

# ارائه یک الگوریتم جدید برای رله‌های دیجیتال دیستانس

فروزان قاسمی\* و رضا صفری\*\*

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده - رله‌های دیجیتال دیستانس بطور وسیعی در حفاظت خطوط انتقال انرژی استفاده می‌شوند. این رله‌ها با دریافت اطلاعات ولتاژ و جریان خط، به محاسبه امپدانس می‌پردازند. سیگنال‌های ولتاژ و جریان، دو مؤلفه پایدار و گذرا دارند که مؤلفه گذرای آن شامل امواج سیار و مؤلفه نمایی است. برای کاهش اثر مؤلفه‌های گذرا بر محاسبه امپدانس رله، الگوریتم تعقیب در این مقاله پیشنهاد شده است. الگوریتم تعقیب توسط حداقل کردن تابعی معیار مناسب حاصل می‌شود. سرعت تصمیم‌گیری رله با این الگوریتم افزایش می‌یابد، زیرا در این روش فیلتر مجزا برای پالایش امواج ولتاژ و جریان خط مورد نیاز نیست. به عبارتی دیگر این الگوریتم ضمن محاسبه امپدانس، مؤلفه‌های گذرا را کاهش می‌دهد و امپدانس را براساس مؤلفه پایدار امواج محاسبه می‌کند.

## A Novel Algorithm for Digital Distance Relaying

F.Ghassemi and R.Safari

Department of Electrical & Computer Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** Distance relays are used to protect EHV and HV Transmission lines. Over the past decades many algorithms have emerged for digital distance relays. These are based on the calculation of the transmission line impedance from the relaying to fault points. In this paper a novel method for digital distance relaying is proposed. In the method the tracking procedure is implemented. The method uses the calculus of variations for optimization of functionals. The method tracks the fundamental component of the waveforms and at the same time calculates the fault loop impedance. This eliminates the need for a pre-algorithm filtering which in turn improves the speed of the relay. Comparison with other algorithms has shown that the proposed method has a faster response and improved accuracy, in particular when a long line is considered.

۱ - مقدمه

چندین الگوریتم برای رله‌های دیجیتال دیستانس ارائه شده است. این رله‌ها با داشتن اطلاعات ولتاژ و جریان خط انتقال، امپدانس بین محل رله و خطا را محاسبه و براساس آن تصمیم‌گیری می‌کنند. در این مقاله یک الگوریتم جدید که بر مبنای اصول روش

دردده‌های اخیر با توجه به پیشرفت صنعت الکترونیک دیجیتال

\* استادیار

\*\* دانشجوی کارشناسی ارشد

استقلال، سال ۱۴، شماره ۲، اسفند ۱۳۷۴

فهرست علائم			
a, b	مؤلفه‌های ولتاژ مرجع	K	شماره نمونه
c, d	مؤلفه‌های جریان مرجع	$K_1, K_2$	اندازه مؤلفه‌های نمایی
h	فاصله زمانی بین دو نمونه متوالی	m	تعداد نمونه‌های تحت پردازش
$i(t), v(t)$	سیگنالهای جریان و ولتاژ	t	زمان متناظر نمونه k ام
z	نماد عدد مختلط	$\alpha(R/L)$	عکس ثابت زمانی Nc
	جریان خط		
	$\delta R$		تغییر تابع برداری مرجع
	$\Delta\omega$		مقدار تغییر فرکانس شبکه
	$\Phi$		فاز اولیه ولتاژ خط
	$\omega_0$		فرکانس پایه شبکه
	$\omega_{new}$		فرکانس جدید شبکه

آوردن الگوریتمی است که علاوه بر محاسبه امیدانس بتواند پالایش (فیلتر کردن) امواج را نیز انجام دهد و به فیلتر جداگانه نیاز نباشد. تحقق چنین هدفی می‌تواند زمان عمل رله را بهبود بخشد و سخت‌افزار رله را نیز ساده‌تر و حجم آن را نیز احتمالاً کمتر کند.

#### ۴ - مروری بر الگوریتمهای موجود

در این قسمت الگوریتمهای مهم موجود در زمینه رله دیجیتال دیستانس را مرور می‌کنیم. مهمترین روشهایی که تاکنون ارائه شده و بعضاً به صورت سخت‌افزار نیز ساخته شده‌اند عبارت‌اند از: روش رنجبر و کوری [۱] روش TSS [۲] و روش عمریوسف [۳]. روش رنجبر و کوری بر مبنای مدل خط انتقال استوار است. این روش دارای طول پنجره محاسباتی طولانی است که در نتیجه سرعت عمل رله را کاهش می‌دهد، اما از دقت خوبی در محاسبه برخوردار است. روش TSS نیز مانند روش قبل بر مدل خط پایه‌ریزی شده و معادله دیفرانسیل مدل خط را حل کند. این روش با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به محاسبه مقاومت و راکتانس خط می‌پردازد. اگر  $v_r(t)$  ولتاژ خط و  $i_r(t)$  جریان آن باشد، معادله (۱) به دست می‌آید.

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1)$$

مجهولات در معادله (۱) مقادیر R و L هستند. حل معادلات زیر با در نظر گرفتن تأخیر مناسبی روی سیگنالهای ولتاژ و جریان حاصل می‌شود.

$$v_1(t) = Ri_1(t) + L \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (2)$$

تعقیب استوار است ارائه شود. ویژگی خاص این الگوریتم نکاتی است که به دنبال می‌آید.

هرگاه خطایی در خطوط انتقال به وقوع بپیوندد، علاوه بر تغییرات پایدار در امواج سیستم قدرت، پدیده‌های گذرا نیز در امواج ایجاد می‌شوند. این پدیده‌ها را که به اصطلاح نویز تولید شده خطا می‌نامند خاصیتی گذرا دارند و بعد از مدت زمانی که بستگی به تلفات سیستم دارد از بین می‌روند. دو پدیده عمده گذرا، امواج سیار و مؤلفه‌نمایی هستند. امواج سیار در اثر تغییرات ناگهانی ولتاژ در نقطه اتصال کوتاه و سیر آن به دو طرف خط به وجود می‌آیند. در اثر ناهمگونی در محل منابع، حرکت امواج سیار تا زمان میرایی کامل ادامه می‌یابد. فرکانس این امواج به طول خط انتقال، محل خطا از منابع و امیدانس ترمینال خط بستگی دارد. مؤلفه‌نمایی جریان با توجه به خاصیت سلفی سیستم قدرت و لحظه وقوع خطا در موج ولتاژ، در سیگنال جریان و به دنبال آن در ولتاژ پدید می‌آید.

در ساختمان همه رله‌های دیجیتال که تاکنون پیشنهاد شده‌اند، استفاده از فیلتر برای پالایش امواج ولتاژ و جریان از وجود پدیده‌های امواج سیار و مؤلفه‌نمایی تأکید شده است. کار عمده این فیلترها حذف یا تضعیف نوسانهای متأثر از امواج سیار و مؤلفه‌نمایی است. بنابراین فیلتر مورد استفاده باید از نوع میان‌گذر و دارای یک صفر در مؤلفه DC باشد. صفر دیگر فیلتر باید بعد از فرکانس نامی سیستم و حتی الامکان نزدیک به آن قرار داشته باشد. این امر باعث کندشدن عمل رله می‌شود، زیرا با باریک نمودن پهنای باند گذر فیلتر، طول پاسخ ضربه آن افزایش می‌یابد. این امر محاسبه دقیق امیدانس حلقه خطا توسط الگوریتم رابه تأخیر می‌اندازد. بنابراین کاهش طول ضربه فیلتر و یا حذف آن می‌تواند سرعت عمل رله را بهبود بخشد.

همان گونه که پیشتر گفته شد، هدف از انجام این پروژه به دست

$$B = \tan^{-1}(v_{fs}/v_{fc}) - \tan^{-1}(i_{fs}/i_{fc}) \quad (11)$$

$$R = |Z| \cos \beta \quad (12)$$

$$X = |Z| \sin \beta \quad (13)$$

الگوریتم پیشنهادی که در این مقاله بررسی شود از نظر سرعت و دقت با هر دو روش TSS و عمر یوسف رقابت می‌کند. خصوصاً این روش در حفاظت خطوط بلند نیز مانند خطوط کوتاه و متوسط از خود سرعت عمل و دقت خوبی نشان می‌دهد. تفاوت عمده این روش با الگوریتمهای موجود در استفاده نکردن از فیلتر مجزا پیش از الگوریتم است.

#### ۳- مبنای تحلیلی الگوریتم پیشنهادی

ترانسفورمرهای ولتاژ و جریان امواج ولتاژ و جریان هر فاز را پس از تضعیف به وسیله مبدل آنالوگ به دیجیتال به سیگنالهای دیجیتال تبدیل می‌کند. سیگنالهای بالا برای محاسبه امپدانس به طبقه الگوریتم تحویل داده می‌شوند. الگوریتم تعقیب براساس دنبال کردن یک منحنی مرجع عمل می‌کند [۶ و ۵]. به عبارت دیگر الگوریتم سعی می‌کند که منحنی ولتاژ و جریان ورودی را با یک منحنی تعریف شده به عنوان منحنی مرجع دنبال کند. بردار سیگنالهای ورودی  $v(t)$  و  $i(t)$  به شکل معادله (۱۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$X(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

برای کاهش اولیه نوسانهای فرکانس بالا یک فرایند انتگرالی با پنجره کوتاه روی سیگنالها اعمال می‌شود. بنابراین معادله (۱۴) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$X(t) = \int_0^{T_w} [v(t) \quad i(t)]^T dt \quad (15)$$

که  $T_w$  طول پنجره انتگرال و  $T$  نشاندهنده ماتریس ترانسپوز است. برای پیاده‌سازی الگوریتم و با فرض هدف بودن مؤلفه اصلی

$$v_r(t) = Ri_r(t) + L \frac{d}{dt} i_r(t) \quad (3)$$

مقاومت و اندوکتانس خط از ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_r(t) & -\frac{d}{dt} i_v(t) \\ -i_r(t) & i_v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v(t) \\ v_r(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

وقتی که

$$D = i_v(t) \frac{d}{dt} i_r(t) - i_r(t) \frac{d}{dt} i_v(t) \quad (5)$$

این روش دارای سرعت و دقت خوبی در محاسبه امپدانس در خطوط کوتاه است، لیکن با افزایش طول خط، سرعت خود را به خاطر اغوجاهای شدید امپدانس از دست می‌دهد. علت این امر وابستگی شدید به کیفیت فیلتر دیجیتال است که قبل از الگوریتم محاسبه امپدانس روی امواج عمل می‌کند. در حفاظت خطوط بلند باید پهنای باند گذر فیلتر کمتر شود و این به معنی کاهش سرعت تصمیم‌گیری رله است. روش عمر یوسف از نظر محاسبه امپدانس بسیار خوب است لیکن سرعت آن بسیار کم است.

در این روش، از سیگنالهای ورودی ولتاژ و جریان سیگنالهای زیر ساخته می‌شوند و روی یک پنجره  $2T+1$  نمونه‌ای مورد پردازش قرار می‌گیرند و دو مؤلفه متعامد برای ولتاژ و جریان حاصل می‌شود.

$$v_{fs} = V_1 \sin(\omega t) \quad (6)$$

$$v_{fc} = V_1 \cos(\omega t) \quad (7)$$

$$i_{fs} = I_1 \sin(\omega t - \beta) \quad (8)$$

$$i_{fc} = I_1 \cos(\omega t - \beta) \quad (9)$$

$$|Z| = \frac{\text{SQRT}[v_{fs}^2 + v_{fc}^2]}{\text{SQRT}[i_{fs}^2 + i_{fc}^2]} \quad (10)$$

سیگنال، تابعی معیار به شکل معادله (۱۶) تعریف می شود.

$$r(t) = \begin{bmatrix} a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) + K_1 e^{-\alpha t} \\ c \sin(\omega_0 t) + d \cos(\omega_0 t) + K_2 e^{-\alpha t} \end{bmatrix} \quad (16)$$

جزء اول ماتریس (۱۶) مشخص کننده تابع معیار ولتاژ و جزء دوم معرف تابع معیار جریان است. گفتنی است که هنگام وقوع خطا مؤلفه‌نمایی در جریان و ولتاژ پدید می آید که برای شناسایی این مؤلفه توسط الگوریتم عبارت نمایی در بردار معیار گنجانده شده است. همان طوری که قبلاً بیان شد برای کاهش اولیه نوسانها از یک تبدیل انتگرالی روی سیگنالهای ورودی استفاده می شود که به دنبال آن باید تابعی معیار  $r(t)$  نیز تحت یک تبدیل انتگرالی قرار گیرد. بنابراین:

$$R(t) = a \begin{bmatrix} a \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) + b \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) + K_1 \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \\ c \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) + d \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) + K_2 \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

حداقل کردن انحراف وضعیت نهایی سیگنالها از یک سیگنال مرجع  $R(t)$  را می توان بدین صورت نشان داد [۵]:

$$E[R] = \sum_{i=1}^n [X_i(t) - R_i(t)]^2 \quad (18)$$

چون هر دو انحراف مثبت و منفی مناسب نیستند، تابع مجذور انتخاب شده است. تابع بالا را با استفاده از روابط ماتریسی می توان بدین صورت نوشت:

$$E[R] = \int_{t_0}^{t_1} [X(t) - R(t)]^T [X(t) - R(t)] dt \quad (19)$$

که شکل دیگر معادله (۱۹) به این صورت است:

$$E[R] = \int_{t_0}^{t_1} \|X(t) - R(t)\|_H^2 dt \quad (20)$$

معادله (۲۰) نرم یا اندازه بردار  $E[R]$  را نشان می دهد که بیان کننده میزان نزدیکی دو تابع است. باید دانست که تابع برداری

$R(t)$  متغیر مستقل تابعی معیار  $E[R]$  است. با در نظر گرفتن ماتریس ارزش گذاری<sup>۲</sup> معادلات (۱۹) و (۲۰) را می توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$E[R] = \int_{t_0}^{t_1} [X(t) - R(t)]^T H [X(t) - R(t)] dt \quad (21)$$

و یا

$$E[R] = \int_{t_0}^{t_1} \|X(t) - R(t)\|_H^2 dt \quad (22)$$

که ماتریس  $H$  اهمیت انحراف هر یک از متغیرهای وضعیت را از مقدار مطلوب آن تعیین می کند و یک ماتریس مربعی است که دارای دو قسمت برای ولتاژ و جریان است.

$$H = H_V + H_I \quad (23)$$

که

$$H_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$H_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

اگر در معادله (۲۱) به جای ماتریس  $H$  از معادله (۲۳) استفاده شود، معادله (۲۶) به دست می آید.

$$E[R] = E_V[R] + E_I[R] \quad (26)$$

که

$$E_V[R] = \int_{t_0}^{t_1} \|X(t) - R(t)\|_{H_V}^2 dt \quad (27)$$

$$E_I[R] = \int_{t_0}^{t_1} \|X(t) - R(t)\|_{H_I}^2 dt \quad (28)$$

به علت شکل خاص ماتریسهای  $E_V$  و  $E_I$  (معادلات (۲۴) و (۲۵)) دو تابعی  $E_V$  و  $E_I$  مستقل اند. بنابراین حداقل کردن  $E[R]$  مستلزم حداقل شدن  $E_V[R]$  و  $E_I[R]$  است. عملیات حداقل یابی برای  $E_V$  و  $E_I$  مشابه است. بنابراین در اینجا فقط به ذکر عملیات

$$\partial R = \left( \begin{array}{l} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial a + \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial b + \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_1 \\ \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial c + \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial d + \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_2 \end{array} \right) \quad (35)$$

با توجه به مستقل بودن  $\partial a$ ،  $\partial b$ ،  $\partial c$ ،  $\partial d$ ،  $\partial K_1$  و  $\partial K_2$  برای برقراری معادله (۳۴)، باید ضرایب این تغییرات برابر صفر قرار گیرد که در نتیجه ماتریس تعقیب  $A_{track}$  به صورت معادله (۳۶) تعیین می‌شود. روش به دست آوردن ماتریس  $A_{track}$  در ضمیمه (الف - ۱) آمده است.

$$A_{track} = [a_{ij}]_{3 \times 3} \quad (36)$$

$$a_{11} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right)^2 dt \quad (37)$$

$$a_{12} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) dt \quad (38)$$

$$a_{13} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) dt \quad (39)$$

$$a_{22} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right)^2 dt \quad (40)$$

$$a_{23} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) dt \quad (41)$$

$$a_{33} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)^2 dt \quad (42)$$

ماتریس  $A_{track}$  یک ماتریس متقارن است. بنابراین:

$$a_{21} = a_{12} \quad (43)$$

حداقل یابی  $E_V$  بسنده می‌شود. نمو<sup>۳</sup> تابعی  $E_V[R]$  تحت نمو متغیر مستقل  $\delta R$  بدین صورت دست می‌آید:

$$\Delta E_V = E_V [R + \delta R] - E_V [R] \quad (29)$$

با توجه به معادله (۲۷) می‌توان معادله (۲۹) را به این شکل نوشت:

$$\Delta E_V = \int_{t_0}^{t_1} [X(t) - R(t) - \delta R(t)]^T H_V [X(t) - R(t) - \delta R(t)] \quad (30)$$

اگر در معادله (۳۰) از عبارتهای درجه ۲ به علت کوچکی  $\delta R$  صرف نظر شود، تغییر اول تابعی به صورت معادله (۳۱) حاصل می‌شود:

$$\partial E_V = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ [-\delta R(t)]^T H_V [X(t) - R(t)] + [X(t) - R(t)]^T H_V [-\delta R(t)] \right\} dt \quad (31)$$

رابطه  $[X(t) - R(t)]^T H_V [-\delta R]$  یک ماتریس  $1 \times 1$  است بنابراین:

$$[X(t) - R(t)]^T H_V [-\delta R] = [-\delta R]^T H_V [X(t) - R(t)] \quad (32)$$

با توجه به معادلات (۳۱) و (۳۲)، معادله (۳۳) حاصل می‌شود.

$$\partial E_V = \int_{t_0}^{t_1} (-2) [\delta R]^T H_V [X(t) - R(t)] dt \quad (33)$$

برای حداقل شدن تابعی، معادله (۳۴) باید برقرار باشد.

$$\partial E_V = 0 \quad (34)$$

$\delta R$  در معادله (۳۳) بدین صورت بیان می‌شود:

(الف - ۳) بررسی شده است. برای محاسبه امیدانس از فازورهای  $V$  و  $I$  استفاده می‌شود. بنابراین:

$$V = a + jb \quad (۵۳ - الف)$$

$$I = c + jd \quad (۵۳ - ب)$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ X_1 = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases} \quad (۵۴)$$

که  $R_1$  و  $X_1$  به ترتیب مقاومت و راکتانس توالی مثبت خط هستند. قابل ذکر است که مقاومت نقطه خطا (مقاومت قوس الکتریکی) نیز توسط الگوریتم بصورت جزئی از مقاومت اندازه‌گیری شده محاسبه می‌شود.

#### ۴ - کنترل‌کننده فرکانس ماتریس مرجع

وابستگی ماتریس  $A_{track}$  به فرکانس  $\omega$  باعث می‌شود که تغییرات فرکانس روی امیدانس محاسبه شده اثر شدیدی بگذارد. برای رفع این نقیصه یک کنترل‌کننده وفقی فرکانس برای تصحیح فرکانس ماتریس  $A_{track}$  و بردار  $Z_{track}(t)$  طراحی شده است. لازم به یادآوری است که طبق استاندارد، فرکانس شبکه می‌تواند به اندازه  $\pm 2\text{Hz}$  تغییر کند. کنترلر با محاسبه دقیق فرکانس شبکه، فرکانس  $\omega$  ماتریس  $A_{track}$  و بردار  $Z_{track}(t)$  را برابر فرکانس شبکه قرار می‌دهد. باید دانست که تغییرات فرکانس در اثر تغییرات بار شبکه‌های بزرگ پدید می‌آید و وقوع خطا بر آن تأثیر شدیدی ندارد. بنابراین اگر فرکانس ماتریس مرجع قبل از وقوع خطا (در زمان کار عادی سیستم) تصحیح شود، محاسبه امیدانس خطا دارای حداکثر دقت خواهد بود. برای محاسبه تغییرات فرکانس  $\Delta\omega$  معادلات (۵۵) تشکیل می‌شوند:

$$V_m \sin \psi = v(1)$$

$$\begin{cases} V_m \sin(\frac{\pi}{4} + \psi + 0.005 \Delta\omega) = v(21) \\ V_m \sin(\pi + \psi + 0.01 \Delta\omega) = v(41) \end{cases} \quad (۵۵)$$

$$a_{31} = a_{13} \quad (۴۴)$$

$$a_{32} = a_{23} \quad (۴۵)$$

بردار تبدیل تعقیب نیز بدین صورت تعیین می‌شود:

$$Z_{track}^T(t) = \left[ \left[ \frac{1 - \cos \omega_c t}{\omega_c} \right] \left[ \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} \right] \left[ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right] \right] \quad (۴۶)$$

بنابراین بردار  $X(t)$  تحت تبدیل  $Z_{track}(t)$  به معادلات زیر تبدیل می‌شود:

$$Y_V = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^t Z_{track}(t) v(\tau) d\tau dt \quad (۴۷)$$

$$Y_I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^t Z_{track}(t) i(\tau) d\tau dt \quad (۴۸)$$

حال دستگاه معادلات (۴۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} A_{track} K_V = Y_V \\ A_{track} K_I = Y_I \end{cases} \quad (۴۹)$$

چگونگی به دست آمدن معادله (۴۹) در ضمیمه (الف - ۱) بیان شده است. در معادله (۴۹) بردارهای  $K_V$  و  $K_I$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

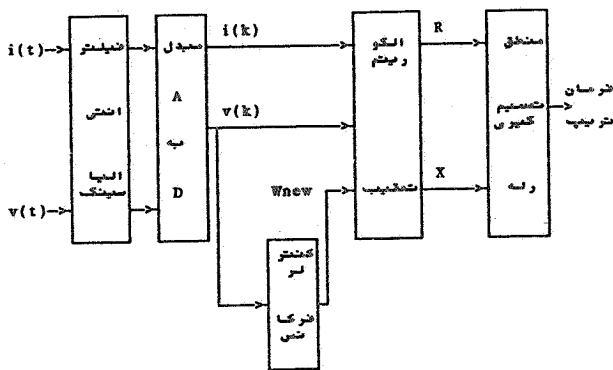
$$K_V^T = [a \quad b \quad K_1] \quad (۵۰)$$

$$K_I^T = [c \quad d \quad K_2] \quad (۵۱)$$

بنابراین دستگاه معادلات (۴۹) بدین صورت حل می‌شود:

$$\begin{cases} K_V = A_{track}^{-1} Y_V \\ K_I = A_{track}^{-1} Y_I \end{cases} \quad (۵۲)$$

اثبات حداقل شدن تابعی (۲۲) در ضمیمه (الف - ۲) بیان شده است. همچنین معکوس پذیری ماتریس  $A_{track}$  در ضمیمه



شکل ۱- بلوک دیاگرام الگوریتم پیشنهادی

همان‌طور که در شکلها دیده می‌شود، امیدانس محاسبه شده در روش تعقیب هم سریعتر محاسبه شده و هم دارای اعوجاج کمتری است. شکل (۴) امیدانس محاسبه شده برای همان خطای قبل و استفاده از روش عمر یوسف را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود الگوریتم عمر یوسف بسیار کند عمل می‌کند. افزون بر آن اعوجاج بیشتری نیز نسبت به روش تعقیب دارد. در شکل‌های (۵) و (۶) یک خطای تکفاز به زمین در  $170 \text{ km}$  نقطه رله برای روش تعقیب و TSS در نظر گرفته شده است. همان‌طوری که مشاهده می‌شود روش TSS امیدانس را با اعوجاج شدیدی محاسبه می‌کند و این دور از انتظار نیست. زیرا با افزایش طول محل خطا تا نقطه رله، فرکانس امواج سیار کاهش می‌یابد و به راحتی از طبقه فیلتر دیجیتال رله عبور می‌کند. همان‌طور که در شکل می‌بینید باز هم روش تعقیب دارای پاسخ سریعتر و با اعوجاج کمتری نسبت به روش TSS است و این نشان‌دهنده کارایی این روش در حفاظت خطوط بلند است. در شکل (۷) نتایج فوق با استفاده از روش عمر یوسف ارائه شده‌اند. همان‌طوری که از این شکل‌ها مشخص است، روش تعقیب باز هم از نظر سرعت و اعوجاج کم، نسبت به روش عمر یوسف برتر است. در شکل (۸) اثر تغییر فرکانس شبکه بر امیدانس محاسبه شده توسط روش تعقیب مشخص شده و در شکل (۹) عملکرد کنترلر فرکانس برای تصحیح فرکانس ماتریس تعقیب و بردار تعقیب و در نتیجه اصلاح امیدانس محاسبه شده نمایش داده شده است. فرکانس سیگنال ورودی به رله  $48 \text{ Hz}$  در نظر گرفته شده است. زاویه وقوع خطا صفر درجه فرض شده است. شکل (۱۰) عملکرد الگوریتم و کنترلر فرکانس برای خطای فوق اما زاویه وقوع خطای  $90^\circ$  درجه را نشان می‌دهد.

در دستگاه معادلات (۵۵) فرکانس نمونه برداری برابر  $4 \text{ kHz}$  است. به وسیله خطی سازی معادلات فوق نسبت به  $\Delta\omega$  و حل معادله نسبت به  $\Delta\omega$  معادلات (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) حاصل می‌شود.

$$\Delta = 10^{-4}v^2(21) - 2 \times 10^{-4}(v(1) + v(41)) \quad (56)$$

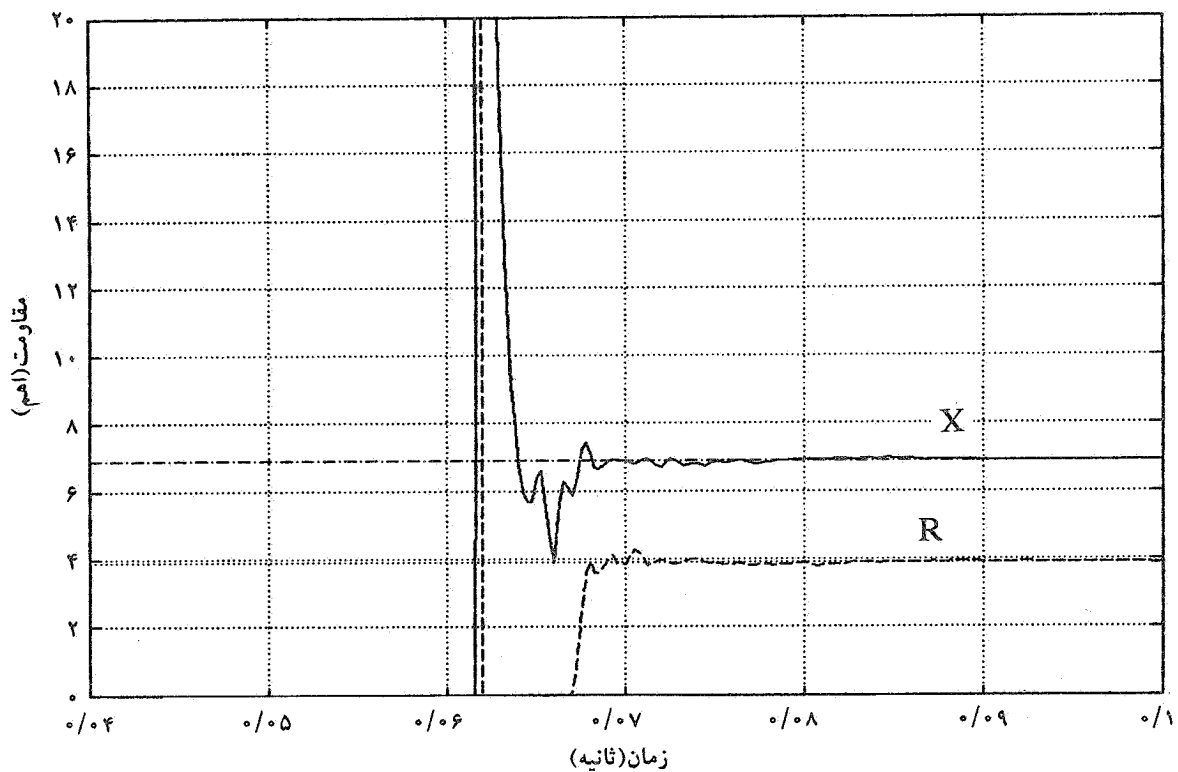
$$\Delta\omega = [-0.04 * v(21) \pm \sqrt{\Delta}] / (10^{-4}) \quad (57)$$

$$\omega_{new} = \omega_0 + \Delta\omega = 314 + \Delta\omega \quad (58)$$

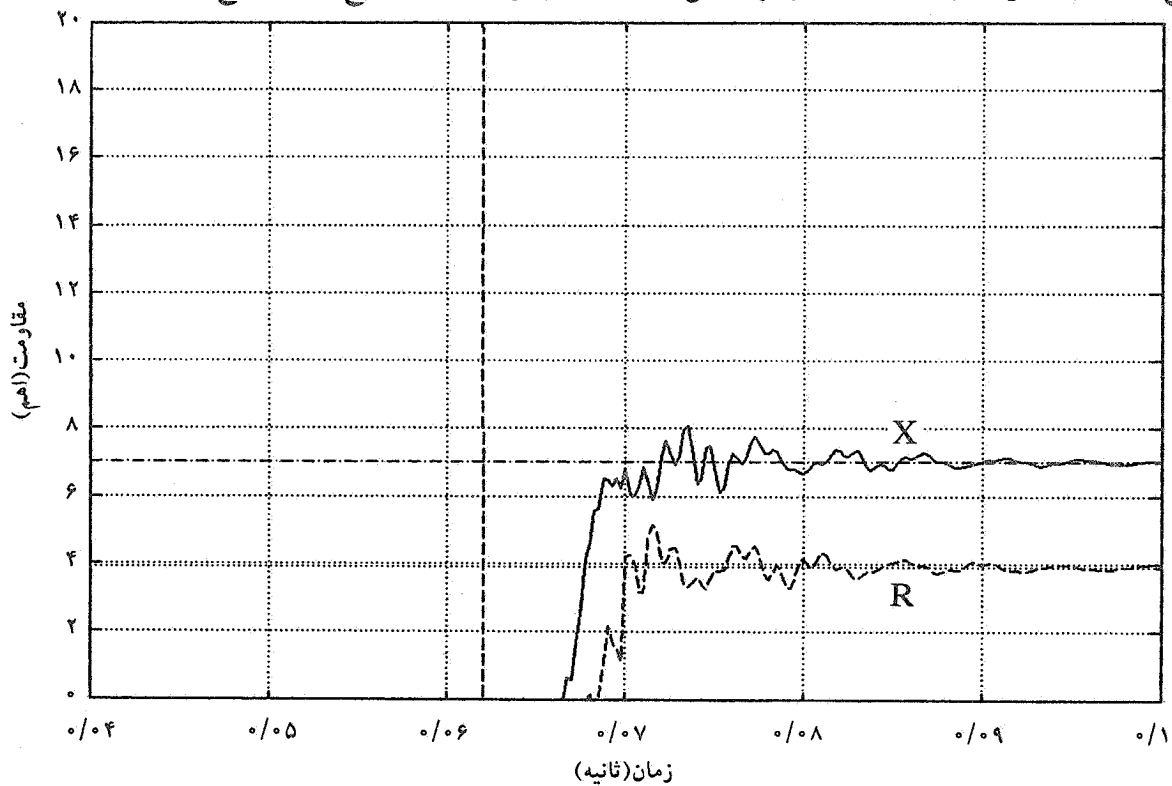
برای  $\Delta\omega$  دو مقدار به دست می‌آید که یکی مانند تغییر فرکانس شبکه و دیگری مانند یک تغییر فرکانس بزرگتر از  $2 \text{ Hz}$  است که قابل قبول نیست. اگر فرکانس شبکه همان مقدار  $\omega$  باشد،  $\Delta\omega$  محاسبه شده برابر صفر خواهد بود. برای اینکه امواج سیار روی کنترلر اثر نکنند، شرطی برای تغییر فرکانس قرار داده شده که اگر  $\Delta\omega$  محاسبه شده به ازای چندین نمونه ورودی مختلف یکسان بود فرکانس تغییر کند و اگر  $\Delta\omega$  به ازای هر ورودی مقداری را داشت که با مقادیر دیگر یکسان نبود  $\Delta\omega$  تغییر نکند. این دستگاه معادله سه مجهولی برای هر نمونه ورودی تشکیل و حل می‌شود. به این ترتیب که با ورود هر نمونه به خانه  $41$  ام حافظه، مقادیر حافظه یک‌خانه به عقب کشیده می‌شوند و نمونه  $k+1$  ام در خانه  $k$  ام می‌رود. بنابراین خانه اول حافظه نمونه  $v(2)$  را خواهد داشت. این حافظه  $40$  خانه برای کنترلر فرکانس دارد. شکل (۱) ساختمان کلی رله دیستانتسی را نشان می‌دهد که در آن الگوریتم تعقیب به کار رفته است.

##### ۵- بررسی نتایج شبیه سازی الگوریتم تعقیب

با استفاده از نرم افزار EMTP، [۴]، یک خط  $200 \text{ km}$  سه فاز با اثر متقابل بین فازها و خازن شنت را شبیه سازی شد. با در نظر گرفتن خطاهای مختلف در طول خط، مقادیر گذرا و دائمی امواج ولتاژ و جریان برای ورودی رله شبیه سازی می‌شود. شکل‌های (۲) و (۳) به ترتیب مقاومت و راکتانس محاسبه شده الگوریتم تعقیب و TSS را برای یک خطای فاز به زمین در  $100 \text{ km}$  از نقطه رله نشان می‌دهند.

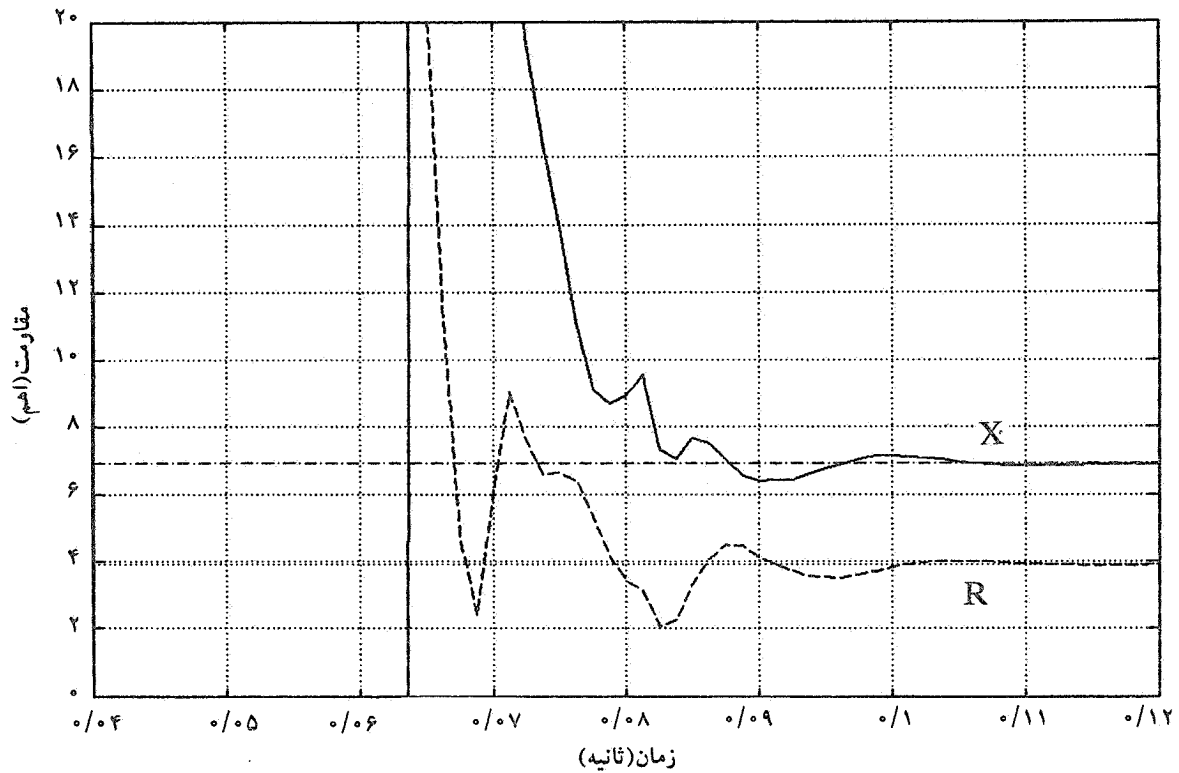


شکل ۲ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم تعقیب نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۰۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه

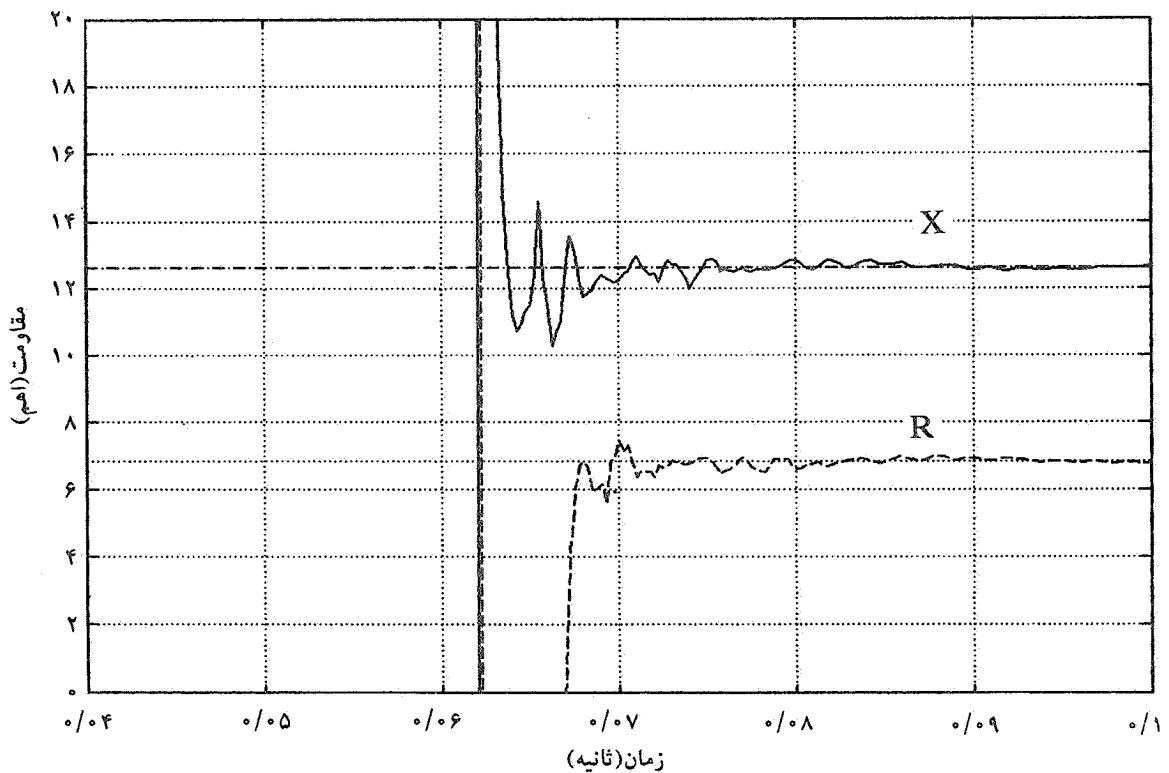


شکل ۳ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم TSS نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۰۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه

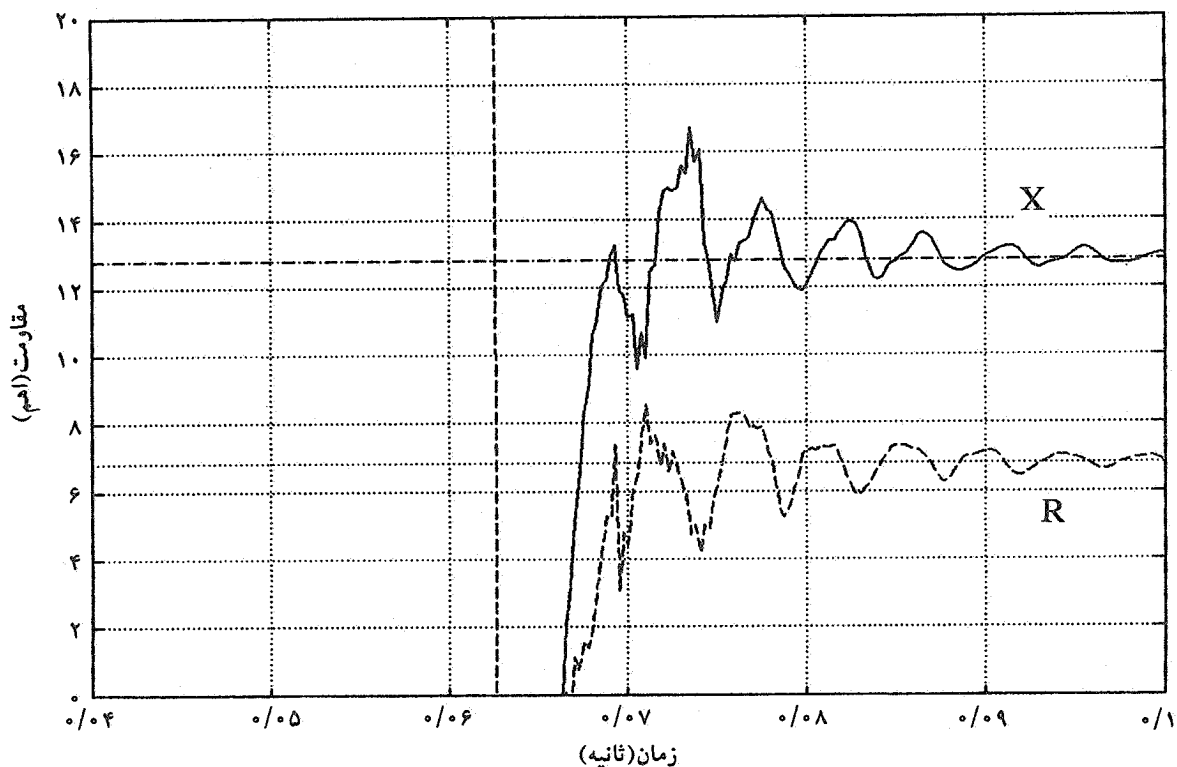




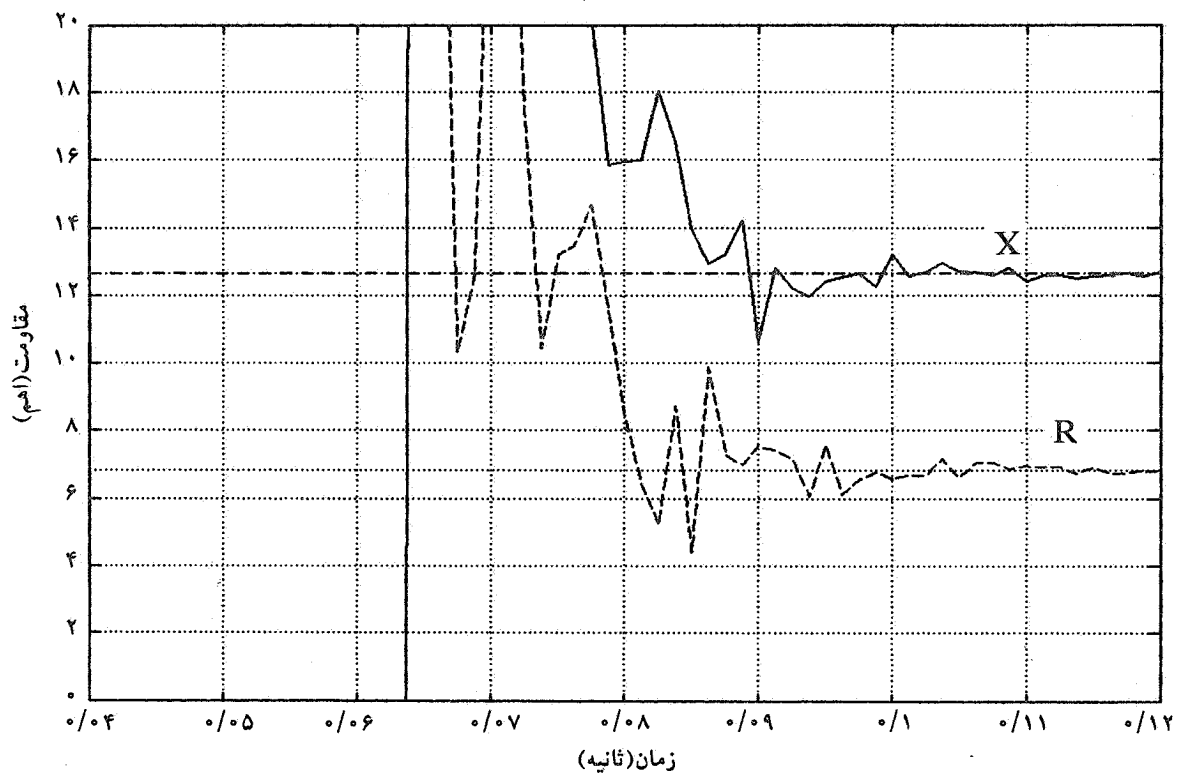
شکل ۴ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم عمریوسف  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۰۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه



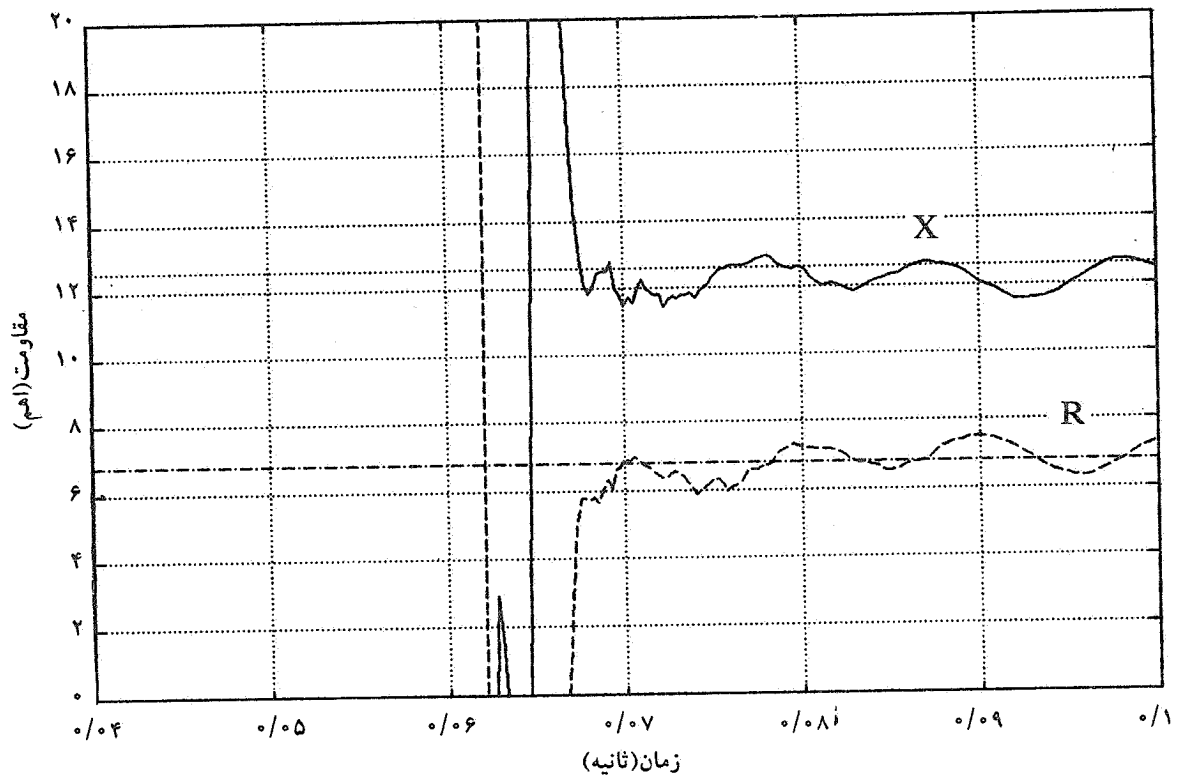
شکل ۵ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم تعقیب  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه



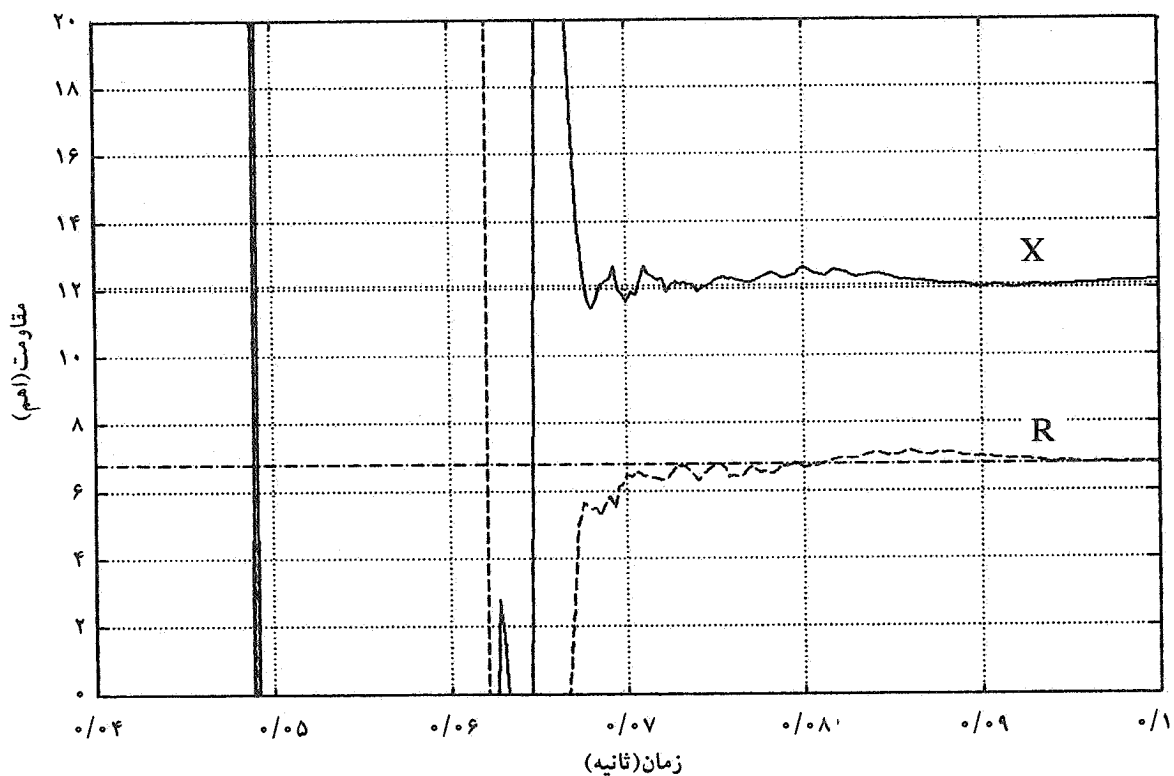
شکل ۶ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم TSS  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه



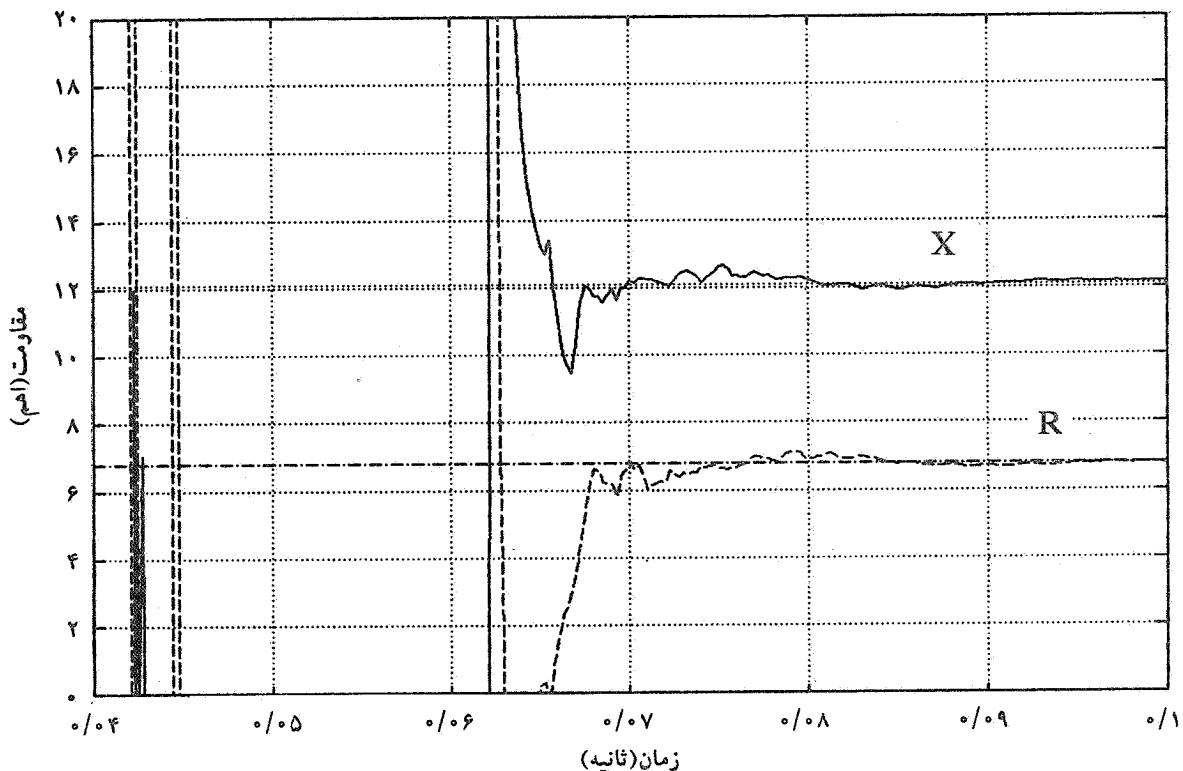
شکل ۷ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم عمریوسف  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه



شکل ۸ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم تعقیب بدون کنترلر فرکانس  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خط روی موج ولتاژ فاز a: صفر درجه



شکل ۹ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم تعقیب با کنترلر فرکانس  
 نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خط روی موج ولتاژ فاز a: صفر درجه



شکل ۱۰ - راکتانس و مقاومت اندازه گیری شده با استفاده از الگوریتم تعقیب با کنترلر فرکانس نوع خط: فاز a به زمین طول خط: ۲۰۰ کیلومتر محل خط: ۱۷۰ کیلومتر از رله زاویه وقوع خطاری موج ولتاژ فاز a: ۹۰ درجه

#### ۶ - نتیجه گیری

#### واژه نامه

الگوریتم تعقیب برای محاسبه امپدانس خطوط بلند با دقت و سرعت بالا می تواند به کار رود. وابسته نبودن این روش به فیلتر دیجیتال باعث شده که در حفاظت خطوط بسیار بلند تنها روش سریع و دقیق باشد. الگوریتم ذکر شده با به کارگیری کنترلر فرکانس در مواقع تغییر فرکانس شبکه، امپدانس را از حالت نوسانی درمی آورد و عملکرد الگوریتم را بهبود می بخشد. این روش در مقابله با امواج سیار در محاسبه امپدانس بسیار خوب عمل می کند.

#### قدردانی

نویسندگان این مقاله مراتب تشکر و امتنان خود را از جناب آقای دکتر طحانی برای ارائه نظرات بسیار سودمند در انجام پروژه و تدوین پایان نامه کارشناسی ارشد ابراز می دارند. همچنین از مسئولان دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان به دلیل در اختیار گذاشتن امکانات قدردانی می شود.

#### مراجع:

- 1- Time Spaced Solution
  - 2- weighting matrix
  - 3- increment
1. Ranjbar, A. M., and Cory, B. J., "An Improved Method for the Digital Protection of High Voltage Transmission Lines," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. ... PAS-94, No. 2, pp. 544-543, 1975
  2. Ghassemi, F., "Adaptive Digital Distance Protection for Series Compensated Transmission Lines," Ph.D. Thesis, UK, 1989.
  3. Youssef, Omar, A. S., "A Fundamental

Digital Approach to Impedance Relays, "IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 7, No. 4, pp. 1861-1870, 1992.

4. Dommel, H. W., " Digital Computer Simulation of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks, "IEEE Transaction, PAS-88,

Vol. 4, pp. 388-399, 1969.

5. Gelfand, I. M., and Fomin, S. V. "Calculus of Variation, "Translated by Silverman, R.A., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1963.

۶. ٹی کرک، د. (ترجمہ دکتور نیکروش)، مقدمہ ای بر تئوری کنترل بہینہ، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

۹ - ضمیمہ

۱.۹ - (الف - ۱)

در متن نشان داده شد کہ:

$$\partial E_V = \int_{t_0}^{t_1} (-\gamma) (\partial R)^T H_V (X-R) dt \quad (1)$$

برای اکستریم شدن تابعی  $E_V[R]$  بایستی شرط زیر برقرار شود.

$$\partial E_V = 0 \quad (2)$$

و  $\delta R$  و  $X-R$  بدین صورت تعریف می شوند.

$$\partial R = \begin{pmatrix} \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) \partial a + \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \partial b + \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_1 \\ \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) \partial c + \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \partial d + \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$X-R = \begin{pmatrix} \int_0^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) - b \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \\ \int_0^t i d\tau - c \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) - d \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - K_2 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \end{pmatrix} \quad (4)$$

از طرفی  $H_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  است بنابراین:

$$\partial E_V = \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) \left[ \int_0^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) - b \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt \right] \partial a \\ + \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \left[ \int_0^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos \omega_s t}{\omega_s} \right) - b \left( \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt \right] \partial b$$

$$+ \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \left[ \int_{t_0}^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) - b \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt \right] \partial K_1 \quad (5)$$

با فرض مستقل بودن  $\delta a$  و  $\delta b$  و  $\delta k_1$  برای برقراری رابطه (۲) باید ضرایب  $\delta a$  و  $\delta b$  و  $\delta k_1$  به طور متحد برابر صفر قرار گیرند. از این رو:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left[ \int_{t_0}^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) - b \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt = 0 \quad (6)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left[ \int_{t_0}^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) - b \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt = 0 \quad (7)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \left[ \int_{t_0}^t v d\tau - a \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) - b \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) - K_1 \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right] dt = 0 \quad (8)$$

معادلات (۶) و (۷) و (۸) سه معادله تشکیل می دهند که می توانند سه مجهول  $a$  و  $b$  و  $k_1$  را مشخص کنند.

$$a \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right)^2 dt \right] + b \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) dt \right] + K_1 \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) dt \right] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) v(\tau) d\tau dt \quad (9)$$

به همین ترتیب دو معادله دیگر حاصل می شود و نتیجه به همان صورتی که در متن گفته شد از ماتریس  $A_{track}$  و بردار تبدیل  $Z_{track}(t)$  به دست می آید.

## ۲.۹ - ضمیمه (الف - ۲)

اثبات حداقل بودن جوابهای روش تعقیب برای تابعی

برای اثبات حداقل بودن جواب  $\delta E_V = 0$  بدین صورت عمل می شود.

$$E_V = \sum_{i=1}^{mh} (X-R)^T H_V (X-R) \quad (1)$$

$$\delta E_V = \sum_{i=1}^{mh} (-\gamma) (\partial R)^T H_V (X-R) \quad (2)$$

$$\Delta^{\gamma} E_V = \partial E_V (R + \partial R) - \partial E_V (R) \quad (3)$$

قسمت خطی  $\Delta^{\gamma} E_V$  برابر است با:

$$\partial^{\gamma} E_V = \sum_{t=1}^{mh} \gamma (\partial R)^T H_V (\partial R) \quad (4)$$

حال اگر مقدار  $H_V$  و  $\partial R$  در نظر گرفته شود، می توان نوشت:

$$H_V = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\partial R = \begin{pmatrix} \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial a + \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial b + \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_1 \\ \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial c + \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) \partial d + \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \partial K_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\partial^{\gamma} E_V = \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right)^{\gamma} (\partial a)^{\gamma} + \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right)^{\gamma} (\partial b)^{\gamma} + \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)^{\gamma} (\partial K_1)^{\gamma} \quad (7)$$

چون  $\partial^{\gamma} E_V > 0$  است، جواب معادله  $\partial E_V = 0$  حداقل کننده تابعی  $E_V[R]$  است. به همین ترتیب ثابت می شود که:

$$\partial^{\gamma} E_I = \left( \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right)^{\gamma} (\partial c)^{\gamma} + \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right)^{\gamma} (\partial d)^{\gamma} + \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)^{\gamma} (\partial K_2)^{\gamma} \quad (8)$$

همچنین نتیجه می شود که  $\partial^{\gamma} E_I > 0$  است، از طرفی

$$E[R] = E_V[R] + E_I[R] \quad (9)$$

بنابراین:

$$\partial E = \partial E_V + \partial E_I \quad (10)$$

$$\partial^{\gamma} E = \partial^{\gamma} E_V + \partial^{\gamma} E_I \quad (11)$$

که چون هر دوی  $\partial^{\gamma} E_V$  و  $\partial^{\gamma} E_I$  مثبت هستند،  $\partial^{\gamma} E$  نیز مثبت می شود. بنابراین  $K_V$  و  $K_I$  که بصورت زیر تعریف می شوند مینیمم کننده

$E[R]$  هستند.

$$\begin{cases} K_V = A_{\text{track}}^{-1} Y_V \\ K_I = A_{\text{track}}^{-1} Y_I \end{cases} \quad (12)$$

۳.۹- ضمیمه (الف - ۳)

اثبات معکوس پذیری ماتریس  $A_{\text{track}}$  در روش تعقیب

برای اثبات معکوس پذیری ماتریس  $A_{\text{track}}$  می توان از برهان خلف استفاده کرد. فرض کنید ماتریس  $A_{\text{track}}$  معکوس پذیر نباشد. بنابراین اگر ستونهای  $A_{\text{track}}$  به صورت  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  تعریف شوند، رابطه بین این ستونها بدین صورت است.

$$A_{\text{track}} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \quad (1)$$

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  اعداد حقیقی اند که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است.

$$a_1 = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right]^2 \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right] \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right] \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right] \left[ \frac{1 - e^{-at}}{a} \right] \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right] \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right] \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right]^2 \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - e^{-at}}{a} \right] \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right] \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right] \left[ \frac{1 - e^{-at}}{a} \right] \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - e^{-at}}{a} \right] \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right] \\ \sum_{t=0}^{mh} \left[ \frac{1 - e^{-at}}{a} \right]^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

حال از معادله (۲) می توان معادلات (۶)، (۷) و (۸) را به دست آورد:



$$\sum_{t=0}^{mh} \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \alpha \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \beta \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \gamma \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{t=0}^{mh} \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) \left( \alpha \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \beta \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \gamma \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right) = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{t=0}^{mh} \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \left( \alpha \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \beta \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \gamma \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right) = 0 \quad (8)$$

معادلات (6)، (7) و (8) را به ترتیب در  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  ضرب و با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sum_{t=0}^{mh} \left( \alpha \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \beta \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \gamma \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \right)^2 = 0 \quad (9)$$

برای اینکه جمع بالا صفر شود، چون تمام جملات آن مثبت یا صفر است، باید:

$$\alpha \left( \frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \beta \left( \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \right) + \gamma \left( \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) = 0$$

$$\forall t \in [0, mh] \quad (10)$$

معادله (10) بیان می‌کند که توابع  $\frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0}$  و  $\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}$  و  $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$  در فاصله  $[0, mh]$  وابسته خطی اند، که غلط است بنابراین، فرض وابسته بودن ستونهای Atrack مردود و Atrack معکوس پذیر است.