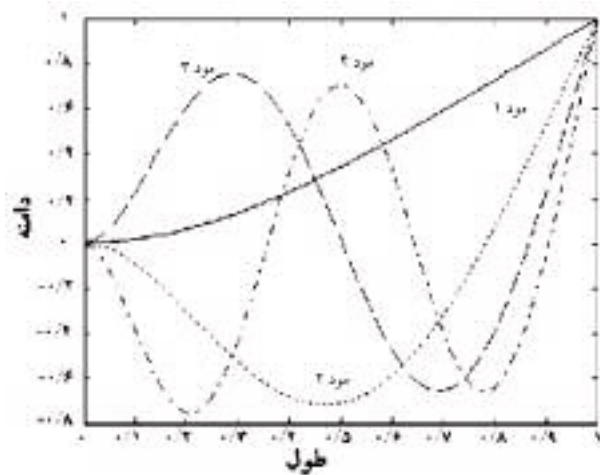
افزایش شده است. افزایش سرعت دوران و خارج از مرکزیت سبب افزایش فرکانسهای طبیعی می‌شوند. شکل (۶) بیانگر مقایسه صورت گرفته بین تغییرات فرکانس طبیعی در سرعت دورانی‌های مختلف از ۰ تا ۱۰۰ دور بر دقیقه در حالت‌های خمش در صفحه دوران و خارج از صفحه دوران برای خروج از مرکز صفر است. اگر چه توزیع سختی و جرم برای هر دو حالت ارتعاش در صفحه و خارج از صفحه دوران یکسان در نظر گرفته



شکل ۶ - تغییرات فرکانس طبیعی پره یک سر گیردار بدون خارج از مرکزیت بر حسب سرعت دوران برای ارتعاشات در صفحه دوران (فلپ) و خارج از صفحه دوران (لگ) ( $\beta = 0.9, \gamma = 0.8$ )



شکل ۸ - مدهای اول تا چهارم پره یک سر گیردار در ارتعاش خارج از صفحه دوران و  $\Omega = 300 \text{ rpm}$



شکل ۷ - مدهای اول تا چهارم پره یک سر گیردار در ارتعاش خارج از صفحه دوران و  $\Omega = 0$

مرکز باعث افزایش سختی پره شده و دامنه نرمال شده مودها در شکل (۸) را نسبت به شکل (۷) کاهش داده است.

مقدار قابل توجهی از سختی در صفحه عمود بر دوران (فلپ) بیشتر بوده و این امر سبب می‌شود که فرکانسهای طبیعی پره در صفحه دوران در عمل بسیار زیادتر از فرکانسهای طبیعی در صفحه خارج از دوران باشند.

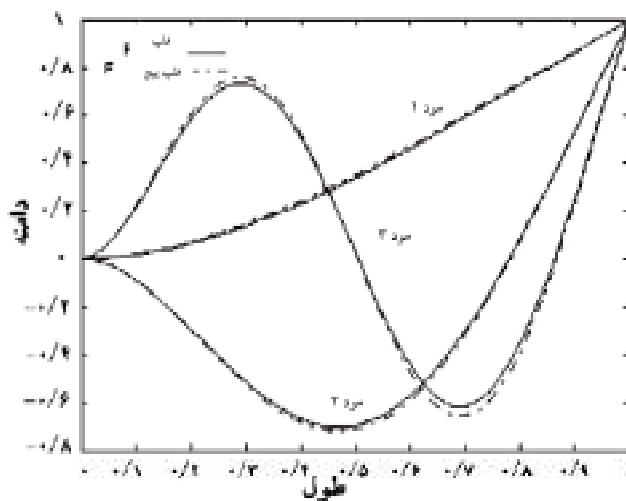
#### ۳-۴- ارتعاشات توام خمش - پیچش

از آنجایی که ارتعاش توام خمش-پیچش در رفتار دینامیکی و سیستم کنترل بالگرد تاثیر به‌سزایی دارد، به‌عنوان مثال سوم حالت ارتعاش توام خمش- پیچش پره بررسی شده است. مقادیر مشخصه‌های ملخ مورد نظر در این مثال از

شکل مدهای اول تا چهارم پره یک سر درگیر در ارتعاش خارج از صفحه دوران برای دو حالت  $\Omega = 0$  و  $\Omega = 300 \text{ rpm}$  به ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) رسم شده است. همان‌طور که از شکل مودها پیداست، نیروی گریز از

جدول ۵- مقایسه فرکانسهای طبیعی پره (rad/s) در حرکت توام خمش در خارج از صفحه دوران و پیچش با روشهای گرین، I.M.M و T.M.M

فرکانس طبیعی (rad/s)	I.M.M n=۵, [۵]	I.M.M n=۱۵, [۵]	T.M.M [۸]	روش حاضر (گرین) n=۸۱
$\omega_1$	۳۱/۰۵	۳۱/۰۵	۳۱/۰۵	۳۱/۰۶۹۹
$\omega_2$	۱۸۹/۳۷	۱۹۳/۷۴	۱۹۳/۷۴	۱۹۳/۸۲۵
$\omega_3$	۳۹۰/۸	۳۹۰/۵۷	۳۹۰/۵۷	۳۹۱/۰۲۹
$\omega_4$	۵۷۸/۹۳	۵۸۱/۳۴	۵۸۱/۵۴	۵۸۱/۷۷۸
$\omega_5$	۱۱۶۸/۲۲	۱۰۳۳/۹۴	۱۰۲۱/۷۴	۱۰۲۳/۲۲



شکل ۹ - مودهای اول تا سوم پره یک سر گیردار در حالت‌های ارتعاش مستقل در خارج از صفحه دوران (فلپ) و ارتعاش توام خمش در خارج از صفحه-پیچش (فلپ-پیچ)

به دست آمده و با روشهای دیگر مقایسه شده است. همان‌طور که در جدول مشخص است نتایج این روش با تعداد المانهای انتخاب شده، تطابق بسیار خوبی با نتایج مراجع فوق نشان می‌دهد. این مثال در حالت خمش خارج از صفحه دوران نیز حل شده و شکل مودها در این حالت با شکل مودها در حالت حرکت توام خمش خارج از صفحه دوران و پیچش برای مقایسه در شکل (۹) ارائه شده است. از این مقایسه می‌توان نتیجه گرفت که به‌طور کلی شکل مودها در حالت حرکت مجزا با شکل مودها در حالت حرکت ترکیبی تغییر چندانی نکرده و می‌توان شکل مودها را در حالت‌های ارتعاش مستقل و توام تقریباً یکسان در نظر گرفت [۱۳].

مراجع [۵ و ۸] بر گرفته و در زیر آورده شده است. سختیهای خمشی، پیچشی، جرم واحد طول و مقادیر شعاع ژیراسیون در طول ملخ ثابت در نظر گرفته شده‌اند:

$$e = 0.4 \text{ in} \text{ و } e_1 = 0 \text{ و } GJ = 9000 \text{ lb in}^2 \text{ و } EI_\xi = 25000 \text{ lb in}^2 \text{ و } L = 40 \text{ in} \quad (27)$$

$$\text{و } m = 0.0015 \text{ slugs/in}$$

$$K_{m2}^2 = 0.71 \text{ in}^2 \text{ و } K_{m1}^2 = 0.18 \text{ in}^2$$

نتایج حاصل از اجرای برنامه به همراه نتایج ارائه شده در مراجع [۵] و [۸] که به ترتیب از روشهای I.M.M و T.M.M برای حل مسئله استفاده کرده‌اند، در جدول (۵) نشان داده شده است. در این جدول فرکانسهای اول تا پنجم برای تیر با مشخصات بالا

جدول ۶ - مشخصات پره ناهمگن نمونه با زاویه پیچش اولیه

فاصله از محور دوران x (inches)	توزیع جرم m (lb-s <sup>2</sup> /in <sup>2</sup> )	توزیع ممان اینرسی در خارج صفحه دوران EI <sub>ξ</sub> (lb-in <sup>2</sup> )	توزیع ممان اینرسی در صفحه دوران EI <sub>η</sub> (lb-in <sup>2</sup> )	زاویه پیچش θ (deg)
۰	۱/۰۴ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۲/۰۰۰ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۶/۳۰ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۳۰/۵۰
۲	۰/۶۹۶ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۱۱۰ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۹ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۲۵/۲۰
۴	۰/۶۶۰ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۸۳ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۹ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۲۰/۱۰
۶	۰/۶۰۸ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۵۸ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۴ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۱۴/۸۰
۸	۰/۵۴۴ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۲۲ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۳ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۹/۶۰
۱۰	۰/۵۳۵ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۳۱ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۳ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۲/۷۰
۱۲	۰/۵۲۰ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۱۷ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۴ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	۰/۰۰
۱۴	۰/۵۰۶ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۲۶ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۲۷ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	-۲/۲۰
۱۶	۰/۴۹۸ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۲۵ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۵۱ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	-۷/۵۰
۱۸	۰/۴۹۸ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	۰/۰۲۴ × ۱۰ <sup>+۵</sup>	۵۴ × ۱۰ <sup>+۷</sup>	-۱۰/۰۰

#### ۴-۴- ارتعاشات توام خمش - خمش

در این مثال یک پره ناهمگن توربو ماشین دارای زاویه پیچش اولیه با طول  $L = 18 \text{ in}$  و خارج از مرکزیت  $e_1 = 6 \text{ in}$  مطابق با مشخصات ارائه شده در جدول (۶) تحلیل شده است. در این حالت توزیع جرم، زاویه پیچش، ممان اینرسی در صفحه دوران و خارج از صفحه دوران تابعی از فاصله از مرکز دوران اند. نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج روشهای دیگر در جدول (۷) ارائه شده است. فرکانسهای طبیعی ارتعاش خمش-خمش برای پره فوق با روشهای I.M.M و T.M.M [۳] محاسبه شده است. همچنین نتایج اندازه گیری بر روی آن در سرعتهای دورانی مختلف نیز موجود است [۳]. تفاوت جزئی بین نتایج حاصل از محاسبات و دیگر روشها عمدتاً ناشی از تعداد المانهاست. تعداد ۱۰ المان برای محاسبه فوق از روش گرین مورد استفاده قرار گرفته است. با زیاد کردن تعداد المانها در روش گرین، نتایج به مقدار قابل توجهی به نتایج حاصل از بقیه روشها نزدیک می شود. همچنین از جدول تطابق خوب نتایج با اندازه گیریهای تجربی نمایان است. نتیجه آن که از روش فوق می توان به جای انجام پره هزینه و وقتگیر آزمون مودال و دیگر آزمونها بر روی پره استفاده کرد.

#### ۴-۵- ارتعاشات توام خمش - خمش - پیچش

الف- پره به طول ۴۰ اینچ و زاویه پیچش اولیه ۴۵ درجه، به منظور اطمینان از الگوریتم بسط داده شده در حالت کلی، پره ای همگن دارای زاویه پیچشی اولیه با مشخصات زیر در نظر گرفته شده و بررسی ترکیب حرکات در سه صفحه مورد نظر است.

$$GJ = 9000 \text{ lb in}^2 \text{ و } EI_{\xi} = 25000 \text{ lb in}^2 \text{ و}$$

$$EI_{\eta} = 75000 \text{ lb in}^2 \text{ و } L = 40 \text{ in}$$

$$(28) \text{ و } m = 0.0015 \text{ slugs/in} \text{ و } \theta = 45^\circ$$

$$K_{m2}^2 = \text{lin}^2 \text{ و } K_{m1}^2 = \text{lin}^2 \text{ و } e = \sqrt{2} \text{ in} \text{ و } e_1 = 0$$

نتایج به دست آمده از روش گرین در این تحقیق با نتایج روش ماتریس انتقال (T.M.M) از مرجع [۸] در جدول (۸) مقایسه شده است. در این جدول فرکانسهای اول تا پنجم تیر محاسبه شده اند.

#### ب- پره بالگرد

دلیل انجام و حل کلیه مثالهای فوق، آماده کردن و اطمینان از درستی برنامه توسعه یافته برای محاسبه فرکانسهای طبیعی



جدول ۷ - مقایسه فرکانسهای طبیعی پره (rad/s) در ترکیب حرکت خمش در صفحه دوران با خمش در خارج از صفحه دوران

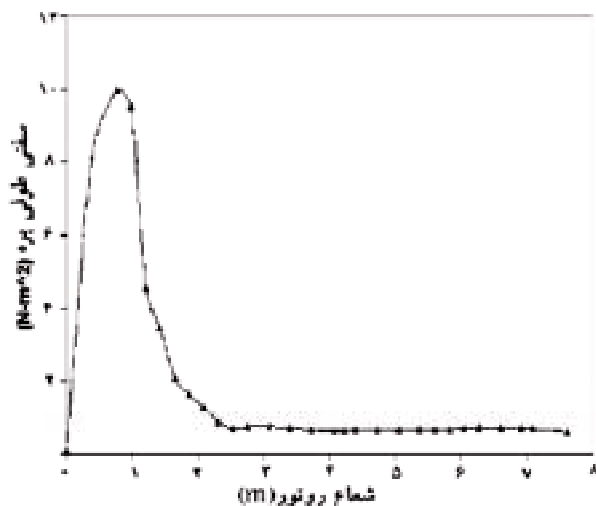
فرکانس طبیعی	سرعت دوران (rpm)	T.M.M (rad/s)	I.M.M (rad/s)	روش حاضر (گرین) (rad/s)	اندازه گیری [۳] (rad/s)
۱	۱۵۶۷	۲۰/۹۶۱۷	۲۰/۷۷	۳۹/۵۲۱۹	۲۰/۰۸
۲	۱۵۶۷	۱۰۹/۲۱۷	-	۱۱۳/۹۳۲	-
۳	۱۵۶۷	۲۷۹/۷۸۵	-	۲۸۷/۱۹۱	-
۱	۱۵۸۹	۲۱/۲۵۲۵	-	۳۹/۸۶۷۰	-
۲	۱۵۸۹	۱۰۹/۷۷۰	۱۰۹/۰۵	۱۱۳/۳۲۴	۱۰۹/۵۲
۳	۱۵۸۹	۲۸۰/۴۶۷	-	۲۸۷/۶۱۲	-
۱	۲۶۰۹	۶۰/۰۷۰۸	۵۵/۸۵	۵۵/۵۱۶۶	۵۵/۷۳
۲	۲۶۰۹	۱۳۹/۵۳۳	-	۱۳۹/۰۷۶	-
۳	۲۶۰۹	۳۰۹/۴۰۱	-	۳۱۲/۲۳۱	-
۱	۲۶۱۲	۶۰/۱۶۲۰	-	۵۵/۵۱۶۴	-
۲	۲۶۱۲	۱۳۹/۶۸۲	۱۳۹/۰۳	۱۳۹/۱۹۷	۱۳۹/۰۲
۳	۲۶۱۲	۳۱۹/۶۲۴	-	۳۱۲/۳۷۴	-
۱	۳۵۸۳	۷۸/۳۳۸۹	۷۸/۰۸	۷۵/۳۳۹۴	۷۷/۵۲۰

جدول ۸ - مقایسه فرکانسهای طبیعی پره (rad/s) در حالت کلی خمش - خمش - پیچش برای یک پره زاویه دار نادوار همگن

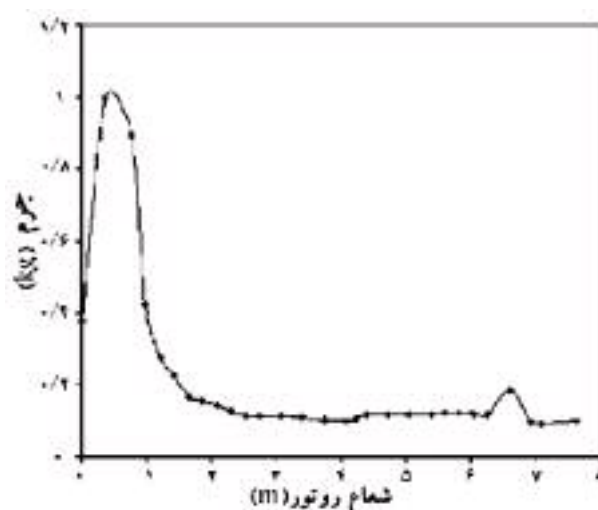
فرکانس طبیعی	T.M.M [۸] (rad/s)	روش حاضر (گرین) $\Omega=21$ (rad/s)	روش حاضر (گرین) $\Omega=21$ (rad/s)
۱	۳۰/۸۲۹۵	۳۰/۸۳۷۹	۳۰/۸۲۸۰
۲	۵۳/۸۲۷۷	۵۳/۸۴۰۲	۵۳/۸۴۰۴
۳	۱۸۲/۶۱۷	۱۸۲/۶۶۱۲	۱۸۲/۷۳۰۱
۴	۳۳۷/۳۳۳	۳۳۷/۴۱۰۱	۳۳۷/۵۱۱۰
۵	۶۸۲/۳۳۷	۶۸۲/۹۱۸۱	۶۸۲/۵۲۲۱

عددی محاسبه و مقایسه شدند. سپس از کد فوق برای تخمین خواص ارتعاشی پره در سرعتهای دورانی غیر صفر، که امکان اندازه گیری آنها وجود ندارد، استفاده شد. برای نیل به اهداف بالا، ابتدا بایستی مشخصات هندسی و فیزیکی پره در مقاطع مختلف به روشهای تجربی اندازه گیری می شد. این کار در عین وقتگیر بودن، نیاز به روشهای خاص تجربی و تجهیزات مناسب برای انجام آن دارد. بیان و توضیح روشها و تکنیکهای مورد استفاده برای اندازه گیری مرکز جرم، توزیع جرم، سختیهای خمشی، سختی پیچشی و دیگر

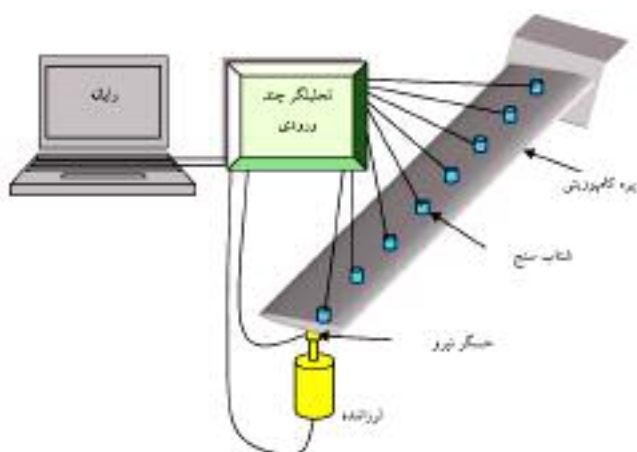
پره بالگرد در حالت کلی ارتعاشات توامان خمش - خمش - پیچش است. همان طور که گفته شد هدف اصلی تحقیق فوق محاسبه فرکانسهای طبیعی و مود شیب های یک پره کامپوزیتی ساخته شده در کشور به منظور جایگزینی آن با پره های فلزی مورد استفاده در بالگردهای مورد استفاده در ایران است. برای انجام این کار علاوه بر یکسان بودن پارامترهای هندسی، وزن و سختیها، اطمینان از یکسان بودن خواص دینامیکی این پره با پره مشابه فلزی نیز بسیار مهم است. به هم این دلیل مشخصات ارتعاشی پره فوق در حالت سکون به دو صورت تجربی و



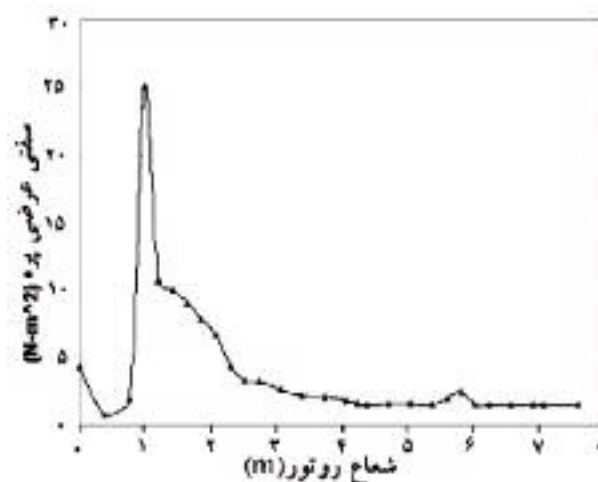
شکل ۱۱ - توزیع سختی در خارج از صفحه دوران در راستای طول پره فلزی



شکل ۱۰ - توزیع جرم در راستای طول پره فلزی



شکل ۱۳ - شماتیک انجام آزمون مودال بر روی پره کامپوزیتی



شکل ۱۲ - توزیع سختی در صفحه دوران در راستای طول پره فلزی

شتاب سنج (آنالیزر با شش کانال ورودی) در هیجده نقطه پره جمع آوری شدند، شکل (۱۳). در نهایت، توابع پاسخ فرکانسی توسط آنالیزر محاسبه و به صورت عددی در رایانه ذخیره شدند. تحلیل مودال به روشهای مختلف از جمله روش تک مود [۱۴]، برازش خط [۱۵]، برازش دایره [۱۵] و روشهای چند مودی [۱۶ و ۱۷] بر روی نتایج انجام و از روی آنها فرکانسهای طبیعی و مود شیپهای پره محاسبه شدند. فرکانسهای طبیعی محاسبه شده از روش گرین به همراه نتایجی که از آزمون مودال

پارامترهای مورد نیاز برنامه از حوصله این مقاله خارج است. خواننده برای دستیابی به توضیحات کاملتر به مرجع [۲۷] مراجعه کند. به عنوان نمونه، شکل‌های (۱۰) تا (۱۲) نمودارهایی را نشان می‌دهند که به ترتیب نحوه توزیع جرم و توزیع سختی خمشی خارج از صفحه دوران در راستای طول پره فلزی را نشان می‌دهند. در مرحله بعد، آزمون مودال بر روی پره ساکن توسط تحریک لرزاننده انجام گرفت. سیگنالهای اندازه‌گیری توسط شش عدد

جدول ۹ - مقایسه نتایج حاصل از روش گرین در حالات مختلف به طور مجزا و ترکیبی

فلپ	لگ	پیچ	فلپ - لگ - پیچ
۲۲/۲	-----	-----	۳۰/۸۳۸
-----	۳۵/۶	-----	۵۲/۸۴۰۴
-----	-----	۲۳۷/۵	۳۳۷/۵۱
۱۳۸/۸	-----	-----	۳۵۲/۳۹۷۲
-----	۲۲۲/۲	-----	۹۸۲/۵۲
-----	-----	۷۱۲/۲	۹۳۵/۹۲۵۷
۳۸۸/۷	-----	-----	۵۴۵/۵۵۳۶
-----	۶۲۵	-----	۶۰۶۹/۶
-----	-----	۱۱۸۶	۱۷۶۶/۲

جدول ۱۰ - مقایسه نتایج حاصل از روش گرین با نتایج حاصل از آزمون مودال

سرعت دوران (rpm)	روش تحلیل	$\omega_1$ rad/s	$\omega_2$ rad/s	$\omega_3$ rad/s	$\omega_4$ rad/s
۰	تحلیل مودال	۰/۸۲	۵/۱۶	۱۶/۰۵	۳۵/۸
۰	گرین	۰/۷۹	۵/۱۱	۱۵/۶۵۵	۳۲/۲۷۵
۵۰	گرین	۱/۱۵۵	۵/۲۳۵	۱۵/۹۱	۳۲/۳۹۵
۱۵۰	گرین	۲/۵۱	۷/۶۹	۱۷/۸۹۵	۳۳/۳۶۵
۲۵۰	گرین	۲/۳۳	۱۰/۹۴	۲۱/۳۶۵	۳۵/۲۱۸۳
۳۰۰	گرین	۵/۰۸۵	۱۲/۶۷۵	۲۳/۳۹۵	۳۶/۵۵۳۵

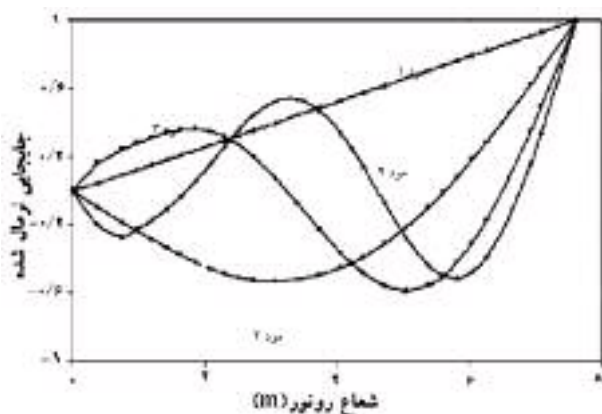
که همواره بین صفر و یک است، نشانگر تشابه بین مودهای مختلف است. مقدار صفر به معنای نبود تشابه و یک به معنای تشابه کامل است. در عمل به دلیل خطاهای اندازه‌گیری و محاسباتی مقادیر بالای ۰.۷۵ نشانگر تشابه خوب و زیر ۰.۲۵ به معنای تشابه ضعیف یا نبود تشابه تلقی می‌شود. مقدار MAC بین پنج مود اول تجربی و عددی محاسبه شده در شکل (۱۴) نشان داده شده است. برای هم اندازه کردن بردارها از روش SEREP استفاده شد [۲۶]. انطباق خوب بین مود شیب‌های متناظر در شکل به‌خوبی دیده می‌شود. بنابراین با توجه به جدول (۹) و شکل (۱۴) می‌توان گفت که روش عددی استفاده شده می‌تواند بخوبی نتایج تحلیل مودال به‌دست آمده بر روی پره کامپوزیتی را پیش بینی کند. فرکانسهای طبیعی

در حالت استاتیکی روی پره در آزمایشگاه استخراج شده برای مقایسه در جدول (۹) و (۱۰) ارائه شده است. برای مقایسه مود شیب‌های تجربی و تحلیلی در تحلیل مودال از ابزارهای متفاوتی استفاده می‌شود [۱۸ و ۱۹]. در این مطالعه از ابزاری به نام MAC برای این مقایسه استفاده شده است [۱۸]. این مقدار به صورت زیر تعریف می‌شود:

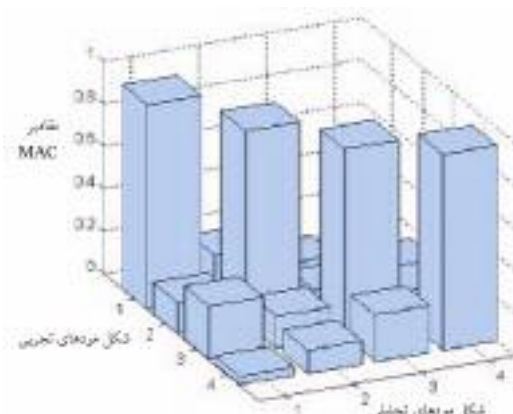
$$MAC = \frac{(\{\phi_X\}^T \{\phi_A\})^2}{(\{\phi_X\}^T \{\phi_X\})(\{\phi_A\}^T \{\phi_A\})} \quad (29)$$

که در آن  $\{\phi_A\}$  و  $\{\phi_X\}$  به ترتیب مود شیب‌های تجربی و تحلیلی‌اند. قابل ذکر است که به دلیل هم اندازه نبودن این دو بردار در حالت کلی، از روشهای کاهش [۲۰-۲۳] و یا بسط [۲۴-۲۶] استفاده می‌شود. پس از انجام محاسبات، عدد حاصل





شکل ۱۵ - مودشپ های اول تا چهارم پره کامپوزیتی در سرعت دورانی 150 rpm



شکل ۱۴ - جدول MAC بین مودهای تجربی و تحلیلی

نتایج حل با روشهای دیگری از قبیل المان محدود، I.M.M و T.M.M نشان می‌دهد. از مزایای روش ارائه شده می‌توان به سادگی برنامه نویسی و سرعت محاسبات اشاره کرد.

برنامه رایانه‌ای فوق برای تیر یک سردرگیر تدوین شده است ولی می‌توان با اعمال شرایط مرزی مناسب برای حالت‌های مختلف نیز از این الگوریتم استفاده کرد. اگرچه الگوریتم و کلیه مثالها به صورت یکسر در گیر در نظر گرفته شده‌اند، معهدا برای شرایط مرزی متفاوت کافی است که تابع گرین مربوط به تیر ساده با شرایط مرزی مطلوب را در الگوریتم اعمال و روند ارائه شده را مجدداً طی کرد.

روش فوق توانست نتایج ناشی از آزمون و تحلیل مودال را در حالت استاتیک بر روی پره فلزی، به‌درستی پیش بینی کند. بنابراین از آن می‌توان به‌عنوان ابزاری برای درک بهتر رفتار دینامیکی پره جایگزین (کامپوزیتی) استفاده کرد.

از این روش می‌توان برای بررسی ارتعاشات ترکیبی در کلیترین حالت روی پره توربو ماشینها و دیگر سیستمهای دوار نیز استفاده کرد.

### قدردانی

بدین وسیله از مساعدتها و کمکهای شرکت هواپیما سازی ایران (هسا) در انجام این تحقیق تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

پره مذکور در چند سرعت دورانی در جدول (۹) و (۱۰) آورده شده‌اند. این نکته در مورد جدول (۹) قابل ذکر است که اختصاص دادن فرکانسهای ترکیبی به فرکانس حالت‌های مجزا همواره به سادگی امکان‌پذیر نیست. برای این کار بایستی حتماً مود شکلها نیز با یکدیگر مقایسه شوند. علی‌رغم این، در بعضی موارد مود توام ممکن است شامل ترکیبی از چندین مود ارتعاشی حالت مجزا بوده که در آن صورت تعیین مودهای معادل کاری تقریباً ناممکن است. سرانجام با توجه به اینکه مدل نتایج قابل قبولی را برای حالت استاتیک در مقایسه با نتایج تجربی پیش‌بینی می‌نماید، از آن برای محاسبه مودهای پره در حال دوران که تعیین آنها در عمل مشکل است استفاده شد. مودهای اول تا چهارم استخراج شده از روش گرین برای پره در سرعت دوران ۱۵۰ دور بر دقیقه در شکل (۱۵) ترسیم شده‌اند.

### ۵- نتیجه‌گیری

ارتعاشات ملخهای دوار و نادوار با شکل ناهمگن و دارای زاویه پیش‌اولیه در این مقاله بررسی شد. معادلات پره در حالت کلی برای بررسی ارتعاشات ترکیبی بر اساس استفاده از توابع گرین به‌دست آمده و با ارائه مثالهای عددی در حالت‌های مختلف، نتایج به‌دست آمده با نتایج روشهای فریبیوس، I.M.M و T.M.M مقایسه شده‌اند. نتایج به‌دست آمده تطابق خوبی با

- |         |               |             |
|---------|---------------|-------------|
| 1. Lag  | 3. Collective | 5. Backward |
| 2. Flap | 4. Forward    |             |

## مراجع

1. Houbolt, J.C., Brooks, G.W., "Differential Equations of Motion for Combined Flapwise Bending and Tortion of Twisted Non-Uniform Rotor Blade," *NACA Report No. 1346*, 1958.
  2. Rosen, A., "Structural and Dynamic Behavior of Pretwisted Rods and Beams," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, No. 12, pp. 483-515, 1991.
  3. Hunter, W.F., "The Integrating Matrix Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Propeller Blades," *NASA TN D-6064*, 1970
  4. White, W.F., and Malatino, R.E., "A Numerical Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Rotating Nonuniform Cantilever Blades," *NASA TM X-72*, 751, 1975.
  5. Murthy, V.R., "Dynamic Characteristics of Rotor Blades - Integrating Matrix Method," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 115, No. 4, pp. 595-597, 1977.
  6. White, W.F., Kvaternik, R.G., and Kaza, K.R.V., "Buckling of Rotating Beams," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 21, pp. 739-745, 1979.
  7. Nitzske, F., and Breitbach, E.G., "Using Adaptive Structures of Attenuate Rotary Wing Aeroelastic Response," *Journal of Aircraft*, Vol. 31, No. 5, pp. 1178-1188, 1994.
  8. Murthy, V.R., "Dynamic Characteristics of Rotor Blades," *Journal of sound and vibration*, Vol. 49, pp. 483-500, 1976.
  9. Bielawa, R.L., "Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity," *AIAA Education Series*, Washington, D.C AIAA Inc, 1992.
  10. Wright, A.D., Smith, E., Thresher, R.W., and Wang, J.L.C., "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, No. 3, pp. 197-202, 1982.
  11. Petrem A., Theory of the Aeroelasticity -Dynamic Periodic Phenomena (in Romanian), Bucharest: Romanian Academy Publishing House, 1973.
  12. Anghelm, V., "Coupled Bending Vibration Analysis of Pretwisted Blades : An Integral Formulation Using Greens Functions," *Rev. Roum. Sci. Tech. - Mec. Appl.*, Vol. 42, No.1-2, pp. 197-203, 1997.
  13. Yoo, H. H., and Shin, S.H., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp. 807-828, 1998.
  14. Ewins, D.J. Modal Testing: Theory and Practice. Research Studies Press, 2000.
  15. ICATS Manual, Imperial College, University of London, 2003.
  16. Barone, P., and Ramponi, A., "A New Estimation Method in Modal Analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 48, No. 4, pp. 1002-1014., 2000.
  17. Coppolino, R.N., and Stroud, R.C., "A Global Technique for Estimation of Modal Parameters from Measured Data," *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, California, pp. 674-681, 1986.
  18. Allemang, R.D., and Brown, L.D., "A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis," *Proc. of the First IMAC*, pp. 110-116, Orlando, Florida, 1982.
  19. Lieven N.A.J., and Ewins, D.J., "Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC)," *Proc. of the Sixth IMAC*, pp. 690-695, Kissimmee, Florida, 1988.
  20. Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, pp. 380, 1965.
  21. Paz, M., "Dynamic Condensation," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 22, pp. 724-727, 1984.
  22. O'Callahan, J.C., "A Procedure for an Improved Reduced System (IRS)," *Proc. of the 7th IMAC*, pp. 17-21, Las Vegas, Nevada, 1989.
  23. O'Callahan, J.C., "Development of a General Pseudo Orthogonality Correlation Procedure," *Proc. of the 13th IMAC*, pp. 1013-1021, Nashville, Tennessee, 1995.
  24. O'Callahan, J.C., and Li, P. "A Non Smoothing SEREP Process for Modal Expansion," *Proc. of the 8th IMAC*, pp. 232-238, Kissimmee, Florida, 1990.
  25. Gysin, H. P. "Comparison of Expansion Method for FE Modeling Error Localization," *Proc. of the 8th IMAC*, pp. 195-204, Kissimmee, Florida, 1990.
  26. O'Callahan, J.C., and Li, P., "SEREP Expansion," *Proc. of the 13th IMAC*, pp. 1258-1264, Nashville, Tennessee, 1995.
۲۷. زمانی، ح.، "بررسی و تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی پره بالگرد"، ۱۳۸۳، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.