

## بهینه سازی شبکه‌ها با تابع هزینه مقعر

سعیده کتابی\*

گروه مدیریت، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۲/۱۶ - دریافت نسخه نهایی ۸۰/۴/۱۶)

**چکیده** - در این مقاله مسئله یافتن یک شبکه ارتباطی<sup>۱</sup> با حداقل هزینه در نظر گرفته می‌شود که در آن اولاً شبکه چندکالایی<sup>۲</sup> و بدون جهت<sup>۳</sup> و ثانیاً هزینه کمانها توابعی خطی قطعه‌بندی شده و مقعر<sup>۴</sup> از جریانها هستند. چند روش برای حل مسئله بررسی می‌شوند: روش جستجوی تصادفی ترمودینامیکی، یک روش ابداعی بر پایه روش ارائه شده توسط مینوکس و یک روش ساده سازی لاگرانژی برای به دست آوردن حد پایینی همچنین نتایج محاسباتی سه روش بالا ارائه می‌شوند.

واژگان کلیدی: جریان در شبکه، تابع خطی قطعه‌بندی شده مقعر، مدل یال - مسیر، روشهای جستجوی تصادفی، روش ساده سازی لاگرانژی، روش زیرگرایان.

## Network Optimization with Concave Costs

S. Ketabi

Department of Management, Isfahan University, Isfahan, Iran

**ABSTRACT-** *In this paper the problem of minimum cost communication network design is considered where the costs are piecewise linear concave. Several methods are compared: Simulated Annealing method, a heuristic based on the method proposed by Minoux, and a lagrangian method based on lower bounding procedure.*

**Keywords:** *Newtwork flow, Piecewise linear concave function, link-path model, random search methods, lagrangian relaxation method, subgradient method*

\* - استادیار

## خاصیت جوابهای آن

یک شبکه بدون جهت و بدون ظرفیت<sup>۱۳</sup> شامل N گره و K جفت مبدأ - مقصد (کالا) را در نظر بگیرید. فرض کنید هزینه جریان روی هر کمان یک تابع خطی قطعه بندی شده مقعر از میزان جریان باشد. می دانیم که هر تابع را می توان به صورت خطی قطعه بندی شده تقریب زد، هر چه تعداد قطعات (R) بیشتر باشد تقریب بهتری خواهیم داشت. با این فرض تابع هزینه را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$C_e(x_e) = \begin{cases} F_e^r + c_e^r x_e & x_e \in (M_e^{r-1}, M_e^r] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن  $x_e$  جریان بر روی یال  $e$  و  $c_e^r$ ،  $F_e^r$ ،  $M_e^{r-1}$  و  $M_e^r$  به ترتیب شیب، عرض از مبدأ، کرانه پایینی و بالایی قطعه خط  $r$  (برای  $r=1, \dots, R$ ) هستند. برای آنکه توابع  $C_e$  مقعر باشند لازم است که  $M_e^0 = 0$ ،  $F_e^1 = 0$ ، و برای هر  $r$  داشته باشیم:

$$F_e^r < F_e^{r+1} \text{ و } F_e^r + c_e^r M_e^r = F_e^{r+1} + c_e^{r+1} M_e^r$$

چون مشخص نیست که جریان کل یال در کدام قطعه قرار می گیرد، متغیر تصمیم پیوسته  $x_e^{kr}$  را برابر میزان جریان کالای  $k$  بر روی یال  $e$ ، به شرط اینکه در قطعه  $r$  قرار بگیرد، تعریف می شود. همچنین متغیر تصمیم دوتایی  $y_e^r$  مشخص می کند که جریان بر روی یال  $e$  در قطعه  $r$  قرار می گیرد یا خیر. به علاوه با استفاده از  $X_\mu^k$  به عنوان میزان جریان کالای  $k$  بر روی مسیر  $\mu$  برای  $\mu \in P_k$ ، که در آن  $P$  مجموعه تمام مسیرهای بین مبدأ - مقصد مربوط به کالای  $k$  است، مدل یال - مسیر<sup>۱۴</sup> مربوط به جریان در شبکه عبارت خواهد بود از [۲]

$$\begin{aligned} \min \sum_e \sum_r c_e^r \left( \sum_k x_e^{kr} \right) + \sum_e \sum_r F_e^r y_e^r \\ \text{s.t. } \sum_e x_e^{kr} - \sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k = 0, \forall e, k \\ \sum_{\mu \in P_k} X_\mu^k = d_k, \forall k \\ \sum_k x_e^{kr} \leq M_e^r y_e^r, \forall e, r \\ \sum_k x_e^{kr} \geq M_e^{r-1} y_e^r, \forall e, r \\ \sum_r y_e^r \leq 1, \forall e \\ x_e^{kr} \geq 0, X_\mu^k \geq 0, \forall e, r, k, \mu \in P_k \end{aligned} \quad (۲)$$

امروزه استفاده از مدل های شبکه در اغلب زمینه های علمی و فنی گسترده شده است. به عنوان مثال می توان از برنامه ریزی های مربوط به حمل و نقل، ارتباطات، انرژی، خدمات شهری و حتی علوم اجتماعی نام برد که تقریباً در تمام موارد، اساسی ترین مسئله مطرح شده، مسئله جریان در شبکه<sup>۱۵</sup> است. هدف در مسئله جریان در شبکه عبارت است از تعیین الگوی بهینه جریان با حداقل هزینه برای جابه جایی یک یا چند کالا از طریق کمانهای شبکه به نحوی که توازن جریان<sup>۱۶</sup> در گره های شبکه برقرار باشد.

در مسائل جریان در شبکه، معمولاً فرض می شود که هزینه ها توابعی خطی یا محدب از جریانها هستند. ولی در واقع، هزینه های ریالی مربوط به ساخت، به دلیل خاصیت اقتصاد به مقیاس<sup>۱۷</sup>، معمولاً ماهیتی مقعر دارند. به عکس در توابع محدب، هر مینیمم موضعی یک تابع مقعر، لزوماً مینیمم مطلق نیست. از آنجایی که روش حل مینیمم سازی مقعر به طریقی درگیر جستجو و شمارش نقاط حدی ناحیه امکان پذیر است، این مسئله مشکل غیر چند جمله ای<sup>۱۸</sup> شناخته شده است.

چون مدل های شبکه با تابع هزینه مقعر، ابزاری برای مدلسازی مسائل گسسته، از جمله مسئله هزینه ثابت<sup>۱۹</sup> هستند، حل مؤثر این مدلها راهگشای حل مسائل مهمی در مدیریت انبار و تولید خواهد بود. متأسفانه روشهای حل مینیمم سازی مقعر در مقایسه با مینیمم سازی توابع خطی یا محدب بسیار کند است [۱]. لذا برای حل مسائل عملی روشهای کارا تر مانند روشهای تقریبی، ساده سازی و یا ابداعی مورد استفاده قرار می گیرد.

در این مقاله، ضمن ارائه یک مدل تقریبی برای مسئله جریان در شبکه با هزینه مقعر، چگونگی کاربرد سه روش ذوب تدریجی شبیه ساخته شده یا بهینه سازی ترمودینامیکی<sup>۲۰</sup>، روش ابداعی مینوکس<sup>۲۱</sup> و روش ساده سازی لاگرانژی<sup>۲۲</sup> برای حل آن تشریح و نتایج محاسباتی آن مقایسه می شود.

$$y_e^r = 0 \text{ یا } 1, \forall e, r$$

که در آن:

$e$ : اندیس مربوط به یال،

$r$ : اندیس مربوط به قطعه،

$k$ : اندیس مربوط به کالا،

$P_k$ : مجموعه تمام مسیرها برای کالای  $k$

$d_k$ : ترافیک مورد تقاضای کالای  $K$

$\delta_{e\mu}$ : عنصر مربوط به وقوع یال  $e$  در مسیر  $\mu$

$c_e^r$ : شیب تابع هزینه یال  $e$  مربوط به قطعه  $r$

هستند. اولین دسته از محدودیتها به عنوان محدودیتهای جریان یال - مسیر و دومین دسته مربوط به تساوی تقاضا و ترافیک مربوط به کالا با کل جریان بر روی مسیرهای مختلف بین جفت مبدأ - مقصدند.

از آنجایی که مینیمم یک تابع مقعر (که لزوماً پیوسته نیز هست) و متناهی، بر روی یک چندوجهی محدب، در یکی از نقاط حدی چندوجهی است و از طرف دیگر، هر مینیمم موضعی ممکن است مینیمم مطلق نباشد، هر روش حل مسئله، باید به نحوی تمام نقاط حدی ناحیه امکانپذیر را بررسی کند. یک نقطه حدی برای مسائل جریان در شبکه با هزینه غیرنزولی و تفکیک پذیر بر روی یالها، الگویی از جریان است که از تخصیص ترافیک تقاضا بر روی یک مسیر ساده<sup>۱۵</sup> و یکتا<sup>۱۶</sup> برای هر جفت مبدأ - مقصد حاصل می شود [۲].

### ۳- روش بهینه سازی ترمودینامیکی (S.A.)

#### ۳-۱- مقدمه

S.A. یک روش جستجوی تصادفی قوی است که برای یافتن یک جواب خوب (نه لزوماً بهینه) برای مسائل مشکل ترکیباتی<sup>۱۷</sup> به کار می رود. ایده ترمودینامیکی روش بر این پایه است که اگر یک ماده دمای بسیار بالایی داشته باشد و بعد به آرامی و با تامل خنک شود، اجزا و مولکولهای ماده یک وضعیت منظمی پیدا خواهند کرد. این روش برخلاف روشهای جستجوی معمولی، در هر تکرار علاوه بر حرکت به سوی

جواب بهتر، جوابهای با مقدار تابع هدف بهتر را نیز با احتمال غیر صفری قبول می کند. این احتمال در ابتدا بزرگ است و ضمن اجرای روش متناسب با پارامتر مثبتی به نام دما<sup>۱۸</sup> کاهش پیدا می کند. در نتیجه، روش S.A. از لحاظ نظری با غلبه بر بهینگی موضعی، قادر به یافتن جواب بهینه مطلق نیز خواهد بود [۳].

برای یک مسئله عمومی مینیمم سازی، ایده اصلی در روش S.A. تولید جواب در همسایگی جواب فعلی و محاسبه موثر تغییر در مقدار تابع هدف،  $\Delta C$  است. سپس ضمن ذخیره بهترین جواب به دست آمده، اگر  $\Delta C \leq 0$  باشد، جواب جدید قطعاً پذیرفته می شود. در غیر این صورت اگر  $\Delta C > 0$  باشد، جواب جدید با احتمال  $\exp\left(-\frac{\Delta C}{T}\right)$  پذیرفته می شود که در آن  $T$  دمای سیستم است. دمای سیستم، که درجه تصادفی بودن حرکت به سوی جواب را تعیین می کند، مطابق با یک برنامه معین با پیشرفت روش حل، کاسته می شود. در واقع دمای سیستم مشخص کننده زیرفضای جواب مسئله است که در هر تکرار مورد قبول قرار می گیرد. روش S.A. در شکل (۱) خلاصه شده است.

همان طور که دیده می شود، در دمای بالا تقریباً تمام جوابهای تولید شده صرف نظر از مقدار تابع هدف پذیرفته می شوند. با پیشرفت الگوریتم و کاهش دما، جوابهای نامناسب، شانس کمتری برای پذیرفته شدن دارند. در واقع در هر دما، احتمال پذیرفتن جواب با مقدار تابع هدف بیشتر، بستگی به اندازه افزایش ( $\Delta C$ ) دارد.

#### ۳-۲- کاربرد S.A. برای حل مسئله بهینه سازی شبکه با هزینه مقعر

برای کاربرد روش S.A. برای هر مسئله بهینه سازی، بایستی دو دسته از پارامترها تعیین شوند. دسته اول، پارامترهای مربوط به کنترل دما و تعداد جوابهایی که باید تولید شوند، و دسته دوم مربوط به ویژگیهای خاص مسئله مورد نظرند.

- پارامترهای زیر داده شده‌اند: دمای اولیه، تعداد دفعات کاهش دما و فرمول آن و تعداد جوابهایی که در هر دما باید تولید شوند.
- یک جواب اولیه  $x_s$  و  $C_s = C(x_s)$  قرار دهید.
- بهترین جواب به دست آمده  $x^* = x_s$  و  $c^* = c_s$  قرار دهید.
- تکرار برای دماهای مختلف
- یک جواب همسایه  $x$  برای  $x_s$  تولید کنید.
- اگر  $\Delta c = c(x) - c_s \leq 0$  آن گاه
- جواب جدید را قبول و  $x_s = x$  و  $c_s = c(x)$  قرار دهید.
- اگر  $c^* < c(x)$  بهترین جواب را با  $x^* = x$  و  $c^* = c(x)$  جایگزین کنید.
- در غیر این صورت:
- یک عدد تصادفی یکنواخت به نام rand تولید کنید.
- اگر  $\text{rand} < \exp\left(-\frac{\Delta x}{T}\right)$  باشد، آن گاه
- جواب جدید را قبول و  $x_s = x$  و  $c_s = c(x)$  قرار دهید.
- در غیر این صورت جواب تولید شده را رد کنید.
- دما را کاهش دهید.

### شکل ۱- روش بهینه سازی ترمودینامیکی

که در آن  $T_k$ ، دما در تکرار  $k$ ام و  $0 < \alpha < 1$  سرعت خنک کردن سیستم است. مقدار  $\alpha$  باید به اندازه کافی بزرگ باشد و  $\alpha = 0.9$  مقداری است که برای این مسئله در نظر گرفته‌ایم. کیفیت جواب روش S.A. به میزان زیادی بستگی به تعداد جوابهایی دارد که در هر دما مورد بررسی قرار می‌گیرند. هر چه این مقدار بزرگتر باشد، شانس یافتن مینیمم مطلق بیشتر می‌شود ولی در عوض از کارایی روش کاسته می‌شود. بنابراین مقدار این پارامتر هم بستگی به ابعاد مسئله دارد و با چند بار اجرای آزمایشی روش برای مقادیر مختلف تعیین می‌شود. برای مسئله مورد نظر در ابعاد کوچک (شبکه با تعداد گره‌های حداکثر ۳۰) در هر دما حدود ۲۰۰۰ جواب تولید می‌شوند. چون تکرارهای روش نظیر دماهای مختلف است، یک طریقه برای توقف روش انجام آن برای تعداد مشخصی دماست. برای مسئله بالا ۴۰ تا ۶۰ بار تغییر دما کافی به نظر می‌رسد. عملاً نیز برای کاهش بیشتر دما، جواب بدون تغییر باقی می‌ماند.

### ۳-۲-۱- تصمیمات عمومی

انتخاب پارامترهای عمومی به مسئله بهینه سازی و موارد خاص مورد نظر بستگی دارد. برای انتخاب مناسب، بایستی روش را با چند نمونه پارامترها اجرا و سپس بهترین ترکیب پارامترها را تعیین کرد. دمای اولیه باید به طریقی تعیین شود که احتمال قبول و رد جوابها برای حالت  $\Delta C > 0$  در تکرار اول روش برابر باشد. انتخاب صحیح دمای اولیه بسیار مهم است، چون اگر خیلی پایین باشد، روش ممکن است یک مینیمم موضعی را به دست آورد و اگر خیلی بالا باشد، اجرای روش طولانی خواهد شد. استراتژی خنک کردن سیستم، چگونگی کاهش دما را در حین تکرارهای روش تعیین می‌کند. ما استراتژی نمایی را برای خنک کردن سیستم در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{k+1} = \alpha T_k$$

در هر تکرار روش S.A، بایستی تعداد زیادی جواب تولید شوند تا یک تعادل گرمایی در هر دما برقرار شود. اساس محاسبات روش مربوط به تعیین تغییر مقدار تابع هدف برای هر جواب تولید شده است و کارایی روش بر پایه چگونگی محاسبه موثر آن است.

همان طور که ذکر شد، جواب مسئله جریان در شبکه با مینیمم هزینه مقعر، یک نقطه حدی ناحیه امکانپذیر است و بنابراین طرحی<sup>۱۹</sup> از جوابهای کاندید که توسط روش S.A باید تولید شوند، شامل K مسیر ساده و یکتا بین مبدا - مقصدهاست. برای تولید یک جواب جدید، یک زوج مبدا - مقصد به صورت تصادفی انتخاب و مسیر بین آن دو تغییر داده می شود. یک راه این تغییر انتخاب یک گره در مسیر موجود و اضافه کردن، حذف و یا تغییر گره بعد از آن است. به این ترتیب محاسبه تغییر مقدار تابع هدف بسیار سریع و فقط نیاز به محاسبه تغییر هزینه ۳ یا ۴ یال در هر تکرار خواهد داشت.

#### ۴- روش ابداعی مینوکس

مینوکس روشی برای حل مسئله جریان در شبکه چندکالایی با هزینه مقعر ارائه کرد [۴] که بر پایه شرایطی لازم برای بهینگی استوار است که در این مورد قویتر از شرایط بهینگی موضعی است که مبنای سایر تحقیقات بوده است [۵-۸]. بنابراین قبل از تشریح روش، ابتدا این شرایط بیان می شوند.

یک جریان چندکالایی  $f$  را در نظر بگیرید که ترافیک هر کالا روی یک مسیر ساده و یکتا نظیر شده باشد. فرض کنید جریان روی یال  $e$ ،  $f_e$  باشد. اگر یال  $v=(i,j)$  دارای جریان  $f_v > 0$  باشد، برای تمام یالهای شبکه طول  $l$  به طریق زیر تعریف می شود.

$$l_v = +\infty \quad v \quad \text{برای یال}$$

$$l_U = C_u(f_u + f_v) - C_u(f_u) \quad U \neq v \quad \text{برای هر یال دیگر}$$
(۳)

که در آن  $C_u(f_u)$  هزینه جریان  $f_u$  روی یال  $u$  است. حال  $L(f,v)$  را طول کوتاهترین مسیر غیرمستقیم بین  $i$  و  $j$  تعریف کنید که می تواند به عنوان کمترین هزینه جابه جایی جریان  $f_v$  از طریق یک مسیر جانشین (به جای راه مستقیم  $(i,j)$ ) نیز در نظر گرفته شود. بدین ترتیب یک شرط لازم برای جریان  $f$  که یک جواب با هزینه مینیمم باشد این است که برای هر یال  $v$  با  $f_v > 0$  داشته باشیم:

$$\Delta(v) = L(f, v) - C_v(f_v) \geq 0 \quad (۴)$$

به این ترتیب نحوه بهبود یک جواب که دارای شرط لازم بالا نیست نیز مشخص می شود. روش ابداعی فوق از نوع گریدی<sup>۲۰</sup> است، چون پس از محاسبه مقادیر  $\Delta(v)$  برای تمام یالها با جریان مثبت، یال با حداقل  $\Delta(v)$  را انتخاب و سپس جریان مربوط به آن را روی مسیر جانشین قرار می دهد. شرط توقف روش هم این است که مینیمم مقادیر  $\Delta$  ها غیرمنفی باشد که نشان می دهد که شرایط بهینگی برقرار شده است. شکل (۲) روش بالا را دقیقاً نشان می دهد.

#### ۵- روش ساده سازی لاگرانژی

##### ۵-۱- مقدمه

روشهای ابداعی و روشهای جستجوی تصادفی، اغلب برای حل مسائل مشکل یا در ابعاد بزرگ بهینه سازی ترکیباتی به کار می رود. اگرچه ایده های در این مورد وجود ندارد که جواب به دست آمده توسط روشهای بالا تا چه حد به جواب بهینه نزدیک است. به این منظور با کاربرد یک روش تعیین حد پایینی، میزان خوبی جوابها قابل بررسی خواهد بود. شیرو نشان داده است که روش ساده سازی لاگرانژی، به خصوص برای مسائل گسسته، حدود پایینی خوبی به دست می آورد [۹].

##### ۵-۲- صورت ساده شده لاگرانژی مسئله

مسئله (۲) ارائه شده در بخش (۲) را در نظر بگیرید. محدودیت اول آن را با

$$\sum_e x_e^{kr} - \sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_{\mu}^k \geq 0, \quad \forall e, k$$

جایگزین کنید. به عبارت دیگر، جریان روی هر یال بزرگتر یا مساوی جریان روی مسیرهای مختلف شامل یال بالا باشد. اگرچه برای یک جواب بهینه این محدودیت به شکل تساوی برقرار خواهد شد، ولی در نظر گرفتن علامت محدودیت به شکل  $\geq$  برای کاربرد روش ساده سازی لاگرانژی لازم است، چرا که در این صورت ضرایب لاگرانژ محدود به مقادیر نامثبت خواهند بود.

یک صورت ساده شده برای مسئله (۲) با حذف اولین سری محدودیتها (به شکل جدید) و توسط افزودن مضارب  $v_e^k$  از آن محدودیتها به تابع هدف به دست می آید. از آنجایی که تنها این سری محدودیتها بودند که متغیرهای یال را با متغیرهای مسیر مرتبط می کردند، مسئله ساده شده را می توان به دو زیرمسئله جدا از هم، یکی (LR1) برحسب متغیرهای یال و دیگری (LR2) برحسب متغیرهای مسیر تقسیم کرد. در نتیجه:

$$(LR1)Z_1(V) = \min \sum_e \sum_r \sum_k (c_e^r + v_e^k) x_e^{kr} + \sum_e \sum_r F_e^r y_e^r$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k x_e^{kr} \leq M_e^r y_e^r, \quad \forall e, r$$

$$\sum_k x_e^{kr} \geq M_e^{r-1} y_e^r, \quad \forall e, r$$

$$\sum_r y_e^r \leq 1, \quad \forall e$$

$$y_e^r = 0 \vee 1, x_e^{kr} \geq 0, \quad \forall e, r, k$$

(۵)

و

$$(LR2)Z_2(V) = \min \sum_e \sum_k \left( \sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k \right) (-v_e^k)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\mu \in P_k} X_\mu^k = d_k, \quad \forall k$$

$$X_\mu^k \geq 0, \quad \forall e, k, \mu \in P_k$$

(۶)

زیرمسئله اول (LR1) به راحتی قابل تفکیک برای هر یال (e) خواهد بود و سپس با حل آن برای قطعات مختلف، قطعه‌ای که کمترین هزینه را بدهد، انتخاب می شود. حل زیرمسئله (LR1) به تفکیک یال و قطعه، بسیار ساده است، چرا که آن یک مسئله کوله پشتی پیوسته با حدود بالایی و پایینی است [۱۰].

دومین زیرمسئله، که در مورد شبکه‌های جهت دار ظاهر نمی شود [۱۱]، با تفکیک به مسائل کوتاهترین مسیرها بین مبدأ - مقصدهای مختلف و با در نظر گرفتن طول  $(\geq 0) (-v_e^k)$  برای یالهای شبکه، به راحتی قابل حل است. و بالاخره یک حد پایینی برای تابع هدف مسئله اصلی، به طریق زیر، پس از حل دو زیرمسئله (LR1) و (LR2)، به دست می آید

$$Z(V) = Z_1(V) + Z_2(V) \quad (۷)$$

### ۳-۵- تعیین حدود پایینی برای مسئله

با حل مسئله ساده شده لاگرانژی یک حد پایینی برای مسئله (۲) به دست می آید. برای تعیین بهترین حد پایینی لازم است که حداکثر مقدار بهینه تابع هدف مسئله ساده شده لاگرانژی را بر روی مقادیر مختلف ضرایب لاگرانژ  $v$  به دست آوریم. از آنجایی که مقادیر بهینه تابع هدف مسئله ساده شده یک تابعی خطی قطعه‌بندی شده مقعر از  $v$  هستند [۹]، نمی توان روشهای کلاسیک بهینه‌سازی را برای ماکزیمم کردن آن به کار برد. روش زیرگردان<sup>۲۱</sup> روش مناسبی در این مورد است [۱۲].

روش زیرگردان یک روش تکراری است که به منظور بهبود ضرایب لاگرانژ برای افزایش مقدار بهینه تابع هدف لاگرانژ به کار می بریم. در این روش، ضرایب به طور سیستماتیک در هر تکرار تغییر می یابند. مقدار اولیه ضرایب را برابر منفی کمترین شیب تابع هزینه برای هر یال در نظر می گیریم که به نظر می رسد حد پایین بزرگتری تولید خواهد کرد. در هر تکرار حد پایینی نظیر ضرایب فعلی  $v$ ، با حل دو زیرمسئله (LR1) و (LR2)، به طور مجزا، به طریقی که در قسمت قبل تشریح شد، به دست می آید.

چون مسئله ساده شده با حذف محدودیتهای جریان یال - مسیر به دست آمده، برای جواب به دست آمده، جریان روی یالها لزوماً با جریان روی مسیرهای مختلف شامل آنها

- توابع هزینه جریان روی کمانها،  $C_{ij}$  ها، و تقاضاهای ترافیک مربوط به هر جفت مبدأ - مقصد داده شده‌اند.
- ترافیک هر مبدأ - مقصد را روی یالهای مستقیم نظیر کنید.
- تکرار تا وقتی که شرایط بهینگی (۴) برقرار شود.
- برای تمام یالها به شکل  $(i, j)$  با جریان مثبت،
- کوتاهترین مسیر غیرمستقیم بین  $u$  و  $v$  را با در نظر گرفتن طول تعریف شده (معادله ۳) برای یالهای شبکه به دست آورید.
- اگر  $\Delta < 0$  (معادله ۴) باشد، یال را علامتگذاری کنید.
- یال نظیر حداقل  $\Delta$  را انتخاب کنید.
- اگر حداقل  $\Delta$  ها نامنفی باشد، توقف، جواب فعلی را به عنوان یک جواب خوب قبول کنید.
- در غیر این صورت، جریان روی یال بالا را روی کوتاهترین مسیر به دست آمده جانشین، نظیر کنید.

### شکل ۲- روش ابداعی مینوکس

روش زیر گرادیان ضرایب لاگرانژی  $(v_e^k)$  را متوالیاً، در جهت نزدیکی حد بالا و حد پایینی به دست آمده، بهبود می‌دهد تا شرایط توقف حاصل شود. شرایط توقف می‌تواند: نزدیکی به اندازه کافی دو حد بالا و پایینی و در نتیجه کوچک شدن طول قدم  $e$  و یا تعداد معینی تکرار روش باشد. ضمناً اگر مقدار تابع هدف مسئله ساده شده برای تعداد معینی تکرار بدون تغییر باقی بماند، با تغییر ضریب  $\lambda$  از تکرار بی‌پایان ضرایب لاگرانژ جلوگیری می‌شود. مقدار اولیه ضریب  $\lambda$ ، ۲ است و در هر بار تغییر نصف می‌شود.

برابر نخواهد بود. بنابراین جهت‌های زیرگرادیان،  $w_e^k$ ، می‌تواند برابر تفاوت این دو مقدار باشد، به عبارت دیگر

$$w_e^k = \sum_r X_e^{kr} - \sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_{\mu}^k \quad (8)$$

$w_e^k$  جهت‌ی برای تغییر مقادیر فعلی  $v_e^k$  است معمولاً به طریقه زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$v_e^k = v_e^k + e w_e^k \quad (9)$$

که در آن  $e$  طول قدم است که توسط معادله زیر به دست می‌آید

$$e = \lambda \frac{\hat{Z} - Z(V)}{\|w\|^2} \quad (10)$$

و در آن  $\lambda$  یک ضریب مربوط به طول قدم،  $0 < \lambda \leq 2$ ،  $\hat{Z}$  یک حد بالا برای تابع هدف اصلی و  $\|w\|$  هم نرم اقلیدسی است.

مقدار حد بالایی ( $\hat{Z}$ ) مقدار تابع هدف به ازای یک جواب امکانپذیر است. روند تعیین حد بالایی در قدم اول با توجه به حل زیر مسئله (LR1) طولهایی را به یالهای شبکه نظیر می‌کند. به این ترتیب که برای هر یال که در جواب زیر مسئله (LR1) دارای جریان صفر است، طول صفر و برای سایر یالها، طولی برابر شیب قطعه‌ای از تابع هدف که جواب زیر مسئله (LR1) را به دست می‌دهد، در نظر گرفته می‌شود. سپس ترافیک مربوط به مبدأ - مقصدهای متفاوت را به کوتاهترین مسیر بین آنها تخصیص می‌دهد. با پیشرفت تکرارهای روش، این روند ساده جواب بسیار خوبی را برای مسئله تولید می‌کند.

### ۶- نتایج محاسباتی

برنامه‌های رایانه‌ای برای روش بهینه سازی ترمودینامیکی، روش ابداعی مینوکس و روش ساده سازی لاگرانژی به زبان C نوشته و روی ماشین SunOs با سیستم Unix اجرا شد. خلاصه نتایج حاصل از کاربرد روشها برای چند مثال در جدول (۱) ارائه شده است. در مثالها، تعداد گره‌ها، تعداد مبدأ - مقصدها و یالهای بین گره‌ها همه به طور تصادفی تولید شده‌اند. توابع هدف روی یالها، توابعی خطی قطعه‌بندی شده و مقعر شامل ۵ قطعه، هر یک با شیبهای متناسب با طول یالها هستند. زمانهای اجرا برحسب ثانیه گزارش شده‌اند. مقادیر درصدی، نسبت

جدول ۱- نتایج محاسباتی حاصل از کاربرد سه روش

شماره	تعداد گره‌ها	تعداد کالاها	روش S.A. هزینه - زمان	روش مینوکس هزینه - زمان	روش ساده سازی لاگرانژی هزینه - زمان - حد پایینی
۱	۵	۴	۱/۱۱-٪۱۰۰	۰/۰۲-٪۱۰۰	٪۹۵-۰/۲۸-٪۱۰۰
۲	۷	۸	۲/۱۰-٪۱۰۴	۰/۰۳-٪۱۰۶	٪۹۴-۰/۲۱-٪۱۰۰
۳	۱۲	۱۴	۷/۶۳-٪۱۰۱	۰/۱۱-٪۱۰۰	٪۹۹-۴/۹۳-٪۱۰۰
۴	۱۵	۵۲	۲۰/۹۵-٪۱۰۵	۱/۴۲-٪۱۰۴	٪۹۹-۴۵/۳۵۴-٪۱۰۰
۵	۱۶	۲۳	۲۷/۵۹-٪۱۰۳	۰/۳۲-٪۱۰۰	٪۸۹-۱۵/۴۱-٪۱۰۰
۶	۱۷	۴۳	۳۱/۸۸-٪۱۱۷	۱/۵۲-٪۱۰۸	٪۹۹-۳۸/۵۶-٪۱۰۳
۷	۱۸	۴۸	۳۵/۳۶-٪۱۱۸	۱/۸۸-٪۱۰۶	٪۹۹-۵۱/۳۳-٪۱۰۵
۸	۱۹	۵۹	۳۸/۴۶-٪۱۱۵	۳/۳۸-٪۱۰۷	٪۹۶-۹۶/۳۶-٪۱۰۳
۹	۲۲	۷۳	۱۱۰/۰۳-٪۱۲۰	۷/۲۷-٪۱۰۶	٪۹۶-۱۷۴/۰۱-٪۱۰۵
۱۰	۲۳	۸۲	۶۹/۷۹-٪۱۲۵	۹/۴۸-٪۱۰۵	٪۹۶-۲۲۶/۵۹-٪۱۰۴
۱۱	۲۵	۱۰۱	۱۰۴/۴۴-٪۱۱۸	۱۵/۵۳-٪۱۰۷	٪۹۵-۳۵۲/۶۶-٪۱۰۲

هزینه مربوط به جواب هر روش به هزینه مربوط به بهترین جواب به دست آمده است. بهترین جواب، حاصل از کاربرد روش ساده سازی لاگرانژی با تعداد بیشتری تکرار است.

اگرچه روش S.A.، ضمن سادگی ابزاری قوی برای حل مسائل بهینه سازی ترکیباتی است ولی دقت زیادی در انتخاب نحوه تولید مؤثر جوابها، زمانبندی خنک کردن و کفایت تعداد جوابهای تولید شده لازم است. با این وجود زمینه‌هایی نیز برای بهبود روش وجود دارد. از جمله اینکه تعداد جوابهایی که در هر دما باید تولید شوند با کاهش دما، افزایش یابد. به این ترتیب شانس دستیابی به جوابهای جدید برای موقعی که بیشتر جوابها رد می‌شوند، افزایش می‌یابد. راه دیگر روش S.A. با یک روش دیگر است. به عنوان مثال می‌توان از جواب حاصل از S.A.، به عنوان جواب اولیه روش مینوکس استفاده کرد.

همان طور که در جدول نشان داده شده است، روش مینوکس در زمانی کوتاه، جواب خوبی را به دست می‌آورد که برای مسائل بزرگ کارا خواهد بود. ولی بدون داشتن یک حد

پایینی، ایده‌ای در مورد دقت جواب وجود ندارد. روش ساده سازی لاگرانژی ضمن به دست آوردن حد پایینی برای مسئله، جواب بهتری را در مدت زمان بیشتری می‌دهد. با افزایش ابعاد شبکه، مخصوصاً تعداد مبدأ - مقصدها، از کارایی روش ساده سازی لاگرانژی کاسته می‌شود. بدیهی است که با کاهش تعداد قطعات تابع هدف، ابعاد زیر مسئله لاگرانژی کمتر شده و این روش مؤثرتر عمل می‌کند. به علاوه برای کاهش زمان اجرای آن می‌توان نحوه تولید حد بالایی در روش زیرگرایان را بهبود داد. همچنین می‌توان ضرایب لاگرانژی را به طور غیر سیستماتیک و با استفاده از روشهای دوآل افزایشی [۱۰] تغییر داد.

در خاتمه به نظر می‌رسد که با توجه به ساختار جوابهای مسئله و امکان تولید سریع جوابهای امکانپذیر، روشهای جستجوی تصادفی هوشمند کاندید مناسبی برای حل مسئله هستند.



- |                             |                           |                              |
|-----------------------------|---------------------------|------------------------------|
| 1. communication network    | 8. NP-hard                | 15. simple                   |
| 2. multicommodity           | 9. The fixed cost problem | 16. single                   |
| 3. undirected               | 10. Simulated annealing   | 17. combinatorial            |
| 4. piecewise linear concave | 11. Minoux                | 18. temprature               |
| 5. the network flow problem | 12. Lagrangian relaxation | 19. scheme                   |
| 6. flow conservation        | 13. Uncapacitated         | 20. greedy                   |
| 7. economics of scale       | 14. the link path model   | 21. subgradient optimization |

## مراجع

1. Florian, M., and Robillard, P., "An Implicit Enumeration Algorithm for the Concave Cost Network Flow Problem," *Management Science* Vol. 18, 1971.
2. Ketabi, S., "Network Routing and Design Problems with Piecewise Linear Costs," PhD Thesis, University of Adelaide, 1997.
3. Eglese, R., "Simulated Annealing: A Tool for Operation Research," *European Journal of Operational Research*, Vol. 46, 1990.
4. Minoux, M., "Network Synthesis and Optimum Network Design Problems: Models, Solution Methods and Application," *Networks*, Vol. 19, 1989.
5. Yaged, B., "Minimum Cost Routing for Static Network Models," *Networks*, Vol. 1, 1971.
6. Zadeh, N., "On Building Minimum Cost Communication Networks," *Networks*, Vol. 3, 1973.
7. Gallo, G., and Sadini, C., "Concave Cost Minimization on Network," *European Journal of Operational Research*, Vol. 3, 1978.
8. Erickson, R., Monma, C., and Veinott, A., "Send and Split Method for Minimum Concave Cost Network Flow Problem," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 12, 1987.
9. Shapiro, R., "A Survey of Lagrangian Techniques for Discrete Optimization," *Annals of discrete Mathematics*, Vol. 5, 1979.
10. Balakrishnan, A., and Graves, S., "A Composite Algorithm for a Concave Cost Network Flow Problem," *Networks*, Vol. 19, 1989.
11. Gavish, B., "Topological Design of Computer Communication Networks-the Overall Design Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 58, 1992.
12. Held, M., Wolfe, P., and Crowder, H., "Validation of Subgradient Optimization," *Mathematical Programming*, Vol. 6, 1973.