

یک کلاس ویژه از شبکه‌های پرت احتمالی

سید محمد تقی فاطمی قمی* و مسعود ربانی**

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱۱/۲۳ - دریافت نسخه‌نهایی: ۱۳۷۷/۱۱/۱۸)

چکیده - در مطالعه شبکه‌های پرت احتمالی، توجه به ساختار شبکه به عنوان یک راهکار جدید مطرح است. در مقاله حاضر، شبکه‌های هامنی^۱ به عنوان یک کلاس ویژه از شبکه‌ها بررسی می‌شوند. دو مکانیزم ساختاری تحت عنوان انقباض و حذف کمانی به منظور تبدیل شبکه‌های هامنی به شبکه‌های سری - موازی معرفی می‌شوند. ساختار شبکه‌های سری - موازی به گونه‌ای است که فقط با استفاده از دو عملیات ضرب و پیچش^۲ می‌توان تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را محاسبه کرد. در مقاله حاضر برای اولین بار، شبکه‌های سری - موازی از نظر ساختاری مطالعه می‌شوند. نتیجه بررسی مذبور مؤید تعلق این شبکه‌ها به کلاس شبکه‌های هامنی است.

یک قضیه کلیدی قابلیت و امکانپذیری مکانیزم‌های انقباض و حذف کمانی را برای شبکه‌های هامنی غیرسری - موازی تبیین می‌کند.

A Special Class of Stochastic PERT Networks

S. M. T. Fatemi Ghomi, M. Rabbani

Department of Indus. Engineering, Amirkabir University of Technology

ABSTRACT- Considering the network structure is one of the new approaches in studying stochastic PERT networks (SPN). In this paper, planar networks are studied as a special class of networks. Two structural reducible mechanisms titled arc contraction and deletion are developed to convert any planar network to a series-parallel network structure.

In series-parallel SPN, the completion time distribution function can be calculated only by means of multiplication and convolution operations. For the first time, series-parallel networks are studied on the basis of the structural viewpoint. These networks belong to planar networks class. A key theorem provides capability of application of these mechanisms for non series-parallel planar networks.

* دانشیار ** دانشجوی دکترا

فهرست علائم

زمان ختم شبکه (پروژه)	T_N	$ V = n$	$ A = q$	مجموعه شبکه‌های بدون دور	AN
متغیر تصادفی مربوط به مدت	X_{ij}	است		تابع توزیع مدت زمان تکمیل	F(t)
زمان فعالیت (j,i)		درجه ورودی گره i (تعداد)	$i\delta v_i$	شبکه	
زمان مسیر π	$Z(\pi)$	کمانهای ورودی به گره i (v_i)		تابع توزیع مدت زمان فعالیت	$F_{X_{ij}}(t)$
یکی از مسیرهای شبکه از گره اول به گره آخر	π	درجه خروجی گره i (تعداد)	$o\delta v_i$	(i,j)	
		کمانهای خروجی از گره i (v_i)		یک شبکه بدون دور که مجموعه کمانهای آن A و مجموعه گره‌های آن V است	$G(A,V)$
		مجموعه مسیرهای شبکه از گره اول به گره آخر	P		

ورتهام و هارتلی [۱] شبکه‌های پرت را با توجه به درجه

وابستگی مسیرها و پیچیدگی شبکه به گروههای مختلفی تقسیم کردند و محاسبات ریاضی را به صورت ضریب یا پیچش برای محاسبه زمان ختم پروژه به کار گرفتند. روش آنها تنها برای شبکه‌های ساده و هنگامی که تابع توزیع فعالیتها ساده است قابل کاربرد است. رینگر [۲] مدل ورتهام و هارتلی را تعمیم داد. وی با فرض وابستگی آماری در شبکه‌های ساده محاسباتش را سازماندهی کرد. از طرف دیگر کالکارنی و آدلاخا [۳] شبکه‌پرت را به صورت یک زنجیر مارکوف پیوسته مدلبندی کردند. گرچه این مدل برفرض توزیع نمایی برای مدت زمان فعالیتها استوار است، لیکن قادر است که تحلیلی دقیق برای مشخصه‌های شبکه ارائه دهد. مارتین [۴] یک روش محاسباتی برای ارزیابی توزیع زمان شبکه تحت این فرض که توابع چگالی زمان فعالیتها چندجمله‌ای است، ایجاد کرد. در روش وی ابتدا هر شبکه جهتدار باز به شبکه سری - موازی بدل می‌شود. در مرحله بعد شبکه جدید با یک سری محاسبات ضرب و پیچش به شبکه‌ای با یک کمان بدل می‌شود و تابع چگالی زمان کمان مزبور، مشخصه‌های زمان شبکه اولیه را بیان می‌کند. دودین [۵] با فرض استقلال آماری مدت زمان فعالیتها تخمینی از کران پایین ارائه کرد. روپیلارد و تراهان [۶] نیز روشی برای تخمین یک کران ایجاد کردند. کلیندورفر [۷] توزیعات حدی بالا و پایین برای زمانهای شروع و ختم شبکه ارائه کرد، ولی روش وی فقط برای شبکه‌هایی که توابع توزیع فعالیتها گسسته‌اند طرح شده است.

محاسبه امید ریاضی مدت زمان شبکه، مواردی نظری تخمینهای نقطه‌ای و کرانهای بالا و پایین را دربرمی‌گیرد. روش وان‌اسلایک [۸] میانگین زمان ختم را برآسانس مفهوم شاخص بحرانیت تخمین می‌زند. اسکولی [۹] روشی را در این زمینه با

یک شبکه پرت احتمالی، یک گراف جهتدار باز (بدون دور) همبند است. این شبکه دارای یک گره شروع و یک گره پایان است. در شبکه‌های احتمالی مدت زمان فعالیتهای متغیرهای تصادفی مستقل‌اند که تابع توزیع معلوم دارند. شبکه‌های احتمالی، مدل‌های مفیدی برای مدیریت و کنترل پروژه‌های واقعی محسوب می‌شوند. این شبکه‌ها در زمینه‌های متعددی مانند تحقیقات، تولید، فعالیتهای ساختمانی، نگهداری و تعمیرات و جریان در شبکه کاربرد دارند. یک مسئله اصلی در شبکه‌های احتمالی تعیین تابع توزیع زمان ختم شبکه است. زمان ختم پروژه مبنای مهمی در بودجه بندی و زمانبندی پروژه محسوب می‌شود. محاسبه تابع توزیع شبکه از پیچیدگی خاصی برخوردار است. می‌توان زمان مسیر $\pi \in P$ را به صورت زیر تعریف کرد.

$$Z(\pi) = \sum_{(i,j) \in \pi} X_{ij} \quad (1)$$

در این راستا، زمان ختم پروژه را به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T_N = \max_{\pi \in P} \{Z(\pi)\} \quad (2)$$

اینک تابع توزیع T_N به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F(t) = P \{ T_N \leq t \} = P \{ Z(\pi) \leq t, \forall \pi \in P \} \quad (3)$$

برای بسیاری از شبکه‌های احتمالی محاسبه $F(t)$ به دلیل وابستگی بین مسیرها که ناشی از کمانهای مشترک آنهاست، کاملاً دشوار است.

زدند. ویلیامز طی دو مقاله [۲۰ و ۱۹] بحث روی ساختار تابع توزیع مدت فعالیتها و مفهوم بحرانیت را مطرح کرد و تأثیرات این دو را در محاسبات مربوط به شاخص مقدار بحرانی بودن فعالیتها و مسیرها و محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌ها مذکور شد. سروش [۲۱] با ارائه یک مکانیزم ساختاری تحت عنوان چیرگی مسیرها، مبادرت به شناسایی بحرانی ترین مسیر در شبکه کرد. وی بحرانی ترین مسیر در شبکه را با استفاده از قضیه حد مرکزی به صورت مسیری که کمترین حد بالا را برای احتمال اتمام مدت شبکه در یک مدت معلوم نشان می‌دهد، تعریف می‌کند. سروش [۲۲] همچنین در مقاله دیگری موضوع ریسک‌پذیری را در شرایط احتمالی برای مدیریت پروژه (شبکه) بررسی می‌کند. در این مقاله مدت فعالیتها متغیرهای تصادفی غیرمنفی‌اند و با استفاده از یک تابع عدم مطلوبیت، مسیری را که عدم مطلوبیت مورد انتظار را حداکثر می‌کند، به عنوان مسیر بحرانی معرفی و زمان ختم شبکه را برابر مبنای آن محاسبه می‌کند. ماگوت و اسکودلارسکی [۲۳] با فرض نمایی بودن مدت فعالیتها، برای اجتناب از محاسبه تعداد حالات زنجیر مارکوفی حاصل از شبکه مذبور، روشی تقریبی را برای محاسبه میانگین زمان ختم شبکه ارائه کردند. در این زمینه از یک تقریب چندمتغیره و دیدگاه‌های کامبوروفسکی مستقیماً استفاده کردند.

۲- تعاریف و پیش‌نیازها

تعریف ۱- شبکه G_1 را ایزومorf شبکه G_2 گویند اگر اولاً: تعداد رئوس و کمانهای این دو شبکه با هم مساوی باشند. ثانیاً: یک مصور مانند ϕ وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر دو رأس v_i و v_j کمان w_{ij} متعلق به مجموعه کمانهای G_1 است $\phi(w_{ij}) = \phi(v_i)$ نیز جزو کمانهای مجموعه کمانهای G_2 باشد و برعکس [۲۴ و ۲۵].

در شکل (۱) شبکه‌های G_1 و G_2 ایزومorf‌اند. به عنوان مثال مصور ϕ به صورت $(G_1) \rightarrow V(G_2) : \phi(V(G_1))$ به صورت زیر می‌تواند

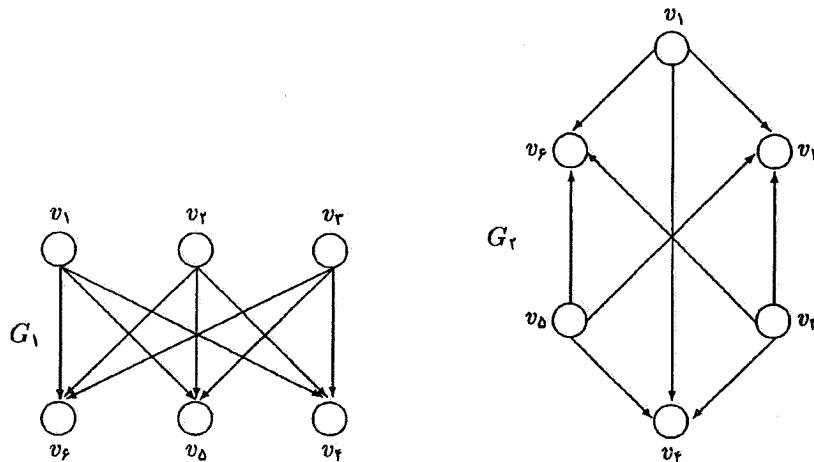
تعریف شود

$$\begin{array}{ccccccc} \phi v_1 = v_2 & , & \phi v_2 = v_3 & , & \phi v_3 = v_4 & , & \phi v_4 = v_5 \\ \phi v_5 = v_1 & , & \phi v_6 = v_2 & , & \phi v_7 = v_3 & , & \end{array}$$

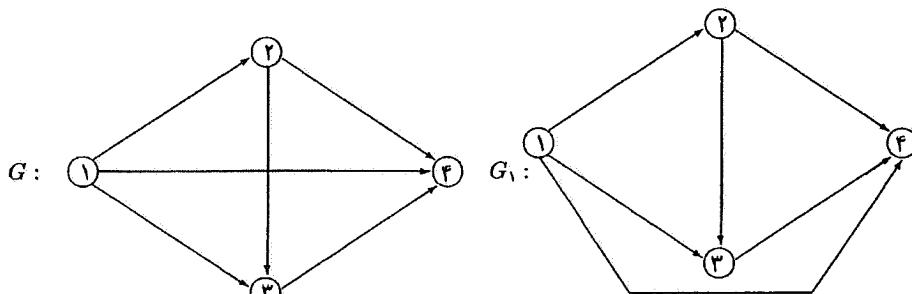
تعریف ۲- یک عضو از مجموعه AN (شبکه‌های بدون دور) را همانی گویند، اگر بتوان آن را بر صفحه‌ای نشاند. این بدان معناست

فرض توزیع نرمال و استقلال برای مدت زمان فعالیتها ایجاد کرد. کامبوروفسکی [۱۰] با فرض استقلال و توزیع آماری پیوسته برای مدت زمان فعالیتها کاری را ارائه داد. توزیع آماری مذکور تنها با دو پارامتر معرفی می‌شود. همچنین وی روشی برای دستیابی به تخمینهایی برای کرانهای بالا و پایین هنگامی که فعالیتها مدت زمان مستقل و نرمال دارند، ابداع کرد. فالکرسون [۱۱] با فرض استقلال متغیرهای تصادفی چندمتغیره مربوط به زمان تحقق یک گره، با محاسبه یک نوع احتمال شرطی، زمان تحقق گره را محاسبه و سپس با یک معادله برگشتی، میانگین زمان ختم شبکه را محاسبه کرد. در محاسبه میانگین زمان رسیدن به هر گره آن، امید ریاضی به صورت مجموع حاصلضرب احتمال هر گره متصل به آن در طولانی‌ترین مسیر رسیدن به آن محاسبه شد. کلینگن [۱۲] دو فالکرسون را برای حالت پیوسته گسترش داد. المغربی [۱۳] دو تقریب بهتر از فالکرسون مطرح کرد. روپلارد و تراهان [۱۴] تخمین فالکرسون را تعمیم دادند و کرانهایی را برای امید ریاضی مدت زمان شبکه ارائه کردند. آنها نشان دادند که تخمین‌شان حداقل به دقت تخمین فالکرسون و بهتر از تخمین المغربی است. تخمین لیندنسی [۱۵] بهتر از تخمین فالکرسون است زیرا در انتخاب مسیری که طولش می‌تواند طول مسیر بحرانی را تخمین بزند، انعطاف‌پذیری بیشتری دارد. دودین [۱۶] مقدار متوسط یک توزیع تقریبی از زمان ختم را به عنوان کران بالایی برای متوسط زمان ختم به کار گرفت. اورد [۱۷] روشی برای تقریب توزیع پیوسته زمان تکمیل شبکه به حالت گسسته ارائه کرد. در روش وی، برد یک متغیر تصادفی غیرمنفی (مثلًاً زمان یک فعالیت) به k قسمت تقسیم می‌شود به گونه‌ای که احتمال فرآگیری متغیر مذبور بین هر دو مقدار یک عدد معین باشد، سپس طی محاسبه یک احتمال مشروط امید ریاضی مقدار متغیر تصادفی محاسبه می‌شود. در مرحله آخر وی با محاسبه احتمال رخداد مقدار امید ریاضی برای متغیر تصادفی اولیه آن را به عنوان احتمال رخداد متغیر تصادفی معرفی می‌کند.

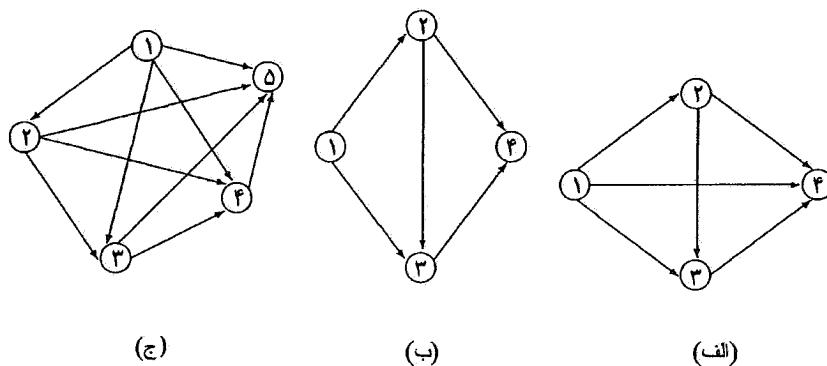
دودین و سروانسی [۱۸] با بهره‌گیری از نظریه مقدار بحرانی تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را تقریب زدند. آنها نشان دادند که روش تقریبی آنها تابع بهتری در مقایسه بافرض نرمال برای فعالیتها دریی دارد. بر مبنای نظریه مقدار بحرانی ابتدا تخمینهایی برای امید ریاضی و واریانس فعالیتها ارائه و سپس تابع توزیع زمان تکمیل را تخمین



شکل ۱- دو شبکه ایزومورف



شکل ۲- یک شبکه هامنی و ایزومورف مسطح آن



همانی نیست و مسطح نیز نیست همانی و مسطح است همانی است ولی مسطح نیست

شکل ۳- انواع شبکه‌های هامنی و مسطح

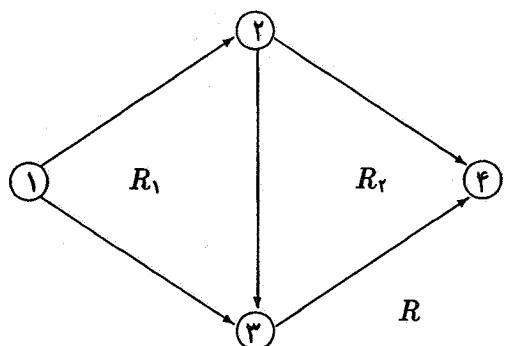
تعریف ۳- یک شبکه را مسطح گویند، اگر بر صفحه نشسته باشد؛ یعنی کمانهای آن همیگر را قطع نمی‌کنند [۲۴ و ۲۵]. تذکر: یک شبکه هامنی شبکه‌ای است که می‌توان یک شبکه مسطح ایزومورف با آن وجود دارد به گونه‌ای که هیچ دو کمانی از همیگر را قطع نمی‌کنند.

در شکل (۲) شبکه G یک شبکه هامنی است و G_1 ایزومورف مسطح آن است.

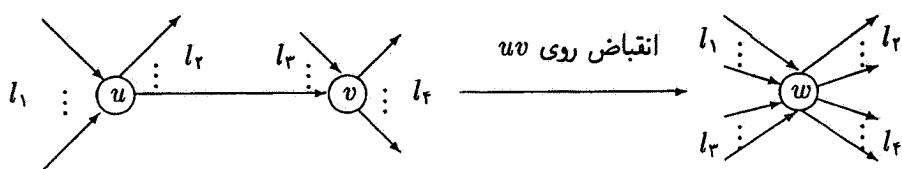
در شکل (۳) شبکه (الف) هامنی است ولی مسطح نیست.

که اگر $G \in AN$ یک شبکه هامنی باشد، یک شبکه مانند G_1 ایزومورف با آن وجود دارد به گونه‌ای که هیچ دو کمانی از G_1 همیگر را قطع نمی‌کنند [۲۴ و ۲۵].

در شکل (۲) شبکه G یک شبکه هامنی است و G_1 ایزومورف مسطح آن است.



شکل ۴- وجوده یک شبکه



شکل ۵- اقباض کمانی

تعریف ۸- عملیات سری اگر دو کمان در شبکه به صورت e_1 و e_{11} سری باشند، می‌توان آنها را با یک کمان که طولش جمع دو کمان مزبور است جایگزین کرد [۱۰۴].

تابع توزیع مدت زمان کمان حاصل از جمع دو کمان اولیه به صورت پیچش، دو تابع مربوط به e_1 و e_{11} محاسبه می‌شود.

$$F_{X_e}(t) = F_{X_{e_1}}(t) * F_{X_{e_{11}}}(t) \quad (4)$$

مجموعه عملیات پیچش در یک شبکه که به معنای جایگزینی هر دو کمان سری با یک کمان متناسب به نحو بالاست را عملیات سری یا پیچش گویند.

تعریف ۹- عملیات موازی اگر دو کمان e_1 و e_{11} موازی باشند، می‌توان آنها را با کمانی به طول $X_e = \max(X_{e_1}, X_{e_{11}})$ جایگزین کرد [۱۰۴].

تابع توزیع مدت زمان کمان حاصل از دو کمان موازی به صورت ضرب دو تابع مربوط به e_1 و e_{11} محاسبه می‌شود

$$F_{X_e}(t) = F_{X_{e_1}}(t) \cdot F_{X_{e_{11}}}(t) \quad (5)$$

مجموعه عملیات ضرب در یک شبکه که به معنای جایگزینی هر

شبکه (ب) در شکل (۳) هامنی و مسطح است.

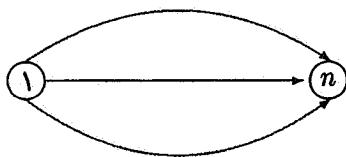
شبکه (ج) در شکل بالا، شبکه‌ای را نشان می‌دهد که به هیچ وجه نمی‌توان شبکه‌ای ایزومورف با آن رسم کرد که حداقل دو کمان متقطع نداشته باشد. لذا شکل (ج)، هامنی نیست. شکل (الف) را می‌توان به صورت مسطح رسم کرد، پس هامنی است ولی در ترسیم فعلی مسطح نیست.

تعریف ۴- محدوده بسته بین زیرمجموعه‌ای از گره‌های شبکه و کمانهای مابین را وجه شبکه گویند. در این شبکه دو نوع وجه داخلی و خارجی وجود دارد. در شکل (۴)، R_1 و R_2 وجوده داخلی و R وجه خارجی است [۲۴ و ۲۵].

تعریف ۵- کمان $e=uv$ را در نظر بگیرید. چنانچه اقباض کمانی روی e انجام شود، رأس w پدید می‌آید که کمانهای ورودی و خروجی آن به صورت شکل (۵) است [۲۵].

تعریف ۶- یک کمان در شبکه G را پل کلی گویند، اگر با حذف آن شبکه به شکل منفصل تبدیل شود؛ یا به بیان دیگر همبندی حفظ نشود. به این ترتیب کمانی که با حذف آن همبندی شبکه پایدار بماند، پل کلی نیست.

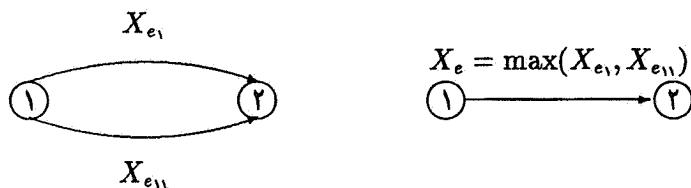
تعریف ۷- شبکه‌ای را منفصل داخلی گویند که هیچ دو مسیری از آن به غیر از دو گره ابتداء و انتهای شبکه، در گره دیگری با یکدیگر مشترک نباشد، شکل (۶)، [۲۴ و ۲۵].



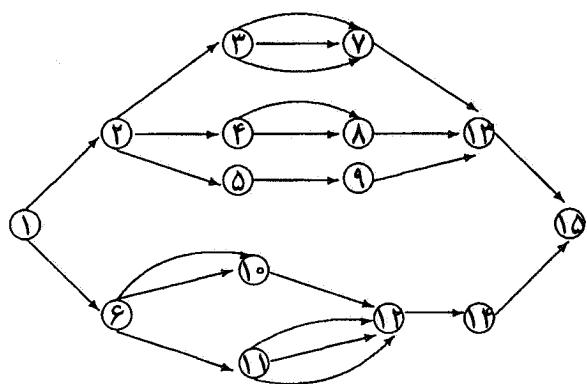
شکل ۶- یک شبکه منفصل داخلی با ۳ مسیر



شکل ۷- دو کمان در وضعیت سری و کمان معادل با آن دو



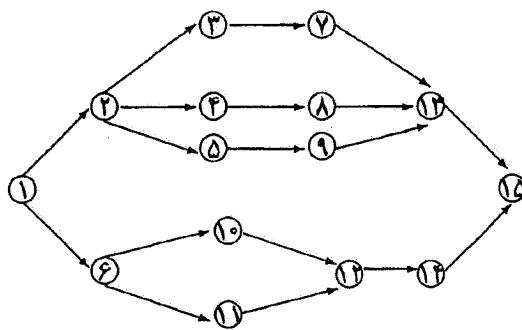
شکل ۸- دو کمان در وضعیت موازی و کمان معادل با آن دو



شکل ۹- یک شبکه هامنی کامل‌کاهش پذیر

دو کمان موازی با یک کمان متناسب به نحو بالاست را عملیات موازی یا ضرب گویند.
گره‌های شروع و ختم شبکه G وتابع توزیع مربوط به کمان G همان تابع توزیع حرکت از گره شروع به گره ختم شبکه G (تابع توزیع تکمیل شبکه پرت احتمالی) خواهد بود.
تذکر: تعریف ۱۱ با استفاده از قضایای پیوست (۱) ارائه شده است و در ادامه مقاله در موقع لزوم از عبارت شبکه‌های هامنی کامل‌کاهش پذیر به جای شبکه‌های سری - موازی استفاده می‌شود.
به عنوان مثال مراحل زیر را در ساده‌سازی ساختاری شبکه شکل (۹) می‌توان در عملیات سری - موازی پیشنهاد کرد.

دو کمان موازی با یک کمان متناسب به نحو بالاست را عملیات موازی یا ضرب گویند.
تعریف ۱۰- ۱ شبکه کاهش پذیر شبکه‌ای را گویند که امکان استفاده از دو عملیات سری و موازی برای ساده کردن ساختار آن وجود داشته باشد. لذا شبکه کاهش ناپذیر شبکه‌ای است که امکان استفاده از عملیات سری و موازی برای ساده سازی ساختار آن وجود ندارد [۵].
تعریف ۱۱- شبکه سری - موازی شبکه پرت احتمالی $G(V,A) \in AN$ که $|V| = n$ و $|A| = q$ باشد. یعنی با استفاده از عملیات چنانچه هامنی و کامل‌کاهش پذیر باشد. یعنی با استفاده از عملیات سری و موازی بتوان آن را به شبکه $(V', A') \in G'$ که $|V'| = 2$ و



شکل ۱۰- شبکه شکل (۹) پس از انجام عملیات موازی روی کمانهای (۷-۳)، (۴-۸)، (۱۰-۶)، (۱۱-۱۲)

ساختاری کاملاً قابل کاهش ایجاد کنند. در ساختار جدید لازم است تنها از دو عمل ضرب و پیچش استفاده شود تا شبکه به شبکه‌ای با دو گره و کمان مابین تبدیل شود.

۱-۱-۳ مکانیزم انقباض کمانی

قضیه ۱- کمان $e=uv$ را به عنوان کمانی از مجموعه کمانها شبکه بدون دور G در نظر بگیرید. چنانچه به غیر از کمان e تعداد ۱ مسیر از u به v در G وجود داشته باشد، انجام انقباض روی e شبکه‌ای را ایجاد می‌کند که دیگر بدون دور نیست؛ بلکه در آن ۱ دور وجود دارد. اثبات: کاملاً بدیهی است.

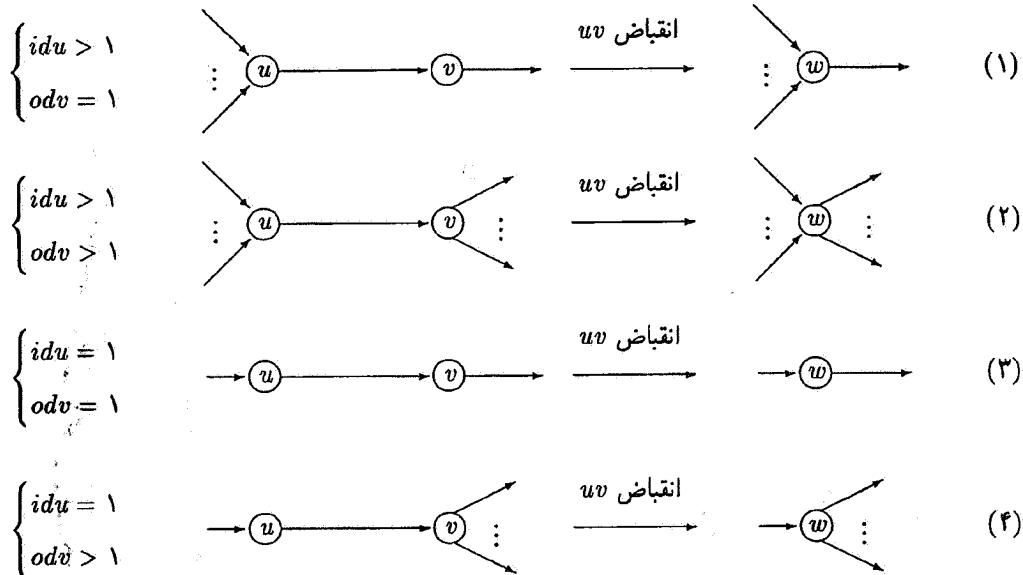
اگر عمل انقباض روی کمانی انجام شود، با توجه به درجه ورودی و خروجی دو گره ابتداء و انتهای کمان مزبور جمعاً ۱۶ حالت به صورت زیر پدید می‌آید

تداوم عملیات سری - موازی منجر به دستیابی به شبکه‌ای با دو گره که همان دو گره ابتداء و انتهای شبکه اصلی آن خواهد شد. انجام عملیات سری - موازی در شبکه‌های مثال ذکر شده به روی توابع توزیع مدت فعالیتها در نهایت منجر به محاسبه مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه خواهد شد. ساختار یک شبکه هامنی مسیری کاملاً کاهش پذیر (سری - موازی) تنها ساختاری است که انجام محاسبه مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه با کمک دو عملیات سری و موازی را میسر می‌سازد.

۳- شبکه‌های هامنی

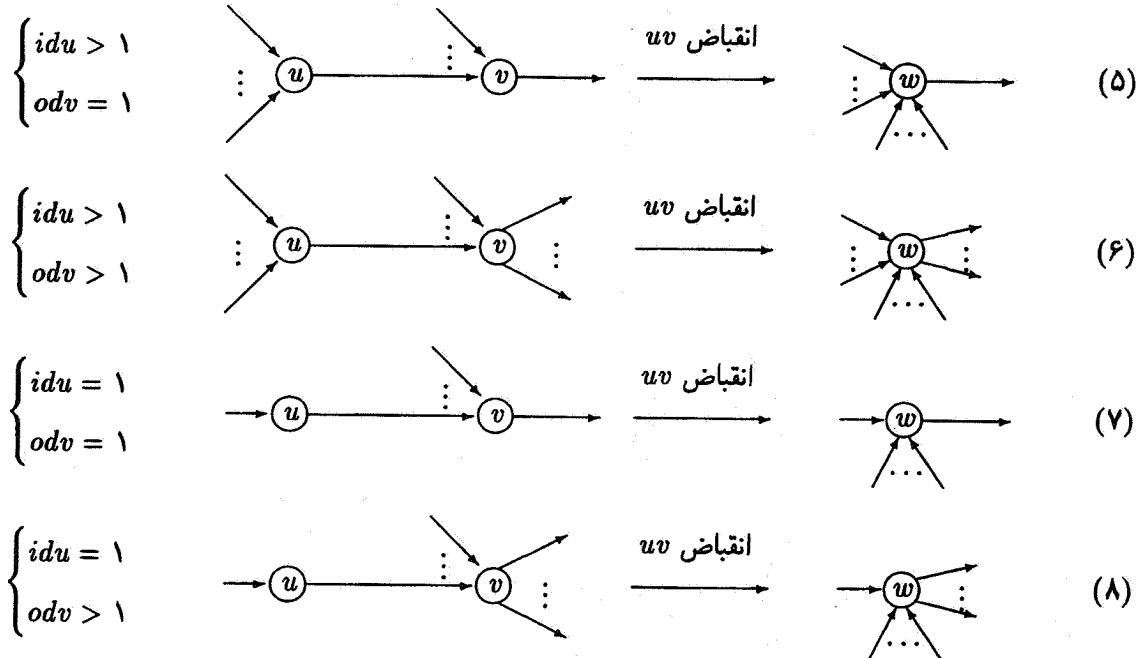
۳-۱- مکانیزم‌های کاهش یک شبکه بدون دور هامنی در این قسمت دو مکانیزم انقباض کمانی و حذف کمانی معرفی می‌شوند. این مکانیزم‌ها قادرند ساختار شبکه را ساده کرده و

الف) $idv = 1$ ، $odv = 1$



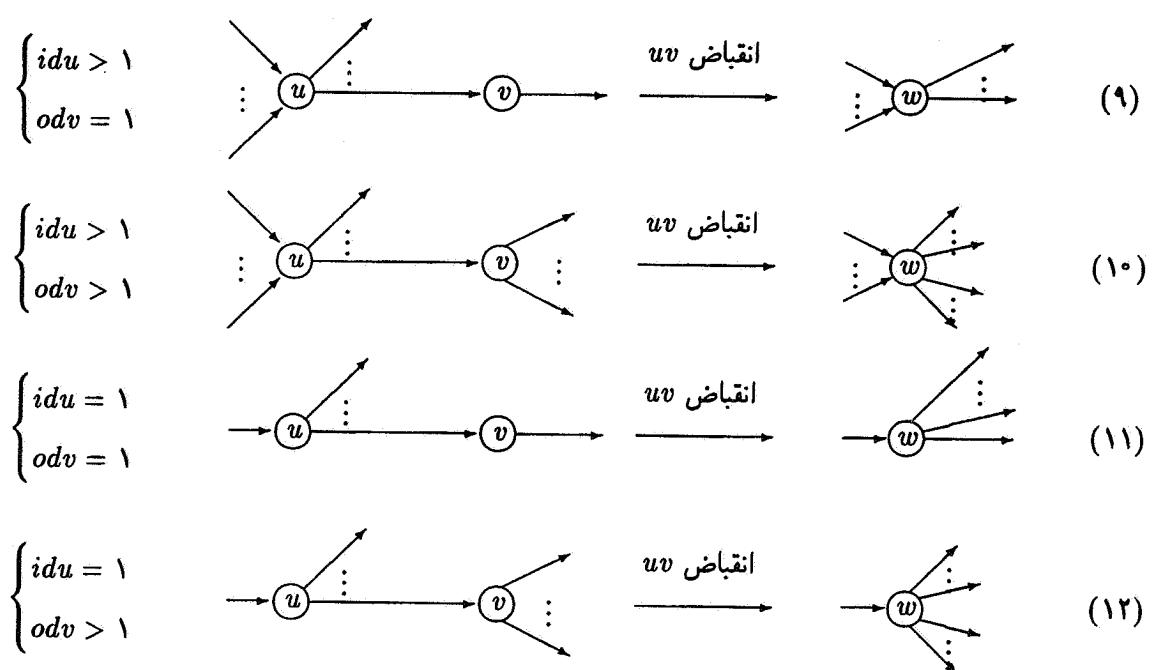
شکل ۱۱- انقباض کمانی در حالتی $idv = 1$ و $odv = 1$

$idv > 1, odu = 1$

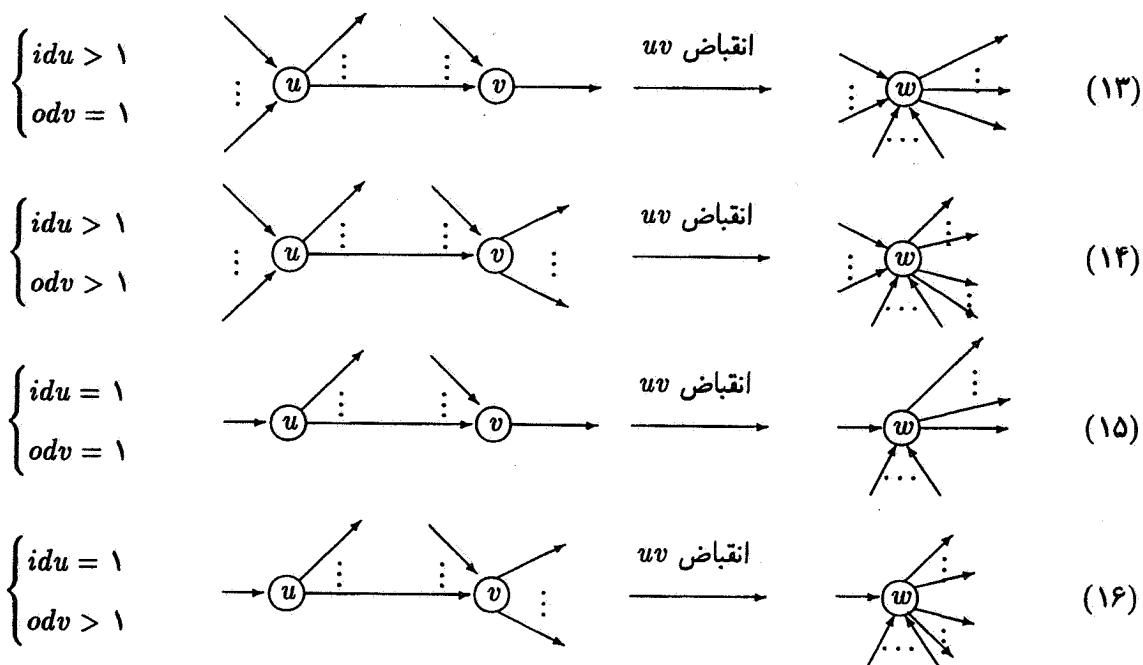
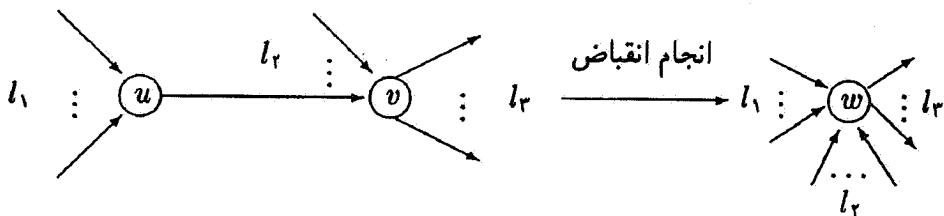


شکل ۱۲ - انقباض کمانی در حالت‌های $idv > 1, odu = 1$

$idv = 1, odu > 1$



شکل ۱۳ - انقباض کمانی در حالت‌های $idv = 1, odu > 1$

شکل ۱۴- انقباض کمانی در حالت‌های $idv > 1$, $odu > 1$ 

شکل ۱۵- شکل کمانها در حالت (۶) و انجام انقباض

می‌شود. به عنوان مثال حالت (۶) را بررسی می‌کنیم، (شکل ۱۵).

$$\begin{aligned}
 idu &= l_1 \\
 odu &= 1 \\
 idv &= l_2 + 1 \\
 odv &= l_3
 \end{aligned}$$

$l_1 + l_2 + l_3 = 1$ = تعداد مسیرهای موضعی بین u و v قبل از انقباض

$(l_1 + l_2)l_3 = 1$ = تعداد مسیرهای موضعی از w بعد از انقباض

پس تعداد مسیرهای موضعی قبل و بعد از انقباض با هم برابرند. این موضوع برای حالت‌های ۱ تا ۱۲ صادق است.

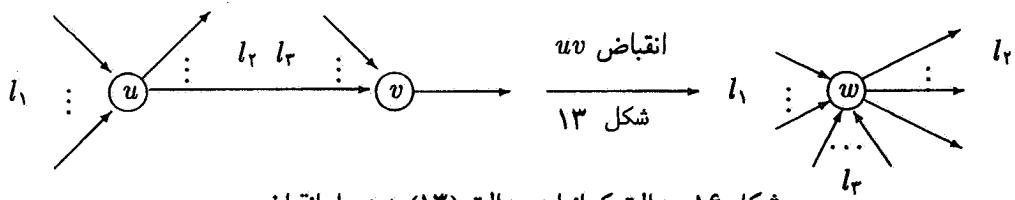
قضیه ۳- در شبکه $G \in AN$ اگر انقباض کمانی را روی $e = uv$ با $odu > 1$ و $idv > 1$ انجام دهیم به گونه‌ای که $odu \geq 1$ و

تعریف مسیرهای موضعی^۵ عبارت از مسیرهایی است که به صورت محلی فقط از گره یا گره‌های مورد نظر عبور می‌کنند. انجام یک انقباض کمانی در یک شبکه از دو دیدگاه اصلی حائز توجه و اهمیت است.

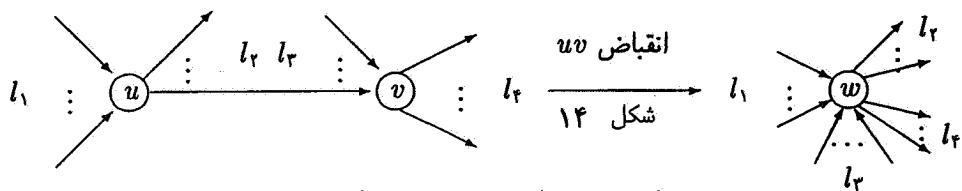
اولاً: تغییر وابستگی کمانها و به تبع آن ثانیاً: تغییر مسیرهای شبکه.

قضیه ۲- اگر در شبکه $G \in AN$ که دارای کمان $e = uv$ است بخواهیم انقباض کمانی را روی e انجام دهیم، چنانچه $odu = 1$ یا $idv = 1$ یا هر دو باشد، این انقباض تأثیری در تعداد مسیرهای موضعی شبکه بین دو رأس u و v نخواهد داشت.

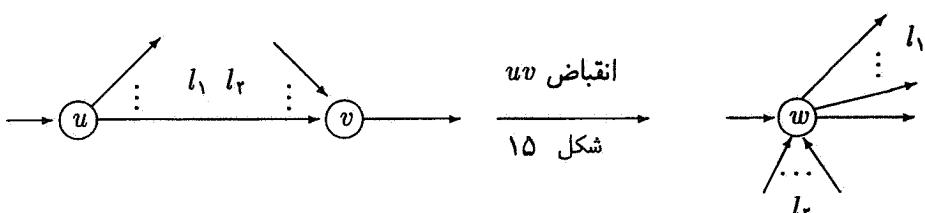
اثبات: با انجام شمارش کامل روی فرمهای ۱ تا ۱۲ در شکلهای ۱۱ تا ۱۳ و محاسبه تعداد مسیرهای قبل و بعد از انقباض قضیه اثبات



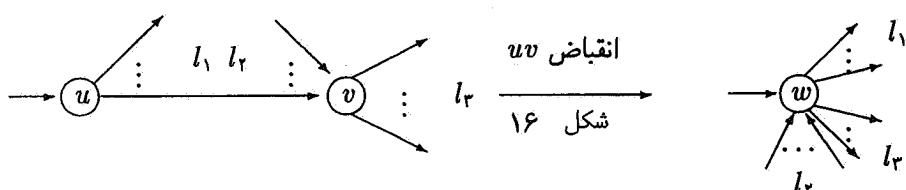
شکل ۱۶ - حالت کمانها در حالت (۱۳) به همراه انقباض



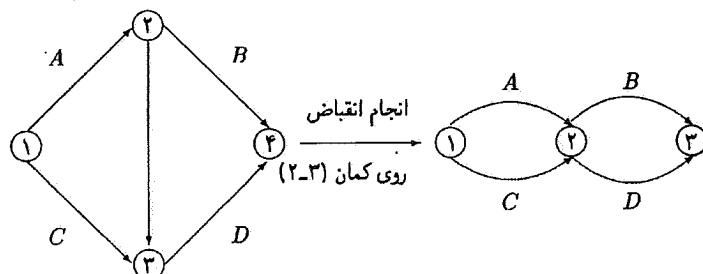
شکل ۱۷ - حالت (۱۴) و انقباض کمان



شکل ۱۸ - حالت (۱۵) و انقباض کمان



شکل ۱۹ - حالت (۱۶) و انقباض کمان



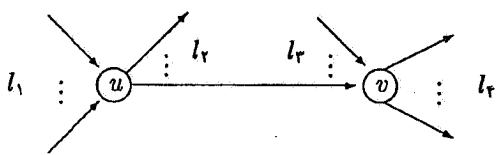
شکل ۲۰ - یک حداقل شبکه کاهش ناپذیر و انجام انقباض روی یک کمان

ساده‌سازی این نوع زیرشبکه، فاکتور اصلی در ساده‌سازی ساختار شبکه محسوب می‌شود. شکل (۲۰) یک حداقل شبکه کاهش ناپذیر را نشان می‌دهد.

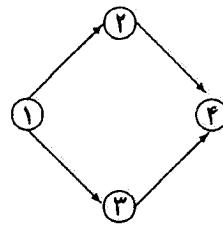
مشاهده می‌شود که به طور کلی ساختمان شبکه تغییر حالت یافته و شبکه جدیدی با ۳ گره و چهار کمان از کمانهای قبلی، ولی با حالت وابستگی جدیدی ایجاد شده‌اند. یک کمان دچار انقباض شده است و به این ترتیب یک مسیر حذف شده است. تغییرات در مسیرهای شبکه،

$uv \geq 0$ باشد، در این صورت مجموع تعداد مسیرهای موضعی عبوری از رأس w (رأس ناشی از انقباض $e=uv$) بیشتر از مجموع تعداد مسیرهای موضعی عبوری از u و v است. تعداد مسیرهای افزایش یافته برابر حاصلضرب $(1 - uv)(du - 1)$ خواهد بود. اثبات در پیوست است).

چنانچه کاهش ناپذیر بودن یک شبکه را به دلیل وجود زیرشبکه‌های کاهش ناپذیر در شبکه بدانیم (دودین [۵]), بنابراین



شکل ۲۲- وضعیت کمانها در اتصال دو گره



شکل ۲۱- شبکه شکل (۲۰) بعد از حذف کمان (۳-۲)

مربوط می‌شود. قبل از این بررسی توجه به نکات زیر مهم است.
 الف - اگر شبکه دارای پل کلی باشد، انجام حذف کمانی بروی آن میسر نیست، زیرا منجر به عدم همبندی شبکه می‌شود.
 ب - در میان حالت‌های ۱۶ گانه که براساس درجات ورودی و خروجی گره‌های مابین یک کمان پدید می‌آید، تنها برخی موارد در یک شبکه منجر به ایجاد و وضعیت کاهش ناپذیر می‌شود.
 قضیه ۴- چنانچه در یک شبکه بر روی کمان $e=uv$ که پل کلی نیست (حذف آن همبندی شبکه را برهمنمی‌زند)، حذف کمانی را انجام دهیم، تعداد کاهش مسیر موضعی برابر حاصلضرب $(odv)(odu)$ خواهد بود.

اثبات: مسئله را در حالت کلی و مانند شکل (۲۲) در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} idu &= 1, & idv &= 1_3 + 1 \\ odu &= 1_1 + 1 & odv &= 1_4 \end{aligned}$$

با حذف uv ، تعداد مسیرگذرنده از u که قبل از حذف l_1, l_2 است تغییر نمی‌کند. تعداد مسیرگذرنده از u منشعب از u عوض نمی‌شود که همانا 1_1 است. ممکن است کمان خروجی از u با مسیری منجر به کمانی ورودی به u شود که در صورت حذف uv ، تأثیری در این زمینه ایجاد نمی‌شود. ولی براساس درجه ورودی u از طریق uv ، به گره u رسیم و از طریق u کمان از u می‌توان خارج شد که جمماً به تعداد 1_1 مسیر موضعی از طریق uv ایجاد می‌شود که با حذف u آنها از بین می‌روند پس تعداد مسیر کاهش یافته موضعی برابر است با $(odv)(odu)$.

براساس مکانیزم حذف امکان هیچ گونه دسته بندی حالتها وجود ندارد چون حداقل در حالت ۱۵ با حذف کمان uv ، حداقل یک واحد کاهش مسیر موضعی وجود دارد و چون مقدار odu در کاهش تعداد مسیر موضعی مؤثرند، جز تحت یک مسئله نمی‌توان حالت‌های مطروحه را مقایسه کرد.

با توجه به قضیه دودین [۵] پیچیدگی شبکه در هنگام محاسبه

تحت تأثیر انقباض کمانی عبارت‌اند از: ایجاد یک مسیر جدید و انقباض یک مسیر به مقدار یک کمان.

ملاحظه می‌شود که مکانیزم انقباض کمانی، ساختار مسئله را به حالتی کاملاً کاهش پذیر تغییر می‌دهد ولی مانند هر مکانیزم دیگری (مثلًاً مضاعف سازی کمانی دودین [۵]) به دلیل در هم ریختن ساختار شبکه اصلی، تعداد و حالت مسیرها را تغییر می‌دهد. ازین رو لازم است در طراحی روش محاسبه $F(t)$ راه حلی جستجو شود که میزان خطای حاصل از تقریب حداقل شود.

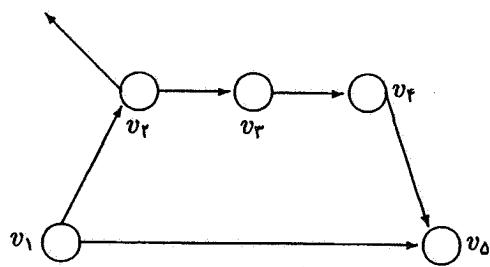
۲-۱-۳ مکانیزم حذف کمان

چنانچه کمانی را در یک شبکه حذف کنیم دو گره ابتداء و انتهای آن باقی می‌مانند و فقط یک کمان حذف می‌شود. از طرف دیگر حذف کمان مزبور منجر به حذف تمامی مسیرهایی می‌شود که از آن کمان عبور می‌کند. یکی از جنبه‌های اصلی تمایز بین مکانیزم‌های انقباض و حذف توجه به این نکته است که در انجام انقباض کمانی، تعداد مسیرهای شبکه افزایش یافته و یا ثابت می‌مانند. در مکانیزم حذف قطعاً تعداد مسیرها کاهش می‌یابد و در صورت انتخاب مناسب کمان، از پیچیدگی شبکه کاسته می‌شود. از آنجایی که هر کمان حداقل در ساختار یک وجه حضور دارد، حذف کمان به معنای حذف یک مرز خواهد بود و به همین دلیل دو وجه با یکدیگر در هم آمیخته و وجه جدیدی را خواهند ساخت.

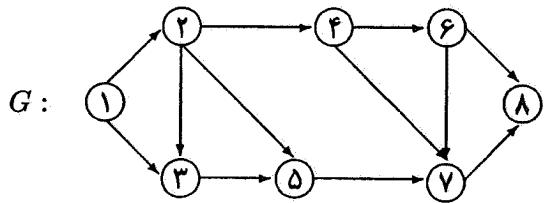
شکل (۲۰) یک شبکه کاهش ناپذیر را نشان می‌دهد.

با حذف کمان (۳-۲) شبکه شکل (۲۱) به دست می‌آید اولاً: یکی از مسیرهای شبکه یعنی ۱-۲-۳-۴ حذف شد. ثانیاً وجه حاصل در شکل (۲۱) کاملاً کاهش پذیر است.

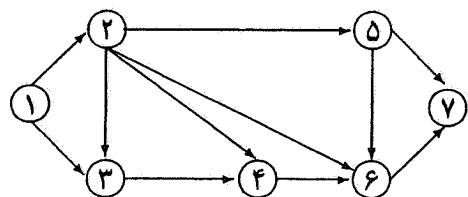
بررسی نحوه عمل مکانیزم حذف کمان به بررسی در حالت‌های ۱۶ گانه که در مبحث انقباض مطرح شد برمی‌گردد و منحصرًا بررسی به حالتهایی که در شبکه‌های کاهش ناپذیر مشاهده می‌شوند،



شکل ۲۶- یک وجه غیرسه ضلعی غیرپایه



شکل ۲۷- یک شبکه هامنی کاهش ناپذیر (غیرسری - موازی)

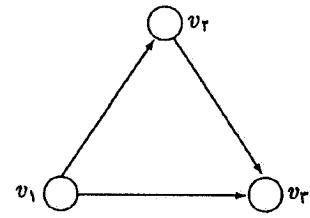


شکل ۲۸- شبکه G' پس از انجام انقباض روی (۲-۴) و شماره گذاری مجدد

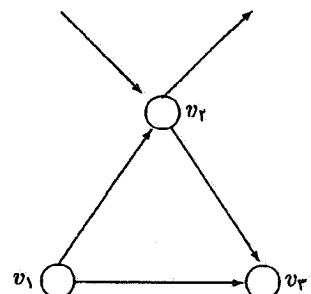
کاهش پذیر باشد روی دو ضلع آن می‌توان انقباض ایجاد کرد، شکل (۲۳). روی ضلع سوم به دلیل حفظ عدم تشكیل دور نمی‌توان عمل انقباض کمانی را انجام داد. در شکل بالا با توضیحات ارائه شده، روی یکی از دو کمان v_1v_2 یا v_2v_3 می‌توان انقباض کمانی را انجام داد. اگر این وجه سه ضلعی، کاهش ناپذیر باشد، درجه ورودی و خروجی v_2 دیگر ۱ نیست و لزوماً ورودی و خروجی‌های دیگر خواهد داشت. لذا ممکن است شکل (۲۳) به صورت شکل (۲۴) تغییر یابد.

مجدداً ملاحظه می‌شود که با وجود آنکه $v_1 > idv_1$ و $v_2 > idv_2$ است، می‌توان حداقل با انقباض روی v_2 یا v_3 می‌توان حالت توازن دو کمان منتهی به v_2 را ایجاد کرد. به بیان دیگر شکل (۲۵) حاصل می‌شود.

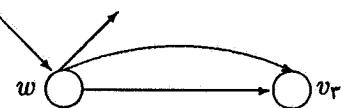
در وضعیت جدید اگر کمانهای ورودی یا خروجی به v_2 حذف شوند، وجه سه ضلعی کاهش پذیری ایجاد می‌شود که با توجه به



شکل ۲۳- وجه سه ضلعی کاهش پذیر



شکل ۲۴- وجه سه ضلعی کاهش ناپذیر



شکل ۲۵- انجام انقباض روی کمان v_2 در شکل (۲۴)

$F(t)$ منشعب از وجود حالت کاهش ناپذیر است. بنابراین انجام حذف کمانی بر روی کمانی انجام می‌شود که اولاً تعداد حالت کاهش ناپذیر را در شبکه کاهش دهد و ثانیاً حاصلضرب (odv) (idv) کمتر باشد.

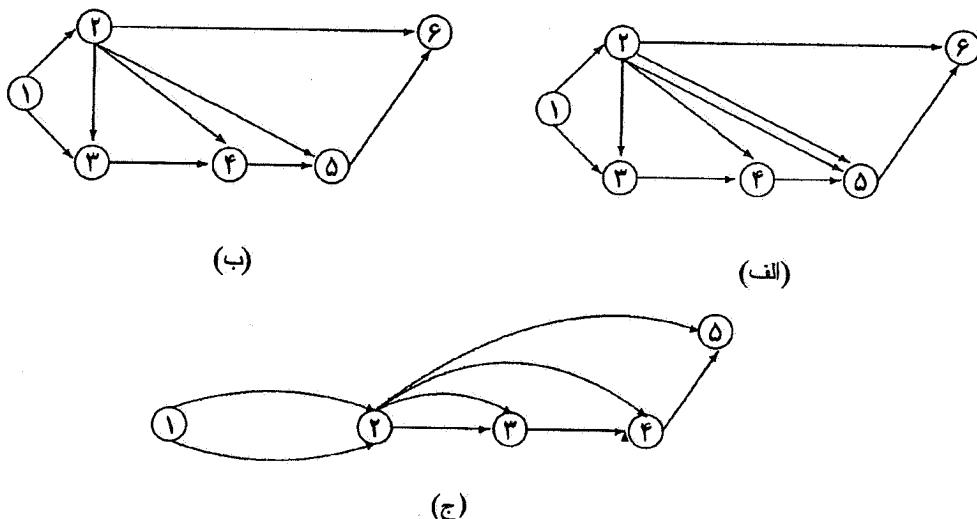
۴- بررسی امکانپذیری استفاده از مکانیزم‌های انقباض و حذف کمان

امکان استفاده از مکانیزم‌های انقباض و حذف کمان در یک شبکه هامنی با استفاده از قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۵- در یک شبکه هامنی عضو AN ، گرهی وجود دارد که با مکانیزم حذف کمانی یا انقباض کمانی که از آن منشعب می‌شود، یا به آن منتهی می‌شود، می‌توان ساختار جدیدی را ایجاد کرد که قطعاً یک عمل سری یا موازی قابل اجرا باشد.

اثبات: شبکه $G' \in AN$ و ایزومورف مسطح آن G را در نظر بگیرید. مسئله در دو وضعیت زیر قابل بررسی است.

الف- اگر شبکه G دارای حداقل یک وجه سه ضلعی باشد این وجه می‌تواند کاهش پذیر یا کاهش ناپذیر باشد. اگر وجه



شکل ۲۹- انجام عمل انقباض و عملیات سری و موازی در شبکه شکل (۲۸)

اگر گره (۲) را در نظر بگیریم سه کمان (۲-۳)، (۲-۴) و (۲-۵) از آن منشعب شده‌اند که انجام انقباض بر روی (۲-۵) ناممکن است (زیرا مسیر دیگری بین گره ۲ و ۵ وجود دارد و انجام انقباض روی آن یک دور را ایجاد می‌کند). کمان (۳-۴) در وضعیت ۱۵ و کمان (۲-۴) در وضعیت ۱۲ قرار دارد پس بهترین کمان برای انقباض تداوم عمل انقباض به ترتیب حالات (الف) الی (ج) را در شکل (۲۹) ایجاد می‌کند.

شبکه حالت (ج) در شکل (۲۹) کاملاً کاهش پذیر است و دیگر نیازی به انجام انقباض نیست و به سادگی قابل تبدیل به شبکه‌ای با دو گره و کمان مایبن است.

مثال ۲: همان شبکه (۲۷) در مثال قبل را با مکانیزم حذف کمانی مجدداً مطرح می‌کنیم.

اگر گره (۲) را در نظر بگیرید سه کمان (۲-۳)، (۲-۴) و (۲-۵) مطرح‌اند. حذف کمانی روی کمان (۲-۳) مناسب‌تر است زیرا مقدار (adv) برای آن کمتر از دو کمان دیگر است، شکل (۳۰).

با انجام ساده سازی و یک مرحله عملیات سری، شکل زیر به دست می‌آید

با تداوم عملیات حذف کمانی حالات (الف) الی (د) در شکل (۳۲) ایجاد خواهد شد.

در پایان با حذف کمان (۲-۳) شبکه کاملاً به یک شبکه کاهش پذیر بدل می‌شود.

مطلوب مذکور در ابتدای اثبات این قضیه مجدداً می‌توان از عمل موازی برای دو کمان قبل و بعد از ۲ بهره گرفت. افزایش درجات ورودی و خروجی ۱ و ۲ در این تحلیل نقشی ایفا نمی‌کنند.

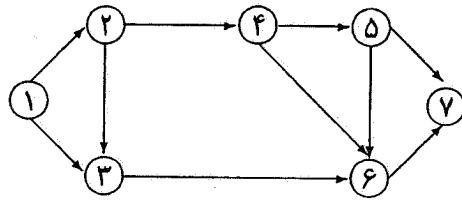
ب - اگر شبکه دارای وجه سه ضلعی نباشد
در این حالت چنانچه وجه مورد نظر کاملاً قابل کاهش نباشد رأسی وجود دارد که درجه ورودی و یا خروجی (یا هر دو) بیش از ۱ است، شکل (۲۶).

در شکل فوق ۲ رأسی است که درجه ورودی و یا خروجی آن بیش از ۱ است. بنابراین حداقل یک رأس با درجه ۳ (مجموع درجه ورودی و خروجی) وجود دارد که عمل حذف کمان (یا کمانها) ساختاری را ایجاد می‌کند که در آن ۲ دارای درجه ورودی و خروجی ۱ است. در این ساختار امکان عملیات سری فراهم خواهد بود.

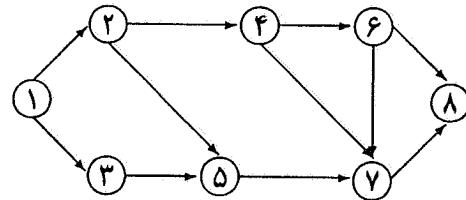
با توجه به مطالب بالا در یک شبکه هامنی همواره می‌توان گریه یافت که انجام عمل انقباض یا حذف بر روی کمانی که از آن منشعب می‌شود یا به آن متنه می‌شود، میسر است. بنابراین دو مکانیزم بالا قطعاً منجر به دستیابی به ساختار کاملاً کاهش پذیر در صورت استفاده مکرر خواهند شد.

۵- ارائه مثالها

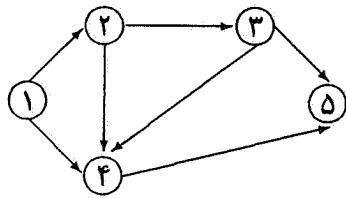
مثال ۱: شبکه G در شکل (۲۷) یک شبکه هامنی است. می‌خواهیم با انجام انقباض شبکه را کاملاً کاهش دهیم.



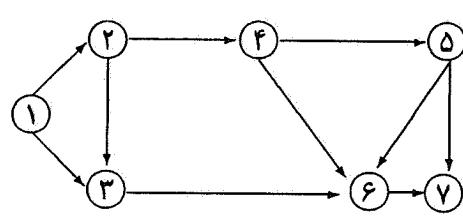
شکل ۳۱- شبکه شکل (۳۰) بعد از ساده‌سازی



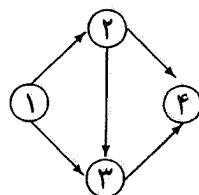
شکل ۳۰- شبکه شکل (۲۷) بعد از حذف کمان (۲-۳)



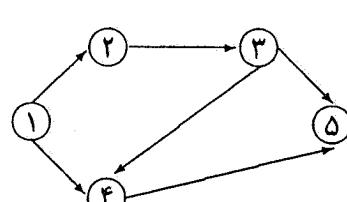
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۳۲- انجام عمل حذف کمانی به همراه عملیات سری و موازی برای شبکه شکل (۳۱)

شبکه‌ها در نظریه گراف یعنی کلاس شبکه‌های هامنی تعلق دارند. با توجه به دیدگاه ارائه شده، دو مکانیزم ساده‌سازی ساختاری جدید به نامهای انقباض و حذف کمانی مطرح و موارد کاربرد مناسب آنها توضیح داده شد. عملکرد آنها طی دو مثال تبیین شد. نهایتاً با ارائه یک قضیه کلیدی آشکار شد که امکان کاربرد این دو مکانیزم در شبکه‌های هامنی کاوش ناپذیر وجود دارد.

هدف اصلی مقاله تشریح کلاس شبکه‌های هامنی و معرفی مکانیزم‌های ساختاری برای تبدیل این شبکه‌ها به شبکه‌های کاوش پذیر بوده است. البته برای تشریح قابلیت مکانیزم‌های ارائه شده، لازم است که رویکردي جداگانه ایجاد شود تا $R(t)$ را به طور مناسب تقریب بزنند. برای این منظور در صورت استفاده از مکانیزم‌های انقباض و حذف کمانی دو معضل اصلی می‌بایستی مرفوع شوند که عبارت‌اند از:

الف - تغییر در تعداد مسیرهای شبکه در اثر انقباض یا حذف کمانی
ب - انقباض یا حذف یکی از کمانهای شبکه که در شرایط واقعی به

چنانچه شبکه مورد نظر یک شبکه پرت احتمالی فرض شود، در این صورت برای هر یک از کمانهای، یک متغیر تصادفی که معرف مدت زمان کمان مذبور و یکتابع توزیع احتمال، متناظر با آن خواهیم داشت. با استفاده از دو مکانیزم انقباض و حذف کمان و انجام تدریجی عملیات سری و موازی (مانند دو مثال بالا) می‌توان یک شبکه هامنی را به یک شبکه هامنی کاملاً کاوش پذیر تبدیل کرد و در نتیجه امکان محاسبه مستقیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه پرت احتمالی فراهم می‌شود. این نکته اصلی‌ترین کاربرد دو مکانیزم معرفی شده است که در مقاله جداگانه‌ای بحث می‌شود. طبق قضیه ۵ مشخصاً تحت هر شرایطی در یک شبکه هامنی امکان انجام انقباض کمانی یا حذف کمانی وجود دارد.

۶- نتیجه گیری

شبکه‌های سری - موازی، ساده‌ترین ساختار شبکه‌های پرت احتمالی محسوب می‌شوند. این نوع شبکه‌ها به کلاس خاصی از

حذف طراحی کرد.

این دو نکته با تمهیدات لازم منجر به ایجاد الگوریتمهای انجام بهینه انقباض و یا حذف کمان برای ساده سازی کامل شبکه خواهد شد.

معنای حذف یکی از فعالیتهای پروژه است.

در این راستا در طراحی الگوریتمهای مربوطه برای محاسبه $F(t)$ قطعاً مناسبترین حالت، بررسی امکانپذیری انجام انقباض یا حذف در حالاتی است که اصولاً تأثیری در تعداد مسیرهای شبکه ندارند و یا حداقل مقدار بروز می‌کنند. همچنین در زمینه معضل دوم باستی اثری افزایشی در مدت مسیرهای دربرگیرنده انقباض یا

واژه نامه

- | | |
|----------------|---------------------|
| 1. planar | 4. global bridge |
| 2. convolution | 5. local paths |
| 3. plane | 6. homomorphic with |

مراجع

1. Harthly, H.O., and Wortham, A.W., "A Statistical Theory for PERT Critical Path Analysis," *Management Science*, Vol. 12, No. 10, pp. 469-481, 1966.
2. Ringer, L.J., "Numerical Operators for Statistical PERT Critical Path Analysis," *Management Science*, Vol. 16, No. 2, pp. 136-143, 1969.
3. Kulkarni, V.G., and Adlakha, V.G., "Markov and Markov-Regenerative PERT Network," *Journal of Operations Research*, Vol. 34, No 5, pp. 769-781, 1986.
4. Martin, J.J., "Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network," *Operations Research*, Vol. 13, No. 1, pp. 46-66, 1965.
5. Dodin, B., "Bounding the Project Completion Time Distribution in PERT Networks," *Journal of Operations Research*, Vol. 33, No. 4, pp. 826-881, 1985.
6. Robillard, P., and Trahan, M., "The Completion Time of PERT Networks," *Journal of Operations Research*, Vol. 25, No. 1, pp. 15-29, 1977.
7. Kleindorfer, G.B., "Bounding Distributions for a Stochastic Acyclic Network," *Journal of Operations Research*, Vol. 19, No. 7, pp. 1586-1601, 1977.
8. Van Slykle, R.M., "Monte Carlo Methods and the PERT Problem," *Operations Research*, Vol. 11, No. 5, pp. 839-860, 1963.
9. Sculli, D., "The Completion Times of PERT Networks," *Journal of Operations Research Society*, Vol. 34, No. 2, pp. 155-158, 1983.
10. Kamburowski, J., "An Upper Bound on the Expected Completion Time of PERT Networks," *European Journal of Operational Research Society*, Vol. 21, No. 2, pp. 206-212, 1985.
11. Fulkerson, D.R., "Expected Critical Path Length in PERT Networks," *Operations Research*, Vol. 10, No. 6, pp. 808-817, 1962.
12. Clingen, C.T., "A Modification of Fulkerson's PERT Algorithm," *Operations Research*, Vol. 12, No. 4, pp. 629-632, 1964.
13. Elmaghraby, S.E., "On the Expected Duration of PERT Type Networks," *Management Science*, Vol. 13, No. 5, pp. 299-306, 1967.
14. Robillard, P., and Trahan, M., "Expected Completion Time in PERT Networks," *Operations Research*, Vol. 24, No. 1, pp. 177-182, 1976.
15. Lindsey, J.H., "An Estimate of Expected Critical Path Length in PERT Networks," *Journal of Operations Research*, Vol. 20, No. 4, pp. 800-812, 1972.
16. Dodin, B.M., "Approximating the Distribution Function in Stochastic Network," *Computers and Operations Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 251-264, 1985.
17. Ord, J.K., "Simple Approximation to the Completion Time Distribution for a PERT Networks," *Journal of Operations Research Society*, Vol. 42, No. 11, pp. 1011-1017, 1991.

18. Dodin, B. M., and Sirvanci, M., "Stochastic Networks and the Extreme Value Distribution," *Computers and Operations Research*, Vol. 17, No. 4, pp. 397-409, 1990.
19. Williams, T.M., "Critically in Stochastic Networks," *Journal of Operations Research Society*, Vol. 43, No. 4, pp. 353-357, 1992.
20. Williams, T.M., "Practical Use of Distributions in Networks Analysis," *Journal of Operational Research Society*, Vol. 43, No. 3, pp. 265-270, 1992.
21. Soroush, H.M., "Risk Taking in Stochastic PERT Networks," *European Journal of Operational Research*, Vol. 67, pp. 221-241, 1993.
22. Soroush, H. M., "The Most Critical Path in a PERT Networks," *Journal of Operations Research Society*, Vol. 45, No. 3, pp. 287-300, 1994.
23. Magott, J., and Skudlarski, K., "Estimating the Mean Completion Time of PERT Networks with Exponentially Distributed Durations of Activities," *European Journal of Operational Research*, Vol. 71, No. 1, pp. 70-79, 1993.
24. Chartrand, G., and Lesniak, L., *Graphs and Digraphs*, Second Ed., Wadsworth inc., Belmont California, 1986.
25. Harary, F. *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

پیوست

۱- مطالعه ساختاری شبکه‌های سری - موازی

قضیه ۶- شبکه بدون دور $G \in AN$ که هامنی است را در نظر بگیرید. چنانچه G_1 شبکه مسطح ایزومورف با G باشد، G_1 هم شبکه‌ای بدون دور است.

اثبات: شبکه $G \in AN$ را که هامنی است در نظر بگیرید و شبکه ایزومورف مسطح آن را G_1 بنامید. فرض کنید که G_1 دارای دوری به حالت $C: v_1, v_2, \dots, v_i, v_1$ باشد. پس بایستی در G_1 کمانهای $v_1, v_2, \dots, v_i, v_1$ وجود داشته باشد. چون G_1 ایزومورف G است پس مصور به حالت $\phi v_1 = v'_1, \phi v_2 = v'_2, \dots, \phi v_i = v'_i$ وجود دارد. از طرفی طبق تعریف ایزومورفیسم بایستی در G کمانهای $v'_1, v'_2, \dots, v'_{i-1}, v'_i$ وجود داشته باشد. پس G دارای دور می‌شود که طبق فرض چون $G \in AN$ است، ناممکن است. پس G_1 نمی‌تواند دارای دور باشد.

با اثبات قضیه فوق اطمینان حاصل می‌شود که در صورتی که یک شبکه هامنی بدون دور بر صفحه نشانده شود، شبکه حاصل نیز بدون دور خواهد بود.

ساده‌ترین ساختار شبکه‌ای در محاسبه تابع توزیع زمان ختم شبکه، در شبکه‌های سری - موازی است و به همین دلیل بخشی از تلاشهای به عمل آمده قبلی برای محاسبه تابع توزیع زمان ختم شبکه، با هدف بهره‌گیری از ساختار شبکه‌ای سری - موازی بوده است.

وجوه یک شبکه سری - موازی را به دو گروه می‌توان تقسیم کرد، ۱- وجه پایه ۲- وجه غیرپایه

تعریف ۴- وجه پایه: وجه n ضلعی در یک شبکه سری - موازی را پایه گویند اگر بتوان بدون خروج از وجه مزبور آن را به طور کامل حذف کرد (این حذف به معنای جایگزینی وجه پایه با یک کمان خواهد بود).

تعریف ۵- رأس لولای قطعی: رأسی از یک وجه است که درجه ورودی و خروجی آن ۱ است.

تعریف ۶- وجه غیرپایه: وجه n ضلعی را در یک شبکه سری - موازی غیرپایه گویند اگر برای انجام عملیات سری - موازی ناچار به خروج از آن وجه باشیم (ساده‌سازی در وجه دیگر برای انجام ساده‌سازی در وجه غیرپایه لازم است).

تعریف ۷- رأس لولای ضمنی: رأسی از یک وجه را گویند که در اثر ساده‌سازی در وجهی دیگر به رأس لولای قطعی بدل شود.

قضیه ۷- یک شبکه بدون دور سری - موازی، اگر دارای وجهی n ضلعی و پایه باشد که $n \geq 3$ است، در این صورت این وجه دارای $n-2$ رأس لولای قطعی است.

اثبات : با استقراء بر n قضیه قابل اثبات است.

نتیجه : یک شبکه بدون دور با P رأس و یک ابتدا و انتهای، سری - موازی است اگر مجموع رئوس لولای قطعی و ضمنی برای آن $P-2$ باشد. یعنی کلیه رئوس به غیر از ابتدا و انتهای شبکه، لولای قطعی و یا ضمنی هستند.

قضیه ۸- هر شبکه سری - موازی عضو مجموعه AN ، هامنی است.

اثبات: شبکه سری - موازی $G \in AN$ است را در نظر بگیرید. اگر G زیرشبکه همسان ریخت^۶ با شبکه جهتدار شده H یا $K(3,3)$ یا K نداشته باشد، هامنی خواهد بود. به دلیل آنکه فرض شده است که شبکه G سری - موازی است بنابراین هر گره آن لولای قطعی یا لولای ضمنی است. در H یا $K(3,3)$ جهتدار شده، هیچ یک از گره‌ها، لولای قطعی نیست (درجه ورودی و خروجی هیچ گرهی در این دو شبکه ۱ نیست). پس اگر چنین زیرشبکه‌هایی و یا همسان ریخت با آن در یک شبکه سری - موازی وجود داشته باشد، باید گره‌های H یا $K(3,3)$ جهتدار شده لولای ضمنی باشند. شبکه‌های جهتدار شده H یا $K(3,3)$ با عملیات سری - موازی قابل ساده‌سازی نیستند. پس نهایت حداکثر ساده‌سازی در وجوده هر یک از این دو شبکه جهتدار شده H و $K(3,3)$ ، زیرشبکه به کمانی در شبکه‌های مذکور تبدیل می‌شود. این شبکه‌ها همان‌گونه که ذکر شد قابل کاهش تیستند. پس یک شبکه سری - موازی عضو مجموعه AN نمی‌تواند زیرشبکه‌ای همسان ریخت با H یا $K(3,3)$ جهتدار شده داشته باشد. پس هامنی است.

۲- اثبات قضیه ۳

$$idu=1,$$

$$odu=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض}$$

$$idv=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض}$$

$$odv=1$$

$$\begin{aligned} & 1_{\gamma} + 1_{\gamma} + 1_{\gamma} + 1_{\gamma} + 1_{\gamma} - (1_{\gamma} + 1_{\gamma} + 1_{\gamma}) \\ & = 1_{\gamma} 1_{\gamma} = (odu-1)(idv-1) \end{aligned}$$

$$idu=1,$$

$$odu=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض}$$

$$idv=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض}$$

$$odv=1_{\gamma}$$

$$1_{\gamma} 1_{\gamma} = (odu-1)(idv-1)$$

$$idu=1$$

$$odu=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض}$$

$$idv=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض}$$

$$odv=1$$

$$1_{\gamma} 1_{\gamma} = (odu-1)(idv-1)$$

$$idu=1$$

$$odu=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی قبل از انقباض}$$

$$idv=1_{\gamma}+1 = \text{تعداد مسیر موضعی بعد از انقباض}$$

$$odv=1_{\gamma}$$

$$1_{\gamma} 1_{\gamma} = (odu-1)(idv-1)$$