تعیین زمان سوییچینگ رله، بررسی تأثیر اغتشاش و نویز و رفتار گذرا در کنترل دو وضعیتی مقاوم

غلامعلی منتظر*، حمیدرضا مومنی* و علی خاکی صدیق**
بخش مهندسی برق دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۹/۱۲ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۸/۸/۵)

چکیده - *طراحی کنترل سیستمهای توأم با عدم قطعیت همراه با کنترلگرهای رله‌ای برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم موسوم به «مسئلهٔ کنترل دو وضعیتی مقاوم» است که در طی آن برای ارضای هدفهای بالا، بهره‌های بالا و پایین رلهٔ مورد نیاز تعیین می‌شود. علاوه بر بهرهٔ رله، فرکانس قطع و وصل آن، بررسی تأثیر اغتشاش موجود در معادلهٔ حاکم بر سیستم و نیز آلودگی حالتهای سیستم به نویز اندازه‌گیری بر بهره و زمان قطع و وصل رله و در نهایت بررسی ویژگیهای رفتارگذاری سیستم (در قالب درصد بیشینهٔ فراجهش و زمان نشست در پاسخ به پلهٔ واحد) و نیز بررسی پدیدهٔ وزوز از مهمترین نکات مطرح در فرایند کنترل است. از این رو در مقالهٔ حاضر با استناد به روش ابداعی نگارندگان در تعریف و تبیین روش «حالت میانجی» در حل مسئلهٔ کنترل دووضعیتی مقاوم، با بیان قضایایی جدید و جامع، تمامی نکات بالا مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج دقیقی در حالت کلی برای هر یک از آنها به دست می‌آید. در پایان نیز نتایج حاصل از قضایا، به مسئله‌ای عملی در خصوص طراحی خود رهنمای رله‌ای مربوط به موشکی توأم با عدم قطعیت، اعمال شده، با بررسی نمودارهای شبیه سازی، صحت نتایج مورد تدقیق قرار می‌گیرد.*

Determination of Relay Switching Time, Evaluation of Disturbance and Noise Effect and Transient Behavior in Robust Binary Control

Gh.A. Montazer, H.R. Momeni and A.Kh. Sedigh

School of Engineering, Tarbiat Modarres University

ABSTRACT- *Design of uncertain control systems with relay controller to guarantee robust stability and performance has been considered as "Robust Binary Control Problem (RBCP)", which deals with determining upper and lower gains of necessary relay controller. The most important aspects of RBCP, in addition to the relay gains, are determination of relay switching time, evaluation of presence of disturbance in plant dynamic equation, effect of measurement noise on gains and on-off periods of relay, and also study of transient behaviour of the designed control system (which is considered as percent of overshoot and settling time in*

*- استادیار **- دانشیار

فهرست علائم

نماد	شرح	نماد	شرح	نماد	شرح
b	تابع نامطمئن از حالتها	p	عملگر تبدیل لاپلاس	$x_d^{(n)}$	مشتق n ام حالت میانجی
b_h	کران بالای b	S	تابع رویه لغزشی	$\mathbf{x}_d$	بردار حالت میانجی
b_l	کران پایین b	t	زمان (ثانیه)	$\tilde{x}$	خطای ردیابی
d_h^i	کران بالای $x_d^{(i)}$	T	زمان سویچینگ رله (ثانیه)	$\tilde{x}^{(n)}$	مشتق n ام حالت میانجی
d_ℓ^i	کران پایین $x_d^{(i)}$	T_{max}	حداکثر فاصلهٔ زمانی قطع و وصل رله (ثانیه)	$\tilde{\mathbf{x}}$	بردار خطای ردیابی
D	تابع اغتشاش			x_i	حالت (i-1) ام آلوده به نویز
D_h	کران بالای D	t_s	زمان نشست (ثانیه)	X	تبدیل لاپلاس x
D_ℓ	کران پایین D	u	سیگنال کنترل	α	پارامتر معرف حالت میانجی
e	سیگنال خطا	U	بهرهٔ بالایی کنترلگر	ϕ	شعاع همسایگی حول رویه لغزشی
f	تابع نامطمئن از حالتها	x	حالت خروجی سیستم		
f^+	کران بالای f	$x^{(n)}$	مشتق n ام حالت سیستم	ψ_i	کران $\tilde{x}_i$
f^-	کران پایین f	$\mathbf{x}$	بردار حالت سیستم	λ	پارامتر معرف رویه لغزشی
L	بهرهٔ پایین کنترلگر	x_{d_1}	حالت مطلوب سیستم	η	چند جمله‌ای برحسب λ و N
n	درجهٔ سیستم	$x_{d_1}^{(n)}$	مشتق n ام حالت مطلوب	$\eta_\circ$	کران بالای η
n_i	تابع نویز مربوط به x_i	$\mathbf{x}_{d_1}$	بردار حالت مطلوب	τ	پارامتر کمکی جایگزین αt
N_i	کران بالای n_i	x_d	حالت میانجی	$\dot{\eta}_\circ$	کوچکترین کران بالای $\dot{\eta}$

unit-step response). This paper defines an innovative method to explain the "mediator state" in solving RBCP. All of the above problems will be interpreted and solved with the help of a few new comprehensive theorems. At last, using these novel results, a robust relay autopilot will be designed for an actual uncertain missile and the simulation results will be considered and discussed.

۱ - مقدمه

یکی از مهمترین مسائلی که راجع به کنترل دو وضعیتی[1] مطرح می‌شود، امکان کنترل سیستمی توأم با عدم قطعیت[2] به کمک کنترلگری رله‌ای[3] برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم[4] است. چنین مسئله‌ای از آن رو اهمیت دارد که به دلیل سادگی ساختمان و ارزانی کنترلگرهای دو وضعیتی، در بسیاری از فرایندهای صنعتی از قبیل: سیستمهای قدرت[۱]، دستگاههای تبدیل انرژی خورشیدی[۲]، کنترل دیسک گردانهای نوری [۳]، سیستمهای مخابراتی [۴]، سازه‌های فضایی [۵]، تسلیحات [۶] و... کاربرد فراوانی دارند. از سوی دیگر حل مسئلهٔ حداقل زمان[5] به کنترلگرهای دو وضعیتی [۷] و حل مسئلهٔ حداقل سوخت[6] به کنترلگر دو وضعیتی با ناحیه راکد[7] [۸] منجر می‌شود و همین موضوع سبب می‌شود تا مباحث مختلفی در مورد این نوع کنترلگرها مطرح شود که از آن جمله می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد: پیوند کنترل دو وضعیتی و کنترل بهینه [۹]، کنترل دو وضعیتی در سیستمهای اتفاقی [۱۰]، کنترل دو وضعیتی در سیستمهای گسستهٔ زمانی [۱۱] و کنترل دو وضعیتی وفقی [۱۲].

به دلایل بالا، یکی از مسائل مهم در حیطهٔ کنترل دو وضعیتی، اعمال چنین کنترلی به سیستمهای نامطمئن[8] است. زیرا بسیاری از سیستمهای فیزیکی دارای محرک رله‌ای، دچار عدم قطعیت مشهودی‌اند و لازم است با اعمال شیوه‌ای مقاوم، کنترلگری رله‌ای برای تأمین شروط پایداری و عملکرد مناسب بیابیم. چنین موضوعی موسوم به مسئلهٔ کنترل دو وضعیتی مقاوم[9] است که برای نخستین بار به طور جامع و فراگیر در [۱۳] مطرح شده است.

روش مواجه شدن با چنین مسئله‌ای مبتنی بر ایدهٔ کنترل مد لغزشی[10] است که در طی آن با تعریف تابع خوشرفتاری از حالتهای سیستم به عنوان رویه لغزشی[11] و استفاده از شرط رسش طبیعی[12]، با یافتن کرانهای عناصر بردار حالت سیستم، بهره‌های بالا و پایین

رلهٔ کاربردی مشخص می‌شود. این روش گرچه بسیار کاراست و در بسیاری از مسائل عملی به خوبی پاسخ می‌دهد [۱۴و۱۵]، لیکن در همهٔ مسائل مطروحه در آن، فرض بر این است که رلهٔ کاربردی ایده‌ال است، یعنی رله می تواند بدون هیچ تأخیری در آن واحد تغییر وضعیت داده، از حالت روشن به خاموش (یا بالعکس) درآید. اما در عمل، رله‌های واقعی دارای میزان تأخیری در تغییر حالت (موسوم به زمان سویچینگ[۱۳]) هستند و از این رو در تعیین رلهٔ مورد نیاز در حل مسئلهٔ کنترل مقاوم دو وضعیتی لازم است علاوه بر بهرهٔ رله، زمان قطع و وصل[۱۴] آن نیز مشخص شود که این هر دو (بهره و زمان سویچینگ)، در واقع شرط وجود کنترلگر رله‌ای برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم را بیان می‌کند.

با توجه به نکات مذکور، در طی این مقاله سعی می‌شود با تشریح مسئلهٔ کنترل مقاوم دو وضعیتی، با اثبات قضیه‌ای، در حالت کلی، زمان قطع و وصل رلهٔ کاربردی نیز تعیین شود. علاوه بر این چگونگی تأثیر اغتشاش و نویز اندازه‌گیری حالتها در حل مسئله و نیز ویژگیهای پاسخ گذاری سیستم، مورد بحث قرار گرفته، با اثبات قضایایی تأثیر آنها بر بهره و زمان قطع و وصل رله، فرمولبندی می‌شود. علاوه براین، پدیدهٔ وزوز[۱۵] در این نوع کنترلگر بررسی شده و رابطهٔ دامنه و فرکانس آن محاسبه می‌شود. در پایان نیز برای مسئله واقعی مربوط به طراحی خود رهنمای[۱۶] موشکهای بالستیکی[۱۷] از نوع HPS، قضایای مطروحه به کار گرفته شده، نتایج حاصل از شبیه سازی مورد توجه و تدقیق قرار می‌گیرد.

۲- تبیین مسئله

سیستمی در حالت کلی غیر خطی، تک ورودی- تک خروجی و توأم با عدم قطعیت به شکل زیر را در نظر می‌گیریم

$$x^{(n)} = f(x) + b(x).u(t) \qquad (۱)$$

که $x = [x \; \dot{x} \; \dots x^{(n-1)}]^T$ بردار حالت سیستم، n درجهٔ سیستم، x خروجی و u سیگنال کنترل است. f(x) و b(x) نیز توابعی نامطمئن از عناصر بردار حالت است که فرض می‌شود با مشخص بودن بازهٔ عدم قطعیت عناصر بردار x، می‌توان کرانهای f و b را نیز به دست آورد. ضمناً فرض می‌شود حالت اولیه سیستم (x(۰)) نیز دارای عدم قطعیت است. هدف آن است که خروجی سیستم، با در نظر گرفتن رفتارگذاری خاصی، از سیگنال هدف مطلوبی ($x_{d1}(t)$) تبعیت کند، ضمن اینکه سیگنال کنترل نیز باید به شکل دو وضعیتی زیر باشد

$$u = \begin{cases} U & e \geq ۰ \\ L & e < ۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

که U و L مقادیر ثابتی اند که به ترتیب بهره‌های بالا و پایین رلهٔ کاربردی را مشخص می‌کنند. e نیز سیگنال ورودی به کنترلگر است.

شیوهٔ حل مسئله بر این اساس است که ابتدا حالتی جدید موسوم به حالت میانجی ($x_d(t)$) را چنان تعریف می‌کنیم که مقدار اولیه‌اش برابر با مقدار اولیه دستگاه باشد و در نهایت نیز به ($x_{d1}(t)$) برسد. معادلهٔ معرف چنین سیگنالی به شرح زیر است[۱۶]

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt} + \alpha\right)^n x_d(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + \alpha\right)^n x_{d1}(t) \\ x_d(۰) = x(۰)\,, \dot{x}_d(۰) = \dot{x}(۰)\,, \dots, x_d^{(n-1)}(۰) = x^{(n-1)}(۰) \end{cases} \qquad (۳)$$

که α مقداری ثابت و مثبت است که شاخصی از سرعت رسیدن به حالت مطلوب را بیان می‌کند. بدین ترتیب با پاسخیابی معادلهٔ (۳)، در واقع حرکت حالتها و مسیر آنها را در فضای فاز تحت انقیاد خود در آورده، راهبرد[۱۸] مشخصی برای رسیدن مسیرهای حالت[۱۹] به مقدار مطلوب در نظر گرفته‌ایم.

اینک با استفاده از اصول کنترل مد لغزشی، می‌توان مکان هندسی مورد نظر برای سیستم را به شکل تابعی با تعریف زیر درنظر گرفت.

$$S(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}(t) = \sum_{i=۰}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i)}(t) \qquad (۴)$$

که

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t) \qquad (۵)$$

بیانگر خطای ردیابی[۲۰] میان خروجی و حالت میانجی است، λ نیز پارامتری مثبت است که براساس ویژگیهای عملکرد سیستم حاصل می‌شود؛ لذا واضح است اگر S = ۰ شود، آن گاه عملاً انتهای مسیر همهٔ حالتها بر رویه لغزشی قرار گرفته و لذا هدف ردیابی سیگنال

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

مطلوب براورده شده است. اما در عمل به دلیل حضور تأخیر در سیستم واقعی و نیز ایده‌ال نبودن برخورد مسیر حالتها با رویهٔ لغزشی [۱۷]، S دقیقاً صفر نمی‌شود بلکه در حالت مانا، خواهیم داشت: $|S| < \phi$ که ϕ مقدار مثبتی است که بیانگر شعاع همسایگی استقرار حالتها حول رویهٔ لغزشی می‌باشد و واضح است هر چه ϕ کوچکتر باشد، نزدیکی به حالت ایده‌ال نیز بیشتر است.

رسیدن حالتها به رویه لغزشی، مستلزم ارضای شرط رسش طبیعی است؛ یعنی

$$\forall t \neq 0 \qquad S(x,t).\dot{S}(x,t) < 0$$ (۶)

با ترکیب تعریف (۴) با معادلهٔ سیستم، معادلهٔ (۱) می‌توان نوشت

$$\dot{S}(x,t) = f(x) + b(x)u(t) - x_d^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i+1)}(t)$$ (۷)

بنابراین به کمک این معادله، می‌توان سیگنال کنترل u را چنان یافت که شرط (۶) را براورده سازد و چون باید سیگنال u به صورت رله‌ای باشد، لذا لازم است بتوان کرانهای عناصر بردار x و بردار: $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}\,\dot{\tilde{x}} \dots \tilde{x}^{(n-1)}]^T$ را یافت که انجام این مهم برای $\tilde{x}$، مستلزم داشتن پاسخ بستهٔ معادلهٔ (۳) است که از معادلهٔ زیر حاصل می‌شود[۱۳]:

$$x_d(t) = x_{d1}(t) + e^{-\alpha t} \sum_{i=0}^{n-1} A_i t^i$$ (۸)

که

$$A_i = \frac{x^{(i)}(0) - x_{d1}^{(i)}(0)}{i!} + \sum_{m=0}^{i-1} - \frac{(-\alpha)^{i-1}}{(i-m)!} A_m , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$ (۹)

$$x_d^{(k)}(t) = x_{d1}^{(k)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha t} [A_i (-\alpha)^k t^i + \sum_{n=1}^{k} A_i (-\alpha)^{k-m} \binom{k}{m} i(i-1) \dots (i-m+1) t^{i-m}]$$ (۱۰)

که $k = 1, 2, \dots, n-1$

مشخص است که از معادله های بالا، تمامی کرانهای عناصر بردار حالت میانجی: $x_d = [x_d\, \dot{x}_d \dots x_d^{(n-1)}]^T$ حاصل می آید. ضمناً می توان کرانهای عناصر بردار $\tilde{\mathbf{x}}$ را نیز به صورت زیر محاسبه کرد[۱۸]

$$\left| \tilde{x}^{(i)}(t) \right| < \frac{\phi}{\lambda^{m-i}} . B(m, i+1)$$ (۱۱)

که

$$B(m,i+1) \triangleq \int_0^\infty e^{-u} . \left| \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{(-u)^{m-1-k}}{(m-1-k)!} \right| . du$$ (۱۲)

و

$$\left| \tilde{x}^{(m)}(t) \right| < \phi . [1 + B(m, m+1)]$$ (۱۳)

که

$$B(m,m+1) \triangleq \int_0^\infty e^{-u} . \left| \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{(-u)^{m-1-k}}{(m-1-k)!} \right| . du$$ (۱۴)

که در روابط بالا $m \triangleq n-1$ و $i = 0, 1, \dots, m-1$

یافتن کرانهای عناصر بردارهای x_d و $\tilde{x}$، در اصل به معنای مشخص شدن کرانهای عناصر بردار حالت سیستم (x) است. لذا واضح است کرانهای f(x) و b(x) نیز مشخص خواهد شد، برای این کار از نمادهای ساده‌تر زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} -\psi_i < \tilde{x}^{(i)} < \psi_i \\ d_l^i < x_d^{(i)} \le d_h^i \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$ (۱۵)

که ψ_i معادل سمت راست عبارتهای (۱۱) و (۱۳) است. d_l^i و d_h^i نیز با استفاده از معادلهٔ (۱۰) به دست می‌آید. اینک می‌توان نوشت

$$\begin{cases} f^- < f(x) < f^+ \\ d_l < b(x) < d_h \end{cases}$$ (۱۶)

که f^+، f^-، b_h و b_l مقادیر ثابت و مشخصی‌اند که براساس مشخص بودن کران عناصر x به دست آمده‌اند. حال می‌توان نوشت (با فرض اینکه f^+، مثبت و f^-، منفی باشد)

$$f^- + bu - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + bu - d_l^n + \psi$$ (۱۷)

که

$$\psi \triangleq \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \psi_i$$ (۱۸)

و در نتیجه برای تأمین شرط رسش باید داشته باشیم

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

$$u = \begin{cases} U = (-f^- + d_h^n + \psi)/b_l & S>0 \\ L = (-f^+ - d_l^n + \psi)/b_l & S<0 \end{cases} \quad (۱۹)$$

که در روابط بالا، بی آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض شده $b_l<0$ باشد.

ایدهٔ به کارگیری بردار حالت میانجی سبب می‌شود حل مسئلهٔ کنترل دو وضعیتی مقاوم، تا حد امکان کمتر محافظه کار[21] باشد[۱۸] و کنترلگر حاصل دارای دامنهٔ بسیار کوچکتری در مقایسه با روشی که از این ایده استفاده نشده باشد[۱۹]. ضمناً این شیوه در پاسخگویی به مسائل متنوعی از قبیل کنترل پرتابه‌های زمین به زمین [۱۴]، روباتهای غیر خطی [۱۵] و فرایندهای شیمیایی [۲۰] با قوت تمام به‌کار می‌آید. اما چند موضوع اساسی در خصوص این شیوه، شایان توجه است.

الف - تعیین زمان قطع و وصل رلهٔ کاربردی

ب - تأثیر حضور اغتشاش موجود در معادلهٔ سیستم و نویز اندازه‌گیری حالتها

ج - بررسی ویژگیهای رفتارگذاری سیستم

د - تحلیل پدیدهٔ وزوز

از این رو تمرکز اصلی مقالهٔ حاضر بر این نکته استوار است که با توجه به ایدهٔ مطرح شده برای تحصیل سیگنال کنترل، مسائل بالا را مورد بررسی و حل قرار دهد.

۳- بررسی در حالت غیر ایده‌ال

رله‌های کاربردی در حالت کلی غیر ایده‌ال اند، بدین معنا که تبدیل حالت رله از خاموش به روشن (و یا برعکس)، مستلزم گذر زمانی موسوم به زمان سوییچینگ است و در واقع برای تعیین رله، علاوه بر دامنه، لازم است زمان سوییچینگ آن را نیز مشخص کنیم. برای این منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱ - اگر برای سیستمی با معادلهٔ (۱) رویهٔ لغزشی با معادله‌های (۴) و (۵) تعریف شود و روابط (۱۵) تا (۱۹) نیز برقرار باشد، آن گاه حداکثر فاصلهٔ زمانی بین دو سوییچینگ متوالی رله برابر است با

$$T_{Max} = \frac{\phi}{Max\,(f^+ + b_h U + \phi - d_l^n, f^- - b_h L + \psi + d_h^n)} \quad (۲۰)$$

برهان نامساوی (۱۷) را باز می‌نویسیم

$$f^- + bu - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + bu - d_l^n + \psi$$

برای براوردن شرط رسش، باید سیگنال U به یکی از دو حالت معادلهٔ (۱۹) باشد، لذا از ترکیب نامساوی بالا با معادلهٔ (۱۹) نتیجه می‌شود

$$f^- + b_h L - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + b_h U - d_l^n + \psi$$

و لذا می‌توان نوشت

$$|\dot{S}| < Max\,(f^+ + b_h U + \psi - d_l^n, - f^- - b_h L + \psi + d_h^n)$$

به منظور ساده نویسی، معرفی می‌کنیم

$$|\dot{S}|_{Max} \triangleq Max\,(f^+ + b_h M + \psi - d_l^n, - f^- - b_h L + \psi + d_h^n) \quad (۲۱)$$

اینک فرض می‌کنیم فاصلهٔ زمانی بین دو سوییچینگ متوالی رله از مقداری چون T ثانیه کمتر نباشد و T به اندازه‌ای کوچک است که رله بتواند شرط $|S| < \phi$ را همچنان ارضا کند. واضح است وقتی $u = L$، $\dot{S}$ منفی و وقتی $u = U$، $\dot{S}$ مثبت است. اگر فرض کنیم در یک لحظه $S = 0$ شود (و مثلاً قبل از آن $S<0$ و در نتیجه $u = U$ باشد) و در همان لحظه به محض اینکه S مثبت شد، رله تغییر وضع دهد. بدین ترتیب باید تا T ثانیهٔ دیگر $u = L$ بماند. حال برای اینکه $|S|$ از ϕ تجاوز نکند، اگر T را کمتر از مقداری بگیریم که به دنبال به دست می‌آید، مطمئن خواهیم بود که S از $-\phi$ کمتر نخواهد شد

$$|\dot{S}| < |\dot{S}|_{Max} \Rightarrow -\dot{S} < |\dot{S}|_{Max}$$

پس

$$-dS < |\dot{S}|_{Max} \cdot dt$$

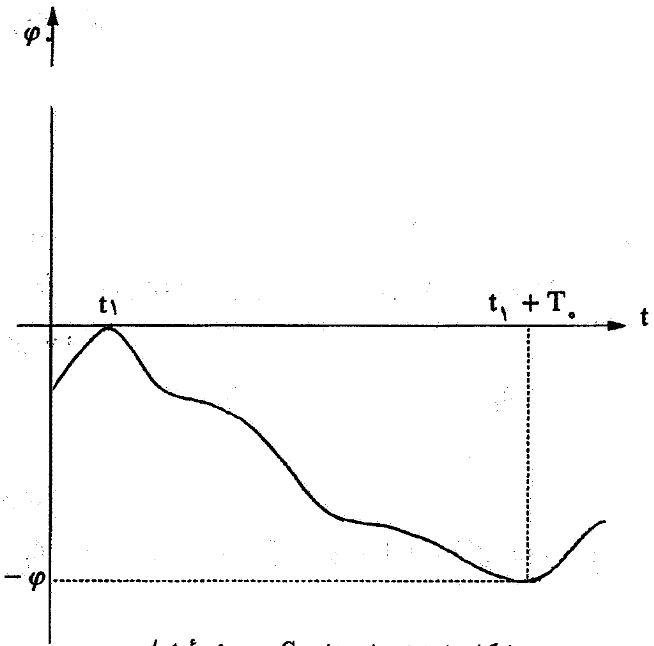
و با توجه به شکل (۱) می‌توان نوشت

$$-\int_{s=0}^{s=-\phi} ds < |\dot{S}|_{Max} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt$$

لذا

$$T_0 > \frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}}$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]



شکل ۱- تغییرات تابع S در صفحهٔ ϕ-t

بنابراین پس از زمان t_1، اگر $u = L$ بماند حداقل $\phi/|\dot{S}|_{Max}$ طول می‌کشد که S به $-\phi$ برسد. پس حداکثر فاصلهٔ بین دو سوییچینگ متوالی رله باید برابر با $T_{Max} = \phi/|\dot{S}|_{Max}$ باشد که با جایگزینی مقدار $|\dot{S}|_{Max}$ از معادلهٔ (۲۱)، معادلهٔ (۲۰) حاصل می‌شود.

نکتهٔ پر اهمیت در این قضیه آن است که در واقع نتیجه این قضیه به همراه مقادیر بهره‌های بالا و پایین کنترلگر، معادلهٔ (۱۹) شرط وجود کنترلگر رله‌ای برای کنترل مقاوم دو وضعیتی را بیان می کند. چه در مواجه شدن با مسئله توأم با عدم قطعیت و همراه با کنترلگر دو وضعیتی اگر بتوان رله‌ای یافت که شروط (۱۹) و (۲۰) را تأمین کند، آن گاه امکان دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم وجود خواهد داشت.

۴- بررسی اثر اغتشاش

برای تحلیل تأثیر اغتشاش در طراحی کنترلگر، معادلهٔ سیستم مورد بحث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۲۱]

$$x^{(n)}(t) = f(x) + b(x)u(t) + D(x) \qquad (۲۲)$$

که تابع D، بیانگر دینامیک اغتشاش است و با توجه به اینکه کران عناصر بردار x معلوم است به سادگی می‌توان حدود مترتب بر D را نیز محاسبه کرد که در نتیجه خواهیم داشت

$$D_l \le D(x,t) \le D_h \qquad (۲۳)$$

که D_h و D_l مقادیر ثابت و معلوم اند.

با توجه به تعریف رویه لغزشی، معادله‌های (۴) و (۵)، نتیجه می‌شود (بدون کاستن از کلیت موضوع، فرض می‌شود D_l منفی باشد)

$$f^- + bu - d_h^n - \psi + D_l < \dot{S} < f^+ + bu - d_l^n + \psi + D_h$$

و بنابراین

$$U = \begin{cases} U = (-f^- + D_l + d_h^n + \psi)/b_l & S > 0 \\ L = -(f^+ + D_h - d_l^n + \psi)/b_l & S < 0 \end{cases} \qquad (۲۴)$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود حضور اغتشاش سبب می‌شود تا بهرهٔ کنترلگر افزایش یابد و چون $|\dot{S}|_{Max}$ نیز زیاد می‌شود، لذا بر فرکانس کار رله نیز نسبت به حالت عدم حضور اغتشاش، افزوده می‌شود، زیرا در این حالت داریم

$$T_{Max} = \frac{\phi}{Max(f^+ + b_h U + \psi - d_l^n + D_h, -f^- - b_n L + \psi + d_h^n - D_l)} \qquad (۲۵)$$

۵- بررسی اثر نویز اندازه‌گیری

یکی از موارد مهم در تحلیل کنترلگر دو وضعیتی مقاوم، مسئلهٔ آلودگی حالتها به نویز است. برای تشریح این موضوع، فرض می‌کنیم در اندازه‌گیری حالت $x(t)$، نویز $n_1(t)$ با آن جمع شود و در اندازه‌گیری $\dot{x}(t)$، نویز $n_2(t)$ و... بدین ترتیب می توان در حالت کلی حالت موجود سیستم را به شکل زیر انگاشت

$$x_i(t) \triangleq x^{(i-1)}(t) + n_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۲۶)$$

که دامنهٔ نویز مقداری معلوم است؛ یعنی

$$|n_i(t)| \le N_i, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۲۷)$$

که N_iها مقادیری ثابت‌اند. در این صورت قضیه زیر، تأثیر نویز را بر

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

دامنه و زمان سوییچینگ کنترلگر رله‌ای بیان می‌کند.

قضیه ۲- اگر معادلهٔ سیستمی به شکل (۱) رویه لغزشی با معادله‌های (۴) و (۵) و حالتهای آلوده به نویز با معادله‌های (۲۶) و (۲۷) تعریف شوند، آن گاه برای دستیابی به کنترلگر مقاوم دو وضعیتی، بهرهٔ کنترلگر از معادلهٔ

$$u = \begin{cases} U = (-f^{-} + d_h^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_l & \hat{S} > 0 \\ L = -(f^{+} + d_l^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_l & \hat{S} < 0 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

و حداکثر زمان سوییچینگ متوالی رله نیز از معادلهٔ

$$T_{Max} = \frac{2(\phi - \eta_0)}{Max[-(f^{-} + b_h L - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \psi), (f^{+} + b_h U - d_L^n + \dot{\eta}_0 + \psi)} \qquad (۲۹)$$

به دست می‌آیند که در این معادله‌ها $\dot{\eta}_0$، کوچکترین کران بالای تابع $\dot{\eta}(t)$ است که $\eta(t)$ نیز طبق معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} n_{i+1}(t) \qquad (۳۰)$$

همچنین برای η_0 داریم

$$\eta_0(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} N_{i+1} \qquad (۳۱)$$

$\hat{S}$ نیز تابع رویهٔ لغزشی با در نظر گرفتن سیگنالهای آغشته به نویز است. ضمناً مقادیر f^-، f^+، b_n، b_l، d_h^n، d_l^n و ψ همگی طبق روابط مربوط به قضیه (۱) تعریف می‌شود.

برهان با توجه به معادلهٔ (۲۶)، می‌توان تابع جدید رویه لغزشی را برحسب حالتهای آله ده به نویز به صورت زیر بازنوشت

$$\hat{S}(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{\underline{x}}(t) \quad , \quad \tilde{x} = x_i - x_d$$

و یا

$$\hat{S}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \cdot \left[\overset{(i)}{x(t)} + n_{i+1}(t) \right] - $$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} x_d^{(i)}(t) =$$

$$S + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} n_{i+1}$$

که با توجه به معادلهٔ (۳۰) می‌توان نوشت

$$\hat{S}(t) = S(t) + \eta(t) \qquad (۳۲)$$

باید دقت کرد که در این روابط، بردار حالت میانجی را چنان تعریف می‌کنیم که شروط اولیه زیر را براورد کند

$$x_d(0) = x_1(0) \,;\, \dot{x}_d(0) = x_2(0) \,;\, \ldots \,;\, x_d^{(n-1)}(0) = x_n(0)$$

اینک داریم

$$\dot{\hat{S}} = \dot{S} + \dot{\eta} = x^{(n)} - x_d^{(n)} + \dot{\eta} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i+1)}$$

که در این رابطه $x = x - x_d$ است، اما با توجه به شرط (۲۷) می‌توان نوشت

$$|\eta(t)| \le \eta_0 \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} N_{i+1}$$

بنابراین واضح است اگر $\hat{S} = 0$ باشد، $S = -\eta$ خواهد بود؛ یعنی در این حالت (حتی اگر رله، ایده‌ال نیز باشد)، $S = 0$ نگهداشته نمی‌شود، اما اندازهٔ آن هیچ گاه از η_0 تجاوز نمی‌کند. حال اگر بخواهیم $|S| < \phi$ شود، باید قانون کنترل به نحوی انتخاب شود که $|\hat{S}| \le \phi - \eta_0$، $\forall t > 0$ باشد، زیرا با جایگزینی معادلهٔ (۳۲) در این عبارت داریم

$$|S + \eta| \le \phi - \eta_0 \Rightarrow |S| - |\eta| \le \phi - \eta_0$$

پس

$$|S| - \eta_0 \le \phi - \eta_0 \Rightarrow |S| \le \phi$$

بنابراین شرط همگرایی حالتها به سوی رویه براورده می‌شود. حال برای برقراری شرط $|\hat{S}| \le \phi - \eta_0$، از قانون ذیل پیروی می‌کنیم «اگر $\hat{S}(t)$ بخواهد بزرگتر از (یا حتی مساوی با) $\phi - \eta_0$ شود، بی هیچ درنگی رله به $u = L$ سوییچ شود (تا $\dot{\hat{S}}$ منفی شود)، به محض اینکه $\hat{S}(t)$ بخواهد به $-(\phi - \eta_0)$ برسد، رله به $u = U$ سوییچ شود (تا $\dot{\hat{S}}$ مثبت شود)».

اگر $\dot{\eta}(t)$، کراندار بماند، $\hat{S}(t)$ تابعی پیوسته از زمان خواهد بود، ازاین‌رو فرض می‌کنیم: $|\dot{\eta}(t)| \le \dot{\eta}_0$ که $\dot{\eta}_0$ مقداری معلوم فرض می‌شود. در این صورت خواهیم داشت

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

$$f^- + b(x)u - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \psi < \hat{s} < f^+ + b(x)u - d_l^n + \dot{\eta}_0 + \psi$$

بنابراین با انتخاب U و L به شکل زیر، مطمئن خواهیم بود که شرط رسش طبیعی ارضا می‌شود.

$$u = \begin{cases} U = (f^- + d_h^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_l & \hat{S} > 0 \\ L = -(f^+ - d_\ell^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_l & \hat{S} < 0 \end{cases}$$

که همان معادلهٔ (۲۸) است. علاوه بر این می‌توان نوشت

$$\left|\hat{S}\right|_{Max} = \text{Max}\left[-(f^- + b_h L - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \phi), \; (f^+ + b_h U - d_l^n + \dot{\eta}_0 + \psi)\right]$$
(۳۳)

و چون $\left|\hat{S}\right| \le \phi - \eta_0$ است، با توجه به قضیهٔ (۱) خواهیم داشت

$$T_{Max} = \frac{2(\phi - \eta_0)}{\left|\dot{\hat{S}}\right|_{Max}}$$

که با جایگذاری معادلهٔ (۳۳) در این عبارت، معادلهٔ (۲۹) حاصل می‌شود.

با توجه به نتایج این قضیه، باز ملاحظه می‌شود که در حالت کلی حضور نویز اندازه‌گیری سبب می‌شود تا بهرهٔ کنترلگر افزایش یابد. اما گرچه فرکانس قطع و وصل رله تغییر می‌کند، اما صریحاً نمی‌توان راجع به کم یا زیاد شدن آن اظهار نظر کرد.

۶- بررسی عملکرد گذرا

یکی از مواردی که شاخص مناسبی در بررسی عملکرد سیستم است، ویژگیهای رفتار گذرای سیستم کنترل است. این ویژگیها را اغلب با دو پارامتر درصد بیشینه فراجهش[۲۲] و زمان نشست[۲۳] می‌سنجد که اولی متناظر با حداکثر بالازدگی پاسخ نسبت به پلهٔ واحد و دومی متناظر با زمانی است که با فرض صفر بودن شروط اولیهٔ سیستم، پاسخ سیستم به ورودی پلهٔ واحد به ۹۰٪ مقدار مانای خود برسد. محاسبهٔ این مقادیر در حالت کلی به کمک قضیهٔ زیر امکانپذیر است.

قضیه ۳ - اگر سیستم تحت بررسی، مشخصات قضیهٔ (۱) را داشته باشد، آنگاه پاسخ سیستم هیچ فراجهشی ندارد و زمان نشست (t_S) نیز از حل معادلهٔ غیر خطی ذیل به دست می‌آید

$$\left[1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] . e^{-\alpha t} = 0/1 \, , \; t > 0$$
(۳۴)

برهان - با توجه به تعریف بردار حالت میانجی برای این حالت خاص (خروجی، مقدار ثابت و شروط اولیهٔ صفر) می‌توان نوشت

$$\begin{cases} (\frac{d}{dt} + \alpha)^n x_d(t) = \alpha^n x_{d1} \\ x_d(0) = \dot{x}_d(0) = \dots = x_d^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

و یا با معرفی $\tau = \alpha t$

$$\begin{cases} (\frac{d}{d\tau} + 1)^n x_d(\tau) = x_{d1} \\ x_d(0) = \frac{dx_d(0)}{d\tau} = \dots = \frac{d^{n-1}x_d(0)}{d\tau^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

و با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ اخیر می‌توان نوشت (p، عملگر لاپلاس است)

$$(p + 1)^n X_d(p) = \frac{x_{d1}}{p}$$

لذا

$$X_d(p) = \frac{x_{d1}}{p(p + 1)^n} = \frac{B}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{i-1}}{(p + 1)^i}$$

که در این رابطه

$$-B = A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = -x_{d1}$$

و می‌دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p + 1)^k}\right] = \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\tau}$$

پس

$$x_d(\tau) = \left[e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} + \frac{\tau^2}{2!} e^{-\tau} + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\tau}\right]$$

و یا

$$x_d(\tau) = x_{d1}\left\{1 - \left[1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] . e^{-\alpha t}\right\}$$
(۳۵)

به راحتی می‌توان نشان داد که پاسخ بالا، هیچ فراجهشی ندارد زیرا

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

جدول ۱- مقادیر زمان نشست برای درجات مختلف سیستم

درجهٔ سیستم (n)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
αt_s	۲/۳۱	۳/۸۹	۵/۳۳	۶/۶۸	۸	۹/۲۸	۱۰/۵۴	۱۱/۷۷	۱۳	۱۴/۲۱	۱۵/۴۱	۱۶/۶	۱۷/۷۸	۱۸/۹۶	۲۰/۱۳	۲۱/۲۹	۲۲/۴۵	۲۳/۶۱	۲۴/۷۶	۲۵/۹

$$\frac{dx_d}{d(\alpha t)} = x_{d۱} e^{-\alpha t} \cdot \left\{ ۱ + \frac{\alpha t}{۱!} + \frac{(\alpha t)^۲}{۲!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-۱}}{(n-۱)!} - \left[۱ + \alpha t + \frac{(\alpha t)^۲}{۲!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-۲}}{(n-۲)!} \right] \right\}$$

یا

$$\frac{۱}{\alpha} \dot{x}_d = x_{d۱} e^{-\alpha t} \cdot \frac{(\alpha t)^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

و در نتیجه

$$\dot{x}_d = \dot{x}_{d۱} \cdot \frac{\alpha^n \cdot t^{n-۱}}{(n-۱)!} e^{-\alpha t}$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که $\forall t > ۰$ ، $\dot{x}_d(t)$ مثبت است ($x_{d۱}$ دارای دامنه‌ای مثبت فرض شده)، بنابراین x_d تابعی صعودی است و در نتیجه هیچ فراجهشی ندارد. برای محاسبهٔ زمان نشست، طبق تعریف t_s داریم

$$x_d(t_s) = ۰/۹ x_{d۱}$$

و با توجه به معادلهٔ (۳۵) نتیجه می‌شود

$$\left[۱ + \alpha t + \frac{(\alpha t)^۲}{۲!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-۱}}{(n-۱)!} \right] e^{-\alpha t} \Big|_{t = t_s} = ۰/۱$$

و قضیه اثبات می‌شود

نکته - حل تحلیلی معادلهٔ (۳۴) در حالت کلی موجود نیست؛ اما با استفاده از روشهای عددی برای درجه‌های مختلف سیستم، جدول(۱) حاصل می‌شود.

حسن این قضیه در این نکته است که به هنگام طراحی، با در نظر گرفتن زمان نشست مطلوب سیستم، می‌توان پارامتر α را به کمک جدول (۱) محاسبه کرد و آن گاه با استفاده از معادلهٔ (۳)، بردار حالت میانجی را به دست آورد. نکتهٔ مهم دیگر در خصوص قضیه اخیر آن است که به کمک تعریف بردار میانجی و معادلهٔ (۳۴) عملاً یکی از مشکلات مهم شرط رسش طبیعی (که عدم تضمین رسیدن به رویه در زمان متناهی است [۲۲]) حل می‌شود، زیرا طراح با تحت انقیاد در آوردن مسیر حالتهای سیستم، معبر مناسبی را برای گذر حالتها مشخص می‌کند که نه تنها تضمین کنندهٔ رسیدن به رویه لغزشی است بلکه ضامن این نکته نیز هست که این وصال در مدت زمان معینی که انتخاب آن به عهده خود طراح است) انجام پذیرد.

۷- بررسی پدیدهٔ وزوز

«وزوز» مفهومی کیفی است که در کنترل مد لغزشی، اغلب از آن به میزان ناپیوستگی سیگنال کنترل در هنگام برخورد با رویه لغزشی تعبیر می‌شود [۲۳]، چه این ناپیوستگی، شامل مؤلفه‌های فرکانس زیاد است که سبب تحریک دینامیک مدل نشدهٔ سیستم می‌شود[۲۴]. اما در مسئلهٔ کنترل دو وضعیتی مقاوم، سیگنال کنترل اصولاً پیوسته نیست بلکه دارای دو حالت گسسته است از این رو تعبیر بالا در این مورد چندان بجا نیست، لیکن می‌توان این مفهوم را به معنای میزان تموج و اعوجاج حالت سیستم، حول حالت میانجی در نظر گرفت. لذا در این قسمت وزوز را به این معنا در نظر گرفته، دو جنبه از آن را یکی دامنه و دیگری فرکانس تموجات را مورد بحث قرار می‌دهیم.

همچنان که پیش از این اشاره شد سیگنال کنترل چنان طرح می‌شود که $|S|$ همواره کمتر از ϕ بماند و در این صورت دیدیم که عناصر بردار خطای ردیابی دارای کرانهایی به شکل روابط (۱۱) تا (۱۴) است که در حالت کلی با کمی اغماض می‌توان این روابط را به شکل زیرنوشت

$$\left| \tilde{x}^{(i)} \right| < \frac{\phi}{\lambda^{n-۱-i}} \cdot B(n-۱, i+۲) \quad i = ۰, ۱, \dots, n-۲ \qquad (۳۶)$$

در نظر گرفت که تابع B برای تمام مقادیر i از معادلهٔ (۱۲) به دست می‌آید. این معادله خود شاخصی از میزان وزوزو است، زیرا براساس مقادیر تابع B، میزان تموج حالت سیستم حول حالت

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

جدول ۲- مقادیر تابع دو متغیرهٔ B به ازای مقادیر مختلف n و i

n = ۲	B(۱و۱)	B(۱و۲)								
	۱	۱								
n = ۳	B(۲و۱)	B(۲و۲)	B(۲و۳)							
	۱	۰/۷۳۵۸	۱/۲۷۰۷							
n = ۴	B(۳و۱)	B(۳و۲)	B(۳و۳)	B(۳و۴)						
	۱	۰/۵۴۱۳	۰/۶۲	۱/۴۶۰۱						
n = ۵	B(۴و۱)	B(۴و۲)	B(۴و۳)	B(۴و۴)	B(۴و۵)					
	۱	۰/۳۷۵۱	۰/۴۴۸۱	۰/۵۵۹۷	۱/۶۰۹۶					
n = ۶	B(۵و۱)	B(۵و۲)	B(۵و۳)	B(۵و۴)	B(۵و۵)	B(۵و۶)				
	۱	۰/۲۶۹۷	۰/۲۹۳۴	۰/۳۹۰۷	۰/۵۲۱۰	۱/۷۳۴۰				
n = ۷	B(۶و۱)	B(۶و۲)	B(۶و۳)	B(۶و۴)	B(۶و۵)	B(۶و۶)	B(۶و۷)			
	۱	۰/۱۸۷۷	۰/۲۱۰۷	۰/۲۴۳۳	۰/۳۵۰۹	۰/۴۹۲۸	۱/۸۴۱۲			
n = ۸	B(۷و۱)	B(۷و۲)	B(۷و۳)	B(۷و۴)	B(۷و۵)	B(۷و۶)	B(۷و۷)	B(۷و۸)		
	۱	۰/۱۳۴۵	۰/۱۴۳۴	۰/۱۷۲۴	۰/۲۱۱۰	۰/۳۲۱۲	۰/۴۷۱۰	۱/۹۳۶۴		
n = ۹	B(۸و۱)	B(۸و۲)	B(۸و۳)	B(۸و۴)	B(۸و۵)	B(۸و۶)	B(۸و۷)	B(۸و۸)	B(۸و۹)	
	۱	۰/۰۹۴۶	۰/۱۰۲۲	۰/۱۱۴۶	۰/۱۴۶۷	۰/۱۸۶۷	۰/۲۹۸۰	۱/۴۳۵	۲/۰۲۰۹	
n = ۱۰	B(۹و۱)	B(۹و۲)	B(۹و۳)	B(۹و۴)	B(۹و۵)	B(۹و۶)	B(۹و۷)	B(۹و۸)	B(۹و۹)	B(۹و۱۰)
	۱	۰/۰۶۷۲	۰/۰۷۰۷	۰/۰۸۱۱	۰/۰۹۴۸	۰/۱۲۷۳	۰/۱۶۸۱	۰/۲۷۹۲	۰/۴۳۸۸	۲/۱۷۱

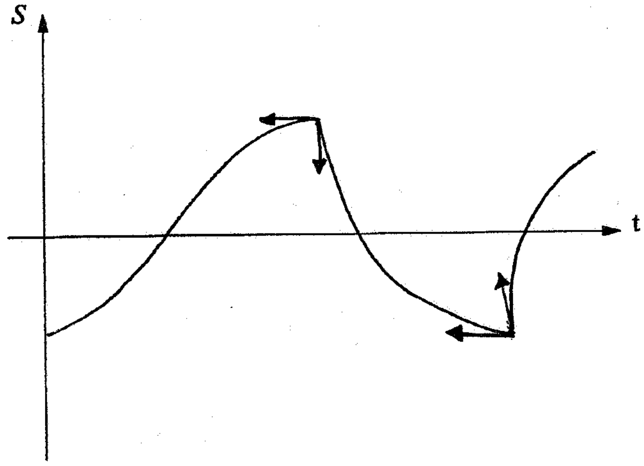
میانجی مشخص می‌شود. تابع دو متغیرهٔ B در حالت تحلیلی محاسبه‌پذیر نیست اما می‌توان آن را به کمک روش مناسبی از طریق رایانه محاسبه کرد[۱۶] که نتیجهٔ آن برای مقادیر مختلف n و i در جدول (۲) آمده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود برای nهای مختلف، با افزایش i مقدار انتگرال نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این با کاهش مخرج کسر سمت راست نامعادلهٔ (۳۶) با افزایش i (برای $\lambda > 1$) ملاحظه می‌شود دامنهٔ وزوز برای $\tilde{x}(t)$ (یا در واقع $x(t)$ که همان خروجی است) از همه کمتر است و برای مشتقات بالاتر، این دامنه افزایش می‌یابد و با توجه به اینکه مقادیر λ و $B(n-1 ، i+1)$ برای درجهٔ معینی از سیستم ثابت‌اند، لذا با کاهش مقدار ϕ (شعاع همسایگی حول رویهٔ لغزشی)، مقدار دامنهٔ وزوز نیز کاهش می‌یابد.

برای بررسی فرکانس پدیدهٔ وزوز، دیگر بار رابطهٔ $\dot{S}$ را می‌نویسیم

$$\dot{S} = f(x) + b(x)u - x_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\lambda^{n-1-i}\tilde{x}^{(i+1)}$$

اگر f و b توابعی پیوسته باشند به راحتی می‌توان دریافت که x، $\dot{x}$،...، $x^{(n-1)}$ نیز پیوسته خواهند بود زیرا اگر $\tilde{x}^{(n-1)}$ بخواهد

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]



شکل ۲- تغییرات تابع S نسبت به زمان

پرش[24] داشته باشد لزوماً باید مشتق آن (یعنی $x^{(n)}$) شامل ضربه[25] باشد، اما در معادلهٔ سیستم، معادلهٔ (۱)، نه سیگنال u و نه هیچ یک از عناصر بردار x شامل ضربه نیستند، لذا $x^{(n)}$ نمی‌تواند شامل ضربه باشد و لذا به تناقض بر می‌خوریم، بنابراین باید تمامی حالتهای دستگاه پیوسته باشند. از سویی چون u به شکل سیگنال رله‌ای است، $\dot{S}$ شامل پرشهایی است و در نتیجه S پیوسته اما نمودار آن به صورت زیگزاگ[26] است، شکل (۲)، به تعبیر دیگر تابع S در نقاط اکسترمم خود دارای نقاطی زاویه دار است، بدین ترتیب با توجه به معادلهٔ

$$S = \tilde{x}^{(n-1)} + \lambda(n-1)\tilde{x}^{(n-2)} + \dots + \lambda^{(n-1)}\tilde{x}$$

لازم می‌شود $\tilde{x}^{(n-1)}$ نیز رفتاری زیگزاگی داشته باشد، اما $\tilde{x}^{(n-2)}$ تا $\tilde{x}$ نمی‌توانند چنین باشند (چرا که در این صورت با پیوستگی S متناقض خواهد بود) بنابراین ملاحظه می‌شود $\tilde{x}^{(n-1)}$ بیشترین ناهمواری را داراست و به ترتیب $\tilde{x}^{(n-2)}$ تا $\tilde{x}$، هموار و هموارتر می‌شود. به تعبیر دیگر مؤلفه‌های فرکانسی $\tilde{x}^{(n-1)}$ از بقیهٔ حالتها بیشتر است و مؤلفه‌های فرکانسی $\tilde{x}^{(n-2)}$، $\tilde{x}^{(n-3)}$،... و $\tilde{x}$ به ترتیب کاهش می‌یابد. اما مطابق قضیهٔ (۱)، فاصلهٔ زمانی بین دو سوییچینگ متوالی رله نمی‌تواند از $\frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}}$ بیشتر باشد. لذا حداقل فاصلهٔ حقیقی زمان بین دو پرش متوالی $\dot{S}$، یقیناً از $\frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}}$ بیشتر است (منظور از حداقل فاصلهٔ زمانی حقیقی، حالتی است که رله، غیر ایده‌ال و فاصلهٔ بین دو سوییچینگ متوالی آن، T_0 باشد که T_0 حداکثر مقدار ممکن را برای نگه داشتن $|S| < \phi$ به ازای تمام مقادیر شروط اولیه، ورودی و عدم قطعیت داشته باشد). در نتیجه در حالتی که رله، غیر ایده‌ال است، قطعاً فاصلهٔ بین دو سوییچینگ متوالی رله (و نیز فاصلهٔ بین دو پرش متوالی $\dot{S}$) از $\phi/|\dot{S}|_{Max}$ بیشتر خواهد بود لذا زمان بالا و پایین رفتن S نیز از $2\phi/|\dot{S}|_{Max}$ بیشترخواهد بود. حال اگر معکوس این حداقل زمان را به عنوان فرکانس وزوز تعریف کنیم (که مطابق است با فرکانس وزوز خطای $\tilde{x}^{(n-1)}$)، خواهیم داشت

فرکانس وزوز در حالت غیر ایده‌الترین رله $\le \dfrac{|\dot{S}|_{Max}}{2\phi}$ (۳۷)

بدیهی است اگر رلهٔ غیر ایده‌ال به سمت حالت ایده‌ال میل کند، S به سمت صفر ولی فرکانس وزوز به سمت بینهایت میل خواهد کرد و هر چه رله از حالت ایده‌ال دورتر شود دامنهٔ وزوز (متناسب با $|S|$)، افزایش می‌یابد ولی از فرکانس آن کاسته می‌شود.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که بین دامنهٔ وزوز (که متناسب با ϕ است) و فرکانس وزوز (که متناسب با عکس ϕ است)، رقابتی حاکم است که به دست آوردن یکی به بهای از دست دادن دیگری میسر است. شایان ذکر است که افزایش دامنهٔ وزوز سبب زیاد شدن خطای تعقیب و افزایش فرکانس آن موجب تحریک رفتار با فرکانس زیاد دستگاه (دینامیک مدل نشدهٔ سیستم) است.

۸- مثال طراحی

اجسام پرنده به دلیل تغییر شرایط فیزیکی محیط پروازیشان دارای معادله‌هایی توأم با عدم قطعیت‌اند، در نمونه‌ای از موشکهای بالستیکی معادلهٔ دینامیکی حاکم بر یکی از کانالهای حرکتی، مطابق زیر است [۱۶]

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + a_3x(t) + 2x(t)\dot{x}(t)d(t) \qquad (38)$$

که $a_i \in [-2, 2]$ $(i = 1, 2, 3)$، ضریب همراه با عدم قطعیت دستگاه است و ملاحظه می‌شود امکان ناپایدار شدن سیستم نیز وجود دارد. ضمناً شروط اولیه سیستم نیز دارای عدم قطعیتی به شرح ذیل است

$$|x(0)| \le 15 \;;\; |\dot{x}(0)| \le 10 \;;\; |\ddot{x}(0)| \le 20$$

d(t) نیز سیگنال اغتشاش پله واحد است.

نکتهٔ شایان توجه اینکه چنین پرتابه‌ای از نوع HPS است و شیر سوخت رسان آن به صورت رله‌ای (باز - بسته) عمل می‌کند.

مسئله آن است که خود رهنمای[27] رله‌ای چنان طرح شود که سیستم به ورودی فرمان پله‌ای با دامنهٔ $x_{d1} \in [-10, 10]$ پاسخی با زمان نشست حداکثر ۴ ثانیه و بیشینهٔ فراجهش ۱۰٪ داشته باشد و البته اثر اغتشاش را نیز کاملاً مستهلک کند.

حل - هدف از یافتن کنترلگر رله‌ای، یافتن بهره و زمان سوییچینگ آن است. با توجه به اینکه سیستم از مرتبهٔ سوم است رویه لغزشی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$S(x,t) = \left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^2 [x(t) - x_d(t)]$$

که $x = [x\ \dot{x}\ \ddot{x}]^T$ بردار حالت سیستم است، حالت میانجی نیز از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)^3 x_d(t) = \alpha^3 x_{d1} \\ x_d(0) = x(0)\ ,\ \dot{x}_d(0) = \dot{x}(0)\ ,\ \ddot{x}_d(0) = \ddot{x}(0) \end{cases}$$

با توجه به معادله‌های (۸) و (۹) داریم

$$x_d(t) = x_{d1} + (A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^{-\alpha t}$$

که:

$$A_0 = x(0) - x_{d1}\ ;\ A_1 = \alpha A_0 + \dot{x}(0)\ ;$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[\alpha A_1 + \alpha \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)]$$

با عنایت به جدول (۱)، چون $t_s = 4sec$ و $n = 3$ است، لذا $\alpha = 1/26$ و $\lambda = 3$ در نظر گرفته می‌شود. اینک با فرض $|S| < 0/1$ و به کمک روابط (۱۰) تا (۱۴) داریم

$$|\tilde{x}| < 0/002;\ |\dot{\tilde{x}}| < 0/002;\ |\ddot{\tilde{x}}| < 0/113$$

با توجه به تعریف رویه لغزشی، می‌توان نوشت (بدون در نظر گرفتن اغتشاش در معادله)

$$\dot{S} = -a_3\tilde{x} + (9 - a_2)\dot{\tilde{x}} + (6 - a_1)\ddot{\tilde{x}} - (a_3 - \alpha^3)x_d - (a_3 - \alpha^3)x_d = -(a_2 - 3\alpha^2)\dot{x}_d - (a_1 - 3\alpha)\ddot{x}_d - \alpha^3 x_{d1} + u$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$|a_3\tilde{x}| < 0/004\ ;\ |(9 - a_2)\dot{\tilde{x}}| < 0/275\ ;$$
$$|(6 - a_1)\tilde{x}| < 1/817\ ;\ |(a_3 - \alpha^3)x_d| < 4 \times 23/86\ ;$$
$$|(a_2 - 3\alpha^2)\dot{x}_d| < 6/763 \times 13/6\ ;$$
$$|(a_1 - 3\alpha)\ddot{x}_d| < 5/78 \times 21/8;\ |(\alpha^3 x_{d1})x_d| < 1/26^3 \times 10$$

ضمناً برای تابع اغتشاش نیز داریم

$$D_h = D_l = 30$$

لذا با توجه به رابطهٔ (۱۷) می‌توان نوشت

$$u - 365/55 < \dot{S} < u + 365/55$$

پس برای براوردن شرط رسش باید داشته باشیم

$$U = -L = 365/55$$

و قانون کنترل نیز خواهد شد

$$u = \frac{1}{2}\left[U + L - (U - L)\,Sgn(S)\right] \quad (39)$$

که Sgn(.) نمایشگر تابع علامت است.

برای یافتن زمان سوییچینگ رله با عنایت به معادلهٔ (۲۵) داریم

$$|\dot{S}|_{Max} = 365/55 \times 2 = 731/1$$

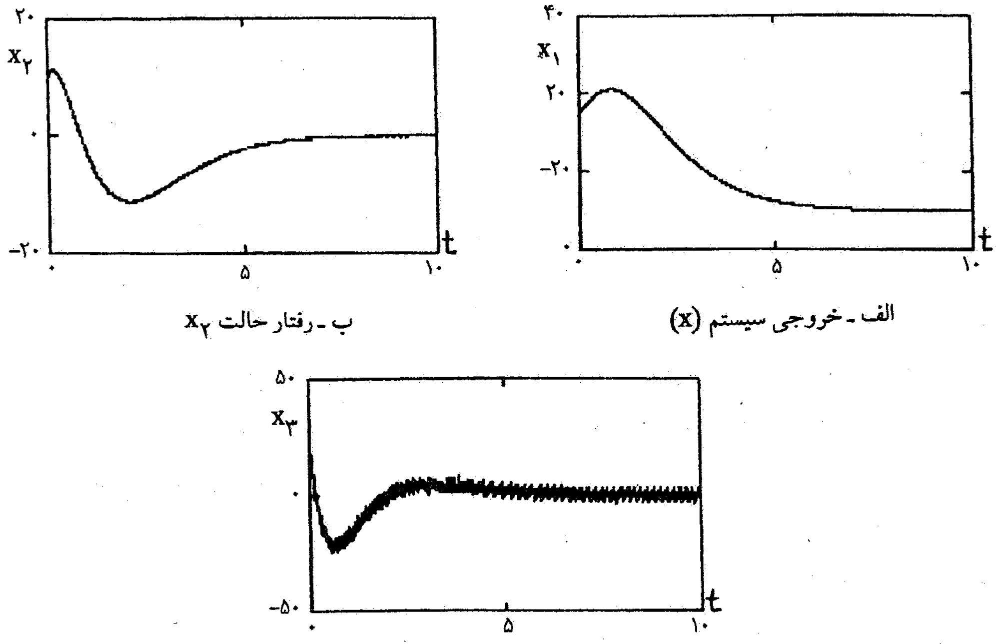
ولذا

$$T_{Max} = \frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}} = 1/37 \times 10^{-2} Sec$$

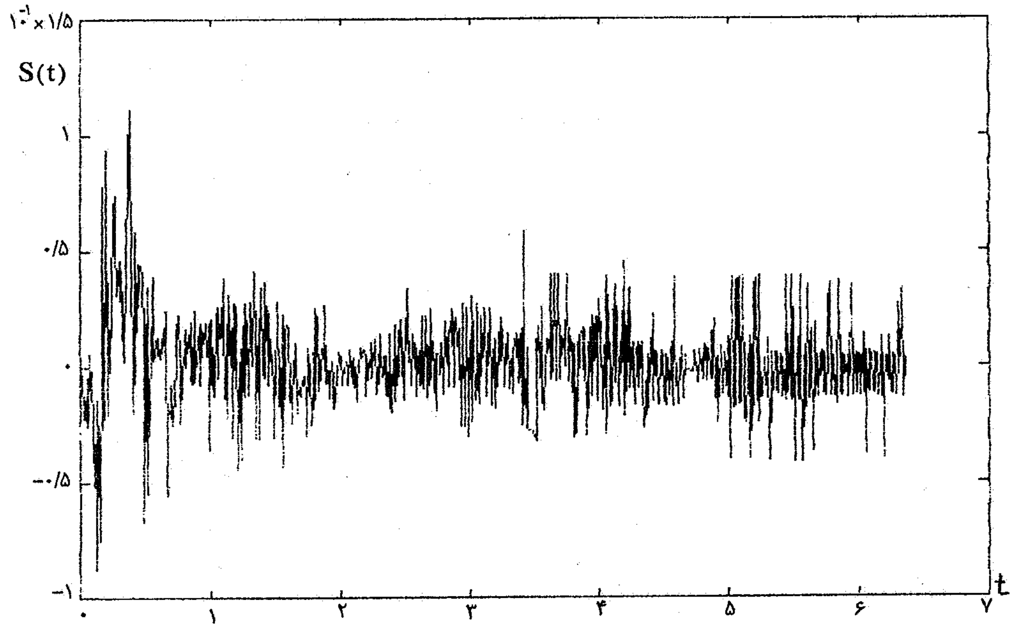
بنابراین رلهٔ کارها باید دارای بهرهٔ $U = -L = 365/55$ و حداکثر زمان سوییچینگ $1/37 \times 10^{-4}$ ثانیه باشد. ضمناً کمترین دامنهٔ وزوز در این مسئله برای خروجی سیستم و برابر با ۰/۱۱ است و برای دو حالت $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ نیز به ترتیب برابر با ۰/۱۴۲ و ۰/۲۸۱ و فرکانس وزوز نیز کمتر از 3650Hz است.

شکل (۳) نتایج حاصل از شبیه سازی سیستم را به ازای مقادیر $a_1 = a_2 = -2$ و $a_3 = 2$، شروط اولیهٔ $x(0) = 15$، $\dot{x}(0) = 10$،

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]



شکل ۳- نتایج حاصل از شبیه سازی موشک بالستیکی توأم با عدم قطعیت با کنترلگر رله‌ای



شکل ۴- رفتار زمانی رویه لغزشی

$\tilde{x}(0) = ۲۰$ حالت مطلوب $x_{d_1} = ۱۰$ با کنترلگر رله ای حاصل نشان می‌دهد که ملاحظه می شود تمامی ویژگیهای سیستم کنترل مطلوب براورده شده است و ضمناً حالتهای x_2 و x_3 نیز در زمان معقولی مستهک می شوند. میزان وزوز نیز در تغییرات زمانی حالت x_3 کاملاً مشهود است. ضمناً رفتار زمانی تابع S(t)، شکل(۴)، نیز با موارد مورد نظر در طراحی مطابقت دارد.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

نکتهٔ قابل ذکر اینکه اگر همین مسئله را بدون در نظرگرفتن تأثیر اغتشاش حل کنیم، میزان بهرهٔ کنترلگر برابر با $U = -L = ۳۳۵/۵۵$ و حداکثر زمان سویچینگ برابر با $۱/۴۹ \times ۱۰^{-۴}$ ثانیه خواهد بود که نشاندهندهٔ کاهش دامنهٔ سیگنال کنترل و افزایش زمان قطع و وصل است که هر دو منطبق بر قضایا و نکات طرح شده در بندهای پیشین مقاله است.

۹- نتیجه گیری

در این مقاله با بیان شیوه‌های حل مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم، به تفکیک، پنج موضوع مهم در خصوص آن مطرح شد که خلاصهٔ آن به شرح زیر است

الف - بررسی رله در حالت غیر ایده‌ال - در این حالت فرکانس قطع و وصل رله مقدار محدودی است که حداقل آن به کمک قضیه (۱) و از عکس معادلهٔ (۲۰) حاصل می شود.

ب - تأثیر اغتشاش - حضور تابع اغتشاش در معادلهٔ دینامیکی سیستم در حالت کلی سبب افزایش دامنه و کاهش زمان سوییچینگ رله می شود که دو معادلهٔ (۲۴) و (۲۵) ناظر بر این مسئله‌اند.

ج - تأثیر نویز اندازه‌گیری - حضور نویز در حالتهای اندازه گیری شده در حالت کلی سبب افزایش دامنه و تغییر زمان سوییچینگ رله می شود که این تغییرات به کمک قضیهٔ (۲) و معادله‌های (۲۸) و(۲۹) بیان می شود.

د - بررسی رفتار گذرای سیستم - بررسی چگونگی پاسخ گذرای دستگاه به منظور رسیدن به حالت مطلوب از مهمترین ویژگیهای سیستم کنترل است که قضیه (۳) بیانگر این نکته است در پاسخ به پلهٔ واحد، این رفتار در حالت کلی بدون فراجهش بود، زمان نشست آن از حل معادلهٔ غیر خطی (۳۴) حاصل می شود که جدول (۱) بیانگر پاسخ این معادله برای مقادیر مختلف n است.

ه - بحث در خصوص پدیدهٔ وزوز - بررسی کیفی این پدیده در قالب دامنه و فرکانس تموجات دو سیگنال حالت و حالت میانجی نشاندهندهٔ آن است که طبق روابط (۳۶) و (۳۷)، تغییرات این دو شاخص در تنافر با هم تغییر می کنند به طوری که یکی متناسب با شعاع حوزهٔ همسایگی حول رویه لغزشی و دیگری متناسب با عکس این پارامتر تغییر می کند و انتخاب مقدار مناسب این پارامتر، سهم به سزایی در تعیین دامنه و فرکانس وزوز دارد لیکن نشان داده شد که استفاده از شیوهٔ حالت میانجی سبب می شود که میزان این تموجات برای سیگنال خروجی کمترین مقدار را دارا باشد.

در پایان نیز اعمال نتایج حاصل از قضایا و سایر بندها در طراحی خود رهنمای موشکی بالستیکی نامطمئن به همراه کنترلگری رله‌ای و شبیه سازی نتایج، نشان از صحت روابط و قوت شیوهٔ کاربردی است.

واژه نامه

1. binary control
2. uncertainity
3. relay controller
4. robust stability and performance
5. minimum time problem
6. minimum fuel problem
7. dead zone
8. uncertain
9. robust binary control problem (RBCP)
10. sliding mode control (SMC)
11. sliding surface
12. natural reaching condition
13. switching time
14. on-off time
15. chattering
16. autopilot
17. balestic missile
18. strategy
19. state trajectories
20. tracking error
21. conservative
22. percent of overshoot
23. settling time
24. jump
25. impulse
26. zigzag
27. autopilot

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]

مراجع

1. Loh, A.p., et al: "Relay Feedback of Multivariable Systems and Its Use for Auto-Tuning of Multi-Loop PI Controllers," *Proc. of the Int. Conf. on Control,* UK: pp. 1049-1054, 1994.
2. Carotenuto, et al; "On the Optimal Control For the Distributed Parameter Model of a Solar Energy System," *Large Scale System;* Vol. 6, No. 3, pp. 293-304, 1984.
3. Weinred, A., et al, "Minimum-Time Control of a Two-Link Robot, "*Proc. of the 5th IFAC Workshop,* Italy, pp. 195-199, 1985.
4. Bernabei, F., et al, "Analysis of Two Level Shaping for Multiplexing of On-Off ATM Sources," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Communications,* USA, pp. 1380-1385, 1993.
5. Singh, G., et al, "Bang-Bang Control of Flexible Spacecraft Slewing Maneurers Guranteed Terminal Pointing Accuracy, "*Journal of Guidance, Control and Dynamics,* Vol. 13, No. 2, pp. 376-379, 1990.
6. Redmond, J., and Silverberg, L., "Fuel Consumption in Optimal Control, "*Journal of Guidance, Control and Dynamics,* Vol. 15, No. 2, pp. 424-430, 1992.
7. Kirk, D.E., *Optimal Control theory :An Introduction,* Prentice-Hall Pub., pp. 246-248, 262, 1988.
8. Hong, H., and Zheng, Zh., "Robust Approach to Bang-Bang Control for Unmodeled Systems with Time-Delay," *8th IFAC IFORS Symp. on Ident. and Sys. Para. Est.,* China, pp. 275-279, 1988.
9. Pao, L.Y., and Franklin, G.F., "Proximate Time-Optimal Control of 3rd-Order Servomechanisms," *IEEE Trans. on Aut. Cont.,* Vol. 38, No. 4, pp. 560-580, 1993.
10. Postnikov, N.N., "Stochastic Oscillations in a Nuclear Reactor with Relay Control System," *Atomnaya Energiya,* Vol. 76, No. 1, pp. 3-11, 1994.
11. Seifi, H., et al, "Adaptive Power System Stabilizer Using a Bang-Bang Pole-Placement Strategy," *Int. Journal of Control,* Vol. 51, No. 1, pp. 33-50, 1990.
12. Thorp, J.S., et al, "Feasability of Adaptive Protection and Control, "*IEEE Trans. On Power Delivery,* Vol. 8, No. 3, pp. 975-983, 1993.

۱۳. منتظر، غ.، مومنی، ح.، و صدیق، ع.، "کنترل دو وضعیتی مقاوم،" دانشور، فصلنامهٔ علمی- پژوهشی دانشگاه شاهد، زمستان ۱۳۷۶.

۱۴. مومنی، ح.، منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "کنترل مقاوم خانوادهای از سیستمهای غیر خطی نامطمئن به کمک محرک بنگ-بنگ،" کنفرانس مهندسی هوا - فضا، شاهین شهر.

۱۵. مومنی، ح.، منتظر، غ.، صدیق، ع.،" روشی نو درکنترل مقاوم روباتهای غیر خطی همراه با عدم قطعیت به کمک کنترلگر دووضعیتی،" ششمین کنفرانس سالانهٔ مهندسی برق ایران، تهران.

۱۶. منتظر، غ. "طراحی کنترلگر دو وضعیتی مقاوم برای سیستمهای نامطمئن به روش کنترل ساختار متغیر،" رسالهٔ دکترای مهندسی برق - کنترل، دانشگاه تربیت مدرس.

17. Utkin, V.I., "Variable Structure Systems with Sliding Mode, :*IEEE Trans. on Aut. Cont.,* Vol. AC-22, No. 2, pp. 212-222, 1977.

۱۸. مومنی، ح. منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "شیوهای جدید در تعیین کران عناصر بردار خطای ردیابی برحسب شعاع همسایگی حول رویهٔ لغزشی درکنترل ساختار متغیر،" مجلهٔ مهندسی مدرس، پاییز ۱۳۷۶.

19. Momeni, H., Montazer, Gh.A., and Sedigh, A., "A General Method for Finding Robust Relay Controller for Uncertain third Order Systems," *Int. Journal of Eng.* (to publish).

۲۰. مومنی، ح.، منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "شیوهای نوین درکنترل مقاوم فرایندهای نامطمئن همراه با شیرهای روشن - خاموش،" سومین کنگرهٔ ملی مهندسی شیمی ایران، اهواز.

21. Hung, J.Y., and Gao, W., "Variable Struture Control: A Survey, "*IEEE Trans. On Indus. Elec.,* Vol. 40, No. 3, 1993.
22. Chung, W., et al, "Constructing Discontinuity Surfaces for Variable Structure Systems: A Lyapanov Approach," *Automatica,* No. 6, 1996.
23. Utkin, V.I., "Sliding Mode Control Design Principles and Application to Electric Drives," *IEEE Trans. on Indus. Elec.,* Vol. 40, No. 3, 1993.
24. Decarlo, R.A., et al, "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems, A Tutorial," *Proc. IEEE,* Vol. 76, No. 3, 1988.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1378.18.2.3.6]