

ارزیابی روش رو با محدودکننده‌های مختلف در جریان لزج ابر صوتی دوبعدی و تقارن محوری

ابراهیم شیرانی* و حسین احمدی‌کیا**

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

(دریافت مقاله: ۷۸/۴/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۷۹/۷/۱۶)

چکیده - معادلات ناویر - استوکس در حالت دوبعدی و تقارن محوری با استفاده از روش حل ریمان رو^۱ و اعمال محدودکننده‌هایی^۲ برای روشهای با دقت مرتبه دو حل شده‌اند. نتایج حاصل برای جریان لزج ابر صوتی^۳ روی یک جسم نیمه بینهایت تقارن محوری و دوبعدی به ترتیب با اعداد ماخ جریان آزاد ۷/۷۸ و ۱۶/۳۴ ارائه شده‌اند. پایداری روش رو و اثرات انواع محدودکننده‌ها و نیز شرایط انتروپی^۴ مختلف بر روی حل عددی این جریانها بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که نوع محدودکننده تأثیر زیادی بر روی پایداری و دقت حل عددی جریان داشته و خصوصاً مقدار نرخ انتقال گرما از سطح بستگی زیادی به آنها دارد، اما شرایط انتروپی بر پایداری و دقت حل مسئله تأثیر چندانی ندارد.

Evaluation of Roe's Method with Different Limiters in Supersonic 2-D and Axisymmetric Flows

E. Shirani, and H. Ahmadikia

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

School of Engineering, Bu-Ali Sina University of Hamadan

ABSTRACT- 2-D and axisymmetric Navier-Stokes equations are solved using Reiman-Roe solver with different limiters for second-order accurate schemes. The results were obtained for supersonic viscous flows over semi-infinite axisymmetric and 2-D bodies. The free stream Mach numbers were 7.78 and 16.34. The stability of Roe method with different limiters and entropy conditions were considered. The results show that the limiters greatly affect the stability and accuracy of the numerical solution while the entropy conditions do not.

** - استادیار

* - دانشیار

فهرست علائم

V حجم سلول	N بردار عمود بر سطح سلول	A ماتریس ژاکوبین بردار شار F
y, x مختصات دکارتی	n_y, n_x مؤلفه‌های بردار عمود بر سطح سلول	c سرعت صوت
β تابع محدودکننده	p فشار استاتیک	D قطر
γ نسبت گرمای ویژه	Q متغیر بقایی	e انرژی کل بر واحد جرم
ε یک مقدار کوچک	r بردار ویژه راست	G, F بردارهای شار غیرلزج
η, ξ مختصات محاسباتی	$Re_{c,min}$ عدد رینولدز مینیمم براساس اندازه سلول	G_v, F_v بردارهای شار لزج
λ مقدار ویژه	t زمان	H بردار عبارت چشمه
ρ چگالی	v, u مؤلفه‌های دکارتی سرعت	h انتالپی کل
$\Delta\theta$ زاویه بین دو خط ξ شبکه	V, U مؤلفه‌های سرعت پادوردا	j, i اندیسهای مربوط به سلول
		J ژاکوبین تبدیل
		l بردار ویژه چپ

۱- مقدمه

مسئله پایداری، دقت و بالا بودن کارایی محاسبات در روشهای عددی که براساس معادله‌های ناویر - استوکس و محاسبه عددی عبارتهایی جابه جایی در این معادله‌ها به کار برده می‌شود از جمله عوامل اساسی است که طی دهه اخیر به طور اخص توسط محققان مختلف مورد بررسی فراوان قرار گرفته است. از جمله روشهای موفق ارائه شده در این خصوص، روشهای بالادست^۵ است که در شکل‌های مختلف معرفی و به کار گرفته شده و موجب بالا بردن پایداری و کارایی روشهای عددی می‌شوند. این روشها به طور ذاتی اتلافی بوده و سبب می‌شوند که مشکلات عددی ایجاد شده در نزدیکی امواج ضربه‌ای کاهش یابد. ولی در عین حال در جریانهای لزج در نزدیکی دیواره‌ها، که گرادیانهای شدید خواص به طور طبیعی وجود دارد، عبارتهای اتلاف ناشی از اعمال روشهای بالادست می‌توانند تأثیر نامطلوب بر روی نتایج داشته باشند و حتی بعضاً خطای ناشی از این عبارتها می‌تواند برابر و یا بزرگتر از عبارتهای لزج واقعی در معادله‌ها باشد. این مسئله می‌تواند نتایج به دست آمده خصوصاً میزان انتقال گرما و اصطکاک روی دیواره‌ها را شدیداً تحت تأثیر قرار دهد.

برای بالا بردن دقت و رفع موارد بالا، می‌توان از روش TVD^۶ استفاده کرد. در روشهای مرتبه دوم با استفاده از محدودکننده‌ها و اعمال آنها به طور محلی در نقاط مورد نظر جریان، می‌توان نوسانات ناخواسته که در روشهای مرکزی ایجاد می‌شود را کاهش

داد. محدودکننده‌های مختلفی ارائه شده‌اند که هر یک می‌توانند تأثیر مختلفی در حل مسئله داشته باشند [۴-۸]. در این مقاله از روش رو بر اساس حل ریمان استفاده شده [۱-۳] و در عبارتهای شار غیرلزج محدودکننده‌های مختلف به کار رفته است. روش رو در حوالی خط صوتی^۷ شرط انتروپی را ارضا نکرده و خطای بیشتری ایجاد می‌کند. روشهای مختلفی استفاده شده است که بتوان این شرط را در حوالی خط صوتی ارضا کرد [۹-۱۲].

روش رو برای حل جریان لزج ابرصوتی روی یک دماغه استوانه‌ای و یک دماغه کروی استفاده شده است. حل چنین جریانهایی در طراحی آیرودینامیکی پرتابه‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. خصوصاً در جریان روی پرتابه‌ها^۸ با دماغه پهن^۹ که دارای سرعت ابرصوتی هستند، به علت وجود یک موج ضربه‌ای قوی جدا شده از جسم، لایه موج ضربه‌ای^{۱۰} و ناحیه زیر صوت پشت آن از پیچیدگی و اهمیت خاصی برخوردار بوده و حل چنین میدان جریانی مورد توجه محققان متعددی قرار گرفته است.

در این تحقیق دو مورد زیر بررسی شده است.

- ۱- جریان آرام تقارن محوری روی یک جسم نیمه بینهایت با دماغه کروی در عدد ماخ جریان آزاد $0.7/0.8$.
 - ۲- جریان آرام روی یک جسم نیمه بینهایت با دماغه استوانه‌ای در عدد ماخ جریان آزاد $0.16/0.34$.
- در مثال اول، انواع محدودکننده‌ها و شرایط انتروپی مختلف به

کار گرفته شده و پایداری حل عددی بررسی شده است. در این مثال توزیع فشار روی سطح با نتایج تجربی مقایسه شده است. در مثال دوم نرخ انتقال گرما از سطح برای انواع محدودکننده‌ها و شرایط انتروپی مختلف محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه شده است. در اغلب مراجع اعمال محدودکننده‌ها به طور محدود برای جریانهای غیرلزج فراصوتی^{۱۱} در حوالی امواج ضربه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله هفت نوع تابع محدودکننده و چهار نوع شرط انتروپی برای حل دو جریان ابرصوتی به کار گرفته شده و اثرات آنها در نزدیکی سطح و بر روی خواص سطحی مثل فشار و نرخ انتقال گرما مطالعه شده است.

۲- معادله‌های حاکم بر جریان

معادله‌های ناویر - استوکس کامل شامل معادله‌های بقای جرم، ممنتوم و انرژی در حالت دوبعدی و تقارن محوری به شکل بقایی و در مختصات محاسباتی عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + \hat{H} \quad (1)$$

$$\hat{Q} = J^{-1} y^m \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} y^m \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v V + \xi_y p \\ (e+p)U \end{bmatrix}$$

$$\hat{G} = J^{-1} y^m \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{bmatrix}$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v, \quad U = \xi_x u + \xi_y v$$

در معادله‌های بالا $m=1$ برای حالت تقارن محوری و $m=0$ برای حالت دوبعدی اختیار می‌شود. \hat{F} و \hat{G} بردارهای شار غیرلزج، $J^{-1} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ ژاکوبین تبدیل، u و v مؤلفه‌های دکارتی سرعت و U و V مؤلفه‌های پادوردای^{۱۲} سرعت هستند. ξ و η مختصات منحنی‌الخط و متریکهای ξ_x ، ξ_y ، η_x و η_y معرف بردارهای عمود بر وجه سلول‌اند. بردارهای شار لزج \hat{F}_v و \hat{G}_v و عبارت چشمه \hat{H} در مرجع [۱۳] داده شده‌اند. ρ و e به ترتیب

چگالی و انرژی کل بر واحد جرم بوده و فشار p توسط معادله $P = (\gamma - 1)[e - 1/2 \rho(u^2 + v^2)]$ به متغیرهای دیگر مرتبط می‌شود. مقدار لزجت مولکولی از معادله ساترلند [۱۴] و ضریب هدایت مولکولی از معادله تجربی مرجع [۱۵] به دست می‌آید.

۳- روش حل عددی

برای تدوین الگوریتم عددی، معادله (۱) در سطح دیفرانسیلی به دو بخش جابه‌جایی و دیفیوژن تقسیم می‌شود. بخش جابه‌جایی توسط روش ریمان رو [۲] و بخش دیفیوژن به روش اختلاف محدود مرکزی با دقت مکانی مرتبه دوم تقریب زده می‌شود. در الگوریتم عددی مرتبه دوم از محدودکننده‌های TVD استفاده شده است.

برای بررسی روش عددی، بخش جابه‌جایی معادله (۱) را در نظر بگیرید. با انتگرال‌گیری از این معادله در محدوده مکانی

$$\left[\xi_{i-\frac{1}{2},j}, \xi_{i+\frac{1}{2},j} \right] \text{ و } \left[\eta_{i-\frac{1}{2},j}, \eta_{i+\frac{1}{2},j} \right] \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\left(\bar{Q}_{i,j} \right)_t + \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \left(\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = \text{RHS} \quad (2)$$

بالانویس - معرف شار عددی بردار بوده و $\bar{Q}_{i,j} = Q_{i,j} V_{i,j}$ برای حجم سلول $V_{i,j}$ تعریف می‌شود.

شار در جهت ξ را در نظر می‌گیریم و روش رو را روی آن پیاده می‌کنیم. همین روند را می‌توان برای جهت η نیز به کار برد. شار عددی $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}(Q, N)$ را در نظر بگیرید که در آن $N = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$ بردار عمود بر سطح سلول^۲ است. متغیر بقایی Q^- برای سطح چپ و Q^+ از طرف راست سطح سلول در نظر گرفته می‌شود. در روش رو، متغیرها با استفاده از تعریف پارامتر R به صورت زیر متوسط‌گیری وزنی می‌شوند.

$$R = \sqrt{\frac{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-}} \quad (3)$$

$$\rho_{i+\frac{1}{2}} = R \rho_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (4)$$

$$\chi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\left(R \chi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \chi_{i+\frac{1}{2}}^- \right)}{(1+R)} \quad (5)$$

که در آن بردار مشخصه $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 1_{i+\frac{1}{2}}^m \left[Q_{i+\frac{1}{2}}^+ - Q_{i+\frac{1}{2}}^- \right] \quad (12)$$

1 بردار ویژه چپ و Γ بردار ویژه راست ماتریس ژاکوبین A است، این بردارها به ترتیب ستونهای ماتریسهای انتقال P و P^{-1} هستند (ماتریس P تبدیل کننده متغیرهای بقایی به متغیرهای مشخصه^{۱۳} است و در مرجع [۱۶] برای جریان دوبعدی و سه بعدی به طور کامل داده شده است).

۳-۱- استفاده از توابع محدودکننده در روشهای بادقت مرتبه دوم برای کاهش نوسانات ناخواسته در الگوریتم مرتبه دوم از توابع محدودکننده استفاده شده است. در وجوه چپ و راست سلول، بردار متغیرهای مشخصه برای تعیین متغیر بقایی $Q_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\bar{\alpha}_i^m = 1_i^m (Q_i - Q_{i-1}) \quad , \quad \bar{\alpha}_i^m = 1_i^m (Q_{i+1} - Q_i) \quad (13)$$

بردار ویژه m ام در چپ و راست سلول i به صورت زیر است.

$$l_i^m = 1_i^m \left[Q_i, \left(N_{i+\frac{1}{2}} + N_{i-\frac{1}{2}} \right) / 2 \right] \quad (14)$$

$$r_i^m = r_i^m \left[Q_i, \left(N_{i+\frac{1}{2}} + N_{i-\frac{1}{2}} \right) / 2 \right] \quad (15)$$

بردارهای ویژه چپ و راست در مرجع [۱۶] داده شده اند و برای متغیر بقایی راست و چپ در وجه $i+\frac{1}{2}$ سلول، به صورت زیر خواهند بود.

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^- = Q_i + \sum_m \left(\frac{1+\phi}{4} \bar{\beta}_i^m + \frac{1-\phi}{4} \bar{\beta}_i^m \right) r_i^m \quad (16)$$

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^+ = Q_{i+1} - \sum_m \left(\frac{1+\phi}{4} \bar{\beta}_{i+1}^m + \frac{1-\phi}{4} \bar{\beta}_{i+1}^m \right) r_{i+1}^m \quad (17)$$

که در آن χ می تواند متغیرهای u و v و h باشد. انتالپی h و سرعت صوت c به صورت زیر تعریف می شوند.

$$h = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{q^2}{2} \quad (6)$$

$$c_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\left[h_{i+\frac{1}{2}} - \frac{q_{i+\frac{1}{2}}^2}{2} \right]}{\gamma - 1}} \quad (7)$$

که در آن $q^2 = u^2 + v^2$ است. خطی سازی رو خاصیت بقایی برای ژاکوبین شار سطح سلول را ارضا می کند. ماتریس ژاکوبین شار F به صورت زیر به دست می آید.

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} \quad , \quad \bar{A}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta Q_{i+\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

مقادیر ویژه مثبت و منفی در هر سطح سلول به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{m\pm} = \frac{\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \pm \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \right)}{2} \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

مقادیر ویژه برای ماتریسهای ژاکوبین شار A در جریان دوبعدی به صورت زیر است.

$$\lambda_i^{1,2} = U$$

$$\lambda_i^3 = U + c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (10)$$

$$\lambda_i^4 = U - c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$$

شار عددی برای $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}$ به صورت زیر است.

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\bar{F} \left(Q_{i+\frac{1}{2}}^+, N_{i+\frac{1}{2}} \right) + \bar{F} \left(Q_{i+\frac{1}{2}}^-, N_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_m \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m r_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (11)$$

تابع مین مود برای یک سری از اعداد، تابعی است که اگر همه اعداد هم علامت باشند کوچکترین آنها را انتخاب می‌کند و در غیر این صورت عدد صفر را انتخاب می‌کند. بنابراین هنگامی که اختلافهای چپ و راست $\vec{\alpha}_i^m, \overleftarrow{\alpha}_i^m$ مختلف‌العلامه باشند، $\vec{\beta}_i^m$ صفر است و در غیر این صورت مینیمم آنها خواهد بود.

۲- محدودکننده عمومی فون لیر

فون لیر [۴] محدودکننده زیر را برای روشهای مرتبه بالا ارائه داد.

$$\vec{\beta}_i^m = \frac{\overleftarrow{\alpha}_i^m |\vec{\alpha}_i^m| + \vec{\alpha}_i^m |\overleftarrow{\alpha}_i^m|}{\overleftarrow{\alpha}_i^m |\vec{\alpha}_i^m| + \vec{\alpha}_i^m |\overleftarrow{\alpha}_i^m| + \varepsilon} \Delta \alpha_i^m \quad (20)$$

محدودکننده فون لیر مرتبه دوم که از مینیمم دو گرایان استفاده شده است به صورت زیر است.

$$\vec{\beta}_i^m = \frac{\max(\overleftarrow{\alpha}_i^m \vec{\alpha}_i^m, 0)}{(\overleftarrow{\alpha}_i^m + \vec{\alpha}_i^m + \varepsilon)} \quad (21)$$

۳- محدودکننده فون آلبادا [۵]

$$\vec{\beta}_i^m = \frac{\overleftarrow{\alpha}_i^m \vec{\alpha}_i^m + |\overleftarrow{\alpha}_i^m \vec{\alpha}_i^m|}{(\overleftarrow{\alpha}_i^m)^2 + (\vec{\alpha}_i^m)^2 + \varepsilon} \quad (22)$$

۴- محدودکننده رو-سویری [۶]

$$\vec{\beta}_i^m = \text{superbee} [\overleftarrow{\alpha}_i^m, \vec{\alpha}_i^m] \quad (23)$$

$$\text{superbee}(x,y) = \max[0, \min(2x,y), \min(x,2y)]$$

۵- محدودکننده چکراورتی - اوشر [۷]

$$\vec{\beta}_i^m = \max [0, \min (\beta \hat{r})] \Delta \alpha_i^m \quad 1 \leq \beta \leq 2 \quad (24)$$

در این مقاله $\beta=1.5$ استفاده شده است.

۶- محدودکننده سویری [۸]

$$\vec{\beta}_i^m = \max [0, \min (\beta \hat{r}, 1), \min (\hat{r}, \beta)] \Delta \alpha_i^m \quad (25)$$

مقادیر بردارهای $\vec{\beta}_i^m, \overleftarrow{\beta}_i^m$ با استفاده از محدودکننده‌ها از بردارهای مشخصه $\vec{\alpha}_i^m, \overleftarrow{\alpha}_i^m$ تعیین می‌شوند. در نواحی با ناپیوستگی جریان (مثلاً امواج ضربه‌ای) استفاده از محدودکننده‌ها دقت روش عددی را به مرتبه اول کاهش می‌دهند. در این تحقیق فرمولهای مرتبه دوم کاملاً بالادست با استفاده $\phi=-1$ به دست می‌آیند. برای $\phi=0$ مقادیر Q در مرز مشترک سلول توسط درونیابی خطی بین بالادست و پایین دست سلول محاسبه می‌شوند. برای $\phi=1$ مقادیر Q در مرز مشترک سلول متوسط حسابی مقدار سلولهای مجاورند. در این حالت روش اختلاف محدود جهتی به اختلاف محدود مرکزی تبدیل خواهد شد. در اغلب مثالهای به کار رفته در این تحقیق از فرمولهای مرتبه دوم کاملاً بالادست استفاده شده است.

برای بررسی محدودکننده‌ها، پارامترهای \hat{r} و $\Delta \alpha_i^m$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{r} = \overleftarrow{\alpha}_i^m / \vec{\alpha}_i^m, \quad \Delta \alpha_i^m = \text{sgn}(\overleftarrow{\alpha}_i^m) \min (|\overleftarrow{\alpha}_i^m|, |\vec{\alpha}_i^m|) \quad (18)$$

در حل عددی وقتی $\hat{r} < 0$ به دست آید، یک اکستریم در مقادیر به دست آمده برای Q وجود دارد. در این حالت تغییر در شیب متغیر Q خواهیم داشت که برای اجتناب از رفتار غیریکنواختی^{۱۴} باید مقدار این شیب تصحیح شود. شرط لازم برای الگوریتم با دقت مرتبه دوم این است که این شیبها به طور موضعی از اختلافهای طرف چپ و راست متوسط گیری وزنی شوند. از طرف دیگر برای اجتناب از نوسانات غیرواقعی نیاز به وارد کردن قیدی بر روی مقدار شیب در هر سلول توسط توابع محدودکننده خواهیم داشت. محدودکننده‌های زیادی برای استفاده در روشهای با دقت بالا ارائه شده‌اند. در زیر چند نمونه از محدودکننده‌ها که در این تحقیق استفاده شده است معرفی می‌شوند.

۱- محدودکننده مین مود

محدودکننده‌ای که به نام مین مود شناخته شده است به صورت زیر است.

$$\vec{\beta}_i^m = \min \text{mod} (\overleftarrow{\alpha}_i^m, \vec{\alpha}_i^m), \quad m=1,2,\dots \quad (19)$$

$$\min \text{mod}(x,y) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{0, \min[|x|, y \cdot \text{sgn}(x)]\}$$

۷- محدودکننده مرتبه دوم بالادست، مینیمم دو گرادیان:

$$\vec{\beta}_i^m = \Delta \alpha_i^m \quad (26)$$

در روابط بالا ε یک مقدار کوچک برای جلوگیری از صفر شدن منفرجه کسرهاست. کلیه محدودکننده‌ها به جز چکراورتنی - اوشر خاصیت تقارن یعنی $\beta(r) = r\beta(1/r)$ را ارضا می‌کنند. به عبارت دیگر در این حالت گرادیانهای رو به عقب و رو به جلو، $\vec{\alpha}_i^m$ و $\vec{\alpha}_i^m$ به یک صورت اعمال می‌شوند. همچنین کلیه روشهای TVD طبیعت غیرخطی دارند. زیرا محدودکننده‌ها حتی وقتی به یک معادله خطی اعمال شوند بستگی به نسبت اختلافهای چپ و راست یعنی \bar{r} دارند. در مرجع [۱۶] خصوصیات برخی محدودکننده‌ها مفصلاً بررسی شده و چند نمونه خاص مقایسه شده‌اند.

۳-۲- شرط انتروپی

هنگامی که از حل کننده‌های ریمان (به صورت دقیق و یا تقریبی) در یک روش اختلاف محدود استفاده می‌کنیم، احتمال می‌رود که به دلیل تفاوت بین اطلاعات منتشر شده با سرعتهای متفاوت، فیزیک مسئله نقض شود. تفاوت اصلی بین اطلاعاتی است که از طرف چپ و یا راست سطح مشترک سلول انتشار می‌یابند. این مشکل در حل عددی رو به شکل انحراف انتروپی در حوالی خط صوتی ظاهر می‌شود و در امواج انبساطی بیشتر از ضربه‌ای رخ می‌دهد. در این حالت اختلاف شار ΔF صفر می‌شود. مقادیر $\vec{\Delta F}$ ، $\overleftarrow{\Delta F}$ در حل دقیق ریمان برابر و مختلف علامه‌اند، در حالی که در حل تقریبی ریمان $\vec{\Delta F} = \overleftarrow{\Delta F} = 0$ که موجب ناپیوستگی غیرواقعی خواهد شد [۲]. برای غلبه بر این مشکل یک شار اضافی به نقطه بالادست خط صوتی اضافه شده و از نقطه پایین دست آن کاسته می‌شود. شرایط انتروپی‌های مختلفی برای روش رو ارائه شده‌اند که نمونه‌هایی از آن در زیر آمده است. در کلیه شرایط انتروپی زیر مقادیر ویژه λ با استفاده از یک مقدار کوچک تصحیح می‌شوند. شکل کلی شرط انتروپی هارتن [۹] به صورت زیر است.

$$\lambda = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| \geq \delta \\ \frac{(\lambda^2 + \delta^2)}{\delta} & |\lambda| < \delta \end{cases} \quad (27)$$

که در آن $0.05 < \delta \leq 0.25$ است. یی [۱۰] مقدار δ در معادله (۲۷) را برای جریان فواصوتی به صورت زیر تصحیح کرد.

$$\delta = \delta^* \left[\left| U_{i+\frac{1}{2}} \right| + \left| V_{i+\frac{1}{2}} \right| \right] + \frac{1}{2} c \left[\left| \frac{\vec{\nabla} \xi}{J} \right| + \left| \frac{\vec{\nabla} \eta}{J} \right| \right] \quad (28)$$

که در آن $0.05 \leq \delta^* \leq 0.25$ است.

هارتن و هایمن [۱۱] شرط انتروپی را از متوسط گیری حالت‌های چپ و راست مرز مشترک سلول اعمال کردند. در این حالت متغیر δ در معادله (۲۸) به صورت زیر داده شده است.

$$\delta = \max \left[0, \left\{ \lambda^m(Q_L, Q_R) - \lambda^m [Q_L, Q(\theta)] \right\}, \left\{ \lambda^m [Q(\theta), Q_R] - \lambda^m [Q_L, Q_R] \right\} \right] \quad (29)$$

عدد صفر در آرگمان ماکزیمم به این دلیل است که این تصحیح به صورت اتوماتیک در امواج ضربه‌ای حذف شود. Q_L و Q_R به ترتیب مقادیر چپ و راست یعنی $Q_{m+1/2}^+$ و $Q_{m+1/2}^-$ هستند. $\lambda^m(a, b)$ مقادیر ویژه به دست آمده از مقادیر حالت‌های چپ و راست متوسط گیری شده رو است. $Q(\theta)$ بردار از معادله زیر به دست می‌آید ($\theta = 0.5$ استفاده شده است).

$$Q(\theta) = Q_L + \theta(Q_R - Q_L) \quad (30)$$

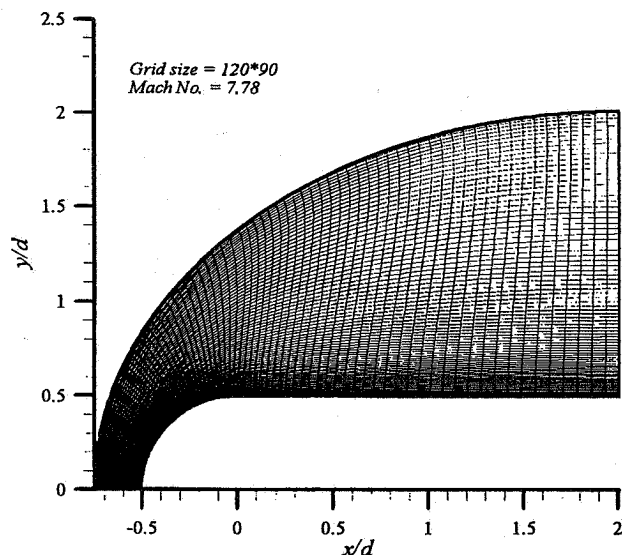
در شکل کلی شرط انتروپی چکراورتنی [۱۲]، شرط انتروپی موقعی به کار می‌رود که $0 < \lambda_{i+1}^m < \lambda_i^m$ باشد. در این بررسی علاوه بر شرط انتروپی مذکور در مقادیر خاص ذکر شده، از این شرط در کلیه موجها نیز استفاده شده است. در شرط انتروپی چکراورتنی مقدار ویژه λ^m به صورت زیر تصحیح می‌شود.

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{m\pm} = \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{m\pm} \pm \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m - \lambda_i^m \right] / 4 \quad (31)$$

عبارت داخل کروشه، اتلاف اضافه شده به مقدار ویژه است.

۴- شرایط مرزی

در جریان لزج روی سطوح جامد شرط عدم لغزش به کار می‌رود. روی این سطوح گرادیان فشار در جهت عمود بر سطح صفر در نظر گرفته می‌شود. دمای سطح اجسام مقدار ثابتی است. در



شکل ۱- شبکه میدان حل برای جریان آرام روی جسم نیمه‌بینهایت با دماغه کروی در عدد ماخ $7/78$

شده‌اند. موج ضربه‌ای به خوبی مهار شده است و نوسانات در حوالی نقطه سکون وجود ندارد.

در شکل‌های (۳) باقیمانده جرمی جریان روی جسم برای انواع محدودکننده‌ها و شرط انتروپی هارتن - هایمن [۱۱] نشان داده شده است. همگرایی محدودکننده فون لیتر [۴] کمتر از بقیه است، لیکن اغلب آنها همگرایی مشابهی دارند. استفاده از محدودکننده رو- سوپری [۶] همگرایی روش عددی را بسیار کاهش داده و نتایج نامعقولی از آن به دست آمده است.

باقیمانده جرمی برای انواع مختلف شرط انتروپی با محدودکننده عمومی فون لیتر در شکل (۴) رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که نوع شرط انتروپی تأثیر زیادی در پایداری حل عددی نداشته است. علت این موضوع آن است که شرط انتروپی در مواقعی که امواج انبساطی شدید در نقطه صوتی وجود دارد مؤثرند (به بخش ۳ رجوع شود).

جریان برای سه نوع شبکه با محدودکننده مینیمم دو گرادیان و شرط انتروپی هارتن - هایمن حل شده و توزیع فشار روی سطح با داده‌های تجربی کویاتا [۱۷] در شکل (۵) مقایسه شده‌اند. خصوصیات شبکه‌ها در جدول (۱) ارائه شده‌اند. در این جدول، $\Delta\theta$ اختلاف زاویه نقاط شبکه در امتداد سطح و Δy اندازه سلول در جهت عمود بر سطح و $Re_{c,min}$ عدد رینولدز

جریان ابرصوتی جریان ورودی همان خواص جریان آزاد را دارد. جریان خروجی نیز غالباً فراصوتی است، بنابراین برونیابی مرتبه صفر کافی به نظر می‌رسد. روی محور تقارن شرط مرزی انعکاسی به کار می‌رود.

۵- بررسی نتایج

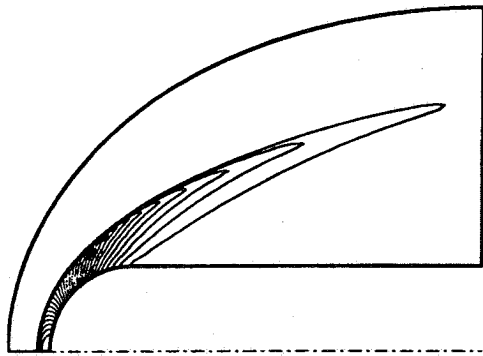
در این تحقیق عملکرد انواع محدودکننده‌ها و شرایط انتروپی مختلف در دو نوع جریان برای اجسام نیمه‌بینهایت با دماغه کروی و استوانه‌ای بررسی شده است. یکی جریان آرام روی جسم تقارن محوری با عدد ماخ جریان آزاد $7/78$ و دیگری جریان آرام روی جسم دوبعدی با عدد ماخ جریان آزاد $16/34$.

۱-۵- جریان آرام روی جسم نیمه‌بینهایت تقارن محوری

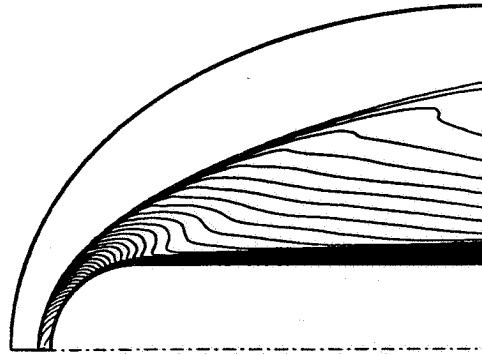
جریان آرام روی یک جسم نیمه‌بینهایت تقارن محوری که دماغه آن یک نیمکره با قطر 19.1 mm است در عدد ماخ جریان آزاد $7/78$ حل شده است. عدد رینولدز $9.2 \times 10^6/m$ و دمای سطح $700K$ است. فشار و دمای سکون جریان آزاد به ترتیب $2.1 \times 10^6 \text{ pa}$ و 645 K است. تحت این شرایط واکنش شیمیایی وجود ندارد و فرض گاز کامل قابل استفاده است. ابتدا پایداری محدودکننده‌های مختلف و انواع شرایط انتروپی بررسی شده و سپس مطالعه روی شبکه انجام شده و توزیع فشار سطح با محدودکننده‌های مختلف و انواع شرایط انتروپی با نتایج کویاتا [۱۷] مقایسه شده‌اند.

در شکل (۱) شبکه جریان با 120 گره در امتداد بدنه و 90 گره در جهت عمود بر بدنه نشان داده شده است. این شبکه به صورت جبری و با استفاده از درونیابی چندجمله‌ای مرتبه سوم به دست آمده است [۱۸]. بدین ترتیب که دو سطح نزدیک سطوح مرزی در نظر گرفته شده، سپس توزیع مناسبی از نقاط روی سطوح مرزی و دو سطح کنترل کننده قرار داده و یک چندجمله‌ای مرتبه سوم از آنها عبور داده می‌شود. توزیع نقاط روی سطوح کنترل کننده به نحوی است که خطوط شبکه حتی الامکان در نزدیکی سطوح مرزی متعامد باشند.

منحنیهای هم‌فشار و هم‌دما برای محدودکننده مین و مود و شرط انتروپی چکرورتی (برای کلیه نقاط) در شکل‌های (۲) ترسیم

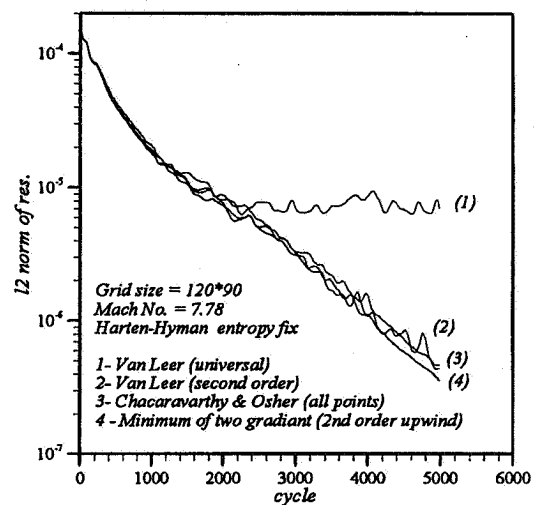
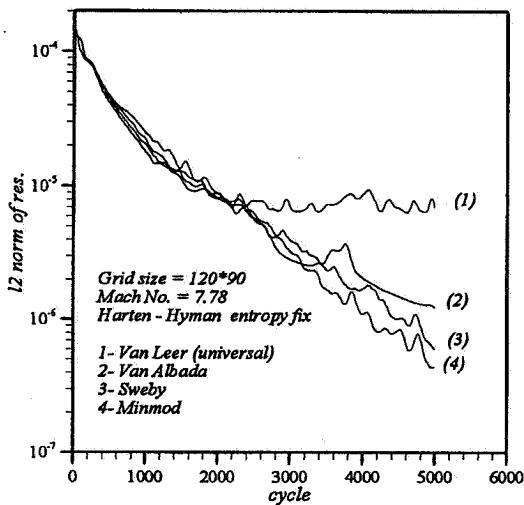


ب - منحنیهای همتراز فشار

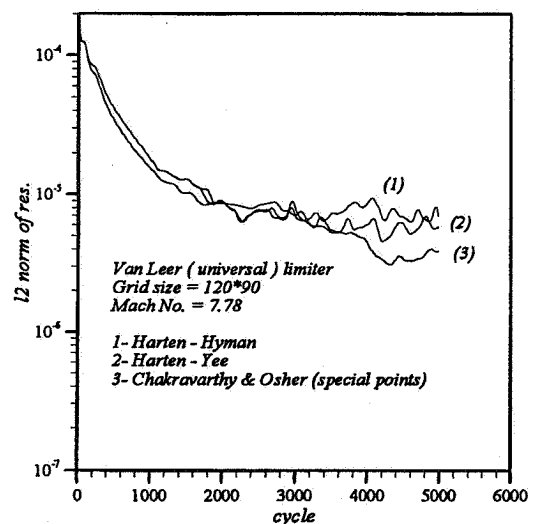
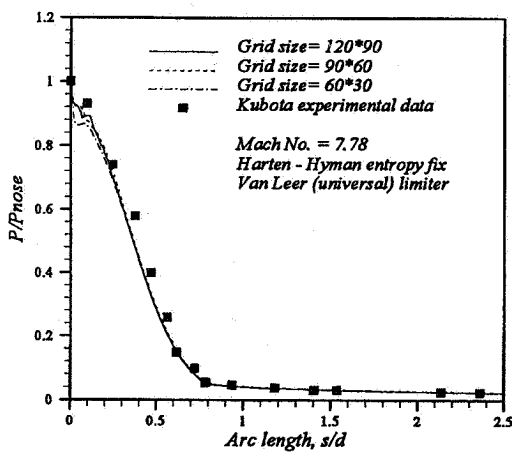


الف - منحنیهای همدم

شکل ۲- منحنیهای همتراز فشار و دما روی جسم نیمه بینهایت با دماغه کروی



شکل ۳- باقیمانده جرمی برای جریان روی دماغه کروی با شرط انتروپی هارتن - هایمن و انواع محدودکننده

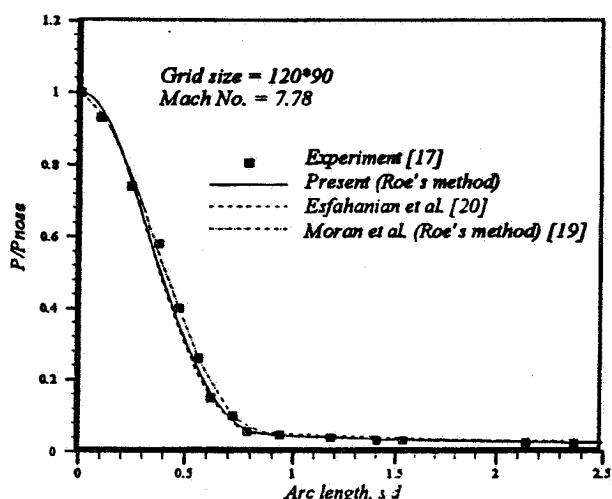


شکل ۵- تأثیر اندازه شبکه در توزیع فشار روی جسم با دماغه کروی و مقایسه با داده‌های تجربی [۱۷]

شکل ۴- باقیمانده جرمی برای جریان روی دماغه کروی با تابع محدودکننده فونلیبر عمومی و انواع شرط انتروپی

جدول ۱- مشخصات شبکه برای جریان روی جسم نیمه بینهایت تقارن محوری

$Re_{c,min}$	$\frac{\Delta y_{min}}{d}$	$\Delta\theta_{ave}$ (deg)	$\Delta\theta_{max}$ (deg)	$\Delta\theta_{min}$ (deg)	تعداد گره	شبکه
۱۹/۲۱	0.30×10^{-4}	۲/۲۵	۳/۴۴	۰/۸۶	۶۰×۳۰	۱
۸/۹۹	0.14×10^{-3}	۱/۴۸	۲/۲۶	۰/۵۶	۹۰×۶۰	۲
۵/۸۷	0.92×10^{-4}	۱/۱	۱/۶۸	۰/۴۲	۱۲۰×۹۰	۳



شکل ۶- مقایسه نتایج محاسباتی به روش رو با محدودکننده مینیم دو گرادیان و نتایج محاسباتی مرجع [۱۹] و نتایج محاسباتی به روش برازش شاک [۲۰]

در جاهایی اهمیت پیدا می‌کنند که امواج انبساطی قوی رخ دهد (به بخش ۳-۲ رجوع شود).

۵-۲- جریان آرام ابر صوتی روی یک جسم نیمه بینهایت دوبعدی

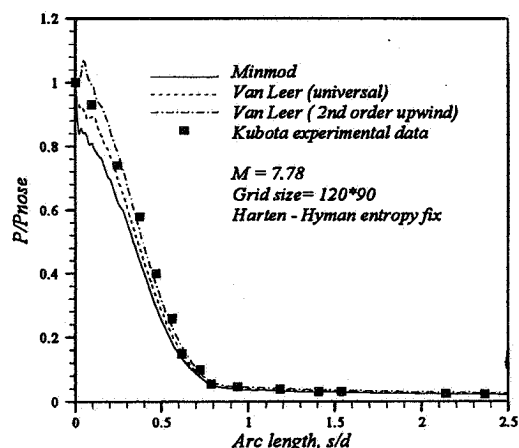
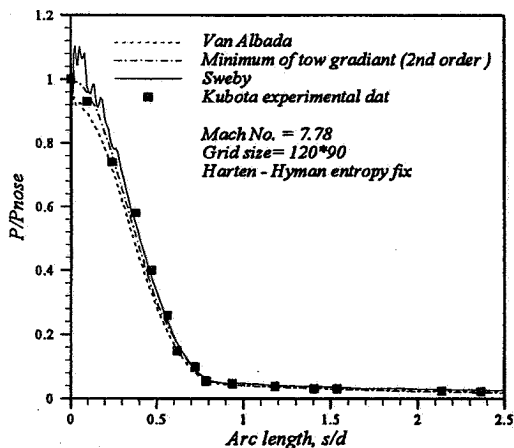
یکی از خصوصیات جریانهای ابر صوتی نرخ انتقال گرمای زیاد از سطح است. از طرفی عبارتهای اتلاف ناشی از اعمال روشهای بالادست در نواحی با تغییرات زیاد خواص ممکن است موجب خطای عددی زیادی شود. استفاده از محدودکننده‌ها علاوه بر آنکه در حوالی امواج ضربه‌ای از نوسانات ناخواسته می‌کاهند، در نواحی با تغییرات شدید خواص نظیر جریان نزدیک سطوح جامد بی‌تأثیر نیستند. در نتیجه ممکن است بر روی محاسبه تنش برشی و نرخ انتقال گرما روی سطح اثر بگذارند. برای بررسی دقت حل عددی با

مینیم بر مبنای اندازه سلول است. شکل (۵) نشان می‌دهد که در شبکه (۱) فشار حوالی نقطه سکون حدود ۱۰ درصد خطا داشته و نوسانات بیشتری دارد و در شبکه (۳) توزیع فشار با دقت خوبی به دست آمده است.

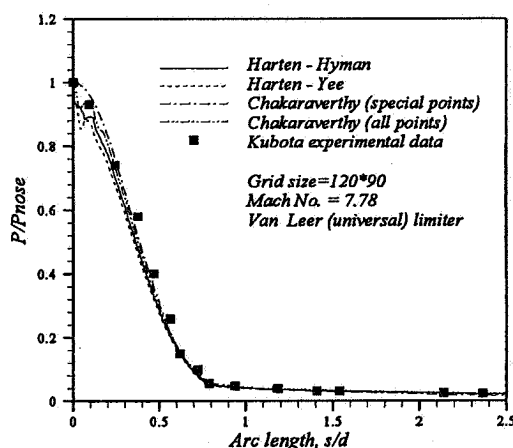
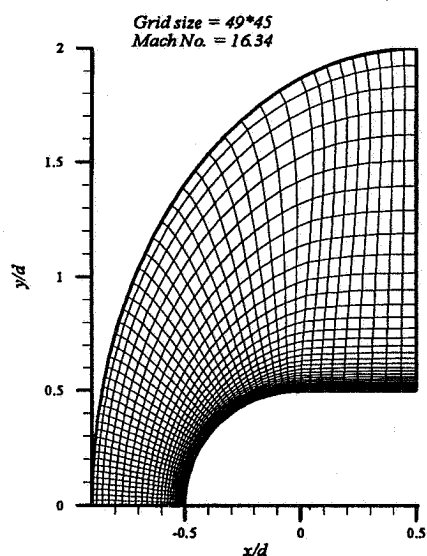
توزیع فشار سطح برای تابع محدودکننده مینیم دو گرادیان و شرط انتروپی هارتن - هایمن در شکل (۶) ترسیم شده و با داده‌های تجربی کوباتا [۱۷] و نتایج محاسباتی مورن و برن [۱۹] (به روش حل ریمان‌رو) و نتایج محاسباتی به روش برازش شاک^{۱۵} (به مرجع [۲۰] رجوع شود) مقایسه شده است. مشاهده می‌شود توزیع فشار سطح با محدودکننده مینیم دو گرادیان مشابه نتایج محاسباتی دیگران است.

در شکل (۷) توزیع فشار روی سطح برای انواع محدودکننده‌ها با شرط انتروپی هارتن - هایمن رسم شده و با داده‌های تجربی کوباتا [۱۷] مقایسه شده‌اند. در این مقایسه از شبکه (۳) استفاده شده است. در محدودکننده سویی فشار سطح بیشتر از مقدار تجربی به دست آمده است و بالعکس، در محدودکننده فون لیر عمومی و فون آلبادا مقدار فشار سطح کمتر از مقادیر تجربی محاسبه شده است. توابع محدودکننده مینیم دو گرادیان، مین مود و فون لیر مرتبه دوم نتایج خوبی دارند و فشار نقطه سکون را با دقت خوبی پیش بینی کرده‌اند. نوسانات در تابع محدودکننده سویی بسیار زیاد است و این محدودکننده دقت کمی داشته است.

توزیع فشار سطح برای تابع محدودکننده مینیم دو گرادیان و انواع شرط انتروپی در شکل (۸) ترسیم شده و با داده‌های تجربی کوباتا [۱۷] و نتایج محاسباتی مورن و برن [۱۹] (به روش حل ریمان‌رو) و نتایج محاسباتی به روش برازش شاک^{۱۵} مقایسه شده است. این شرایط انتروپی نتایج دقیقاً مشابهی برای محاسبه فشار سطح دارند و نوسانات در آنها دیده نمی‌شود. در واقع شرط انتروپی



شکل ۷- مقایسه توزیع فشار برای محدودکننده‌های مختلف در جریان روی جسم با دماغه کروی با داده‌های تجربی [۱۷]



شکل ۸- مقایسه توزیع فشار برای شرایط انتروپی مختلف در جریان روی جسم با دماغه کروی با داده‌های تجربی [۱۷]

شکل ۹- شبکه میدان حل برای جریان آرام روی جسم نیمه بینهایت با دماغه استوانه‌ای

ترسیم شده و با نتایج تجربی هالدن و همکارانش [۲۲] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که استفاده از شبکه 49×45 مناسب است (در مرجع [۲۳] شبکه 50×50 و در مرجع [۲۱] شبکه 39×35 مناسب تشخیص داده شده است)

نرخ انتقال گرما روی سطح با نتایج محاسباتی جاسیلیا و همکارانش [۲۳] به روش عددی رو با دو فرض گاز کامل و گاز با واکنشهای شیمیایی و نیز با نتایج محاسباتی به روش برازش شاک در شکل (۱۰) مقایسه شده‌اند این شکل نشان می‌دهد که تحت شرایط ذکر شده، اثرات گاز واقعی در حل عددی نیاز نیست و رابطه گاز کامل تقریباً صادق است (ماکزیمم اختلاف نرخ انتقال گرما بین

انواع محدودکننده‌ها و شرایط انتروپی مختلف، جریان ابر صوتی روی یک جسم نیمه بینهایت دوبعدی با دماغه استوانه‌ای به شعاع 0.38 متر و عدد ماخ جریان آزاد $16/34$ و عدد رینولدز 3.94×10^6 m حل شده است. دما و فشار استاتیک جریان آزاد به ترتیب 52 K و 82.95 pa و دمای دیواره 294.4 K است.

مطالعه شبکه بر اساس دقت نرخ انتقال گرما روی سطح انجام گرفته و یک شبکه با 49 گره در امتداد بدنه و 45 گره در جهت عمود بر آن ($\Delta\theta_{\min} = 0.83^\circ$ ، $\Delta\theta_{\max} = 4.5^\circ$ و $\frac{\Delta y_{\min}}{d} = 5.3 \times 10^{-4}$) انتخاب شده است، شکل (۸). در مرجع [۲۱] نیز این تعداد گره و دامنه محاسباتی مناسب تشخیص داده شده است. نرخ انتقال گرما روی سطح با محدودکننده فون لیر مرتبه دوم و شرط انتروپی هارتن-هایمن برای دو شبکه 49×45 و 90×80 در شکل (۹)

انتقال گرما ندارند. خطوط همتراز در حالت‌های دیگر رسم نشده‌اند، اما نتایج نشان دادند که نوسانات فشار در حوالی نقطه سکون در محدودکننده‌های سوپی و سوپری بیشتر از بقیه حالتهاست.

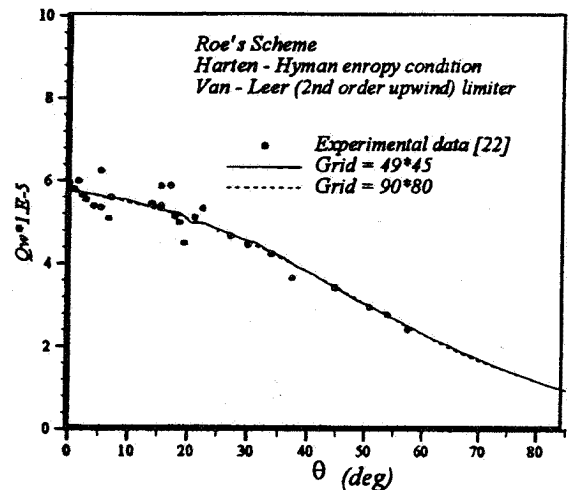
نرخ انتقال گرما روی سطح با محدودکننده‌های مختلف در شکل (۱۳) رسم شده و با نتایج تجربی هالدن و همکارانش [۲۲] مقایسه شده است. از آنجایی که گرادیان سرعت روی سطح زیاد است و اختلاف دمای سطح و گاز داغ مجاور آن بالاست، محدودکننده‌ها تأثیر قابل توجهی در محاسبه نرخ انتقال گرما دارند. در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود که توابع محدودکننده مرتبه دوم فون لیر، مینیم دو گرادیان و مین مود از بقیه محدودکننده‌ها عملکرد بهتری داشته‌اند، اما بقیه محدودکننده‌ها نظیر رو - سوپری، فون لیر عمومی و سوپی رفتار خوبی از خود نشان نمی‌دهند. گایتوند و شانگ [۲۱] همین مثال را با روش تقسیم شاره فون لیر [۲۴] حل کرده و نشان داده‌اند که استفاده از محدودکننده مین مود، نرخ انتقال گرما در دماغه را حدود ۲/۳ برابر مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند و محدودکننده فون آلبادا ۶۰ درصد خطا داشته است.

در شکل (۱۴) نرخ انتقال گرما برای محدودکننده مین مود و شرایط انترویی مختلف رسم شده است. کلیه شرایط انترویی دقت مناسبی دارند، اما رفتار شرط انترویی چکراورتی برای کلیه نقاط بهتر از بقیه است.

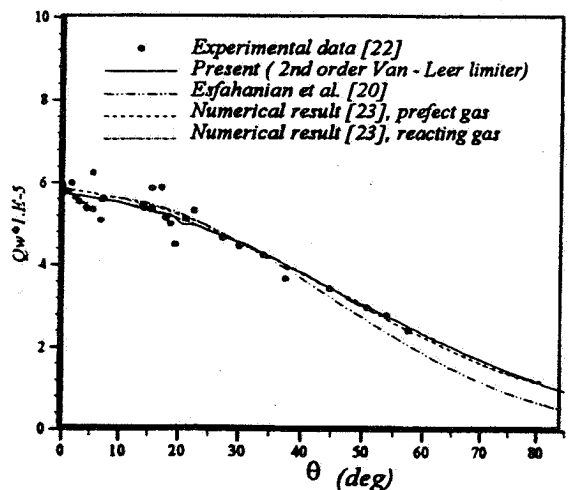
۶- نتیجه‌گیری

جریان آرام تقارن محوری و دوبعدی با سرعت‌های زیاد روی دو جسم با دماغه پخ در اعداد ماخ ۷/۷۸ و ۱۶/۳۴ با استفاده از روش عددی حل ریمان رو شبیه‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که نوع محدودکننده مخصوصاً در مواردی که عدد ماخ زیاد است، تأثیر زیادی در پایداری حل عددی دارد. بعضی از محدودکننده‌ها نظیر سوپی و رو - سوپری برای هر دو جریان به کندی همگرا می‌شوند. همچنین ممکن است پایداری یک محدودکننده از جریانی به جریان دیگر تغییر کند. در دو مثال ذکر شده برخی محدودکننده‌ها نظیر مین مود و فون لیر مرتبه دوم پایداری خوبی داشته‌اند.

نتایج نشان می‌دهند که دقت و پایداری روش عددی در شرایط انترویی مختلف برای دو مثال ذکر شده تفاوت زیادی ندارند. در واقع شرط انترویی در حوالی خط صوتی و جایی که امواج انبساطی



شکل ۱۰- تأثیر اندازه شبکه در نرخ انتقال گرما از سطح جسم نیمه‌بینه‌ای با دماغه استوانه‌ای

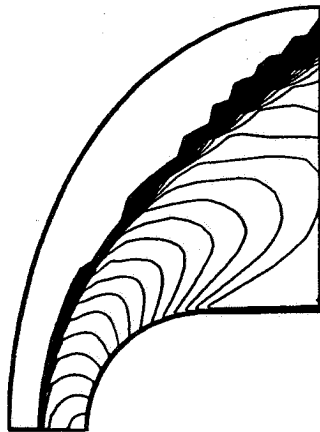


شکل ۱۱- مقایسه نرخ انتقال گرما در جریان ابرصوتی روی دماغه استوانه‌ای با نتایج تجربی [۲۲] و نتایج محاسباتی مرجع [۳] و نتایج کد مرجع [۲۰]

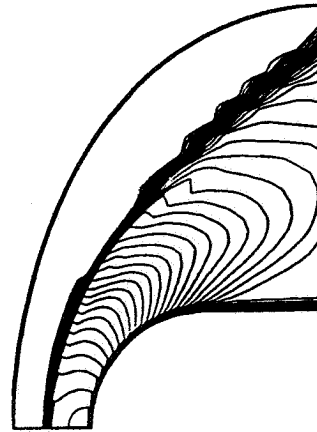
گاز کامل و گاز واکنش‌های شیمیایی کمتر از ۴ درصد بوده است). همچنین حل عددی حاضر اختلاف کمی با نتایج محاسباتی مرجع [۲۳] دارد. اختلاف کم نرخ انتقال گرمای محاسبه شده با حل عددی مرجع [۲۰] می‌تواند به دلیل روش حل عددی و نیز تفاوت در انتخاب ضریب هدایت ملکولی باشد.

خطوط همتراز عدد ماخ و دما برای محدودکننده مین مود و شرط انترویی هارتن - هایمن در شکل (۱۲) ترسیم شده است. به دلیل بزرگ بودن سلولهای شبکه حوالی موج ضربه‌ای، مجموع منحنیهای همتراز در این قسمت پهن شده‌اند، اما تأثیری در نرخ

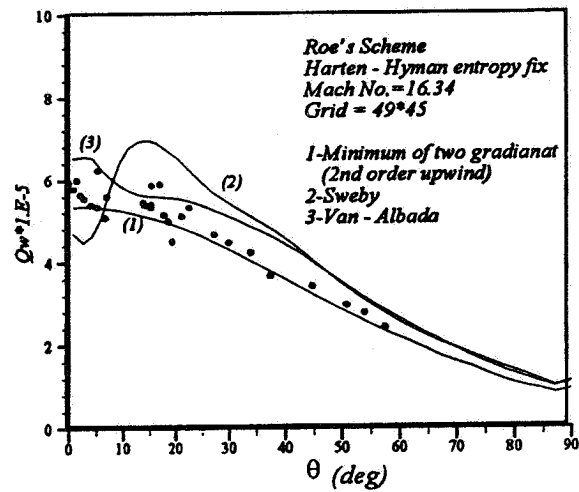
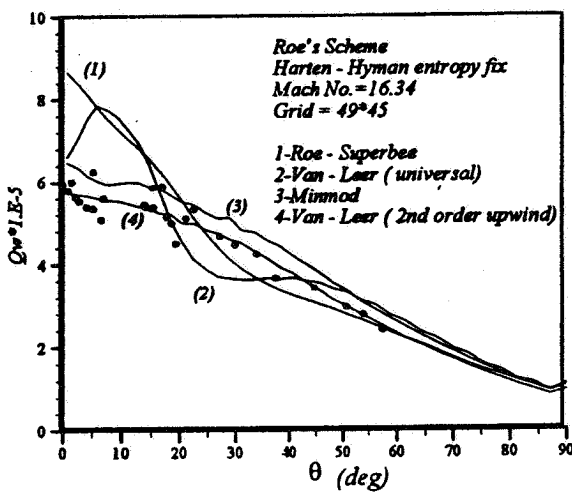
Mach contours (n=100)



Temperature contours (n=40)



شکل ۱۲- منحنیهای همدم و عدد ماخ برای جریان روی دماغه استوانه‌ای با شرط انتروپی هارتن - هایمن و محدودکننده مین‌مود

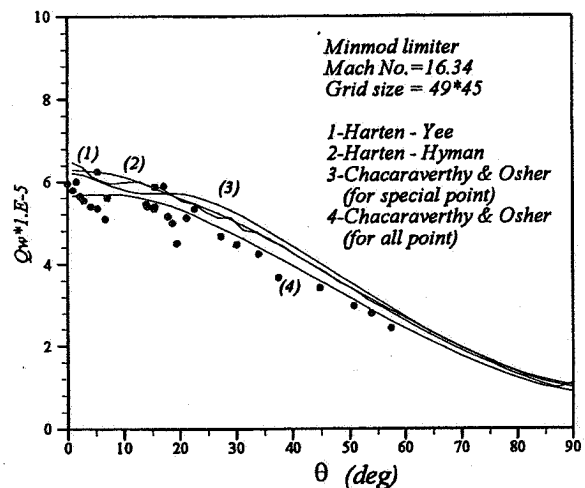


شکل ۱۳- مقایسه نرخ انتقال گرما از سطح جسم با دماغه استوانه‌ای برای انواع محدودکننده‌ها و شرط انتروپی هارتن - هایمن با

داده‌های تجربی هالدن و همکارانش [۲۲]

شدیدند بیشتر از نواحی دیگر اثر دارد. از آنجایی که در مثالهای ذکر شده امواج انبساطی نسبتاً قوی در حوالی خط صوتی ایجاد نمی‌شوند، اثر شرط انتروپی در آنها کم است.

مقایسه توزیع فشار روی سطح با نتایج تجربی نشان داد که اغلب محدودکننده‌ها توزیع فشار و فشار نقطه سکون را با دقت مناسبی پیشگویی کرده‌اند، اما برخی از آنها در تعیین نرخ انتقال گرما (و متقابلاً تنش برشی) از روی سطح در جریانهای با عدد ماخ بالا دقت کمی دارند. بنابراین استفاده از محدودکننده‌ها دقت روش عددی را در نواحی با تغییرات زیاد خواص جریان (نظیر امواج ضربه‌ای) را متأثر ساخته‌اند. اغلب این محدودکننده‌ها در نواحی با ناپیوستگی شدید آزمایش شده‌اند. مثلاً در مرجع [۱۶] سه نوع محدودکننده فون لیر، سوپری و مین مود برای جریان یک بعدی



شکل ۱۴- مقایسه نرخ انتقال گرما از سطح جسم با دماغه استوانه‌ای

برای انواع شرط انتروپی با داده‌های تجربی هالدن و همکارانش [۲۲]

فون لیر عمومی برای فشار سطح در جریان روی جسم تقارن محوری (با عدد ماخ V/VA) خطای کمی داشته است، در حالی که برای نرخ انتقال گرما در جریان ابرصوتی روی جسم دوبعدی خطای زیادتری نسبت به بقیه محدودکننده‌ها دارد. بنابراین نوع تابع محدودکننده تأثیر زیادی در دقت و پایداری روش عددی برای جریانهای ابرصوتی دارد و ممکن است از جریانی به جریان دیگر رفتار متفاوتی داشته باشد. در نتیجه باید در انتخاب نوع محدودکننده در سرعت‌های بالا دقت کرد.

غیردایم مقایسه شده‌اند که در آنها محدودکننده سوپرسی بهتر از بقیه بوده است، اما نتایج ارائه شده در این تحقیق نشان می‌دهد که روش عددی با محدودکننده سوپرسی به کندی همگرا می‌شود و دقت آن در محاسبه خواص سطحی نظیر نرخ انتقال گرما کم است. مقایسه محدودکننده‌های مختلف نشان داد که برخی محدودکننده‌ها نظیر مین مود و فون لیر مرتبه دوم برای هر دو مثال ذکر شده خوب بوده و برخی از آنها نظیر سوپی برای هر دو حالت رفتار نامناسبی در حل عددی داشته است. همچنین روش عددی با تابع محدودکننده

واژه نامه

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 1. Roe Reimann solver | 9. blunt body |
| 2. limiter | 10. shock layer |
| 3. hypersonic | 11. supersonic |
| 4. entropy condition | 12. contravariant velocity |
| 5. upwind | 13. characteristic |
| 6. total-variation-diminishing | 14. non-monotonocity |
| 7. sonic line | 15. shock fittintig |
| 8. projectile | |

مراجع

- Roe, P. L., "The Use of the Reimann Problem in Finite Difference Schemes," *Lecture Notes in Physics*, Vol. 141, pp. 354-359, 1981.
- Roe, P. L., "Approximate Reimann Solvers, Parameter Vectors, and Differnce Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372, 1983.
- Roe, P. L., "Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 337-365, 1986.
- Van Leer, B. "Toward the Ultimate Conservative Difference Schemes V, a Second Order Sequel to Godunov's Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, 1979.
- Van Albada, G. D., Van Leer, B., and Roberts, W. W., "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics," *Astronomy Astrophysics*, Vol. 108, pp. 76-84, 1982.
- Roe, P. L., "Some Conditions of the Modelling of Discontinuous Flows," *Proc. 1983, AMS-SIAM Summer Seminar on Large Scale Computing in Fluid Mechanics*, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 163-193, Philadelphia, 1985.
- Chakravarthy, S. R., and Osher, S., "High Resolution Applications of the Osher Upwind Schemes for the Euler Equations," *AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference*, pp. 363-373, 1983.
- Sweby, P. K., "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol. 21, pp. 995-1011, 1984.
- Harten, A., "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 21, pp. 1-23, 1984.
- Yee, H. C., "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock Capturing Methods," NASA TM, 101088, Feb. 1989.
- Harten, A., and Hyman, J. M., "A Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational*

- Physics*, Vol. 50, pp. 235-269, 1983.
12. Chakravarthy, S. R., "High Resolution Upwind Formulations for the Navier-Stokes Equations," *Computational Fluid Dynamics*, Von Karman Inst., Lecture Series, 1988-05, 1988.
 13. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, pp. 181-207 Hemisphere, New York, 1984.
 14. Eckert, E. R. G., and Drake, R. M., *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1972.
 15. Gerolymos, G. A., and Vallet, I., "Implicit Computation of Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations Using $k-\epsilon$ Closure," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 7, pp. 1321-1330, 1996.
 16. Hirsh, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, New York, Vol. 2, 1988.
 17. Kubota, T. "Investigation of Flow Around Simple Bodies in Hypersonic Flow," Graduate Aeronautical Labs, California, Inst. of Technology (GALCIT) Hypersonic Wind Tunnel Memorandum No. 40, Pasadena, CA, June 1957.
 18. Eiseman, P. R., "A Multi Surface Method of Coordinate Generation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 33, pp. 118-150, 1979.
 19. Moran, K. J., and Beran, P., "Navier-Stokes Simulations of Slender Axisymmetric Shapes in Supersonic, Turbulent Flow," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 7, pp. 1446-1456, 1993.
 ۲۰. اصفهانیان. و.، رشیدی، م. م.، و حیدری، ق.، "حل عددی معادلات ناویر - استوکس لایه نازک توسط روش فشرده،" ششمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، دانشگاه علم و صنعت ایران، صفحات ۲۲ تا ۲۹، اسفند ۱۳۷۸.
 21. Gaitonde, D., and Shang, J. S., "Accuracy of Flux Split Algorithms in High-Speed Viscous Flows," *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 7, pp. 1215-1221, 1993.
 22. Holden, M. S., Wieting, A. R., Moselle, J. R., and Grasii, C., "Studies of Aerothermal Loads Generated in Regions of Shock/Shock Interaction in Hypersonic Flow," *AIAA paper*, 88-0477, Jan. 1988.
 23. Josylua, F., Gaitonde, D., and Shange, G. S., "Hypersonic Nonequilibrium Flow Computations Using Roe Flux-Difference Split Scheme," *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 5, pp. 812-813, 1993.
 24. Van Leer, B., "Flux Vector Splitting for the Euler Equations," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 337-365, 1986.