# سینماتیک و دینامیک دو ربات در حرکت فضایی یک جسم


عباس فتاح* و بیژن طهماسبی**

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان



(دریافت مقاله: ۱۳۷۷/۲/۶ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۷/۷/۱۳)



***چکیده*** *- در این مقاله سینماتیک و دینامیک دو ربات صنعتی در حالت فضایی که با همدیگر جسمی را جابه‌جا می‌کنند بررسی می‌شوند. با استفاده از روش موسوم به NOC[1] معادله‌های مستقل حاکم بر حرکت دو ربات همکار استخراج می‌شود. تاریخچه زمانی کوپل مفاصل بر اساس اعمال محدودیتهایی برای به دست آوردن جواب منحصر به فرد به دو روش حداقل نیروی وارد بر جسم متحرک و حداقل مقدار کوپل به‌کار رفته در مفاصل محاسبه خواهد شد. همچنین با مثالی برای دو ربات همکار یکسان از نوع پوما ۵۶۰[2] تاریخچهٔ زمانی دوران مفاصل و نرخ تغییرات آنها به همراه تاریخچهٔ زمانی کوپلهای مفاصل به‌دست آمده و نتایج حاصل از تغییرات زمان کل انجام کار مورد بررسی قرار می‌گیرد.*


# Kinematics and Dynamics of two Cooperating Robots in Spatial Moving of an Object


**A. Fattah and B. Tahmasebi**

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology



**ABSTRACT-** *The kinematics and dynamics of two industrial cooperating robots are presented in this paper. The NOC (natural orthogonal complement) method is used to derive the dynamical equations for the motion of two cooperating robots. The joint torques of the two robots are determined based on the optimization techniques in order to obtain unique solution for joint torques. To this end, minimizing the crushing force and moment on the moving object as well as minimizing the joint torques of the two robots are the two methods which are used to determine the joint torques. As an example, the joint angles and their time derivatives as well as the time history of joint torques of two cooperating Puma 560 robots are determined.*


## ۱- مقدمه

در سالهای اخیر استفاده از دو ربات با همدیگر در صنعت اتوماسیون و صنایع فضایی مورد توجه واقع شده‌است. این اساساً به این دلیل است که دو ربات می‌توانند جسم بزرگتری را جابه‌جا

---

* استادیار ** کارشناس ارشد




[ DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.1.9.0 ]

## فهرست علائم

- $C$ ماتریس کریولیس و گریز از مرکز
- $f_i$ نیروی وارد بر مرکز ثقل عضو iام ربات
- $I_i^{c_i}$ لنگر ماند عضو i ام نسبت به مرکز ثقل آن
- $J$ ژاکوبین سرعت انتهایی ربات به سرعت مفاصل
- $L$ ماتریس انتقال
- $m_i$ جرم عضو i ام
- $M$ ماتریس جرم تعمیم یافته کل ربات
- $n$ درجهٔ آزادی
- $n_i^{c_i}$ کوپل وارد بر مرکز ثقل عضو iام
- $N$ ماتریس NOC
- $r$ تعداد اعضای متحرک ربات
- $S$ ماتریس سرعت زاویه‌ای کل اعضای ربات
- $t$ بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی متشکل از تمام اعضای ربات
- $t_E$ بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی جسم متحرک
- $T$ زمان کل انجام (پریود انجام کار)
- $v_i$ سرعت خطی عضو i ام
- $w^C$ بردار نیرو و کوپلهای محدودیت سینماتیکی
- $w^D$ بردار نیرو و کوپلهای میرا
- $w^G$ بردار نیرو و کوپلهای جاذبه
- $w^W$ بردار نیرو و کوپلهای خارجی و مفاصل
- $w$ بردار نیروهای تعمیم یافته
- $x , y , z$ مختصات مرکز جرم جسم متحرک

**علائم یونانی**

- $\omega_i$ سرعت زاویه‌ای عضو i ام
- $\dot{\theta}_i$ سرعت زاویه‌ای مفصل i ام
- $\dot{\Theta}$ بردار n بعدی سرعتهای مستقل تعمیم یافته
- $\tau$ بردار کوپل متشکل از تمام مفاصل ربات
- $\phi$ زاویه دوران جسم متحرک

کرده و یا قطعات پیچیده را مونتاژ کنند. شرایطی که در آن رباتهای همکار باید با هم عمل کنند تا کار از پیش توصیف شده‌ای را انجام دهند پیوسته کاملتر می‌شود و این خود باعث افزایش کاربرد این نوع رباتها می‌شود. در زمینهٔ دینامیک رباتهای همکار تاکنون مطالعات زیادی صورت گرفته است که در هر یک از این مطالعات روش خاصی را برای مدل کردن سیستم رباتها در نظر گرفته‌اند [۱-۵]. وقتی‌که دو ربات جسمی را می‌گیرند مکانیزم زنجیره‌ای بسته‌ای تشکیل می‌شود که تعداد درجات آزادی سیستم کمتر از مجموع تعداد مفاصل است و چون در رباتهای صنعتی برای هر مفصل محرک خاصی نصب می‌شود، لذا حلهای بیشماری برای کوپلهای موجود در مفاصل موجود خواهد بود. از این مطلب استنباط می‌شود که محدودیتهایی باید اعمال کرد تا این محدودیتها در جهت بهینه سازی نوع مشخصی از کار معرفی شوند تا کوپلهای مفاصل مقدار منحصر به‌فردی پیدا کنند. برای این منظور بایستی بر اساس تابع هدف و محدودیتهای مورد نظر راه حل مناسب را انتخاب کرد. در این رابطه روشهای بسیاری ارائه شده است. از جمله این تحقیقات مسئلهٔ توزیع بهینهٔ بار برای دو ربات صنعتی است که جسمی را جابه‌جا می‌کنند [۶]. در مقالهٔ مذکور ابتدا روش مصرف انرژی حداقل ملاک بهینه‌سازی قرار داده شده است و الگوریتمهای بهینه‌سازی با قید یا بدون قید بر روی کوپل مفاصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل بیانگر این مطلب است که الگوریتمهای فوق از نظر محاسباتی پیچیده‌اند و مناسب کاربردهای زمانی نیستند و نهایتاً الگوریتم مبتنی بر توزیع بار با حداقل نیروی به‌کار رفته نتیجه بهتری داشته است.

روش دیگر بهینه سازی بر اساس الگوریتمی است که ترکیبی از مصرف انرژی و تعادل نیرو را به عنوان معیار در نظر می‌گیرد [۷]. یک روش توزیع بهینهٔ نیرو برای رباتهای همکار بر اساس برنامه ریزی غیر خطی با تابع هدف از مرتبهٔ دوم و محدودیتهای مساوی خطی و نامساوی درجهٔ دوم ارائه شده است که در آن از محدودیت نیروهای وارد بین جسم متحرک و رباتها و حداکثر کوپل مفاصل به عنوان محدودیت درجهٔ دوم استفاده شده است [۸].

هدف این مقاله بررسی این نوع رباتهای همکار در حالت فضایی است. سینماتیک و دینامیک دو ربات در حرکت صفحه‌ای یک جسم قبلاً مورد بررسی قرار گرفته است [۹]. بررسی رباتهای همکار در حالت فضایی با مقایسهٔ آنها در حالت صفحه‌ای [۹] دارای ویژگیهای خاصی است که پیچیدگی محاسباتی قابل ملاحظه‌ای را وارد مسئله می‌کند. در حرکت فضایی، جابه‌جایی جسم در فضای سه بعدی صورت می‌گیرد. به همین دلیل دوران جسم نیز حول محوری با سه مؤلفهٔ دوران صورت می‌گیرد و این محور دوران با زمان تغییر می‌کند. در صورتی که درحرکت صفحه‌ای دوران جسم

[ DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.1.9.0 ]

جدول ۱ - پارامترهای دناویت - هارتنبرگ مربوط به ربات پوما ۵۶۰

| مفصل i | $\alpha_{i-1}$ (درجه) | $a_{i-1}$ (متر) | $d_i$ (متر) | $\theta_i$ (درجه) |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | -۹۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۰/۴۳۲ | ۰/۹۴۹ | -۹۰ |
| ۴ | -۹۰ | ۰/۰۲ | ۰/۴۳۲ | ۰ |
| ۵ | ۹۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۶ | -۹۰ | ۰ | ۰ | ۰ |

فقط حول یک محور عمود بر صفحه صورت می‌گیرد. در حالت فضایی محاسبهٔ طراحی مسیر، سینماتیک معکوس و به دست آوردن ژاکوبین سرعت به مراتب پیچیده‌تر از حالت صفحه‌ای آن است. تعداد درجات آزادی در حالت فضایی بیشتر از حالت صفحه‌ای است و به کار بردن روشهای بهینه در این حالت پیچیده‌تر از حالت صفحه‌ای است. علاوه بر مطالب فوق، در مقالهٔ حاضر خلاصه‌ای از مطالعات انجام شده توسط محققان در این زمینه نیز آورده شده‌است. دو ربات صنعتی یکسان از نوع پوما ۵۶۰ جسمی را در فضا می‌گیرند که در این مقاله به آن جسم متحرک گفته می‌شود. این دو ربات همکار برای جابه‌جایی جسم متحرک و سپس دوران آن در فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند، شکل(۱). هر یک از رباتها در حالت کلی دارای شش درجه آزادی اند و تمامی مفاصل آنها از نوع دورانی (یک درجهٔ آزادی) است. پارامترهای دناویت - هارتنبرگ[۳] مربوط به این رباتها در جدول (۱) آورده شده است [۱۰]. دو ربات دارای دوازده مفصل محرک[۴] هستند که با توجه به اینکه تعداد درجات آزادی سیستم به دست آمده از مکانیزم زنجیره بسته دو ربات در حالت فضایی شش است در نتیجه تعداد درجات آزادی سیستم کمتر از مجموع تعداد مفاصل است. برای تحلیل این مسئله نیاز است که اثر جسم متحرک (از جمله جرم و طول و لنگرماند آن) در عضوهای انتهایی منظور شود. با این کار ما می‌توانیم هر ربات را جداگانه با به کار بردن نیروهای محدودیت از جانب ربات دیگر به آن به تنهایی بررسی کنیم و نهایتاً معادله‌های دینامیکی دو ربات را با هم تلفیق کنیم. ابتدا طراحی مسیر در فضای کارتزین صورت گرفته، سپس با دانستن مسیر حرکت انتهای ربات می‌توان با استفاده از سینماتیک معکوس [۱۰] تاریخچهٔ زمانی دوران مفاصل رباتها را پیدا کرد و با استفاده از آنها نرخ تغییرات دوران مفاصل و همچنین شتاب زاویه‌ای آنها را پیدا کرد. نهایتاً با استفاده از حل معادله‌های دینامیکی و اعمال روشهای بهینه سازی تاریخچهٔ زمانی کوپل مفاصل با استفاده از روش موسوم به NOC [۱۱ و ۱۲] به دست می‌آید. در این روش وابستگی معادله‌ها به نیروهای محدودیت حذف شده و معادله‌های مستقلی استخراج خواهند شد. کوپل مفاصل بر اساس دو روش یکی حداقل کردن نیروی وارد بر جسم متحرک و دیگری حداقل کردن مقدار کوپل به کار رفته در مفاصل محاسبه خواهد شد. روش دیگر بررسی رباتهای همکار به گونه‌ای است که تعداد مفاصل تحریک شونده با تعداد درجات آزادی سیستم یکسان باشد در نتیجه نیازی به بهینه سازی نخواهدبود [۵] .

## ۲ـ طراحی مسیر

منظور از طراحی مسیر یافتن مسیری در فضاست که تاریخچهٔ زمانی موقعیت، سرعت و شتاب را در فضای مفاصل یا فضای کارتزین بیان می‌کند. در مورد رباتهای همکار، حرکت جسم متحرک همواره مورد نظر است از این‌رو طراحی مسیر در فضای کارتزین صورت می‌گیرد. در طراحی مسیر در فضای کارتزین حرکت جسم متحرک از وضعیت اولیه به وضعیت دلخواه نهایی مورد نظر است. این حرکت مستلزم تغییری در دوران موقعیت جسم متحرک نسبت به دستگاه مرجع است. به همین علت در حالت فضایی متغیرهایی که در طراحی مسیر برای مشخص کردن دوران و موقعیت جسم متحرک مورد استفاده قرار می‌گیرند به ترتیب عبارت‌اند از زاویه دوران $\phi$ و مؤلفه‌های بردار یکه محور دوران e

به همراه مختصات x، y و z که مختصات مرکز جرم جسم متحرک نسبت به مختصات مرجع‌اند. برای بیان این متغیرها بر حسب زمان باید مسیری را در نظر بگیریم که علاوه بر براورده کردن شرایط مرزی، هموار نیز باشد. از بین توابعی که این خصوصیات را دارا باشد در این مقاله از تابع سیکلوییدی به شکل زیر استفاده می‌شود.

$$h=H\left[\frac{s}{T}-\frac{۱}{۲\pi}\operatorname{Sin}\left(\frac{۲\pi s}{T}\right)\right] \tag{۱}$$

که در آن T مدت زمان انجام کار رباتها، s زمان بر حسب ثانیه و $\hat{H}$ هم مقدار ثابتی است. زاویه دوران $\phi$ و برداریکه محور دوران e با داشتن ماتریس چرخش جسم متحرک R نسبت به دستگاه مرجع قابل محاسبه‌اند. ماتریس R را با توجه به وضعیت دستگاه مختصات جسم متحرک نسبت به دستگاه مرجع می‌توان مشخص کرد [۱۳].

## ۳ـ مدلسازی و معادله‌های دینامیکی

دو ربات که با هم جسمی را نگه داشته‌اند در نظر بگیرید، برای راحتی آنها را راهبر[۵] و پیرو[۶] می‌نامیم [۶]. در حالتی‌که حرکات مفاصل ربات با حرکت دلخواه و مورد نظر جسم متحرک تعیین شود آن را راهبر می‌گوییم. اما حرکت پیرو از مسیر حرکت راهبر همراه با محدودیتهای اعمالی به دلیل وجود جسم، برنامه‌ریزی می‌شود. واضح است که یک ربات حرکت ربات دیگر را هدایت می‌کند. نیرویی که راهبر به جسم وارد می‌کند در حالت فضایی یک بردار (۱×۶) است که شامل سه مؤلفه کوپل و سه مؤلفه نیروست. با استفاده از روش نیوتن اویلر [۱۰] معادله‌های دینامیکی حرکت هر یک از رباتها به شکل زیر است

$$I_i^{c_i}\dot{\omega}_i=-\omega_i\times I_i^{c_i}\times\omega_i+n_i^{c_i} \tag{۲}$$

$$m_i\dot{v}_{c_i}=f_i \tag{۳}$$

دو معادلهٔ بالا را می‌توان در قالب معادلهٔ کلی با جمع کردن معادله‌های تمام اعضا به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} M\dot{t}&=-SMt+w\\ w&=w^{۱}+w^{C}\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن M ماتریس جرم است. t بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی تمام اعضای یک ربات است که تعداد اعضای متحرک آن r است و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$t=\left[\omega_۱^T,v_۱^T,\omega_۲^T,v_۲^T,\ldots,\omega_r^T,v_r^T\right]^T \tag{۵}$$

که در معادلهٔ (۴)، w بردار نیروهای تعمیم یافته است و شامل $w^۱$ و $w^C$ است. بردار نیرو و کوپل خارجی و مفاصل $w^W$، نیروی میرا $w^D$ و نیروی جاذبه $w^G$ اجزای تشکیل دهندهٔ بردار $w^۱$ هستند. همچنین $w^C$ بردار نیرو و کوپل محدودیتهای سینماتیکی است که به خاطر اتصال سینماتیکی بین اعضای ربات ایجاد می‌شود. با معرفی روش NOC [۱۱ و ۱۲] بردار نیرو و کوپل محدودیتهای سینماتیکی از معادله‌ها حذف خواهند شد.

## ۴ـ فرمولبندی محدودیتهای سینماتیکی (روش NOC)

برای یک سیستم n درجه آزادی، بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی تمام اعضای یک ربات، t، می‌تواند به صورت ترکیب خطی از $\dot{\Theta}$ تعریف شود که در آن $\dot{\Theta}$ بردار n بعدی سرعتهای مستقل تعمیم یافته‌است

$$t=N\dot{\Theta} \tag{۶}$$

در معادلهٔ بالا N به‌نام ماتریس مؤلفه‌های متعامد طبیعی[۷] خوانده می‌شود [۱۱ و ۱۲]. بسته به اینکه ما بخواهیم مسئله را در چه مختصاتی حل کنیم $\dot{\Theta}$ شکل خاص خود را دارد و بر طبق آن N قابل محاسبه است. ما مسئله را در فضای مفاصل[۸] بررسی کرده‌ایم که در این حالت $\dot{\Theta}$ متشکل از سرعتهای زاویه‌ای مفاصل ربات‌اند.

$$\dot{\Theta}=\left[\dot{\theta}_۱,\dot{\theta}_۲,\ldots,\dot{\theta}_r\right]^T \tag{۷}$$



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.1.9.0 ]

در حالت بالا N یک ماتریس (6r x n) است. با جایگذاری t از معادلهٔ (۶) و $\dot{t}$ مشتق t نسبت به زمان در معادلهٔ (۴) و همچنین ضرب کردن معادلهٔ به‌دست آمده از طرف چپ در $N^T$، معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$N^T M N \ddot{\Theta} = -N^T M \dot{N} \dot{\Theta} - N^T S M N \dot{\Theta} + N^T w^1 \qquad (۸)$$

خاصیت ماتریس N به گونه‌ای است که می‌توان اثبات کرد $N^T w^C = 0$ [۱۳]. در نتیجه با ضرب کردن طرفین معادله‌ها از سمت چپ در $N^T$ بردار نیرو و کوپل محدودیتهای سینماتیکی حذف خواهند شد و یک سری معادله‌های مستقل به دست خواهیم آورد. معادلهٔ (۸) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت [۱۲]

$$I(\Theta)\ddot{\Theta} + C(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta} = N^T w^W + N^T w^D + N^T w^G \qquad (۹)$$

که در آن

$$I \equiv N^T M N \ , \quad C \equiv N^T M \dot{N} + N^T S M N$$

است. با توجه به معادلهٔ زیر

$$N^T w^W = \tau + J^T w^E$$

که در آن $\tau$ بردار کوپلهای مفاصل، $w^E$ بردار نیرو و کوپل موجود در انتهای ربات و J ژاکوبین سرعت دستگاه متصل به انتهای ربات نسبت به سرعت زاویه‌ای مفاصل است [۱۳]. نهایتاً معادلهٔ (۹) به صورت زیر نوشته خواهد شد

$$I(\Theta)\ddot{\Theta} + C(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta} = \tau + J^T w^E + \delta + \gamma \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$\delta \equiv N^T w^D \ , \quad \gamma \equiv N^T w^G$$

در معادله‌های بالا با توجه به اینکه دو ربات مورد استفاده دو ربات همکار از نوع پوما ۵۶۰ هستند، N ماتریس ۶×۳۶، $\dot{\Theta}$، $\tau$، $\delta$ و $\gamma$ بردارهای ۱×۶ و I، C و J ماتریسهای ۶×۶ هستند.

## ۵- محاسبهٔ تاریخچهٔ زمانی کوپل مفاصل

در این قسمت کوپل مفاصل به دو روش محاسبه می‌شود. همان‌طوری که قبلاً گفته شد سیستم دو ربات همکار دارای پاسخهای متعددی می‌تواند باشد، لذا باید محدودیتهایی اعمال کرد تا پاسخهای منحصر به فردی داشته باشیم. در ادامه بر اساس دو روش زیر کوپل مفاصل محاسبه خواهد شد

الف - محاسبهٔ کوپل مفاصل بر اساس حداقل کردن نیروی وارد بر جسم متحرک

ب - محاسبهٔ کوپل مفاصل بر اساس حداقل کردن مقدار کوپل به کار رفته در مفاصل

### ۵-۱- محاسبهٔ کوپل مفاصل بر اساس حداقل کردن نیروهای وارد بر جسم متحرک

با فرض اینکه جسم متحرک شکننده باشد نیروهای وارد بر جسم را حداقل می‌کنیم. ابتدا معادله‌های دینامیکی حرکت را برای دو ربات نوشته و سپس آنها را با هم کوپل می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۱۰) و استفاده از اندیس A برای ربات راهبر و اندیس B برای ربات پیرو معادله‌های حرکت برای هر کدام از رباتها به شکل زیر نوشته خواهند شد

$$I_A(\Theta_A)\ddot{\Theta}_A + C_A(\Theta_A,\dot{\Theta}_A)\dot{\Theta}_A = \gamma_A + \tau_A + \tau_A^C \qquad (۱۱)$$

$$I_B(\Theta_B)\ddot{\Theta}_B + C_B(\Theta_B,\dot{\Theta}_B)\dot{\Theta}_B = \gamma_B + \tau_B + \tau_B^C \qquad (۱۲)$$

در معادله‌های بالا از جملهٔ حاوی نیروهای میرا صرف‌نظر شده‌است. در معادله‌های بالا

$$\tau_A^C = J_A^T w_A^E \ , \quad \tau_B^C = J_B^T w_B^E \ , \quad w_A^E = -w_B^E \qquad (۱۳)$$

است که $w_A^E$ و $w_B^E$ به ترتیب بردار نیرو و کوپل اعمالی بر ربات A از طرف ربات B که در واقع همان نیروی وارد بر جسم متحرک است و بردار نیرو و کوپل اعمالی بر ربات B از طرف ربات A که به صورت نیروی عمل و عکس العمل عمل خواهند کرد. از ترکیب معادله‌های (۱۱) و (۱۲) به شکل کلی معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$I(\Theta)\ddot{\Theta}+C(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta}=\gamma+\tau+\tau^{C} \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$I\equiv\begin{bmatrix} I_A & o \\ o & I_B \end{bmatrix} \ , \ C\equiv\begin{bmatrix} C_A & o \\ o & C_B \end{bmatrix}$$

$$\Theta\equiv\begin{pmatrix} \Theta_A \\ \Theta_B \end{pmatrix} \ , \ \gamma\equiv\begin{pmatrix} \gamma_A \\ \gamma_B \end{pmatrix} \ , \ \tau\equiv\begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix}$$

$$\tau^{C}\equiv\begin{pmatrix} \tau_A^{C} \\ \tau_B^{C} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_A^{T} \\ -J_B^{T} \end{pmatrix} w_A^{E} \ , \qquad (۱۴\ \text{-الف})$$

در معادله‌های بالا $w_A^E$ بردار ۱×۶ و بقیه بردارها ۱×۱۲ و ماتریسهای I و C ۱۲×۱۲ هستند. از معادلهٔ (۱۴)، $\tau_C$ را محاسبه کرده و با توجه به تعریف $\tau_C$ در معادلهٔ (۱۴ - الف) نیروی $w_A^E$ وارد بر جسم متحرک را به دست می‌آوریم که تابعی از کوپل مفاصل خواهد بود. برای حداقل کردن نیروی وارد بر جسم متحرک تابع هدف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f=\frac{۱}{۲}\, w_A^{E^T} w_A^{E} \qquad (۱۵)$$

و سپس با استفاده از روش حل حداقل مربعات[۹] تابع f را حداقل کرده و از آنجا، کوپل مفاصل محاسبه خواهند شد. تابع f تابعی درجه دوم نسبت به متغیرها (کوپلهای مفاصل) است. به منظور حداقل کردن آن نسبت به متغیرها مشتق جزیی گرفته و به یک سری معادله‌های خطی خواهیم رسید که تعداد معادله‌ها و مجهولها برابر خواهند بود. لازم به ذکر است که کارخانجات سازندهٔ موتورها محدودیت کوپل آنها را مشخص کرده‌اند، لذا ما زمان انجام کار یا پریود زمانی را به نحوی در نظر می‌گیریم تا کوپلهای به دست آمده در حوزهٔ محدودیتهای مشخصه از طرف کارخانه باشد.

## ۵-۲- محاسبه کوپل مفاصل بر اساس حداقل کردن مقادیرکوپلها

با فرض اینکه جسم به حد کافی سخت باشد می‌توان محدودیت مورد نظر را برای حداقل کردن کوپل مفاصل به کار برد.

برای این منظور ابتدا باید نیروهای قیدی $(\tau^C)$ را از معادلهٔ (۱۴) حذف کرد. برای رهایی از عبارت $\tau^C$ ماتریس انتقال L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dot{\Theta}\equiv L(\Theta)\, t_E \qquad (۱۶)$$

که در آن L یک ماتریس ۶×۱۲ و $t_E$ بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی جسم متحرک است که متشکل از سرعت زاویه‌ای جسم متحرک و سرعت خطی مرکز جرم آن نسبت به دستگاه مرجع است. با جایگذاری معادلهٔ (۱۶) در معادلهٔ (۱۴) و ضرب معادلهٔ به دست آمده از سمت چپ در $L^T$، معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} & L^{T} I\dot{L}\, t_E + L^{T} I L \dot{t}_E + L^{T} C L\, t_E \\ & = L^{T}\gamma + L^{T}\tau + L^{T}\tau^{C} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با توجه به تعریف $\tau_C$ در معادلهٔ (۱۴ - الف) چنانچه $L^T$ به شکل زیر تعریف شود عبارت $L^T\tau^C$ صفر خواهد شد

$$L^{T}=\left[J_A^{-T}, J_B^{-T}\right] \qquad (۱۸)$$

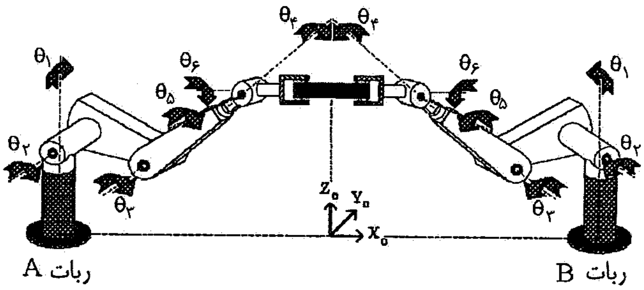
و معادلهٔ (۱۷) به صورت زیر نوشته خواهد شد

$$L^{T}\tau = \text{LHS}\ (\text{معادله ۱۷}) - L^{T}\gamma \qquad (۱۹)$$

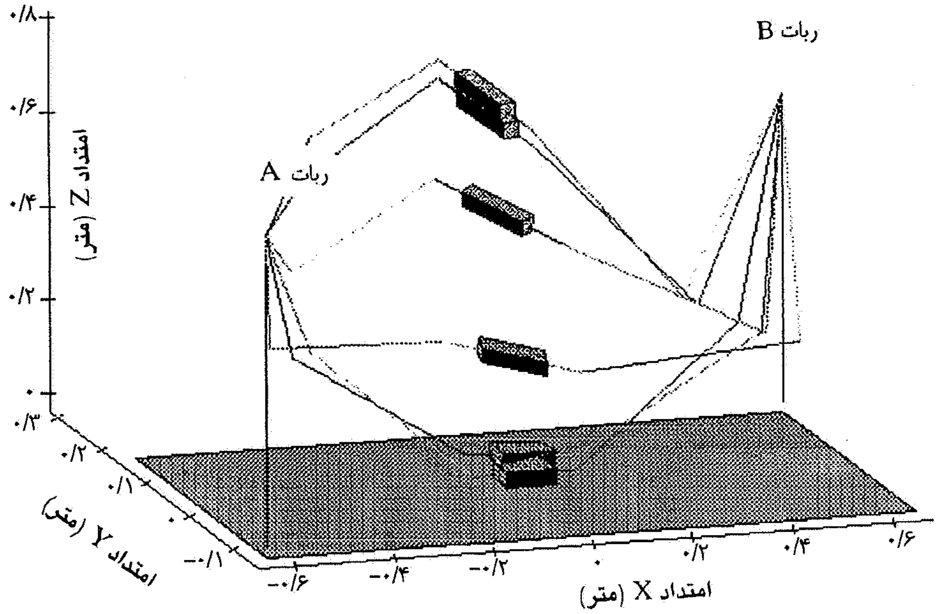
که در آن LHS منظور سمت چپ است. معادلهٔ بالا یک دستگاه معادله‌های فرومعین[۱۰] و حل آن برای $\tau$ بر اساس روش حل حداقل مربعات به دست می‌آید. در نتیجه معادلهٔ نهایی برای محاسبه کوپل مفاصل به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \tau = & L[L^{T}L]^{-1}(L^{T} I \dot{L} t_E + L^{T} I L \dot{t}_E \\ & + L^{T} C t_E) - L[L^{T}L]^{-1} L^{T}\gamma \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

شایان ذکر است $[L^TL]$ یک ماتریس ۶×۶ است و در صورتی معکوس پذیر است که مرتبهٔ[۱۱] ماتریس $L^T$ حداقل ۶ باشد که با




**شکل ۱- رباتهای همکار A و B در حال نگهداری جسم متحرک**

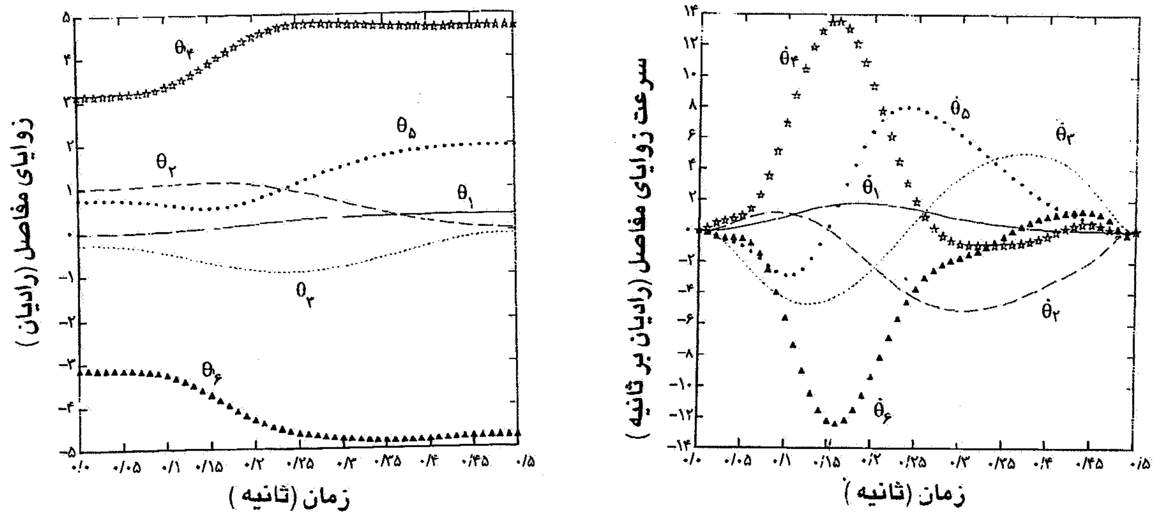



**شکل ۲- حرکت جسم متحرک باتوجه به مسیر مشخص شده**

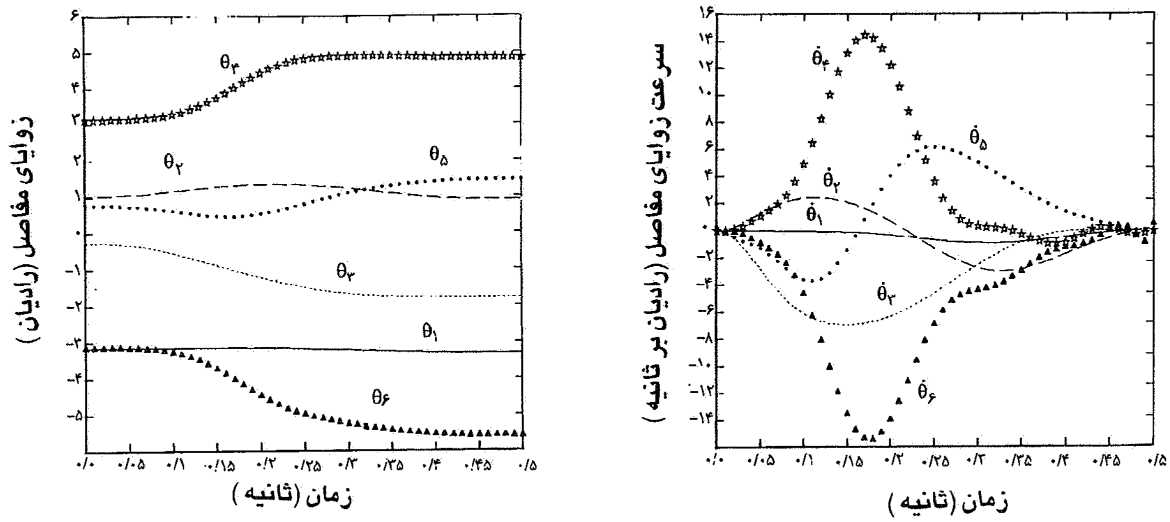
توجه به تعریف آن، مرتبه‌اش برابر ۶ خواهد بود یا به عبارتی ماتریس $[L^TL]$ معکوس پذیر است.

## ۶ـ نتایج

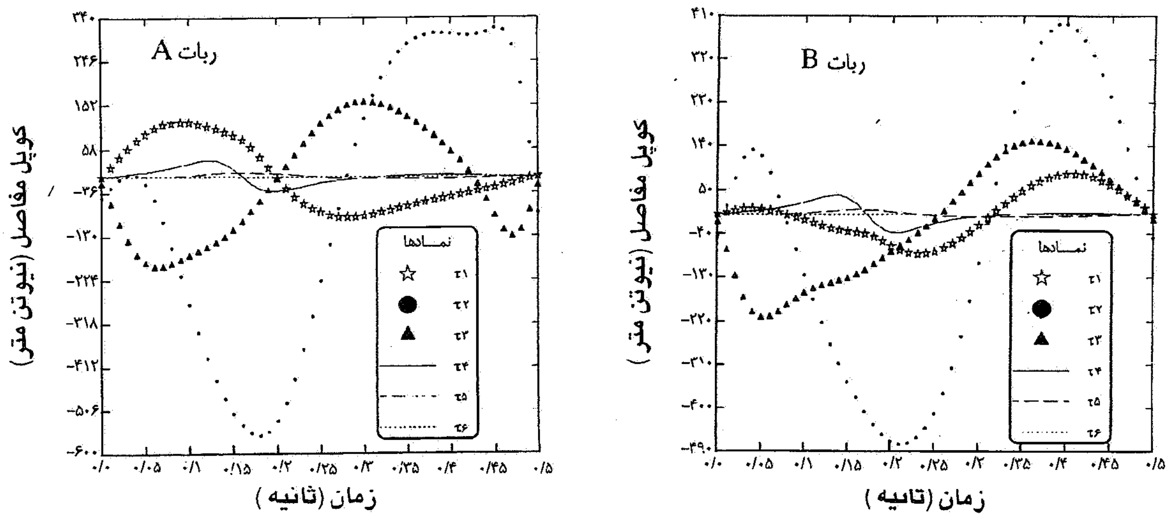
دو ربات صنعتی از نوع یکسان پوما ۵۶۰ برای بلندکردن جسم متحرک همگن به جرم ۵ کیلوگرم و طول ۱۰۰ میلیمتر استفاده می‌شود. رباتهای مذکور جسم را از مبدا مختصات به نقطه‌ای با مختصات ۶۶۰ = Z و ۲۰۰ = Y و ۱۰۰ = X میلیمتر برده و دستگاه مختصات انتهای ربات A نسبت به دستگاه مختصات مرجع ابتدا به اندازهٔ (۹۰-) درجه حول محور $Y_O$ و سپس به اندازهٔ (۹۰+) درجه حول محور $Z_O$ دوران می‌کنند، شکل (۱). ارتفاع پایه رباتها ۶۶۰ میلیمتر بوده و فاصلهٔ پایه‌هایشان ۱۲۹۶ میلیمتر است. با حل معادله‌های سینماتیک معکوس برای رباتها، زوایای مفاصل و نرخ تغییرات آنها به دست می‌آیند [۱۳]. مسیر حرکت جسم متحرک با توجه به مسیر مشخص شده در شکل (۲) نشان داده شده‌است. همچنین زوایای مفاصل و نرخ تغییرات آنها در شکلهای (۳) و (۴) نمایش داده شده‌است. با به دست آوردن زوایای مفاصل و تغییرات آنها نسبت به زمان و حل معادهای دینامیکی در فضای مفاصل مورد بحث در بخش (۵) مقادیر کوپل مفاصل با در نظر گرفتن حداقل نیروی وارد بر جسم متحرک و همچنین حداقل کوپل مورد نیاز مفاصل محاسبه شده‌است که نتایج آنها در شکلهای (۵) و (۶) نشان داده شده‌است. نتایج مربوط به کوپل مفاصل برای زمانهای مختلف انجام کار به دست آمده است [۱۳] که به عنوان مثال فقط نتایج مربوط به ۰/۵ = T ثانیه در این مقاله نمایش داده شده‌است.




**شکل ۳- زوایای مفاصل و نرخ تغییرات آنها برای ربات A**



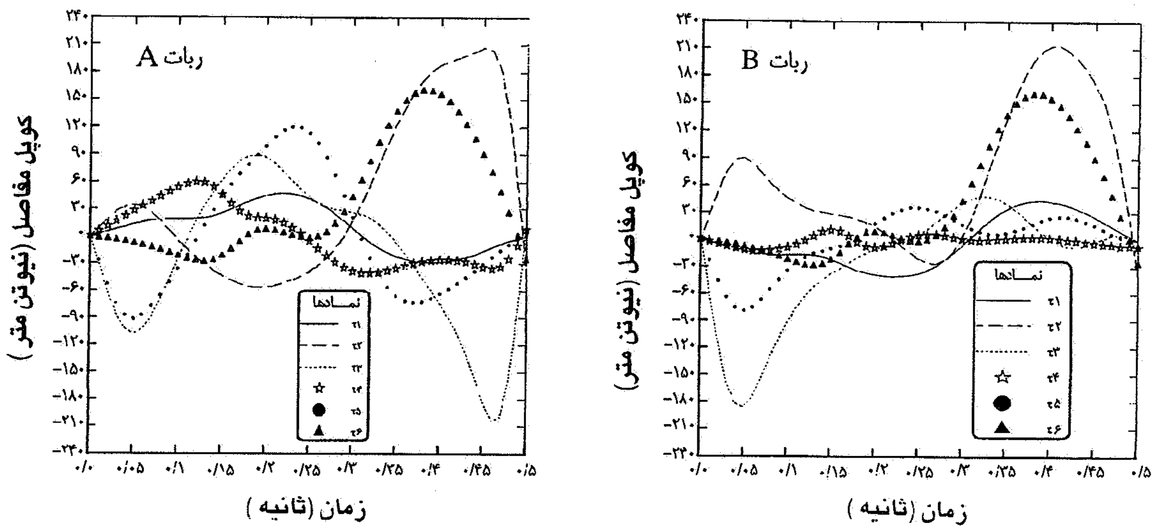

**شکل ۴- زوایای مفاصل و نرخ تغییرات آنها برای ربات B**




**شکل ۵- کوپلهای مفاصل برای ربات A و B در حالت حداقل نیروی وارد برجسم متحرک**



[ DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.1.9.0 ]




**شکل ۶- کوپلهای مفاصل برای ربات A و B در حالت حداقل کوپل مورد نیاز**

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله سینماتیک و دینامیک مربوط به حرکت یک جسم متحرک توسط دو ربات مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. براساس مسیر مورد نظر و طراحی آن و با استفاده از سینماتیک معکوس تاریخچهٔ زمانی حرکت مفاصل رباتها محاسبه شدند. سپس با استفاده از معادله‌های دینامیکی به‌دست آمده در این مقاله و همچنین استفاده از نرم افزار میپل[12] تاریخچهٔ زمانی کوپل مفاصل در دو حالت مورد بحث یکی بهینه سازی بر اساس حداقل نیروهای وارد بر جسم متحرک و دیگری بر اساس حداقل کوپل مورد استفاده مفاصل به دست آمدند. نمودارهای به دست آمده برای تاریخچه کوپل مفاصل برای رباتهای A و B در دو حالت بهینه‌سازی بیانگر این مطلب است که روند تغییرات مفاصل در دو روش شبیه به یکدیگر است. همچنین مقادیر کوپل مفاصل ۱، ۲ و ۳ در حالت حداقل کردن نیروی وارد بر جسم متحرک بزرگتر از مقادیر مشابه و مقادیر کوپل مفاصل ۴، ۵ و ۶ کوچکتر از مقادیر مشابه در حالت حداقل کردن کوپل مفاصل خواهد بود. در نتیجه بستگی به نوع کاربرد از یکی از دو روش بهینه‌سازی برای به‌دست آوردن کوپل مفاصل استفاده می‌کنیم. البته معیار بهینه سازی بر اساس حداقل کردن نیروهای وارد بر جسم متحرک مناسبتر است زیرا علاوه بر اینکه پاسخ آن از نظر زمانی سریعتر است نمودارهای کوپل مفاصل به دست آمده بر اساس معیار فوق مبین این هستند که هرچه به سمت انتهای ربات حرکت می‌کنیم وزن موتورهای به‌کار رفته در مفاصل کاهش می‌یابد که این از نظر پایداری و استحکام ربات در کنترل و دقت ربات نقش اساسی دارد. شایان ذکر است که نتایج برای مقادیر مختلف زمان انجام کار به دست آمده‌است و نتایج به دست آمده نشان دهندهٔ این مطلب است که عملکرد سریع رباتها یا به عبارتی کاهش زمان انجام کار، کوپل مفاصل را به شدت افزایش می‌دهد.

### واژه نامه

1. natural orthogonal complement
2. Puma 560
3. Denavit - Hartenberg
4. actuator
5. leader
6. follower
7. NOC
8. joint space
9. minimum norm solution
10. underdetermined
11. rank
12. Maple V

## مراجع


1. Lilly, W. K., and Orin, D. E., "Efficient Dynamic Simulation of a Single Closed Chain Manipulaors," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation,* Vol. 1, pp. 210-215, 1991.
2. Lilly, W. K., and Orin D. E., "Efficient Dynamic Simulation of Multiple Chain Robotic Mechanisms," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp. 223-231, 1994.
3. McMillan, S., Sadayappan, P., and Orin, D. E., "Efficient Dynamic Simulation of Multiple Manipulator Systems with Singularities," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotic and Automation*, Vol. 1, pp. 299-304, 1992.
4. Dickson, W. C., Connon, R. H., and Rock, S. M., "Symbolic Dynamic Modeling and Analysis of Object, Robot-Team Systems with the Experiments," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automotion*, Vol. 4, pp. 1413-1420, 1996.
5. Fattah, A., Angeles, J., and Misra, A. K., "Modelling and Simulation of Planar Cooperating Flexible-Link Manipulators," *Proceedings of the Second ISME International Mechanical Engineering Conference*, Vol. 4, pp. 947-954, 1996.
6. Zheng, Y. F., and Luh, J. Y. S., "Optimal Load Distribution for two Industrial Robots Handling a Simple Object," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 111, No. 2, pp. 232-237, 1989.
7. Orin, D. E., and Oh, S. Y., "Control of Force Distribution in Robotics Manipulator Mechanisms Containing Closed Kinematic Chains," *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, Vol. 102, pp. 134-141, 1981.
8. Kwon, W., and Lee, B.H., "Optimal Force Distribution of Multiple Cooperating Robots Using Nonlinear Programming Dual Method," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996.

۹. فتاح، ع. و طهماسبی، ب.، "سینماتیک و دینامیک دو ربات در حرکت صفحه‌ای یک جسم،" پنجمین کنفرانس سالیانه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، ص ۱۴۱۵ - ۱۴۲۳، ۱۳۷۶.

10. Craig, J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley, Reading, Massachusett, 1989.
11. Angeles, J., and Lee S., "The Formulation of Dynamical Equations of Holonomic Mechanical Systems Using Natural Orthogonal Complement," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 243-244, 1988.
12. Saha, S. K., and Angeles J., "Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 238-243, 1991.

۱۳. طهماسبی، ب.، "سینماتیک و دینامیک دو ربات در حرکت فضایی یک جسم،" پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۶.




[ DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.1.9.0 ]