

## حل برنامه‌ریزی دو سطحی<sup>۱</sup> با SA<sup>۲</sup>

سیدرضا حجازی<sup>\*</sup>، عزیزاله معماریانی<sup>\*\*</sup> و غلامرضا جهانشاهلو<sup>\*\*\*</sup>

بخش مهندسی صنایع دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

بخش ریاضی، دانشگاه تربیت معلم

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۱/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۷۹/۸/۱)

چکیده - برنامه‌ریزی دو سطحی ابزاری برای مدل‌سازی مسئله تصمیم‌گیری غیرمتمرکز است که در آن تصمیم‌گیرنده سطح یک و دو به ترتیب رهبر و پیرو گفته می‌شوند. ثابت شده است که مسئله برنامه‌ریزی دو سطحی یک مسئله Np-hard است. روشهای زیادی برای حل این مسئله ارائه شده است؛ اما کارایی محاسباتی<sup>۳</sup> آنها در حدی نیست که بتوانند مسائل بزرگ را حل کنند. در این مقاله سعی شده است روشی براساس SA برای حل مسئله برنامه‌ریزی دو سطحی توسعه داده شود. این روش از روشهای مدرن ابتکاری<sup>۴</sup> است که می‌تواند مسائل بزرگ را نیز تا رسیدن به یک جواب نزدیک به جواب بهینه حل کند. در این مقاله همچنین با حل مسائل متعدد روش پیشنهادی با روش ارائه شده توسط "ماتیو" و همکارانش [۱] مقایسه شده است.

## Simulated Annealing Approach for Solving Bilevel Programming Problem

S. R. Hejazi, A. Memariani and G. R. Jahanshahloo

Department of Industrial Engineering, School of Engineering, Tarbiat Modarres University

Department of Mathematics, Teacher Training University

**ABSTRACT-** *Bilevel programming, a tool for modeling decentralized decision problems, consists of the objective of the leader at its first level and that of the follower at the second level. Bilevel programming has been proved to be an Np-hard problem. Numerous algorithms have been developed for solving bilevel*

\*\*\* - استاد

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکترا

programming problems. These algorithms lack the required efficiency for solving a real problem. In this paper, attempts have been made to develop an algorithm based on Simulated Annealing (SA) Approach. This algorithm is efficient enough to find a near optimal solution. The proposed method is compared with the one developed by Mathieu et al [1] through application of both to a number of different problems.

### فهرست علائم

$A_1$ ماتریس ضرایب $x$ در محدودیت‌های مدل	$m$ تعداد محدودیت‌های مدل	$u$ بردار متغیرهای کمبود <sup>۵</sup> محدودیت‌ها
مدل	$n_0$ تعداد تکرارها در هر دما	$v$ بردار متغیرهای مازاد <sup>۶</sup> برای همزاد <sup>۷</sup> مسئله سطح دوم
$A_2$ ماتریس ضرایب $y$ در محدودیت‌های مدل	$n_1$ تعداد مؤلفه‌های بردار $x$	$x$ بردار متغیرهای تحت کنترل سطح یک
مدل	$n_2$ تعداد مؤلفه‌های بردار $y$	$y$ بردار متغیرهای تحت کنترل سطح دو
$b$ بردار منابع مدل	$R$ احتمال جستجوی همسایگی	$z$ بردار متغیرهای همزاد مسئله سطح دوم
$c_1$ بردار ضرایب $x$ در تابع هدف سطح یک	جوابهای نشدنی، که تابعی از دمای الگوریتم است	$\Delta$ درصد انحراف از مقدار بهینه
$c_2$ بردار ضرایب $x$ در تابع هدف سطح دو	$r$ عدد تصادفی با توزیع یکنواخت، در فاصله $[0, 1]$	$\Delta_{GA}$ درصد انحراف از مقدار بهینه برای الگوریتم GA
$d_1$ بردار ضرایب $y$ در تابع هدف سطح یک	$T$ دمای الگوریتم در مراحل مختلف	$\Delta_{SA}$ درصد انحراف از مقدار بهینه برای الگوریتم SA
$d_2$ بردار ضرایب $y$ در تابع هدف سطح دو	$T_0$ دمای اولیه الگوریتم	$\varepsilon$ عدد حقیقی بسیار کوچک
$F$ مقدار تابع هدف سطح یک، به دست آمده از الگوریتم	$t_{GA}$ زمان رسیدن به جواب با الگوریتم GA	
$F(x,y)$ تابع هدف تصمیم‌گیرنده سطح یک	$t_{SA}$ زمان رسیدن به جواب با الگوریتم SA	
$F^0$ مقدار بهینه تابع هدف سطح یک	پیشنهادی SA	
$f(x,y)$ تابع هدف تصمیم‌گیرنده سطح دو		
$f_0$ ضریب کاهش دما		

### ۱- مقدمه

نقطه  $(x_0, y_0)$  را یک نقطه شدنی می‌گوییم اگر در محدودیت‌های مدل (۱) صدق کند و آن را یک نقطه قابل دستیابی می‌گوییم اگر برای  $x=x_0$ ،  $y_0$  جواب بهینه مسئله سطح دوم باشد. مسئله سطح دوم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\max d_2y + c_2x_0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} A_2y \leq b - A_1x_0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

که در آن  $x_0$  توسط سطح یک تعیین شده است. همچنین مجموعه تمام نقاط قابل دستیابی را ناحیه قابل دستیابی<sup>۸</sup> مسئله BLP می‌گوییم که زیرمجموعه‌ای از مجموعه جوابهای شدنی BLP است و لزوماً یک مجموعه محدب نیست. هدف از حل مسئله BLP به دست آوردن نقطه‌ای از فضای قابل دستیابی است که به ازای آن مقدار تابع هدف سطح یک بر روی ناحیه قابل دستیابی بهینه شده باشد. از ویژگیهای مهم ناحیه قابل دستیابی این است که، مجموعه

بیشتر مدل‌های ریاضی شامل یک تصمیم‌گیرنده و یک تابع هدف هستند که برای برنامه ریزی متمرکز به کار می‌روند، اما برنامه‌ریزی ریاضی دو سطحی برای تصمیم‌گیری غیرمتمرکز توسعه داده شده است. در برنامه ریزی دو سطحی (BLP) که تصمیم‌گیرنده سطح یک آن را رهبر و سطح دو آن را پیرو می‌گوییم، هر تصمیم‌گیرنده سعی می‌کند تابع هدف خود را بدون توجه به هدف قسمت دیگر بهینه کند؛ اما تصمیم هر تصمیم‌گیرنده بر مقدار تابع هدف و فضای تصمیم‌گیری سطح دیگر اثر می‌گذارد. شکل ریاضی برنامه ریزی دو سطحی به صورت زیر است:

$$\max_x F(x,y) = c_1x + d_1y$$

$$\max_y f(x,y) = c_2x + d_2y \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} A_1x + A_2y \leq b \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

نقاط رأسی<sup>۹</sup> آن، زیرمجموعه نقاط رأسی فضای شدنی است و جواب بهینه BLP نیز یکی از این نقاط رأسی است.

روشهای ارائه شده برای حل این مسئله را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

الف - روشهایی براساس شمارش رئوس<sup>۱۰</sup>

ب - روشهایی براساس شرایط کوهن - تاکر

ج - نگرش فازی<sup>۱۱</sup> برای حل BLP

د - روشهای مدرن ابتکاری برای حل BLP

الف - روشهایی براساس شمارش رئوس

اساس این دسته از روشها بر این ایده استوار است که نقاط رأسی ناحیه قابل دستیابی برای مسئله BLP، نقطه رأسی فضای شدنی مسئله مورد نظر نیز هستند، همچنین جواب بهینه مسئله نیز یکی از این نقاط رأسی است.

اولین روش براین اساس را فالک [۲] برای مسئله Max-Min که یک مورد خاص از BLP است، توسعه داده است. در این روش نقاط رأسی مسئله سطح یک، با یک روش شاخه و کرانه<sup>۱۲</sup> جستجو می شود. بیالاس و کاروان [۳] الگوریتمی تحت عنوان "K-امین بهترین"<sup>۱۳</sup> ارائه کرده اند که یکی از روشهای مهم توسعه داده شده برای حل این مسئله است، در این روش فرایند جستجو از ناحیه غیر قابل دستیابی شروع شده و اولین نقطه قابل دستیابی که پیدا شود، متوقف می شود و این نقطه جواب بهینه مسئله BLP است.

بیالاس و کاروان [۴] همچنین روشی را پیشنهاد کرده اند که از یک نقطه رأسی ناحیه قابل دستیابی جستجو را آغاز می کند، اما این روش ممکن است در یک جواب بهینه موضعی<sup>۱۴</sup> متوقف شود.

الگوریتم دیگری به نام GSA<sup>۱۵</sup> توسط برد [۵] و به نام BCP<sup>۱۶</sup> توسط انلو [۶] بر پایه برنامه ریزی خطی دومعیاری توسعه داده شده است، ولی این روش توسط کندلر [۷]، کلارک و وستبرگ [۸]، ون و سو [۹]، بن ایاد و بلایر [۱۰] و بالاخره توسط مارکوتو و ساوارد [۱۱] با ارائه مثالهای نقض مورد انتقاد قرار گرفته و نشان داده شده است که مفاهیم پارتو و بهینگی برنامه ریزی دوسطحی کاملاً متفاوت بوده و نمی توان آنها را به سادگی به هم ارتباط داد.

ب - روشهایی براساس شرایط کوهن - تاکر

در این دسته از روشها شرایط کوهن - تاکر برای تابع هدف سطح دوم جایگزین شده و مسئله با تابع هدف سطح یک حل می شود. آمارت و مک کارل [۱۲] برای حل این مسئله محدودیتهای مکمل<sup>۱۷</sup> به وجود آمده را به محدودیتهای خطی با متغیرهای صفر و یک تبدیل کرده و مسئله را حل می کنند. بیالاس و کاروان [۳ و ۴] الگوریتم چرخش لولایی مکمل پارامتری<sup>۱۸</sup> (PCP) را توسعه داده اند، در این روش تابع هدف به صورت محدودیتی به شکل،  $c_1x + d_1y \leq \alpha$  به محدودیتهای مسئله اضافه شده و به یک مسئله مکمل خطی<sup>۱۹</sup> (LCP) تبدیل می شود. اگر این مسئله شدنی باشد، با افزایش  $\alpha$  می توان به یک جواب بهتر دست یافت. اگر در مرحله ای، LCP شدنی نباشد، جواب شدنی مرحله قبل جواب مسئله مورد نظر با این روش است.

برد و مور [۱۳] نیز روش شاخه و کرانه ای برای حل این مسئله توسعه داده اند. همچنین وایت و آناندالینگام [۱۴] و آناندالینگام و وایت [۱۵] با اضافه کردن یک تابع جریمه<sup>۲۰</sup> به عنوان بخشی از تابع هدف، جهت ارضای محدودیتهای مکمل، مسئله مورد نظر را حل کرده اند.

ج - نگرش فازی برای حل BLP

با این نگرش در سال ۱۹۹۶ روشی توسط شیه و همکارانش [۱۶] ارائه شده است که پس از آن ساکاو، نیشی زاکی و یومورا [۱۷] این روش را با اصطلاحاتی ارائه کرده اند. در این روش اصل عدم همکاری<sup>۲۱</sup> که یکی از اصول BLP است حذف شده است و در واقع روشی برای رسیدن به یک جواب توافقی ارائه شده است.

د - روشهای مدرن ابتکاری برای حل BLP

در این زمینه در سال ۱۹۹۴ ماتيو، پیتارد و آناندالینگام [۱] روشی براساس الگوریتم ژنی<sup>۲۲</sup> ارائه کرده اند، روش ارائه شده، تمام ناحیه قابل دستیابی را جستجو می کند و هرکروموزوم<sup>۲۳</sup> شدنی آن معرف یک جواب قابل دستیابی BLP است.

سahین و سیریت [۱۸] روشی براساس سیمبولیتد انیلینگ ارائه کرده اند. ایده اصلی این روش بسط فضای جستجو با فازی سازی مسئله و جستجوی تصادفی به کمک زنجیره های مارکوف<sup>۲۴</sup>

است. آنها مسائل کم و کوچکی را حل و گزارش کرده‌اند که گزارش ارائه شده نشان می‌دهد این روش کارایی مناسبی برای حل برنامه ریزی دوسطحی خطی را ندارد. به عنوان نمونه مسئله اول گزارش شده که یک برنامه ریزی دوسطحی خطی است، دارای سه متغیر و پنج محدودیت است که الگوریتم آنها در حدود ۴۴ ثانیه آن را حل می‌کند. اما به هر حال این روش قادر است هر برنامه ریزی دوسطحی مانند خطی، غیرخطی یا عدد صحیح را حل کند.

روش‌های نیز براساس الگوریتم ژنی توسط حجازی و همکارانش [۱۹] توسعه داده شده است که در این روش هر کروموزوم شدنی معرف یک نقطه رأسی ناحیه قابل دستیابی است و نسبت به روش ماتیو، پیتارد و آناندالینگام [۱] فضای بسیار محدودتری را جستجو می‌کند.

روش‌های که در این مقاله ارائه می‌شود بر اساس SA توسعه داده شده است و نقاط رأسی فضای قابل دستیابی را جستجو می‌کند.

## ۲- به کارگیری SA برای حل BLP

مدل برنامه ریزی دوسطح (۱) را در نظر می‌گیریم، در ابتدا شرایط کوهن - تاکر را برای مسئله سطح دوم نوشته و در مدل جایگزین می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{Max } c_1x + d_1y$$

$$\text{s.t: } \begin{cases} A_1x + A_2y + u = b \\ zA_2^T - v = d_2 \\ uz = 0 & vy = 0 \\ x, y, z, u, v \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

مدل (۳) یک برنامه ریزی ریاضی غیرخطی است. اگر  $u, z, v$  و  $y$ ها را به گونه‌ای محدود کنیم که محدودیتهای  $uz=0$  و  $vy=0$  برقرار باشد، می‌توانیم این محدودیتها را حذف کرده و برنامه ریزی خطی زیر را داشته باشیم، که فضای جوابهای شدنی آن بخشی از فضای جوابهای شدنی مدل (۳) است.

$$\text{Max } c_1x + d_1y'$$

$$\text{s.t: } \begin{cases} A_1x + A_2y' + u' = b \\ z'A_2^T - v' = d_2 \\ x, y', z', u', v' \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

برای ساختن مدل (۴) با ویژگی ذکر شده (هر جواب شدنی مدل (۴) یک جواب شدنی مدل (۳) است)، از یک رشته اعداد به طول  $m+n_2$  که هر عدد (جزء) آن می‌تواند صفر یا یک باشد، به عنوان راهنمای تغییرات استفاده می‌کنیم که  $m$  تعداد محدودیتهای مدل (۱) و  $n_2$  تعداد متغیرهای تحت کنترل تصمیم گیرنده سطح دو یا اندازه بردار  $y$  است.

نحوه تغییر مدل (۳) با استفاده از رشته اعداد تعریف شده به این صورت است که،  $m$  جزء اول این رشته را متناظر  $m$  معادله  $uz=0$  و  $n_2$  جزء آخر آن را متناظر  $n_2$  معادله  $vy=0$  در نظر می‌گیریم. اگر جزء  $i$ ام از  $m$  جزء اول عدد یک است، در مدل (۴)  $u_i$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اگر جزء  $i$ ام از  $m$  جزء اول عدد صفر است، در مدل (۴)  $z_i$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا همواره  $u_i z_i$  در مدل (۴) مساوی صفر باشد. همچنین اگر جزء  $i$ ام از بین  $n_2$  جزء آخر رشته اعداد مورد نظر عدد یک است، در مدل (۴)  $v_i$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم و اگر این جزء عدد صفر است، در مدل (۴)  $v_i$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم در این صورت در مدل (۴)،  $v_i z_i$  همواره مساوی صفر خواهد بود. بدین ترتیب مدل (۴) به گونه‌ای ساخته می‌شود که مجموعه جوابهای شدنی آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه جوابهای شدنی مدل (۳) باشد.

تعریف ۱- یک رشته اعداد به طول  $m+n_2$  که هر جزء آن عدد صفر یا یک باشد را یک جواب الگوریتم SA می‌نامیم.

تعریف ۲- اگر مدل (۴)، متناظر یک جواب SA شدنی باشد، این جواب را شدنی و در غیر این صورت آن را نشدنی می‌گوییم.

با توجه به تعاریف بالا، فضای جوابهای SA برای مدل (۳) گسسته و تعداد جوابهای آن  $2^{m+n_2}$  است، که برخی از آنها شدنی و برخی نشدنی هستند.

قضیه ۱- فرض کنیم مجموعه جوابهای مدل (۳)،  $S$  باشد و  $N$  تعداد جوابهای شدنی SA باشد که مجموعه جوابهای شدنی مدل (۴)، مربوط به هر کدام را با  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_N$  نشان دهیم، آن گاه داریم

$$S = \bigcup_{i=1}^N B_i$$

اثبات - بدیهی است که هر جواب متعلق به  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

چون تمام محدودیت‌های مدل (۳) را ارضا می‌کند متعلق به S نیز است، یعنی داریم:

$$\bigcup_{i=1}^N B_i \subseteq S \quad (\text{الف})$$

از طرف دیگر اگر جوابی مانند  $(x_0, y_0, u_0, v_0, z_0)$  متعلق به S باشد؛ آن گاه به ازای  $(i=1, 2, \dots, m)$  و  $u_{0i}z_{0i}=0$ ؛ باید حتماً  $u_{0i}$  و یا  $z_{0i}$  مساوی صفر باشد. در این صورت جواب SA مانند P را می‌سازیم؛ به طوری که اگر  $u_{0i}$  مساوی صفر است، جزء  $i$ ام از m جزء اول آن عدد یک باشد، اگر  $u_{0i}$  بزرگتر از صفر است، جزء  $i$ ام مساوی صفر باشد و اگر  $u_{0i}$  و  $z_{0i}$  هر دو مساوی صفر باشند، آن گاه این جزء می‌تواند به طور اختیاری عدد صفر یا یک انتخاب شود.

همچنین به ازای  $v_{0j}y_{0j}=0$  و  $(j=1, 2, \dots, n_2)$ ، حتماً باید  $v_{0j}$  و یا  $y_{0j}$  مساوی صفر باشد. اگر  $y_{0j}$  مساوی صفر است، در P، جزء  $j$ ام از  $n_2$  جزء آخر را برابر عدد یک قرار می‌دهیم و اگر  $y_{0j}$  بزرگتر از صفر است، این جزء را صفر قرار می‌دهیم و در صورتی که  $v_{0j}$  و  $y_{0j}$  هر دو صفر باشند، جزء مورد نظر را به طور اختیاری عدد صفر یا یک انتخاب می‌کنیم.

بدین ترتیب P یک جواب شدنی SA خواهد بود که  $(x_0, y_0, u_0, v_0, z_0)$ ، یک جواب شدنی مدل (۴) متناظر آن است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_i \quad (\text{ب})$$

از روابط (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت که؛

$$S = \bigcup_{i=1}^N B_i$$

## ۲-۱- روش حل مدل (۴)

برای حل مدل (۴) متناظر یک جواب SA، می‌توان ابتدا این مدل را به دو مسئله کاملاً از هم جدا به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } c_1x + d_1y' \\ & \text{s.t.} : \begin{cases} A_1x + A_2y' + u' = b \\ x, y', u' \geq 0 \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z' A_2^T - v' = d_2 \\ z', v' \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

چون دو مسئله (۵) و (۶) هیچ متغیر مشترکی ندارند تجزیه بالا مجاز است. حال اگر هر دو مسئله بالا شدنی باشند، مدل (۴) شدنی است در غیر این صورت مدل (۴) نشدنی است.

## ۲-۲- بررسی شدنی بودن یک جواب SA

برای اینکه تعیین کنیم یک جواب SA مانند P شدنی است یا نه، ابتدا مسئله (۵) متناظر آن را می‌سازیم و حل می‌کنیم، اگر نشدنی باشد آن گاه P نیز نشدنی خواهد بود. در غیر این صورت با توجه به جواب بهینه مسئله (۵)، P را بازسازی می‌کنیم، یعنی اگر جزء  $i$ ام P که متناظر  $y_i$  است صفر باشد و در جواب به دست آمده  $y_i$  مساوی صفر شده است، آن گاه جزء  $i$ ام را به عدد یک تغییر می‌دهیم. همچنین اگر جزء  $j$ ام P که متناظر  $z_j$  است، عدد صفر باشد و در جواب بهینه مسئله (۵)،  $z_j$  نیز صفر شده باشد، آن گاه جزء  $j$ ام P را عدد یک قرار می‌دهیم. اکنون مسئله (۶)، متناظر P بازسازی شده را حل می‌کنیم (مسئله (۶) متناظر با P بازسازی شده دارای فضای شدنی بزرگتر یا برابر فضای شدنی مسئله (۶)، متناظر با P قبل از بازسازی است). اگر این مسئله شدنی باشد، آن گاه P نیز یک جواب شدنی SA خواهد بود و در غیر این صورت P یک جواب نشدنی SA است.

قضیه ۲- جواب بهینه به دست آمده از مدل (۴) مربوط به یک جواب شدنی SA، متناظر یک نقطه رأسی ناحیه قابل دستیابی مدل (۱) است.

اثبات - فرض کنیم جواب بهینه مدل (۴)  $(x_0, y_0, u_0, v_0, z_0)$  باشد. چون این جواب یک جواب مدل (۳) است، در شرایط کوهن - تاکر برای مسئله سطح دوم نیز صدق می‌کند، پس یک جواب قابل دستیابی برای مدل (۱) خواهد بود. اما از طرفی  $(x_0, y_0, u_0)$  جواب بهینه مدل (۵) است، در نتیجه یک جواب پایه برای این مسئله است. یعنی ستونهای  $A_1$  و  $A_2$  متناظر با مؤلفه‌های مخالف صفر  $x_0$  و  $y_0$  مستقل خطی هستند. پس  $(x_0, y_0)$  یک نقطه رأسی  $\{A_1x + A_2y \leq b; x, y \geq 0\}$  خواهد بود. از طرفی گفتیم این جواب یک جواب قابل دستیابی است، پس  $(x_0, y_0)$  یک نقطه رأسی ناحیه قابل دستیابی برای مدل (۱) است.

با توجه به قضیه (۲)، الگوریتمی که توسعه داده می‌شود نقاط رأسی ناحیه قابل دستیابی را جستجو و ارزیابی می‌کند.

قضیه ۳- اگر مسئله (۶)، برای یک جواب SA مانند P نشدنی باشد؛ هر جواب دیگری مانند Q که اجزای صفر P در آن نیز صفر باشند، نشدنی خواهد بود.

اثبات - فرض کنیم مسئله (۶)، متناظر P به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} z' A_2^T - v' = d_2 \\ z', v' \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

در این مدل بعضی از  $z_i$  ها و  $v_j$  ها مساوی صفرند. اگر مسئله (۶) متناظر Q به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} z'' A_2^T - v'' = d_2 \\ z'', v'' \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

در این مدل علاوه بر  $z_i$  و  $v_j$  هایی که در (۷) مساوی صفرند، ممکن است  $z_i$  و  $v_j$  های دیگری نیز صفر باشند، به همین دلیل فضای شدنی (۸) زیرمجموعه‌ای از فضای شدنی (۷) است، پس می‌توان نتیجه گرفت اگر (۷) نشدنی باشد، (۸) نیز نشدنی است، یعنی Q نیز یک جواب نشدنی SA خواهد بود.

قضیه ۴- اگر مسئله (۵)، برای یک جواب SA مانند P نشدنی باشد، هر جواب دیگری مانند Q که اجزای عدد یک در آن نیز عدد یک باشند، نیز نشدنی خواهد بود.

اثبات - فرض کنیم مسئله (۵) متناظر P به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } c_1 x + d_1 y' \\ & \text{s.t: } \begin{cases} A_1 x + A_2 y' + u' = b \\ x, y', u' \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

در مدل (۹) بعضی از مؤلفه‌های بردارهای  $y'$  و  $u'$  مساوی صفرند. اگر مسئله (۵) متناظر Q به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } c_1 x + d_1 y'' \\ & \text{s.t: } \begin{cases} A_1 x + A_2 y'' + u'' = b \\ x, y'', u'' \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

آن‌گاه در این مدل علاوه بر  $u_i$  و  $y_j$  هایی که در مدل (۹) مساوی صفرند ممکن است  $u_i$  و  $y_j$  های دیگر نیز مساوی صفر باشند، به همین دلیل فضای شدنی مدل (۱۰) زیرمجموعه‌ای فضای شدنی

مدل (۹) خواهد بود. بنابراین اگر مدل (۹) نشدنی باشد مدل (۱۰) نیز نشدنی است یعنی Q نیز یک جواب نشدنی SA است.

از قضایای (۳) و (۴) برای تشخیص جوابهای SA نشدنی قبل از حل مدل‌های (۵) و (۶) و با استفاده از اطلاعات مراحل قبل در الگوریتم مورد نظر استفاده خواهد شد.

تعریف ۳- اگر P یک جواب SA باشد، Q را در همسایگی مرتبه اول P می‌گوییم اگر P و Q تنها در یک جزء با هم مختلف باشند. به عبارت دیگر مجموعه تمام جوابهای SA را که فقط در یک جزء با هم تفاوت دارند را همسایگی مرتبه اول P می‌نامیم.

تعریف ۴- مجموعه تمام جوابهای SA که دقیقاً در i جزء با P تفاوت دارند را همسایگی مرتبه iام P می‌نامیم. با توجه به تعاریف بالا، مرتبه همسایگی حداکثر  $m+n_2$  است.

### ۲-۳- نحوه ساختن جواب اولیه الگوریتم SA

برای ساختن جواب اولیه الگوریتم ابتدا مدل شماره (۱۱) را حل می‌کنیم، سپس یک جواب SA را به این صورت می‌سازیم که، اگر  $u_i$  بزرگتر از صفر باشد، جزء  $i$ ام از m جزء اول P را مساوی عدد یک قرار می‌دهیم، در غیر این صورت آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. همچنین اگر  $y_j$  بزرگتر از صفر باشد، جزء  $j$ ام از  $n_2$  جزء آخر P را مساوی عدد یک قرار می‌دهیم، در غیر این صورت آن جزء را برابر صفر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب P به عنوان یک جواب الگوریتم SA ساخته می‌شود.

$$\text{Max } c_2 x + d_2 y$$

$$\begin{cases} A_1 x + A_2 y + u = b \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

### ۳- گامهای الگوریتم SA برای حل BLP

گام صفر:

الف -  $T \leftarrow T_0$ ،  $f \leftarrow f_0$  و  $n \leftarrow 0$ ،  $T_0$  دمای اولیه،  $f_0$  ضریب کاهش دما و  $n$  یک شمارنده برای تعداد تکرارها در هر دماست.

ب - با روشی که در بخش (۲-۳) توضیح داده شده است، یک جواب شدنی اولیه مانند P برای ادامه الگوریتم می‌سازیم. این جواب را با نام Q به عنوان بهترین جواب پیدا شده تا به حال، نگهداری می‌کنیم و به گام یک می‌رویم.

گام یک:

۱- یک جواب در همسایگی مرتبه  $n$ ام جواب فعلی (مرتبه همسایگی با توجه به نحوه استفاده از همسایگی با مراتب مختلف که در بخش (۴) مشخص خواهد شد، تعیین می شود). مانند  $P_1$  را به طور تصادفی تولید می کنیم (برای تولید  $P_1$ ، به طور تصادفی  $i$  جزء جواب فعلی را انتخاب کرده و هر کدام از اجزای انتخاب شده صفر باشد به عدد یک تغییر می دهیم و بالعکس).

۲- با استفاده از اطلاعات ذخیره شده از تکرارهای قبل و به کارگیری قضایای (۳) و (۴)

۱-۲- اگر مسئله (۵) متناظر  $P_1$  شدنی است

۱-۱-۲- اگر مسئله (۶) متناظر  $P_1$  نیز شدنی باشد به گام دو می رویم  
۲-۱-۲- در غیر این صورت به گام سه می رویم.

۲-۲- اگر مسئله (۵) متناظر  $P_1$  نشدنی باشد به گام سه می رویم.  
۲-۳- اگر شدنی یا نشدنی بودن مسائل (۵) و (۶) متناظر  $P_1$  تشخیص داده نشود. در این صورت مسئله (۵) متناظر  $P_1$  را حل می کنیم

۲-۳-۱- اگر مسئله شدنی نباشد، اطلاعات مربوطه را در صورت نیاز ذخیره کرده و به گام سه می رویم.

۲-۳-۲- اگر مسئله شدنی باشد با توجه به جواب بهینه مسئله (۵)،  $P_1$  را بازسازی کرده و مسئله (۶)، متناظر  $P_1$  بازسازی شده را حل می کنیم

۲-۳-۲-۱- اگر مسئله نشدنی باشد، اطلاعات مربوطه را در صورت نیاز ذخیره کرده و به گام سه می رویم

۲-۳-۲-۲- اگر مسئله شدنی باشد، اطلاعات مربوطه را در صورت نیاز ذخیره کرده و به گام دو می رویم.

گام دو:  $n \leftarrow n+1, P \leftarrow P_1$

اگر جواب پیدا شده بهتر از  $Q$  باشد،  $Q$  را برابر این جواب قرار داده و به گام چهارم می رویم. در غیر این صورت، بدون تغییر  $Q$  به گام چهارم می رویم.

گام سه:

عدد تصادفی  $r$  را با توزیع یکنواخت در فاصله [۰ و ۱] تولید می کنیم.

- اگر  $r \leq R$  باشد، آن گاه؛  $n \leftarrow n+1, P \leftarrow P_1$  و به گام چهارم می رویم

- اگر  $r > R$  باشد، آن گاه؛  $n \leftarrow n+1$  و به گام چهارم می رویم.

گام چهارم:

اگر  $n < n_0$ ؛ به گام یک می رویم.

- در غیر این صورت،  $T \leftarrow f \times T, n \leftarrow 0$

- اگر  $T \leq \epsilon$  است (یا الگوریتم به جواب مورد نظر رسیده است)، توقف می کنیم و  $Q$  را به عنوان جواب BLP مورد نظر با این الگوریتم معرفی می کنیم.

- در غیر این صورت به گام یک بر می گردیم.

#### ۴- تجزیه و تحلیل نتایج محاسباتی

برای تجزیه و تحلیل نتایج محاسباتی الگوریتم توسعه داده شده، مسائل برنامه ریزی خطی را با نرم افزار LINDO حل می کنیم و یک برنامه رابط به زبان C++ نوشته شده است که جوابهای به دست آمده از حل مسئله های خطی توسط LINDO را گرفته و طبق الگوریتم توسعه داده شده جواب BLP مورد نظر را جستجو می کند. در این بخش ابتدا تابع  $R$  تعیین شده است و سپس مقدار مناسب پارامترهای آن با حل مسائل متعددی تخمین زده شده است. همچنین در ادامه پارامترهای دیگر الگوریتم مانند ضریب تغییر دما، تعداد تکرارها در هر دما و نحوه استفاده از همسایگیها با مراتب مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

پس از تعیین پارامترهای مختلف الگوریتم در انتهای این بخش روش SA پیشنهادی و روش GA ارائه شده توسط ماتيو و همکارانش با حل مسائلی با اندازه های مختلف مقایسه شده است.

#### ۴-۱- تعیین تابع $R$

به منظور تعیین تابع مناسب  $R$  ابتدا با حل مسائلی، چندین تابع مورد بررسی قرار گرفته است که توابع زیر برای بررسی نهایی انتخاب شده اند.

الف -  $R_1 = 0.3$

ب -  $R_2 = \text{EXP}(C \times T / T_0)$

ج -  $R_3 = A / (\text{EXP}(B \times (T_0 - T)))$

به طوری که  $A, B, C$  و  $T_0$  پارامترهای ثابت هستند.

با مقادیر ثابت  $T_0=1000, A=1, B=0.0055, C=5$  و

$f_0=0.97$  ضریب کاهش دما) شکل توابع (الف)، (ب) و (ج) تقریباً

به صورت زیر است:

جدول ۱- ارزیابی چند تابع برای R

شماره دسته مسئله	$m-n_1-n_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
۱	۷-۴-۵	۱/۰۱	۰/۸۰	۱/۱۲
۲	۱۰-۵-۱۰	۵/۹۵	۱۰/۸۹	۳/۵۱
۳	۱۵-۷-۱۶	۲۰/۲۲	۲۹/۶۱	۱۳/۹۶
۴	۲۰-۱۰-۱۵	۲۱/۹۰	۲۴/۹۴	۱۹/۷۰
۵	۲۲-۷-۱۴	۳۴/۳۲	۳۷/۶۵	۳۱/۳۸

$t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  عبارتند از متوسط زمان رسیدن به جواب مورد نظر وقتی که به ترتیب از  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  در الگوریتم استفاده می‌شود.

می‌ماند. بنابراین، دو پارامتر  $T_0$  و  $R$  همزمان با هم مورد بررسی قرار گرفته است.

برای تعیین مقدار مناسب A پارامترهای دیگر ثابت فرض شده و ده مسئله با اندازه ۱۷-۷-۱۲ (یعنی  $m=17$ ،  $n_1=7$  و  $n_2=12$ ) جدول (۲) ارائه شده است. با توجه به اطلاعات جدول (۲)، بهترین مقدار برای A عدد ۰/۸ است، چون با این مقدار متوسط زمان رسیدن به جواب کمتر از بقیه حالتهاست.

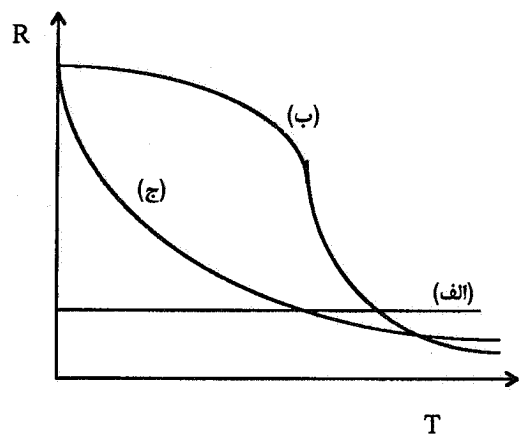
برای تعیین مقدار مناسب پارامترهای  $T_0$  و B، بررسیهای اولیه نشان داده است که مقدار مناسب حاصل ضرب  $B \times T_0$  باید در فاصله ۱/۵ و ۳ باشد. بنابراین برای مقادیر  $B \times T_0$  برابر با ۱/۵، ۲، ۲/۵ و ۳ ده مسئله با اندازه ۱۵-۶-۱۵ حل شده است که زمان رسیدن به جواب مورد نظر در جدول (۳) ارائه شده است. نتایج ارائه شده در جدول (۳) نشان می‌دهد که مقدار مناسب  $B \times T_0$  برابر عدد دو است، یعنی برای  $T_0=1000$  باید  $B=0.002$  در نظر گرفته شود.

#### ۴-۲- تعیین پارامترهای دیگر الگوریتم

پارامترهایی مانند ضریب تغییر دما ( $f_0$ )، تعداد تکرارها با هر دما و نحوه استفاده از همسایگی با مراتب مختلف از عوامل مؤثر در کارایی الگوریتم هستند که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرند.

#### ۴-۲-۱ ضریب تغییر دما ( $f_0$ )

تابع تغییر دما در این الگوریتم در هر مرحله به صورت ضریبی از دمای مرحله قبل در نظر گرفته شده است. در اینجا تعیین مقدار



شکل ۱

برای تعیین تابع مناسب R پنج سری مسئله با اندازه‌های مختلف (در هر اندازه هفت مسئله) حل شده است و متوسط زمان رسیدن به جواب مورد نظر در حالت‌های مختلف، در جدول (۱) ارائه شده است.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۱) در چهار سری از مسائل حل شده، تابع (ج) نسبت به توابع (الف) و (ب)، الگوریتم را در حل مسائل مورد نظر کارا تر کرده است، و فقط در سری اول تابع (ب) کارا تر بوده است. بنابراین تابع (ج) برای تعیین احتمال جستجوی همسایگی یک جواب نشدنی SA در هر مرحله انتخاب می‌شود.

تابع R تعیین شده دارای پارامترهای  $T_0$ ، A و B است. با بررسی اجمالی این تابع مشخص شد که A تعیین کننده مقدار R در زمان صفر است و پارامترهای  $T_0$  و B وابسته به هم بوده و تعیین می‌کنند که مقدار R پس از گذشت مدت زمانی، در چه مقداری ثابت باقی



جدول ۲- نتایج اثر پارامتر A بر کارایی الگوریتم

A=0.6	A=0.7	A=0.8	A=0.9	A=1.0	مقدار تابع هدف سطح یک	شماره مسئله
۵/۴۹	۷/۹۶	۷/۸۰	۱۱/۲۶	۸/۶۸	-۳۳/۹۵	۱
۱/۳۷	۱/۷۰	۴/۱۷	۳/۹۵	۶/۲۶	۶۰۵/۰۶	۲
۱۰/۳۲	۴/۵۶	۱/۷۰	۱/۶۵	۱/۴۸	۴۷۶/۹۴	۳
۱۱/۹۲	۱۲/۱۴	۱۲/۶۳	۱۳/۸۴	۲۴/۶۷	۲۵۹/۴۵	۴
۲/۵۸	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۵۵	۴/۸۳	۳۱۱/۸۹	۵
۱۳/۶۳	۲/۲۴	۲/۴۷	۲/۴۷	۱۹/۸۳	۲۱۸/۸۷	۶
۱/۹۷	۱/۹۲	۴/۳۴	۱۵/۹۳	۱/۹۲	۲۳۹/۱۶	۷
۹/۳۴	۱۸/۹۵	۵/۵۹	۵/۵۵	۸/۵۷	۶۱۶/۹۸	۸
۱۸/۳۷	۶/۲۶	۵/۹۸	۱۷/۱۴	۹/۹۴	۴۹۷/۹۵	۹
۸/۹۰	۸/۸۵	۴/۴۵	۴/۴۵	۴/۵۶	۳۱۴/۶۷	۱۰
۸/۳۹	۶/۵۱	۴/۹۷	۷/۶۸	۹/۰۷	متوسط زمان حل	

جدول ۳- نتایج بررسی اثر  $T_0$  و B بر کارایی محاسباتی الگوریتم

$B \times T_0 = 1.5$	$B \times T_0 = 2.0$	$B \times T_0 = 2.5$	$B \times T_0 = 3.0$	مقدار تابع هدف سطح یک	شماره مسئله
۴/۲۸	۲/۹۶	۳/۱۳	۳/۱۹	۱۷۳/۴۴	۱
۱۱/۱۵	۵/۷۱	۱۹/۳۴	۷/۲۵	۲۹۲/۲۱	۲
۴/۶۱	۱/۶۴	۱/۵۹	۱/۶۵	۴۰۱/۶۹	۳
۲۲/۸۵	۱/۳۱	۱/۷۷	۱/۳۷	۲۷۹/۶۷	۴
۱۵/۴۳	۲۶/۰۹	۵/۴۹	۱۰/۵۵	۲۵۶/۲۳	۵
۱۰/۱۰	۹/۲۸	۱۸/۵۳	۲۶/۱۵	۶۴۷/۶۴	۶
۵/۳۸	۷/۳۱	۱۰/۸۲	۱۱/۵۳	۳۵۷/۰۰	۷
۴/۳۹	۴/۳۰	۶/۷۵	۳/۹۵	۹۵/۶۷	۸
۱۱/۳۲	۱۱/۳۷	۲۷/۱۹	۲۲/۰۳	۴۴۶/۳۹	۹
۱۹/۷۲	۱۸/۶۲	۱۵/۲۱	۱۵/۱۰	۹۷۱/۹۷	۱۰
۱۰/۹۲	۸/۸۶	۱۰/۹۸	۱۰/۲۸	متوسط زمان حل	

جدول (۴) ارائه شده است.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۴) حالتی که  $f_0$  برابر  $۰/۹۶$  و  $۰/۹۷$  بوده متوسط زمان کمتری به دست آمده است. یعنی

مناسب ضریب تغییر دما ( $f_0$ ) مورد نظر است. بدین منظور ده مسئله با اندازه ۱۲-۷-۱۷، به ازای مقادیر مختلف  $f_0$  حل شده است که زمان رسیدن به جواب مورد نظر در حالتیهای مختلف در

جدول ۴- اثر ضریب تغییر دما بر کارایی الگوریتم

شماره مسئله	مقدار تابع هدف سطح یک	$f_0=0.94$	$f_0=0.95$	$f_0=0.96$	$f_0=0.97$	$f_0=0.98$	$f_0=0.99$
۱	-۳۳/۹۵	۷/۸۶	۱۰/۳۳	۷/۵۸	۷/۸۰	۸/۸۴	۴/۹۴
۲	۶۰۵/۰۶	۱/۶۵	۱/۵۹	۴/۲۸	۴/۱۷	۶/۲۶	۶/۵
۳	۴۷۶/۹۴	۷/۹۶	۷/۳۶	۱/۷۰	۱/۷۰	۱/۶۵	۱/۶۵
۴	۲۵۹/۴۵	۱۲/۴۲	۱۲/۵۳	۱۲/۲۵	۱۲/۶۳	۱۷/۸۱	۲۵/۸۷
۵	۳۱۱/۸۹	۰/۵۵	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۶۰
۶	۲۱۸/۸۷	۱۳/۹	۱۱/۸۱	۲/۴۷	۲/۴۷	۲/۶۹	۲۱/۷۵
۷	۲۳۹/۱۶	۱/۱۵	۸/۸۵	۴/۲۹	۴/۳۴	۴/۲۹	۱۲/۳۰
۸	۶۱۶/۹۸	۱۴/۱۲	۶/۴۸	۵/۹۳	۵/۵۹	۸/۸۴	۸/۸۴
۹	۴۹۷/۹۵	۲۴/۵۲	۲۱/۱۰	۶/۲۶	۵/۹۸	۵/۶۶	۳۹/۸۳
۱۰	۳۱۴/۶۷	۶/۴۸	۴/۳۹	۴/۳۹	۴/۴۵	۴/۳۹	۱۴/۰۶
متوسط زمان حل		۹/۰۶	۸/۵۰	۴/۹۷	۴/۹۷	۶/۱۰	۱۳/۶۳

به ازای این مقادیر برای  $f_0$  کارایی محاسباتی الگوریتم بالاتر خواهد بود.

#### ۴-۲-۲ تعداد تکرارها در هر دما ( $n_0$ )

پارامتر دیگری که ممکن است کارایی محاسباتی الگوریتم را تحت تأثیر قرار دهد، تعداد تکرارها در هر دماست. برای بررسی اثر این عامل و تعیین مقدار مناسب برای آن چهار گروه مسئله که در هر گروه اندازه مسئله ثابت است، حل شده است. در اینجا کلیه پارامترها ثابت فرض شده و فقط تعداد تکرارها تغییر یافته است. متوسط زمان رسیدن به جواب مورد نظر برای تعداد تکرارهای مختلف در جدول (۵) ارائه شده است.

اطلاعات این جدول نشان می‌دهد که در سه گروه از مسائل حل شده، تعداد تکرار چهار، کارایی بیشتری داشته است. فقط در گروه سوم کارایی تعداد تکرار سه بیشتر از تعداد تکرار چهار است، که این اختلاف نیز بسیار جزئی است. به همین دلیل با توجه به مسائل حل شده بهترین مقدار برای  $n_0$ ، چهار است.

#### ۴-۲-۳ نحوه استفاده از همسایگیها با مراتب مختلف

در این الگوریتم همسایگی با مراتب مختلف تعریف شده است

و می‌توان برای انتخاب یک جواب در همسایگی جواب فعلی از همسایگی با مراتب مختلف استفاده کرد. برای تعیین نحوه استفاده از همسایگیها با مراتب مختلف بررسیهای اولیه نشان داد، استفاده از یک همسایگی مشخص به طور ثابت در طول اجرای الگوریتم، مخصوصاً برای همسایگیهای با مرتبه سه و بالاتر برخی از مسائل را در زمان قابل قبول به جواب مورد نظر نمی‌رساند. به همین دلیل برای بررسی دقیقتر، حالت‌های زیر در نظر گرفته شده است:

الف - همسایگی مرتبه یک

ب - همسایگی مرتبه دو

ج - همسایگیهای مرتبه یک و دو، توأم و با احتمال به کارگیری یکسان

د - همسایگیهای مرتبه یک، دو و سه، توأم و با احتمال به کارگیری یکسان.

در جدول (۶) زمانهای به دست آمده برای حل ده مسئله با اندازه ۹-۴-۱۰ برای حالت‌های فوق‌الذکر ارائه شده است. همان گونه که از اطلاعات این جدول پیداست متوسط زمان رسیدن به جواب مورد نظر برای حالت (ج)، ۲/۳۶ ثانیه است، که از بقیه حالتها کمتر است.

بنابراین با توجه به مسائل حل شده بهترین نحوه استفاده از

جدول ۵- اثر تعداد تکرارها در هر دما بر کارایی الگوریتم

شماره دسته مسئله	$m-n_1-n_2$	$n_0=3$	$n_0=4$	$n_0=5$	$n_0=6$	$n_0=7$
۱	۷-۴-۵	۱/۲۶	۱/۲۳	۱/۴۵	۱/۷۳	۱/۷۴
۲	۱۰-۴-۹	۷/۳۵	۳/۰۸	۴/۴۶	۴/۰۴	۶/۵۹
۳	۱۵-۷-۱۰	۵/۰۴	۵/۶۵	۶/۶۲	۶/۷۶	۶/۹۴
۴	۲۰-۱۰-۱۲	۱۲/۵۳	۱۱/۳۵	۱۲/۳۲	۱۴/۵۸	۱۲/۴۶

جدول ۶- نتایج حاصل از بررسی اثر نحوه استفاده از همسایگیها با مراتب مختلف

شماره مسئله	مقدار تابع هدف سطح یک	حالت (الف)	حالت (ب)	حالت (ج)	حالت (د)
۱	-۳۸۲/۴۲	۸/۱۳	۴/۸۹	۱/۸۱	۳/۹۵
۲	۲۷/۸۶	۰/۳۳	۲/۷۵	۱/۱۵	۲/۰۹
۳	-۴۶/۱۹	۳/۸۵	۲/۴۷	۳/۶۳	۲/۵۳
۴	۲۳۵/۸۵	۶/۴۳	۱/۴۳	۶/۷۵	۴/۴۵
۵	۶۱۶/۸۱	۱۰/۷۶	۸/۵۷	۲/۱۴	۰/۲۲
۶	۱۳۴/۵۱	۵/۶۰	۱۰/۰	۳/۸۵	۸/۸۴
۷	۶۳۴/۲۳	۲/۸۰	۰/۵۵	۳/۰۲	۱/۹۸
۸	۴۱۰/۷۲	۰/۶۶	۲/۰۳	۰/۲۷	۱/۲۱
۹	۱۱۲/۵۷	۳/۱۹	۴/۳۹	۰/۹۳	۱/۶۵
۱۰	۴۶۶/۹۵	۱۲/۸۵	۰/۱۱	۰/۱۱	۱۳/۳۵
متوسط زمان حل					۴/۰۳

است اما این جواب لزوماً یک نقطه رأسی فضای قابل دستیابی نیست.

در الگوریتم GA ارائه شده دو روش برای تولید جمعیت نسل جدید استفاده شده است. روش اول تولید تصادفی مقدار متغیرهای تصمیم گیرنده رهبر و به دست آوردن متغیرهای تصمیم گیرنده پیرو با استفاده از حل مسئله سطح دوم است و روش دیگر استفاده از فرایند جهش است که در این روش یک یا چند جزء از  $\Pi_1$  جزء اول یک کروموزوم موجود را تغییر داده و  $\Pi_2$  جزء آخر آن، با حل مسئله سطح دوم پس از اعمال تغییرات به دست می آید. در فرایند جهش این الگوریتم حدود تغییر اجزا در هر مرحله تغییر می کند و به تدریج کاهش پیدا می کند، وقتی این حدود تغییر از مقدار کوچکی مانند  $\epsilon$

همسایگی با مراتب مختلف، استفاده از مرتبه های یک و دو با احتمالهای به کارگیری یکسان است.

۳-۴- مقایسه روش GA ارائه شده توسط ماتيو و همکارانش با روش SA پیشنهادی

ماتيو و همکارانش [۱] روشی بر پایه الگوریتم ژنی برای حل BLP ارائه کرده اند. در این روش هر کروموزوم یک رشته اعداد حقیقی به طول  $\Pi_1 + \Pi_2$  است.  $\Pi_1$  عدد نخستین این رشته، مقادیر متغیرهای تحت کنترل تصمیم گیرنده رهبر و  $\Pi_2$  عدد باقیمانده مقادیر متغیرهای تحت کنترل تصمیم گیرنده پیرو هستند. در واقع هر کروموزوم شدنی در این روش یک جواب قابل دستیابی BLP

جدول ۷- مقایسه روش پیشنهادی با روش ماتیو و همکارانش

$\Delta_{GA}$	$t_{GA}$	$\Delta_{SA}$	$t_{SA}$	m-n <sub>1</sub> -n <sub>2</sub>	شماره دسته مسئله
۱۸/۰۷	۱/۷۶	۰/۰۰	۰/۶۵	۶-۱-۳	۱
۳۸/۷۷	۲۴/۵۵	۰/۰۰	۰/۷۸	۵-۴-۵	۲
۴۹/۷۶	۲۳/۹۵	۰/۰۰	۱/۱۴	۷-۴-۵	۳
۴۸/۹۶	۳۶/۰۲	۰/۰۰	۲/۱۰	۸-۵-۶	۴
۵۲/۷۱	۷۰/۸۲	۰/۰۰	۵/۳۶	۹-۶-۸	۵
۷۹/۱۴	۸۷/۹۲	۰/۰۰	۴/۲۱	۱۰-۸-۵	۶
۵۰/۸۸	۱۹۲/۵۶	۲/۵۰	۷/۳۲	۱۱-۷-۱۰	۷
-	-	۱/۳۱	۱۸/۳۳	۱۵-۱۰-۱۰	۸
-	-	۰/۲۵	۳۴/۳۴	۲۵-۱۵-۱۵	۹
-	-	۱/۱۰	۴۳/۷۴	۳۰-۱۵-۲۰	۱۰

مشخصی نسبت به روش GA ارائه شده توسط ماتیو و همکارانش دارد.

#### ۵- خلاصه و نتیجه گیری

روشهای مدرن ابتکاری برای کاهش پیچیدگی محاسباتی ارائه شده‌اند و می‌توانند در حل BLP که یک مسئله Np-hard است مؤثر باشند.

هدف از تهیه این مقاله توسعه روشی براساس الگوریتم SA برای حل BLP بوده است. در روش توسعه داده شده، ابتدا شرایط کوهن - تاکر برای مسئله سطح دوم نوشته می‌شود تا مسئله به صورت یک برنامه ریزی یک هدفی با محدودیتهای مکمل تبدیل شود. سپس با تعریف یک جواب SA، برای مدل تبدیل شده، و بیان چند قضیه اساسی، روش SA برای حل BLP توسعه داده شده است. این روش نقاط رأسی فضای قابل دستیابی را جستجو و ارزیابی می‌کند.

پس از تخمین مقدار مناسب پارامترهای الگوریتم توسعه داده شده با حل مسائل متعدد، این روش با روش GA ارائه شده توسط ماتیو و همکارانش [۱] مقایسه شده است. نتایج محاسبات نشان می‌دهند که روش SA پیشنهادی هم از نظر زمان محاسبات و هم از نظر کیفیت جواب به دست آمده برتری زیادی نسبت به روش ماتیو و همکارانش دارد.

کمتر شود الگوریتم متوقف شده و بهترین جواب به دست آمده را به عنوان جواب BLP گزارش می‌کند.

در این مقاله کارایی با دو عامل زمان انجام محاسباتی (واحد ثانیه) و کیفیت جواب به دست آمده که به صورت زیر سنجیده می‌شود مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

$$\Delta = (F^* - F) / F^* \times 100$$

هر چقدر  $\Delta$  برای یک جواب کمتر باشد آن جواب بهتر است. برای مقایسه دو الگوریتم ده گروه از مسائل با اندازه‌های مختلف که در هر گروه پنج مسئله قرار دارد حل شده است و نتایج به دست آمده در جدول (۷) ارائه شده است. با توجه به داده‌های جدول (۷)، در شش گروه اول از مسائل، مقدار  $\Delta_{SA}$  برای روش SA پیشنهادی صفر است، یعنی روش پیشنهادی جواب بهینه را به دست آورده است. در چهار گروه آخر نیز مقدار  $\Delta_{SA}$  کوچکتر یا مساوی ۲/۵ درصد است. در حالی که برای روش GA در هفت گروه اول از مسائل مقدار  $\Delta_{GA}$  حداقل ۱۸/۰۷ درصد است و در سه گروه آخر، الگوریتم GA به ترتیب در زمانهای ۲۰۰، ۳۰۰ و ۵۰۰ ثانیه هیچ جوابی به دست نیاورده است.

همچنین از نظر زمان رسیدن به جواب نیز روش SA پیشنهادی در زمانهای بسیار کمتری به جواب رسیده است.

بنابراین روش SA با توجه به مسائل حل شده هم از نظر زمان رسیدن به جواب و هم از نظر کیفیت جواب به دست آمده برتری

## قدردانی

ضمن تشکر فراوان از داوران محترم این مقاله که نظرات ارزنده آنها باعث بهبود کیفیت مقاله شد، لازم می‌دانیم از آقایان دکتر حسام‌الدین ذگردی و دکتر محمدمهدی سپهری به خاطر راهنمایی آنها در انجام این تحقیق سپاسگزاری کنیم.

1. bilevel programming
2. Simulated Annealing (SA)
3. computational efficiency
4. modern heuristic method
5. slack
6. surplus
7. dual
8. accessible region
9. vertex points
10. vertex enumeration
11. fuzzy approach
12. branch and bound

1. Mathiue, R., Pittard, L., and Anandalingam, G., "Genetic Algorithm Based Approach to Bilevel Linear Programming," *Recherche Operationnelle / Operations Research*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-21, 1994.
2. Falk, J. E., "A Linear Max-Min Problem," *Math. Prog.*, Vol. 5, pp. 169-188, 1973.
3. Bialas, W. F., and Karwan, M. H., "On Two-level Optimization," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 27, No. 1, pp. 11-214, 1982.
4. Bialas, W. F., and Karwan, M. H., "Two-level Linear Programming," *Mgmt Sci.*, Vol. 30, pp. 1004-1020, 1983.
5. Bard, J. F., "An Efficient Point Algorithm for a Linear Two-Stage Optimization Problem," *Ops. Res.*, Vol. 38, pp. 670-684, 1983.
6. Ünlü, G., "A Linear Bilevel programming Algorithm Based on Bicriteria Programming," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 14, pp. 173-179, 1987.
7. Candler, W., "A Linear Bilevel Programming Algorithm: A Comment," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 15, No. 3, pp. 297-298, 1983.
8. Clark, P. A., and Westerberg, A. W., "A Note on the

در زمینه استفاده از روشهای مدرن ابتکاری برای حل BLP تحقیقاتی انجام شده است. علاوه بر مقاله حاضر، مقاله‌ای که در آن از الگوریتم ژنی برای حل BLP استفاده شده است، توسط مؤلفان این مقاله آماده شده است که در دست چاپ است. همچنین تحقیقات آتی برای به کارگیری روشهای مدرن ابتکاری دیگر و تعیین بهترین روش مدرن ابتکاری برای حل BLP ادامه دارد.

## واژه نامه

13. kth-best
14. local optima
15. Grid Search Algorithm (GSA)
16. Bicriteria Programming (BCP)
17. complementary constraints
18. parametric complementary pivot
19. Linear Complementary Problem (LCP)
20. penalty function
21. noncooperative principle
22. Genetic Algorithm (GA)
23. chromosome

## مراجع

- Optimality Conditions for the Bilevel Programming Problem," *Nav. Res. Logist. Q.*, Vol. 35, pp. 413-418, 1988.
9. Wen, U. P., and Hsu, S. T., "A Note on a Linear Bilevel Programming Algorithm Based on Bicriteria Programming," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 16, No. 1, pp. 79-83, 1989.
10. Ben-Ayed, O., and Blair, C. E., "Computational Difficulties of Bilevel Linear Programming," *Ops. Res.*, Vol. 38, pp. 556-560, 1990.
11. Marcotte, P., and Savard, G., "A Note on the Pareto Optimality of Solutions to the Linear Bilevel Programming Problem," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 18, No. 4, pp. 355-359, 1991.
12. Fortury-Amat, J., and McCarl, B., "A Representation and Economic Interpretation of a Two-level programming Problem," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 32, pp. 783-792, 1981.
13. Bard, J. F., and Moore, J. T., "A Branch and Bound Algorithm for the Bilevel Programming Problem," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 11, No. 2, pp. 281-292, 1990.
14. White, D. J., and Anandalingam, G., "A Penalty

- Function Approach for Solving Belevel Linear Programs," *Journal of Global Optimization*, Vol. 3, pp. 397-419, 1973.
15. Anandalingam, G., and White, D. J., "A Solution for the Linear Static Stackelberg Problem Using Penalty Functions," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 35, pp. 1170-1173, 1990.
  16. Shih, S. H., Lai, Y. J., and Lee, E. S., "Fuzzy Approach for Multilevel Programming Problem," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 23, No. 1, pp. 773-791, 1983.
  17. Sakava, M., Nishizaki, I., and Uemura, Y., "Interactive Fuzzy programming for Multilevel Linear Programming problem," *Comput Math. Applic.*, Vol. 6, pp. 71-86, 1997.
  18. Sahin, K. H., and Cirit, A. R., "A Dual Temperature Simulated Annealing Approach for Solving Bilevel Programming Problems," *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 23, pp. 11-25, 1998.
  19. Hejazi, S. R., Memariani, A., Jahanshahloo, G. R., and Sepehri, M. M., "Bilevel Programming Solution by Genetic Algorithm," 1999, (Communicated).