

# تحلیل اتساع متقارن و نامتقارن محوری ورقهای فلزی به روش اجزای محدود

محمود فرزین<sup>۱</sup> و محمدرضا شریعتی<sup>۲</sup>  
دانشکده مکانیک - دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده - در این تحلیل ماده به صورت صلب - پلاستیک و ناهمسانگرد فرض شده و فرمولبندی مسئله براساس کرنشهای زیاد صورت گرفته است. هندسه مسئله توسط المانهای مثلثی تقسیم گردیده و برای به دست آوردن معادله‌های سختی المانها از قانون کار مجازی استفاده شده است. با توجه به فرض کرنشهای زیاد برای مسئله، معادله‌های سختی که ناخطی اند توسط روش نیوتن رافسون به دسته معادله‌های خطی تبدیل و برای حل آنها از روش حذفی گوس استفاده شده است. تغییر مکان سنبه به صورت مرحله‌ای وارد شده و تغییر شکل ورق به صورت پیش بینی تغییر مکان گره‌ها در هر مرحله مشخص گردیده است. پس از همگرا شدن مسئله نتایج حاصل که شامل کرنش و تنش المانها، نیروی گره‌ها و نیروی کل سنبه و غیره هستند ارائه گردیده و اطلاعات اولیه برای مرحله بعدی تغییر شکل تجدید شده است. این عملیات تا به آنجا ادامه یافته که ورق فلز به اندازه مورد نیاز و یا قابل وصول تغییر شکل پیدانموده است. نتایج این تحلیل با کارهای تئوری و آزمایشی موجود مقایسه شده و بسیار رضایتبخش بوده است.

## Analysis of Axisymmetric and Non-Axisymmetric Stretching of Sheet Metals by the Finite Element Method

M. Farzin and M. Shariaty

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** *Stretching process of sheet metals in both cases of axisymmetric and non-axisymmetric is analyzed. A rigid-plastic, normal anisotrop material is assumed and large strain formulation is applied. Triangular elements are used and stiffness equations of elements are obtained from virtual work principle. These nonlinear equations are linearized by Newton-Raphson's method and are solved by Gaussian elimination technique. Punch displacement is applied incrementally and deformation of sheet specimen is obtained by calculation of displacement of nodes at each increment. After convergence of calculations at each increment, results which include nodes displacements, strains and stresses at elements, nodal forces and total punch force, etc., are saved and initial guesses are updated. This procedure is continued up to an obtainable or desired punch stroke. Results of this analysis are presented and their comparison with other available theoretical and experimental works are very satisfactory.*

۱. استادیار  
۲. فارغ‌التحصیل دوره کارشناسی ارشد

فهرست علائم

مختصات همه جایی (معادله ۲۰، m)	نیروی عمودی (معادله ۲۲، MN)	$F_n$	ماتریس انتقال بین مختصات موضعی و همه جایی (معادله ۱۲)، بدون بعد	$\underline{A}$
بردار حدسی تغییر مکان (معادله ۱۳، m)	شیب منحنی تنش - کرنش واقعی در لحظه $t_0$ (معادله ۷، MN/m <sup>2</sup> )	$h_0$	ماتریس ارتباط کرنش لاگرانژی و تغییر مکان معادله (۱۶، ۱/m)	$\underline{B}$
حجم (معادله ۱۰، m <sup>3</sup> )	ماتریس سختی مماسی (معادله ۱۴، MN/m)	$\underline{K}^*$	ماتریس ارتباط مولفه های تنش و تنش مؤثر (معادله ۳، بدون بعد)	$\underline{D}_1$
مختصات هیئت مرجع (معادله ۲۰، m)	توابع شکل المان مثلثی (معادله ۱۱، بدون بعد)	$N_{ij}$	ماتریس ارتباط مولفه های کرنش و کرنش مؤثر (معادله ۴، بدون بعد)	$\underline{D}$
مختصات هیئت جاری (معادله ۱۱، m)	مقدار ناهمسانگردی عمودی (معادله ۱، بدون بعد)	$R$	نمؤ کرنشهای لاگرانژی (معادله ۲، بدون بعد)	$dE_{ij}$
کرنش مؤثر واقعی (معادله ۶، بدون بعد)	شعاع سنبه (معادله ۲۰، m)	$r_p$	نمؤ کرنش مؤثر لاگرانژی (معادله ۲، بدون بعد)	$\underline{dE}$
تنش مؤثر واقعی (معادله ۶، MN/m <sup>2</sup> )	سطح (معادله ۱۰، m <sup>2</sup> )	$\underline{s}$	بردار نیرو (معادله ۱۴، MN)	$F-H^*$
ضریب اصطکاک کولب (معادله ۲۲، بدون بعد)	تنش مؤثر پیولا کیرشف نوع دوم (معادله ۱، MN/m <sup>2</sup> )	$\underline{S}$	نیروهای سطحی (معادله ۱۰، MN)	$F_j$
تغییرات جزئی تابعک (معادله ۱۰، MN-m)	مولفه های تغییر مکان در مختصات موضعی (معادله ۵، m)	$u_i$	نیروهای مماسی (معادله ۲۲، MN)	$F_t$
	مولفه های تغییر مکان در	$U, V, W$		

۱- مقدمه

توسط تووکوبایاشی [۶] تمرکز بیشتری شده و فعالیت آنها ادامه داده شده است. مسأله اتساع ورق در صنعت به ویژه صنعت اتومبیل سازی کاربرد فراوانی دارد و به این دلیل همواره مورد مطالعه پژوهشگران بوده است. به علت پیچیدگی فرایند، روش اجزای محدود بیش از سایر روشها مورد استفاده قرار گرفته است. در این زمینه علاوه بر فعالیتهای کیم و تووکوبایاشی [۵ و ۶ و ۷] از مطالعات ناکاماچی [۸] ویانگ و همکاران [۹] می توان یاد کرد.

۲- تئوری

در این مقاله ناهمسانگردی در ورق فلز به صورت ناهمسانگردی عمودی فرض می شود. ناهمسانگردی عمودی به وسیله متوسط مقدار  $R$  که طبق تعریف برابر با نسبت کرنش لگاریتمی در جهت پهنا به کرنش لگاریتمی در جهت ضخامت است بیان می گردد. با استفاده از این تعریف و با فرض ناهمسانگردی نرمال چنانچه تنش مؤثر را در جهت های  $X$  و  $Y$  برابر با تنش تسلیم کشش ساده در نظر بگیریم  $(\bar{S} = S_x = S_y)$  بر اساس معیار تسلیم هیل<sup>۷</sup> می توان نشان داد که [۷]:

$$\bar{S} = [S_x^2 - \frac{YR}{1+R} S_x S_y + S_y^2 + \frac{Y(1+YR)}{1+R} S_{xy}^2]^{1/2} \quad (1)$$

در عملیات واقعی شکل دهی ورقهای فلزی تغییر شکلهای پلاستیک بسیار پیچیده تر از حالت آزمون کشش ساده است. بنابراین برای تعیین قابلیت شکل پذیری نیاز به آزمونهای دیگری نظیر آزمونهای السن<sup>۱</sup>، اریکسون<sup>۲</sup>، سویت<sup>۳</sup> و فوکوئی<sup>۴</sup> است [۱]. یکی دیگر از روشهای بررسی حد شکل پذیری استفاده از نمودارهای حد شکل پذیری<sup>۵</sup> برای فلزات مختلف است. این نوع نمودار ابتدا توسط کیلر و بک اوفن [۲] در آزمونهای اتساعی<sup>۶</sup> دو محوری معرفی و توسط گودوین [۳] برای بررسی حالت کشش - فشار گسترش یافت. یکی از روشهای عملی برای رسم اینگونه نمودارها آزمون ناکاجیما [۴] است. در این روش از سنبه ای نیم کروی و از نوارهایی با پهنا و شرایط روانکاری متفاوت استفاده می شود. برای بررسی و تحلیل فرایندهای اتساع و به دست آوردن مسیر کرنش المانهای بحرانی در نمودارهای حد شکل پذیری روشهای عددی مختلفی به کار گرفته شده است. در حال حاضر روش اجزای محدود یکی از تکنیکهای قوی محاسباتی برای تحلیل شکل دهی ورقهای فلزی به شمار می رود. کیم و کوبایاشی [۵] از این روش برای تحلیل اتساع متقارن استفاده کردند. در این مقاله بر روی کارهای انجام گرفته

همچنین با استفاده از قانون جریان برای مواد ناهمسانگرد و با توجه به فرضیه هیل می‌توان نمودار تنش مؤثر متناظر با تنش مؤثر در معادله فوق را به صورت زیر به دست آورد:

$$d\bar{E} = \frac{1+R}{\sqrt{1+2R}} [dE_x^2 + dE_y^2 + \frac{2R}{1+R} dE_x dE_y + \frac{2}{(1+R)} dE_{xy}^2]^{1/2} \quad (2)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را برای تسهیل در محاسبات کامپیوتری می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{2}{3} S^T D_1 S} \quad (3)$$

$$d\bar{E} = \sqrt{\frac{2}{3} dE^T D_d E} \quad (4)$$

که در آن

$$S^T = \{S_x \ S_y \ S_{xy}\}$$

$$dE^T = \{dE_x \ dE_y \ dE_{xy}\}$$

$$D_1 = \frac{2}{3(1+R)} \begin{bmatrix} 1+R & -R & 0 \\ -R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+2R) \end{bmatrix}$$

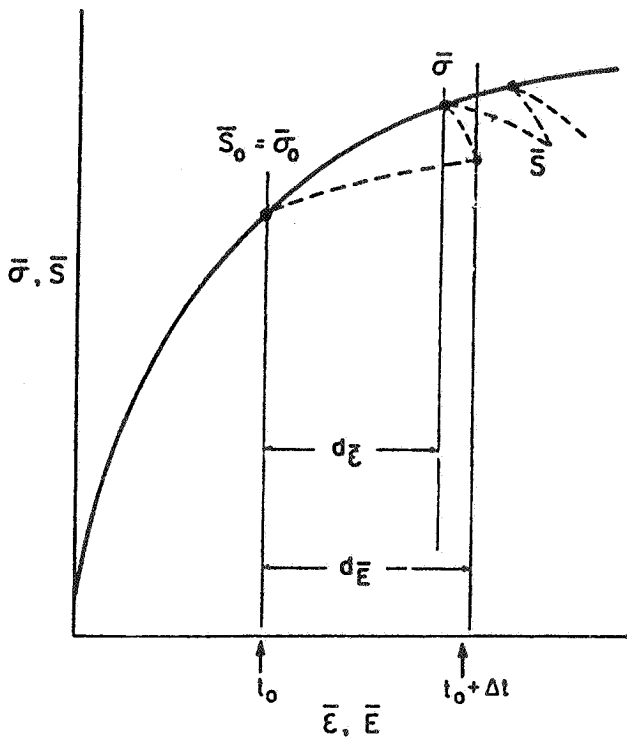
$$D_d = \frac{2(1+R)}{3(1+2R)} \begin{bmatrix} 1+R & R & 0 \\ R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

از آنجا که کرنشهایی که در فرایند شکل‌دهی ورقهای فلزی انجام می‌گیرد از نوع کرنشهای محدود است بنابراین این مؤلفه‌های کرنش در معادله (۴) را باید براساس کرنشهای لاگرانژی انتخاب نمود. این مؤلفه‌ها با توجه به گرادیانهای تغییر مکان هر گره به صورت زیر به دست می‌آیند

$$E_{ij} = \frac{1}{\gamma} (u_{ij} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (5)$$

۳- معادله‌های متشکله

معادله‌های متشکله که در واقع رابطه بین تنش و کرنش و یا نرخ



شکل ۱- تصویر شماتیک ارتباط بین منحنیهای تنش - کرنش (لاگرانژی و طبیعی)

آن را بیان می‌کنند توسط آزمایشهایی نظیر آزمایش کشش ساده به دست می‌آیند. در این گونه روابط تنش به صورت تنشهای کوشی و کرنشهای آن از نوع کرنشهای واقعی‌اند. برای استفاده از کرنشهای لاگرانژی و تنش متناظر با آن لازم است که معادله‌های متشکله را برای این گونه تنشها و کرنشها تغییر داد. برای به دست آوردن این ارتباط با توجه به شکل (۱) سطح زیر منحنی فرضی  $\bar{S} - d\bar{E}$  برابر با سطح زیر منحنی  $\bar{\sigma} - d\bar{E}$  منظور می‌شود، یعنی:

$$\int_{\bar{E}_0}^{\bar{E}} \bar{\sigma} d\bar{E} = \int_{\bar{E}_0}^{\bar{E}} \bar{S} d\bar{E} \quad (6)$$

بفرض  $\bar{S}_0 = \bar{\sigma}_0$  و استفاده از بسط سری تیلور می‌توان نشان داد که [۶]:

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_0 + (h_0 - \gamma \bar{\sigma}_0) d\bar{E} \quad (7)$$

که  $h_0$  شیب منحنی  $\bar{\sigma} - \bar{E}$  است که در لحظه  $t = t_0$  به دست می‌آید.

همچنین رابطه بین کرنش مؤثر واقعی و کرنش مؤثر لاگراژی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{1}{\nu} \text{Ln}(1 + \nu d\bar{E}) \quad (8)$$

بنابر این مقدار کرنش مؤثر واقعی در هر مرحله را می توان براساس مقدار قبلی یعنی  $\bar{\epsilon}_0$  و محاسبه  $d\bar{\epsilon}$  برای مرحله فعلی به دست آورد. به عبارت دیگر:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0 + d\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0 + \frac{1}{\nu} \text{Ln}(1 + \nu d\bar{E}) \quad (9)$$

#### ۴- فرمولبندی به روش اجزای محدود

یکی از راههای فرمولبندی مسئله به روش اجزای محدود به ویژه در مبحث تغییر شکل فلزات استفاده از روش تغییرات است. در این روش با به سکون در آوردن تابعی مناسب، دسته معادلاتی حاصل می شوند که با در نظر گرفتن شرایط مرزی و حل آنها، جوابهای مطلوب مسئله به دست می آیند. این تابعها در دامنه مسئله براساس قوانین فیزیکی حاکم بر مسئله به دست می آیند. بر طبق قانون تغییرات و استفاده از اصل کار مجازی می توان نوشت [۷]:

$$\delta\pi = \int_V \bar{S} \delta(d\bar{E}) dV - \int_S F_j \delta(u_j) ds = 0 \quad (10)$$

با خرد کردن حوزه مسئله به المانهای مثلثی میدان تغییر مکان داخل هر المان را می توان براساس تغییر مکانهای هر گره و با استفاده از توابع شکل برای المانهای مثلثی به دست آورد. به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$u = \frac{1}{\nu \Delta} \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i x + c_i y) u_i = N_{ij} u_j \quad (11)$$

که در آن  $u_i$  و  $\Delta$  به ترتیب مولفه های تغییر مکان گره ها و مساحت المان مثلثی است. همچنین پارامترهای  $a_i$  و  $b_i$  و  $c_i$  براساس مختصات موضعی گره ها از یک المان مثلثی  $ijm$  به صورت زیر به دست می آیند.

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

که ترتیب آنها را می توان با جایگشت منظمی از  $i$  و  $j$  و  $m$  به دست آورد. از آنجا که جوابهای نهایی مسئله بایستی براساس مختصات همه جایی بیان گردد لذا می توان توسط ماتریس انتقال  $9 \times 9$  تغییر مکانهای موضعی را به تغییر مکانهای همه جایی تبدیل نمود یعنی:

$$u_i = A_{ij} U_j \quad (12)$$

به علت وجود جملات ناخطی در معادله (۵) معادله های سختی که با به سکون در آوردن معادله (۱۰) به دست می آیند ناخطی خواهند بود. برای حل این گونه معادله ها از روش تکراری نیوتن رافسون استفاده می شود. بنابر این با خطی کردن معادله (۱۰) براساس سری تیلور در نزدیکی بردار حدسی  $U^*$  برای کل گره ها خواهیم داشت:

$$\sum \left( \frac{\partial \pi}{\partial U_i} \right) \Big|_{U=U^*} + \sum \left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial U_i \partial U_j} \right) \Big|_{U=U^*} \Delta U = 0 \quad (13)$$

این معادله را می توان به شکل ساده به صورت

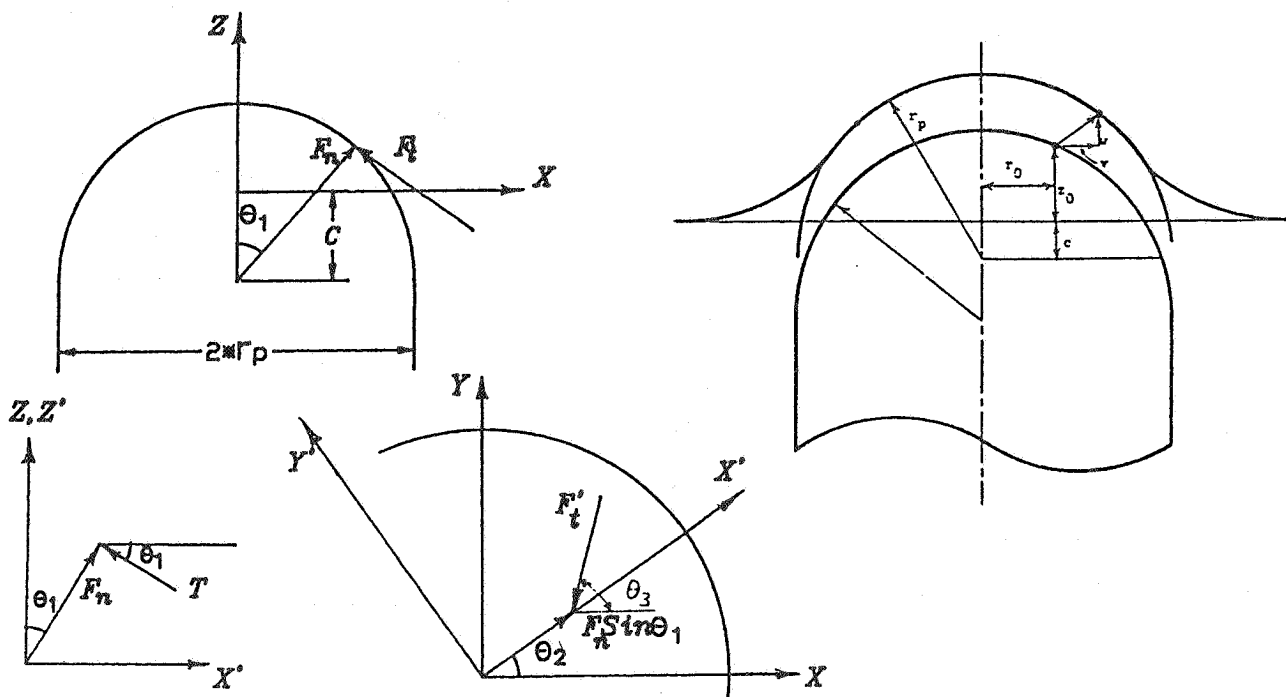
$$K^* \Delta U = F - H^* \quad (14)$$

نشان داد که  $K^*$  ماتریس سختی مماسی و  $F - H^*$  بردار نیرو نامیده می شوند.

#### ۱.۴- بردار نیرو و ماتریس سختی

برای به دست آوردن معادله سختی با گرفتن مشتق از تابع  $\pi$  نسبت به بردار تغییر مکان در مختصات همه جایی برای المان مفروض  $m$  داریم

$$\Psi(m) = \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = \int_V S \frac{\partial(d\bar{E})}{\partial U} dV - \int_S A^T N^T F ds \quad (15)$$



شکل ۲- نمایش هندسی سنبه نیم کروی و نیروهای وارده بر نقاط تماس با آن

دیگر نسبت به بردار  $U$  مشتق‌گیری شود. بنابر این چنانچه عبارت ماتریس سختی از معادله زیر به دست می‌آید.

$$\underline{K}^* = \left[ \frac{\partial \Psi(m)}{\partial U} \right]^* = \left\{ \frac{1}{3} \left[ \int_v \frac{\bar{S}}{2} (d\bar{E})^{-2/3} (d\bar{E})_{,u}^T \underline{A}^T Q^T \underline{D} \underline{B} u dv + \int_v \frac{\bar{S}}{d\bar{E}} \underline{A}^T (Q^T \underline{D} \underline{B} + Q_{,u}^T \underline{D} \underline{B} U + Q^T \underline{D} \underline{B}_{,uu}) dV \right] \underline{A} \right\}^* \quad (19)$$

#### ۲.۴ - شرایط مرزی

شرایط مرزی حاکم بر سطح تماس بین ورق و سنبه را می‌توان به دو دسته شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی نیرویی تقسیم بندی کرد. الف) شرایط مرزی هندسی

به علت صلب بودن سنبه، ورق فلز هنگام تغییر شکل از هندسه سنبه که در اینجا به صورت نیم‌کره است تبعیت می‌نماید. بنابر این با در نظر گرفتن تغییر مکانهای  $U, V, W$  در سه جهت مختصات و با توجه به شکل (۲) می‌توان نوشت:

در این معادله برای به دست آوردن عبارت مشتق در اولین انتگرال می‌توان از معادله‌های (۴) و (۱۲) استفاده کرده و نشان داد که:

$$\frac{\partial (d\bar{E})}{\partial U} = \frac{2}{3d\bar{E}} \underline{A}^T (\underline{B} + \underline{B}_{,uu})^T \underline{D} \underline{B} \underline{A} U \quad (16)$$

$\underline{B}$  ماتریسی است که مؤلفه‌های کرنشی لاگرانژی را با مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر مرتبط می‌سازد

$$dE = \underline{B} u \quad (17)$$

بنابر این بردار نیروی هر المان به صورت زیر به دست می‌آید

$$F - H^* = \int_s \underline{A}^T \underline{N}^T F ds - \left[ \int_v \frac{2}{3} \frac{\bar{S}}{d\bar{E}} \underline{A}^T (\underline{B} + \underline{B}_{,uu})^T \underline{D} \underline{B} \underline{A} U dV \right]^* \quad (18)$$

که منظور از علامت ستاره مقدار رابطه در بردار حدسی است. برای به دست آوردن ماتریس سختی بایستی از معادله (۱۸) بار

$$(X + U)^2 + (Y + V)^2 + (Z + W + C)^2 = r_p^2 \quad (20)$$

$$\cos\theta_1 = (Z + W + C) / r_p$$

$$\cos\theta_2 = (X + U) / \sqrt{(X + U)^2 + (Y + V)^2}$$

$$\cos\theta_3 = U / \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$P = \sqrt{\frac{\cos^2\theta_1}{\cos^2(\theta_3 - \theta_2)} + \sin^2\theta_1}$$

که C پارامتری است که میزان نفوذ سنبه را مشخص می نماید. این معادله را بایستی براساس سری تیلور خطی نمود تا بتوان برای اعمال شرایط مرزی هندسی آنها را به سهولت وارد معادله ها کرد. با انجام این عمل خواهیم داشت:

$$\Delta W = \alpha - \beta \Delta U - \gamma \Delta V \quad (21)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{r_p^2 - (X + U^*)^2 - (Y + V^*)^2 - (Z + W^* + C)^2}{2(Z + W^* + C)}$$

$$\beta = \frac{Z + U^*}{Z + W^* + C} \quad \gamma = \frac{Y + V^*}{Z + W^* + C}$$

ب) شرایط مرزی نیرویی

شرایط مرزی حاصل از تماس سنبه با ورق را می توان با توجه به شکل (2) به صورت زیر به دست آورد

$$F_X = F_n \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{P \cos(\theta_3 - \theta_2)} F_t$$

$$F_Y = F_n \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2}{P \cos(\theta_3 - \theta_2)} F_t$$

$$F_Z = F_n \cos\theta_1 + \frac{F_t}{P} \sin\theta_1 \quad (22)$$

نیروی مماسی  $F_t$  را می توان با استفاده از قانون کلمب به صورت  $\mu F_n$  وارد معادله ها کرد. پارامترهای مثلثاتی در روابط فوق به صورت زیر تعریف می شوند.

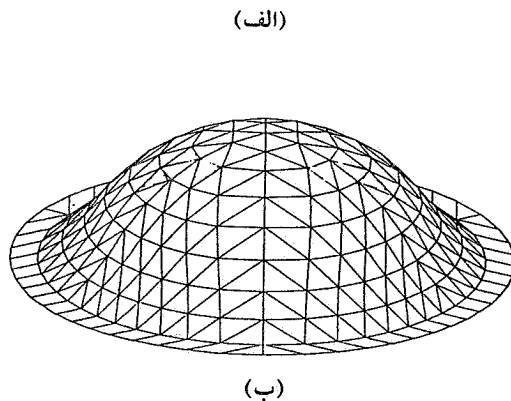
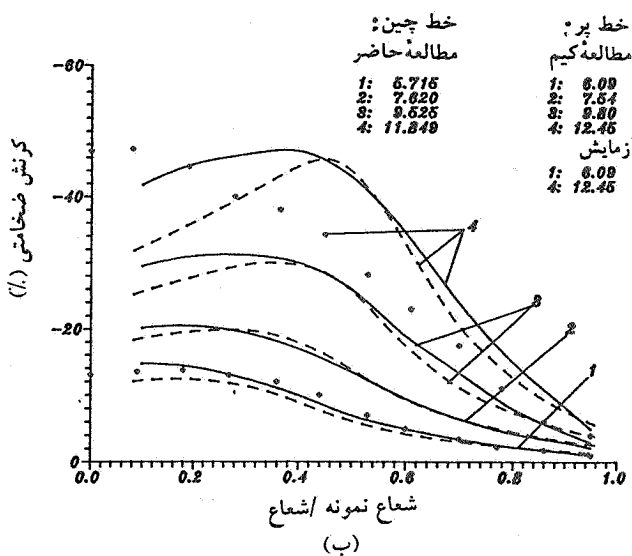
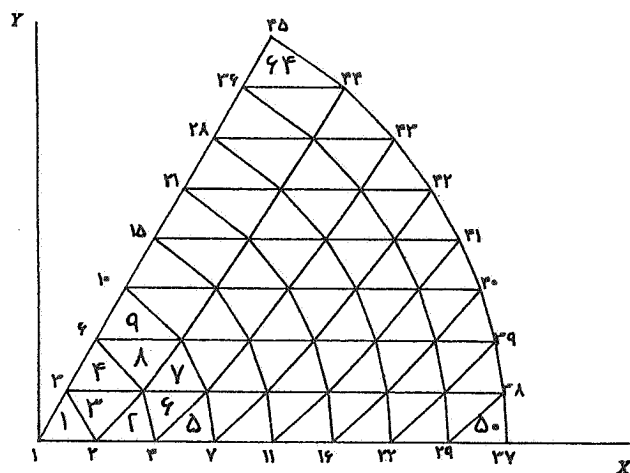
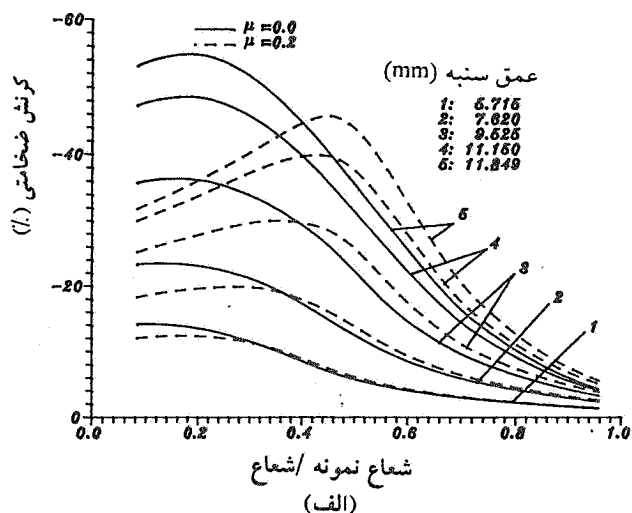
$$\sin\theta_1 = \sqrt{(X + U)^2 + (Y + V)^2} / r_p$$

$$\sin\theta_2 = (Y + V) / \sqrt{(X + U)^2 + (Y + V)^2}$$

$$\sin\theta_3 = V / \sqrt{U^2 + V^2}$$

## ۵- نتایج

برای بررسی رفتار ورق فلز و همچنین بررسی اثر پارامترهای مختلف روی فرایند اتساع بر مبنای فرمولبندی که در بالا شرح داده شد، دو حالت اتساع متقارن و نامتقارن محوری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است [10]. در هر دو نوع اتساع از سنبه های نیم کره ای استفاده شده است که در حالت متقارن شعاع این نیم کره ۱۹/۰۵ میلیمتر (۰/۷۵ اینچ) و در حالت نامتقارن شعاع آن ۵۰/۸ میلیمتر (۲ اینچ) انتخاب گردیده است. دلیل این انتخاب آن است که بتوان نتایج حاصل از این تحلیل را با نتایج تئوری و آزمایشی دیگران مقایسه کرد. در حالت اتساع متقارن محوری به علت تقارن هندسه ورق می توان قطاعی از دایره را شبکه بندی کرد. در این تحلیل، شعاع این قطاع ۲۰/۳۲ میلیمتر (۰/۸ اینچ) فرض شده و شبکه بندی لازم بر روی آن صورت گرفته است (شکل ۳ - الف). تحلیل اتساع متقارن برای آلیاژ آلومینیم T۴ - ۲۰۳۶ با رابطه کارسختی  $\sigma = 593 \bar{\epsilon}^{0.222} \frac{MN}{m^2}$  و مقدار  $R = 0.685$  و ضخامت ۱/۲۷ میلیمتر انجام شده است. این شرایط توسط کیم [5] هم مورد آزمایش قرار گرفته و هم توسط روش اجزای محدود به صورت دو بعدی تحلیل شده است. برای بررسی اثر اصطکاک از دو ضریب اصطکاک کلمب  $\mu = 0$  و  $\mu = 0.2$  استفاده شده است. شکل (۳ - ب) نمای سه بعدی ورق را بعد از تغییر شکل در کورس سنبه برابر با ۱۲/۵ میلیمتر را نشان می دهد که توسط نرم افزار گرافیکی کپی آینه ای شده و در کل محیط ترسیم گردیده است. ملاحظه می شود که نمونه از هندسه نیم کره سنبه تبعیت کرده است. نتایج منحنیهای توزیع کرنش در جهت ضخامت برای کورسهای مختلف سنبه در شکل (۴ - الف) دیده می شود. همان طور که این منحنیها نشان می دهند در حالتی که فرایند اتساع در شرایط بدون اصطکاک انجام گیرد ماکزیمم کرنش ضخامتی در نوک سنبه اتفاق می افتد و در نزدیکی مرز درگیر ورق مقدار این کرنش به مراتب کمتر



شکل ۳- شبکه بندی مورد استفاده در اتساع متقارن محوری

الف - قبل از تغییر شکل (یک ششم شبکه)

ب- بعد از تغییر شکل توسط پیشروی سنبه با کورس ۱۲/۵ میلیمتری

(باقرینه آینه ای کل شکل)

شکل ۴- منحنیهای توزیع کرنش در جهت ضخامت برای کورسهای مختلف سنبه برحسب میلیمتر

الف - نتایج تئوری حاضر برای  $\mu = 0$  و  $\mu = 0.2$

ب - مقایسه نتایج تحلیل حاضر با نتایج تئوری و آزمایشی کیم [۵] برای  $\mu = 0.2$

می توان از اثر اصطکاک در کورسهای پایتتر صرف نظر کرد. همچنین اگر چه ماکزیمم کرنش ضخامتی برای کورسهای مساوی در حالت با اصطکاک کمتر از حالت بدون اصطکاک است ولی مقدار این کرنش در مرز درگیر مسئله برای حالت با اصطکاک بیشتر از مقدار آن در حالت بدون اصطکاک است. این نوع رفتار در مطالعات

از نوک سنبه است. هر چه عمق پیشروی سنبه بیشتر می شود اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم کرنش ضخامتی زیادتر می شود به طوری که آهنگ نزول منحنیها در کورسهای بیشتر سنبه از کورسهای کم آن بیشتر است.

در حالتی که فرایند اتساع با اصطکاک همراه باشد، اولاً ماکزیمم کرنش در جهت ضخامت برای کورسهای مساوی از سنبه در مقایسه با حالت بدون اصطکاک کمتر است و ثانیاً این ماکزیمم کرنش از نوک سنبه به سمت مرز درگیر جسم متمایل می شود. البته هر دو نتیجه فوق برای کورسهای بیشتر سنبه مشهودتر است به طوری که

و آزمایشات سایر محققین نیز مثل کیم [۵] مشاهده شده است و گویای صحت حل حاضر است. در شکل (۴ - ب) نتایج تحلیل حاضر با نتایج کیم [۵] برای حالت  $\mu = 0/2$  مقایسه شده است. باید دقت شود که براساس مطالعات سایر محققین در عمل ضریب اصطکاک ثابت نیست و با افزایش کورس سنبه، کاهش می‌یابد. بنابر این منطقی است که به تدریج اختلاف مشاهدات تجربی و نتایج تئوری افزایش یابد زیرا تحلیل با فرض اصطکاک ثابت انجام شده است. باید دقت کرد در مطالعات تئوری شعاع گوشه ماتریس در نظر گرفته نشده است. به علاوه کیم ذکر می‌کند که اندازه‌گیری کرنش با دقت خوب کار بسیار مشکلی است.

رفتار نیروی سنبه در مقابل کورس آن و اثر اصطکاک بر روی این نیرو در شکل (۵) نشان داده شده است. همان طوری که این منحنیها نشان می‌دهند نیروی سنبه با افزایش کورس آن افزایش می‌یابد. مقایسه منحنی نیرو بر حسب کورس با نتایج کیم نشان می‌دهد که نتایج حداکثر حدود ۷ درصد اختلاف دارد. همچنین برای کورسهای مساوی، نیروی سنبه در حالت با اصطکاک کمی بیشتر از حالت بدون اصطکاک است که این روند توسط کیم نیز مشاهده شده است [۵]. حال که نتایج تحلیل سه بعدی حاضر تطبیق خوب و رضایتبخشی با مشاهدات تجربی و همچنین پیش‌بینیهای تئوری که در حالت دو بعدی انجام شده‌اند دارد، می‌توان اتساع نامتقارن محوری را بررسی نمود.

در اتساع نامتقارن محوری از نوارهای فلزی با عرض  $50/8$  میلیمتر (۲ اینچ) و طول  $203/2$  میلیمتر (۸ اینچ) و ضخامت  $1/0$  میلیمتر استفاده گردیده است. شکل (۶ - الف) یک چهارم ورق به همراه المانها و شبکه‌بندی های مورد استفاده را نشان می‌دهد.

برای بررسی اثر مقدار R روی منحنیهای توزیع کرنش آلیاژ آلومینیم با رابطه کار سختی  $\frac{MN}{m^2} = 593E^{0/245}$  مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. شکل (۶ - ب) نمایش سه بعدی نوار ورق در انتهای فرایند در کورس سنبه برابر ۹۰ میلیمتر را نشان می‌دهد.

منحنیهای نشان داده شده در شکل (۷) توزیع کرنش را به ترتیب برای  $R = 1/5$  و  $R = 0/78$  نشان می‌دهند.

همان طور که این منحنیها نشان می‌دهند بیشترین کرنش

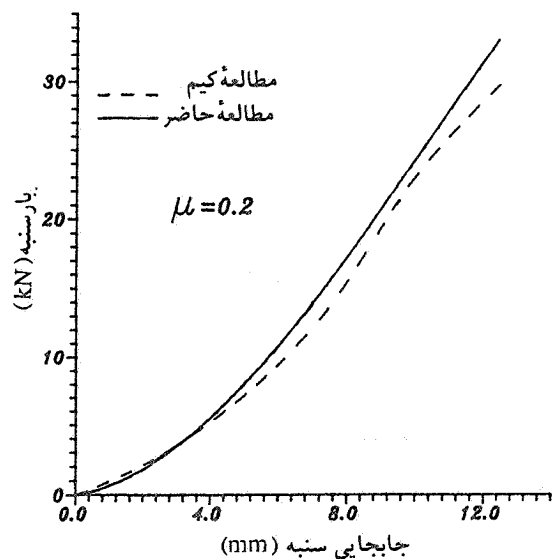
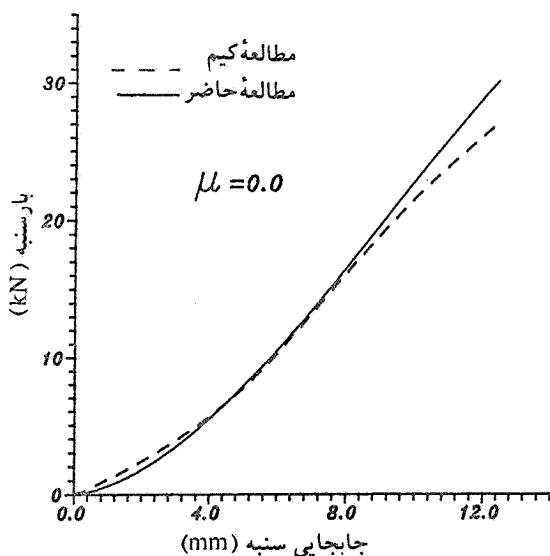
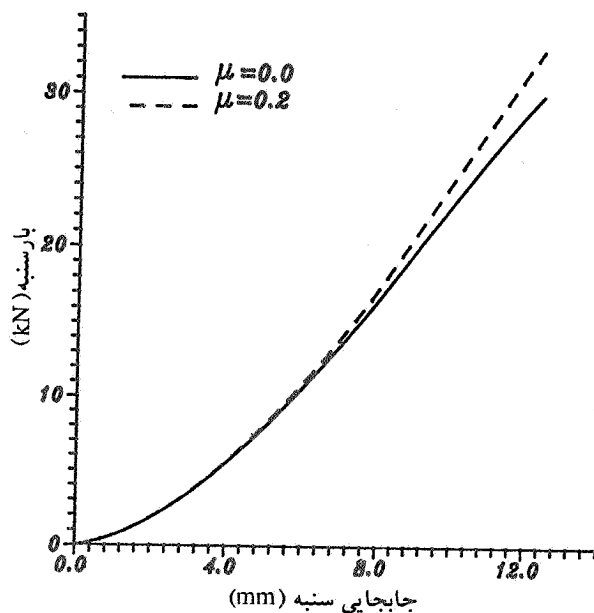
ضخامتی برای این ماده در ناحیه‌ای بین نوک سنبه و مرز درگیر ورق، (حوالی المان ۲۱ در شکل (۶ - الف)) است و با افزایش مقدار ناهمسانگردی در کورسهای مساوی از سنبه این ماکزیمم کاهش می‌یابد. این موضوع با توجه به تعریف مقدار R که نسبت کرنش لگاریتمی پهنا به کرنش لگاریتمی ضخامت است معقول به نظر می‌رسد. یعنی با افزایش مقدار R کرنش در جهت ضخامت کاهش می‌یابد. در شکل (۷ - الف) نتایج تحلیل حاضر با بررسی انجام شده توسط تو [۶] مقایسه شده است. تو بررسی خود را برای ماده فوق  $R = 0/78$  و کورس کمتری از سنبه انجام داده است. با وجود آنکه مقایسه در کورسهای مساوی قابل انجام نیست ولی به سادگی می‌توان به تشابه دو نوع تحلیل پی‌برد و از صحت آن مطمئن شد.

برای به دست آوردن مسیر کرنش المانهای بحرانی، منحنیهای توزیع کرنش حداقل و کرنش حداکثر در کورسهای مختلف سنبه در شکل (۸) برای دو مقدار R فوق الذکر رسم شده‌اند. با توجه به این منحنیها می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار R کرنشهای حداکثر کاهش و قدر مطلق کرنشهای حداقل افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر منحنیها در نمودار حد شکل پذیری به سمت چپ و پایین متمایل می‌گردد. بنابر این چنانچه منحنی حد شکل پذیری برای ماده مشخص باشد اولاً مشخص می‌شود که کدام المان به منحنی این نمودار می‌رسد ثانیاً چون منحنی شکل پذیری از چپ به راست نزولی است، در حالتی که ناهمسانگردی نرمال افزایش می‌یابد می‌توان سنبه را نسبت به حالت ناهمسانگردی کمتر بدون ایجاد پاره‌گی تا عمق بیشتری ادامه داد.

برای بررسی اثر اصطکاک نیز از آهن<sup>۸</sup> با رابطه کار سختی  $\frac{MN}{m^2}$  استفاده شده است. منحنیهای توزیع کرنش ضخامتی در طول نوار فلزی برای کورسهای مختلف از سنبه در حالت بدون اصطکاک ( $\mu = 0/0$ ) و حالت اصطکاک ( $\mu = 0/2$ ) در شکلهای (۹ - الف و ب) رسم شده است.

همان طور که از این منحنیها نتیجه می‌شود اولاً برای کورسهای مساوی از سنبه، اصطکاک باعث افزایش ماکزیمم کرنش ضخامتی می‌شود. ثانیاً ماکزیمم کرنش ضخامتی به سمت مرز درگیر مسئله متمایل می‌گردد. همچنین این کرنش در ناحیه مرکزی ورق (ناحیه‌ای

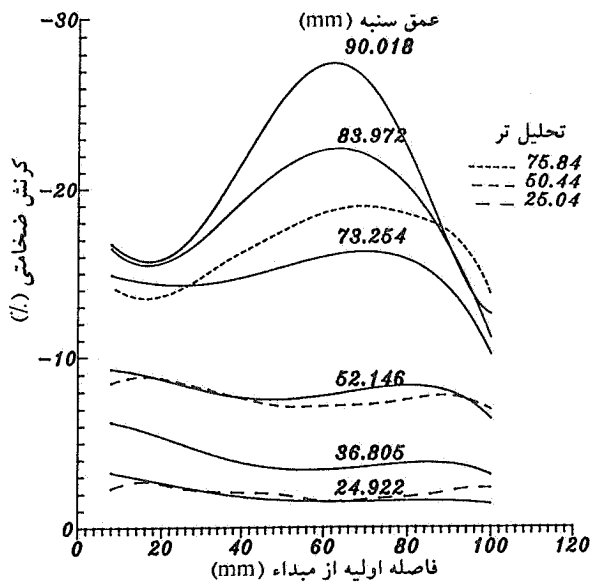




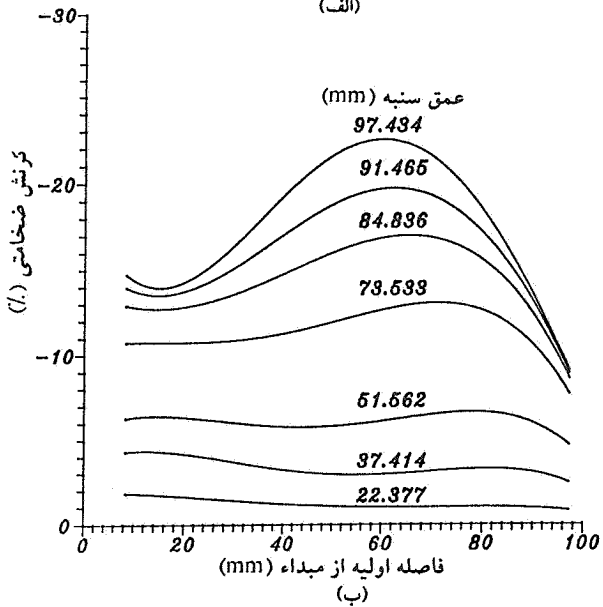
شکل ۵- منحنی تغییرات نیروی سنبه در مقابل کورس آن در شرایط مختلف اصطکاک و مقایسه با نتایج تئوری کیم [۵]

می شود. لازم به یادآوری است که المان بحرانی، المانی است که نمودار حد شکل دهی را قطع می کند. مجموعه منحنیهای شکلهای (۹) و (۱۰) نشان می دهند که به ازای اصطکاک  $\mu = 0$  تا  $\mu = 0.2$  ناحیه بحرانی به ناحیه درگیر ورق نزدیک و از ناحیه نوک سنبه دور است. این موضوع در شکل (۱۱) که محل پارگی یک نمونه را در عمل نشان می دهد تأیید می شود. ضریب اصطکاک در این نمونه

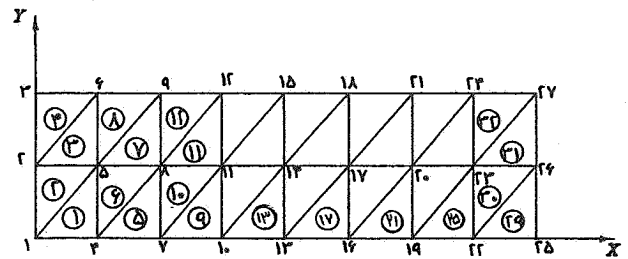
که نوک سنبه با ورق در تماس است) برای کورسهای مساوی سنبه به ویژه در کورسهای بالاتر نسبت به حالت بدون اصطکاک به طور قابل ملاحظه ای کمتر است. شکل (۱۰) منحنی مسیر کرنش المانهای بحرانی در کورسهای مختلف سنبه را برای دو اصطکاک  $\mu = 0$  و  $\mu = 0.2$  نشان می دهد. ملاحظه می شود که با افزایش اصطکاک، المان بحرانی و مستعد پارگی از ناحیه المان ۱۷ به المان ۲۱ منتقل



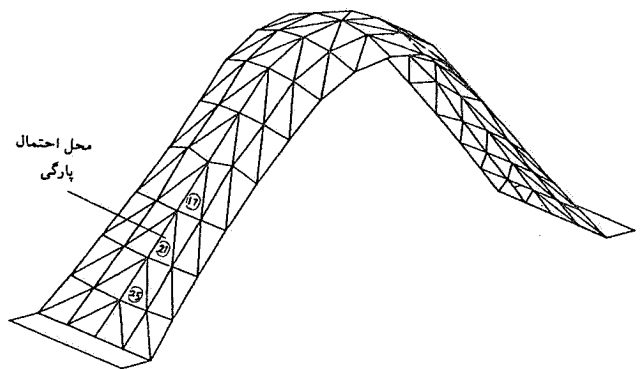
(الف)



(ب)



(الف)



(ب)

شکل ۶- شبکه بندی مورد استفاده در اتساع نامتقارن

الف - قبل از تغییر شکل (یک چهارم شبکه)

ب - بعد از تغییر شکل در ۹۰ میلیمتر پیشروی سنبه (باقرینه آینه‌ای کل شبکه)

که از ورق آهن ساخته شده و با گریس روغنکاری گردیده بین ۰/۰ تا ۰/۲ است.

شکل ۷- منحنیهای توزیع کرنش در جهت ضخامت در کورسهای مختلف

سنبه مربوط به اتساع آلومینیم T۴-۳۴۰ و شرایط بدون اصطکاک

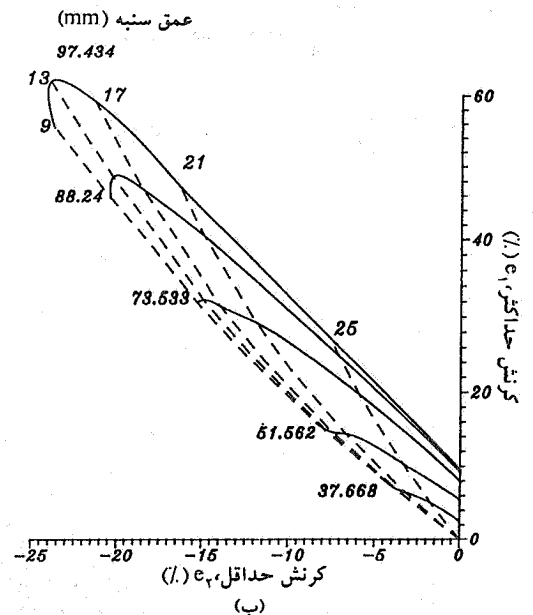
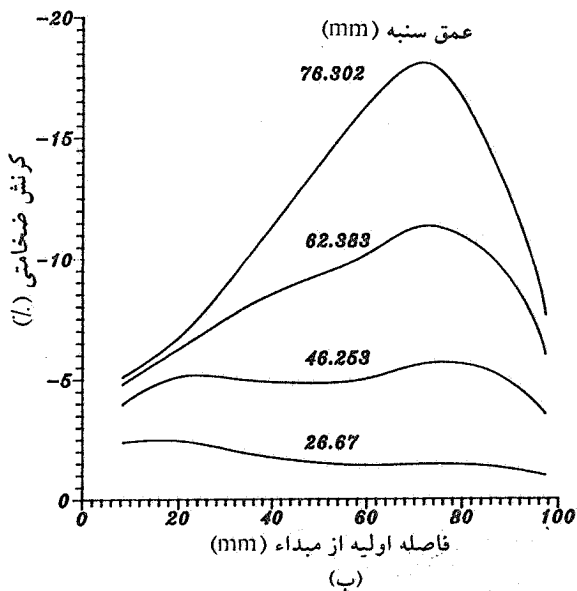
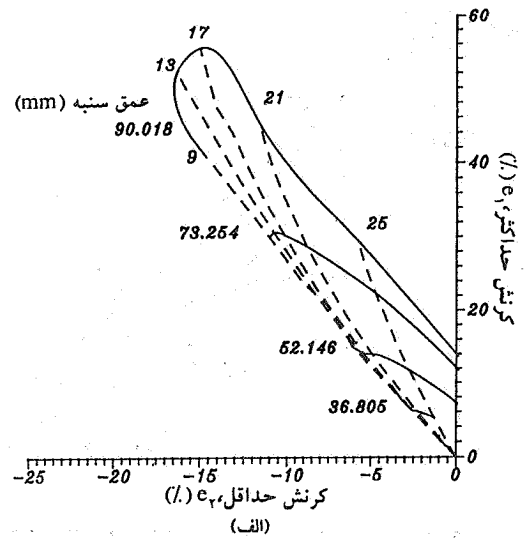
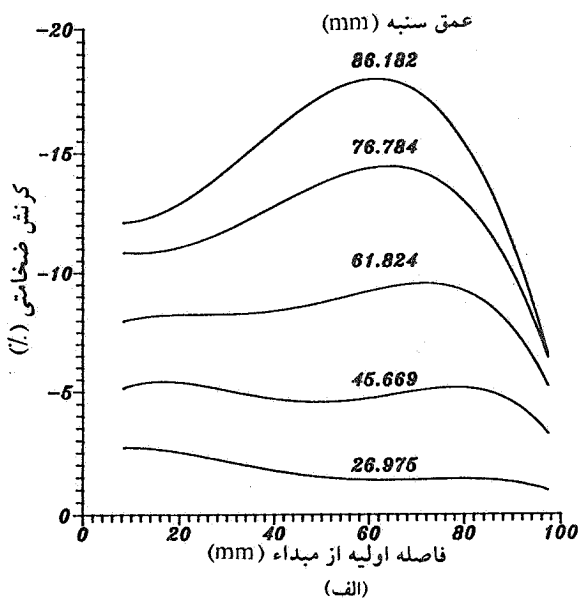
الف  $R = 0/78$  همراه با نتایج تئوری تو [۶]

ب  $R = 1/5$

روغنکاری گوناگون به صورت عددی به روش اجزای محدود حل شد. دو مسئله مورد بررسی، دو نوع آزمایش گیره مطرح در شکل دهی ورق فلز را تشابه سازی می نماید. در حالت نامتقارن محوری آزمایش اریکسون [۱] و در حالت نامتقارن محوری آزمایش ناکاجیما [۴] برای تعیین منحنی حد شکل دهی ورق فلز.

۶- نتیجه گیری

۱- در این بررسی فرایند اتساع ورقهای فلزی در دو حالت متقارن محوری و نامتقارن محوری مطالعه شد. در هر دو حالت از سنبه نیم کروی استفاده گردید و مسئله به صورت سه بعدی برای موارد مختلف با ضرایب ناهمسانگردی عمودی متفاوت و با احتساب شرایط

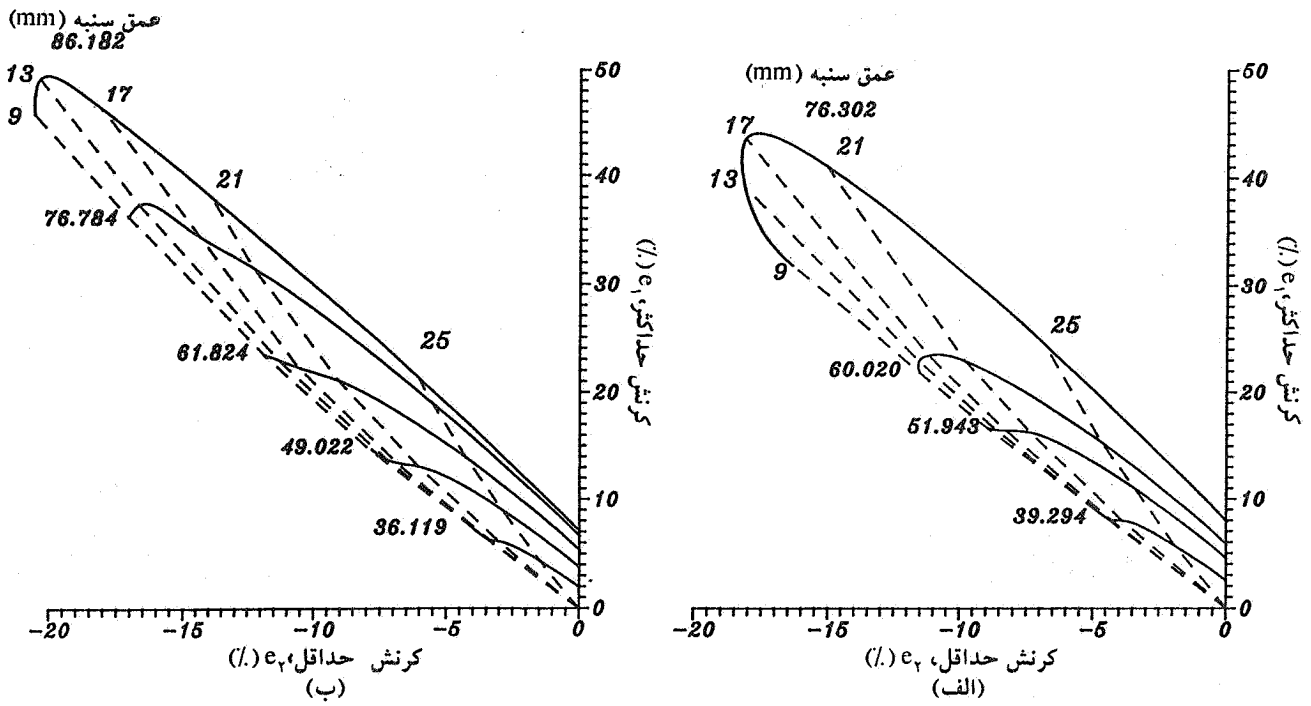


شکل ۹- منحنی‌های توزیع کرنش ضخامتی در اتساع نامتقارن ورق آهن برای اصطکاک‌های مختلف  
الف -  $\mu = 0$  - ب -  $\mu = 0.2$

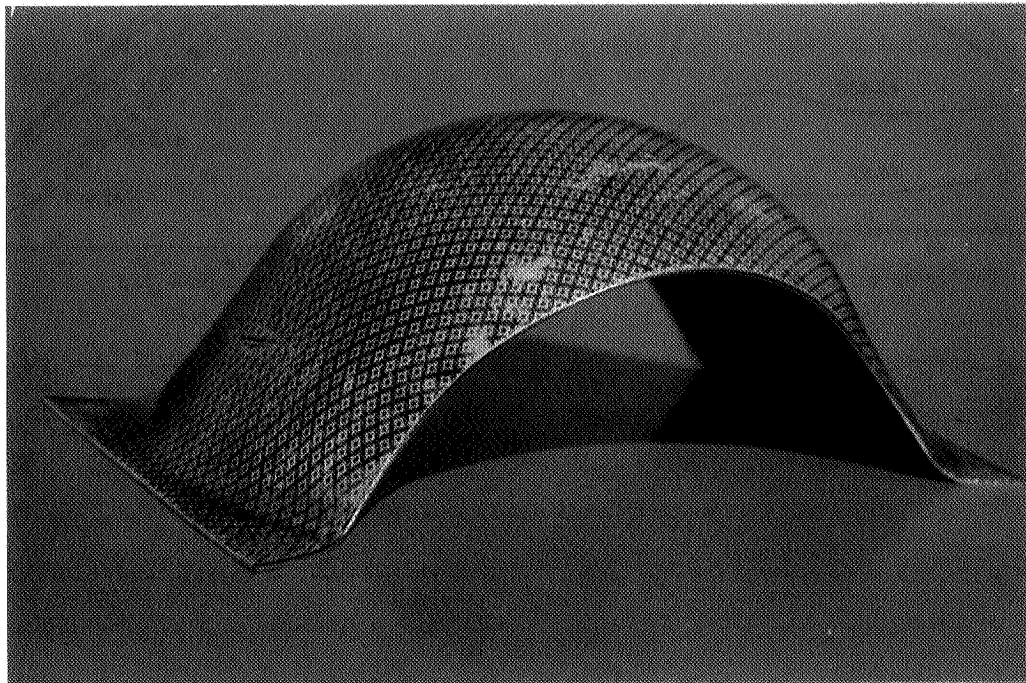
شکل ۸- منحنی‌های مسیر کرنش المانهای مختلف در کورسهای گوناگون سنبه در اتساع نوار آلومینیم  
الف -  $R = 0.78$  - ب -  $R = 1/5$

تمامی این نتایج، در مطالعات تئوری و تجربی سایر محققین در این زمینه گزارش و تأیید شده و گویای صحت حل حاضر است.  
۳- در تحلیل اتساع متقارن محوری مشاهده شده که نیروی سنبه با افزایش کورس افزایش می‌یابد و برای کورسهای مساوی نیروی سنبه در حالت با اصطکاک کمی بیشتر از حالت بدون اصطکاک است. منحنی نیروهای به دست آمده با نتایج تئوری کیم [۵]

۲- در تحلیل اتساع متقارن ورق فلز مشاهده شد که در شرایط بدون اصطکاک، ماکزیمم کرنش ضخامتی در نوک سنبه اتفاق می‌افتد و کمترین کرنش در مرز درگیر ورق ایجاد می‌شود. با افزایش اصطکاک ماکزیمم کرنش از نوک سنبه به سمت مرز درگیر جسم متمایل می‌شود. ضمناً ماکزیمم کرنش برای کورسهای مساوی از سنبه در مقایسه با حالت بدون اصطکاک کمتر است.



شکل ۱۰- منحنی مسیر کرنش المانها در کورسهای مختلف سنبه در فرایند اتساع نوار آهن و شرایط اصطکاکی گوناگون  
 الف -  $\mu = 0$  - ب -  $\mu = 0.2$



شکل ۱۱- محل پارگی در یک نمونه اتساع نوار ورق آهن

سازگار و نزدیک است. نمای سه بعدی ورق که با استفاده از تصاویر آینه‌ای برای کل محیط جسم ترسیم شده نشان می‌دهد که نقاط ورق به خوبی شرایط مرزی مسئله یعنی شکل کرووی سنبه و محیط درگیر ورق را ارضا می‌نمایند.

۴- در تحلیل اتساع نامتقارن محوری مشاهده شده که بیشترین کرنش ضخامتی در ناحیه‌ای دورتر از نوک سنبه و نزدیکتر به مرز درگیر ورق پیش می‌آید و با افزایش مقدار ناهمسانگردی در کورسهای مساوی سنبه این ماکزیمم کاهش می‌یابد. این نتیجه بدان معناست که با افزایش ناهمسانگردی عمودی می‌توان ورق را تا

عمق بیشتری تغییر شکل داد بدون آنکه پاره شود.

۵- در اتساع نامتقارن محوری با افزایش اصطکاک ماکزیمم کرنش ضخامتی زیاد شده و از نظر مکان به سمت مرز درگیر مسئله متمایل می‌گردد. همچنین این کرنش در ناحیه نوک سنبه برای یک کورس معین سنبه، نسبت به حالت بدون اصطکاک به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر است.

#### قدردانی

نویسندگان از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان به خاطر حمایت از انجام این بررسی تشکر می‌نمایند.

#### واژه نامه

1. Olsen
2. Erichson
3. Swift

4. Fukui
5. forming limit diagram
6. stretching tests

7. Hill , R.
8. killed steel

1. Fukui, S., Kudo, H., Yoshida, K., and Okawa, H., "A Method for Testing Deep-Drawability of Sheet Metals," Report of the Institute of Science and Technology, University of Tokyo, Vol. 6, p. 351, 1952.
  2. Keeler, S.P., and Backofen, W.A., "Plastic Instability and Fracture in Sheet Stretched Over Rigid Punches," *Trans. Am. Soc. Metals*, Vol. 56, pp. 25-48, 1963.
  3. Goodwin, G.M., "Application of Strain Analysis to Sheet Metal Forming Problems in Press Shop," *Trans. Society of Automotive Engineers*, Vol. 77, pp. 380-387, 1968.
  4. Nakajima, K., Kikuma, T., and Hasuka, K., "Study on Formability of Steel Sheets," Yawata Technical Report No. 264, pp. 141-154, 1968.
  5. Kim, J.H., Oh, S.I., and Kobayashi, S., "Analysis of Stretching of Sheet Metals with Hemispherical Punch," *Int. J. Mach. Tool Des.*, Vol. 18, pp. 209 - 226, 1978.
  6. Toh, C.H., and Kobayashi, S., "Process Modeling of Sheet Metal Forming of General Shapes by the F.E.M. Based on Large Strain Formulation," Ph. D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, 1983.
  7. Kobayashi, S., Oh, S.I., and Alten, T., "*Metal Forming and the F.E.M.*", Oxford university press inc., New York, 1989.
  8. Nakamachi, E., and Sowerby, R., "Finite Element Modeling of the Punch Stretching of Square Plates," *J. of Applied Mechanics*, Vol 55, pp. 667 - 671, Sept. 1988.
  9. Yang, D.Y., Chung, W.J., and Shim., H.B., "Rigid - Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes with Initial Guess Generation," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol 32, No. 8, pp. 687 - 708, 1990.
- ۱۰- شریعتی، م.، "تحلیل شکل دهی ورقهای فلزی به روش اجزای محدود"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، تابستان ۱۳۷۳.