

نگرشی برحل عددی معادلات جریان مغشوش بااستفاده از روش ادیهای بزرگ^۱

ابراهیم شیرانسی

دانشگاه صنعتی صفهان - دانشکده مکانیک

۱ - مقدمه

جریان های مغشوش در یک صدسال گذشته مورد توجه بسیار زیاد محققین و دانشمندان قرار گرفته و تحقیقات تئوری و تجربی زیادی در این مورد انجام شده است. علی رغم کوشش های زیادی که تاکنون صورت گرفته، به علت پیچیدگی، جریانهای مغشوش هنوز از مسائل حل نشده و پیچیده علوم فیزیک باقی مانده است و انتظار می رود جهت بدست آوردن راه حل های کلی جریانهای مغشوش راه طولانی و بی انتهای درپیش باشد.

اغتشاش در جریان در اثر ناپایداری جریانهای آرام ایجاد میشود. در حالت کلی وجود ناپایداری در جریان سبب ایجاد ساختمان موجی شکل در جریان شده که میتواند انرژی جریان متوسط را جذب نماید. با وجود اثرات غیرخطی جریان، انرژی جذب شده به موده های دیگر انتقال یافته و در نهایت جریان مغشوش ایجاد میگردد. ادیهای بزرگ، انرژی اخذ شده از جریان متوسط را به تدریج به ادیهای کوچک منتقل نموده و سپس این انرژی به گرما تبدیل می شود.

به علت پیچیدگی جریان های مغشوش، حتی مشکل است تعریف دقیقی برای چنین جریانهای بدست آورد. بطور کلی میتوان خصوصیات جریان مغشوش را به صورت زیر خلاصه کرد:

جریان مغشوش نامنظم و تا حدودی تصادفی^۲ است. اغتشاش در جریان سبب مخلوط شدن سریع ذرات و افزایش نرخ انتقال حرارت، ممنتم و جرم میشود. همچنین باعث به تعویق افتادن جدائی^۳ جریان میگردد. جریان مغشوش یک شکل یا خاصیت سیال نبوده بلکه خصوصیت

1. Large eddy simulation, 2. Random, 3. Separation,

جریان است. جریان هر سیالی که عدد رینولدز آن از مقدار مشخصی بیشتر شود مغشوش می‌گردد. چنین جریانی همیشه در اعداد رینولدز بالا ایجاد شده و معمولاً از ناپایداری جریان آرام بوجود می‌آید. جریان مغشوش همیشه سه بعدی، غیر دائم، و کلاً "چرخشی" است. نوسانات شدیدی و رتیبسته در این جریانها دیده میشود. جریان مغشوش یک پدیده پیوسته است، حتی کوچکترین ذرات (ادیها) در این جریان بسیار بزرگتر از ابعاد مولکولهای سیال است و بالاخره این جریان همیشه باعث افت زیاد شده و انرژی جریان متوسط سیال را به سرعت به گرما تبدیل می‌نماید. البته عامل ایجاد افت همان ویسکوزیته سیال است، جریان مغشوش شامل ساختمانهای محدودی با ابعاد بسیار وسیع است. مجموعه مولکولها که تشکیل ذرات با عملکرد مشابهی را در جریان می‌دهند "ادی"^۳ گویند. ابعاد ادیهای موجود در جریان مغشوش بسیار متنوع می‌باشند. ساختمان ادیهای بزرگ که ابعادشان تا ابعاد هندسی می‌رسد، از یک جریان تا جریان دیگر کاملاً متفاوت بوده در حالی که ادیهای کوچک بستگی به نوع جریان نداشته و ساختمان آنها شکل کلی (بیونیورسال) دارند.

اغتشاشات موجود در جریان مغشوش را نمی‌توان از طریق تجربی و یا تئوریک بطور دقیق بدست آورد. در صورتی که حل دقیق معادلات ناویراستوکز در دسترس بود می‌توانستیم اغتشاشات را بدست آوریم.* ولی اشکال کار این است که با کامپیوترهای موجود فقط می‌توان جریانهای ساده و با عدد رینولدز کم که اندازه ادیهای داخل جریان چندان کوچک نیستند را محاسبه نمود. انتظار می‌رود حتی با استفاده از کامپیوترهای دونسل آینده هم نتوان جریان مغشوش را در حالت کلی حل نمود. در حال حاضر قسمت اعظم روشهای بررسی جریانهای مغشوش استفاده از آسبرن رینولدز 1883 [۱] میباشد. بدین ترتیب که از

1. Unsteady, 2. Structure, 3. Eddy,

* لازم به توضیح است که این موضوع در حالتی صادق است که رفتار نیوتنی سیال و نتیجه معادلات ناویراستوکز بتواند جریان مغشوش سیال را توجیه کند.

طریق انتگرال گیری، از معادلات ناویر-استوکس نسبت به زمان یا مکان متوسط گرفته و این معادلات را بر حسب سرعت‌های متوسط جریان می‌نویسیم. از طرفی از آنجا که معادلات غیرخطی هستند، معادلات متوسط جریان شامل عبارات مربوط به اغتشاشات جریان بوده و لازم است این عبارات مدل شوند تا بتوان معادلات را حل نمود. مدل کردن اغتشاشات جریان در ربع قرن اخیر به شدت مورد توجه قرار گرفته است و انتظار می‌رود این روند با همت بیشتری در سال‌های آینده ادامه یابد. در این مورد خواننده می‌تواند به مراجع [۲] و [۳] مراجعه نماید. علی‌رغم تلاش‌های زیاد در این رابطه، به علت اشکالات موجود در نحوه برخورد به مسئله در روش استفاده از معادلات متوسط جریان، نمی‌توان نتایج دقیقی از این روش بدست آورد.

در مقاله حاضر یک روش جدیدتر برای بررسی جریان‌های مغشوش معرفی می‌گردد. در این روش که معادلات جریان برای ادیهای بزرگ حل شده و ادیهای کوچک جریان مدل می‌شوند، از این خاصیت استفاده می‌شود که ادیهای کوچک در کلیه جریان‌های مغشوش شکل کلی ویونیورسال داشته و رفتاری مشابه دارند و نیز این ادیها نقش کمی در رفتار جریان متوسط و ادیهای بزرگ ایفاء می‌نمایند. در حالی که ادیهای بزرگ قسمت اعظم انرژی اغتشاشات را دارا بوده و از یک جریان تا جریان دیگر متفاوت هستند و نمی‌توان مدل ویونیورسالی برای آنها بدست آورد. این گونه برخورد به مسئله در مقایسه با نحوه بررسی معمول جریان‌های مغشوش، که همان بررسی معادلات انتگرالی و یا معادلات دیفرانسیلی متوسط جریان است، مزایای عمده‌ای دارد. در روش معمول جریان متوسط ادیهای بزرگ و کوچک هر دو مدل می‌شوند و از آنجا که ادیهای بزرگ رفتاری کاملاً متفاوت از یک جریان تا جریان دیگر دارند، مدل کردن آنها مشکل و یا با خطای زیاد امکان پذیر است و یا اینکه لازم است برای هر جریان مشخصی مدل خاص خود را بکار برد که این خود خالی از اشکال یافتن مدل مناسب نیست. از نتایج روش ادیهای بزرگ می‌توان در طراحی سیستم‌های با تکنولوژی بالا استفاده نمود.

همچنین می‌توان مدل‌های مورد استفاده در روش جریان متوسط کسه معمولاً برای حل مسائل مهندسی معمولی کافی است، راتست نمود و بهبود بخشید. البته استفاده از روش بررسی ادیهای بزرگ مستلزم داشتن کامپیوترهای بزرگ و صرف وقت و انرژی زیادی می‌باشد.

در مقاله حاضر ابتدا به اختصار روشهای معمول برخورد به

مسئله (حل جریانهای مغشوش) را مرور کرده، سپس به تاریخچه و کارهای انجام شده در زمینه روشهای ادیهای بزرگ پرداخته میشود. بالاخره روش - ادیهای بزرگ با شرح بیشتری بررسی میگردد. در قسمت آخر نحوه جدا سازی ادیهای بزرگ از ادیهای کوچک، روش حل عددی معادلات و نتایج حاصله به بحث گذاشته می‌شود.

۲ - روش بررسی جریانهای مغشوش

در این قسمت به روشهای بررسی جریانهای مغشوش می‌پردازیم. ابتدا انواع مختلف جریانهای مغشوش را بر اساس نوع جریان به اختصار مورد بررسی قرار می‌دهیم. بطور کلی جریانهای مغشوش را می‌توان به سه دسته جریان همگن^۱، جریان برشی آزاد^۲، و جریان نزدیک دیواره^۳ (لایه مرزی)^۴ تقسیم کرد. در جریانهای همگن حالت سیال به مکان بستگی نداشته و در همه جای جریان یکسان است و فقط با زمان تغییر می‌کند. جریانهای برشی با نرخ تغییر شکل زاویه‌ای ثابت نمونه‌ای از جریانهای همگن است. جریانهای برشی آزاد از قبیل جریان برخواسته^۵ و یا جت بسیار ناپایدار می‌باشند. تمرکز و تپسته در این جریانها سبب ایجاد حرکات ادیهای بزرگ در جریان شده و این خود سبب تشدید اغتشاش در جریان میگردد. بالاخره در لایه مرزی مغشوش به علت وجود دیواره، ادیهای بزرگ و حرکت‌های ناپایدار آنها که در جریانهای برشی آزاد دیده میشود وجود ندارد. ولایه مرزی و سایر خواص مغشوش جریان با نرخ کمتری توسعه یافته و اغتشاشات کمتری در جریان دیده میشود. در عوض مکان نیز تولید اغتشاش در جریان نسبت به حالت

1. Homogeneous flows, 2. Free-Shear flows, 3. Wall-bounded flows, 4. Boundary layer flow, 5. Wake, 6. Jet flow,

جریانهای برشی آزادناشناخته تر بوده و به همین دلیل این تنوع جریان را پیچیده تر مینماید.

در کلیه جریانهای فوق، روشهای بررسی جریانهای مغشوش بر اساس نحوه مدل کردن اغتشاشات در جریان را میتوان بصورت زیر تقسیم بندی کرد.

الف - روابط تجربی^۱

روابط تجربی متعددی میتوان یافت که ضریب اصطکاک جریان مغشوش روی دیواره بر حسب عدد رینولدز و یا عدد نوسلت را بر حسب عدد رینولدز و عدد پاراندتل نشان میدهد. این روابط بسیار مفید بوده و مورد استفاده زیادی قرار میگیرند، البته هر یک از این روابط در محدوده مشخصی صادق بوده و عمومیت ندارد. محدودیت استفاده از این روابط مخصوصاً در کاربردهای با تکنولوژی بالا که در آن هندسه مسئله رل مهمی را ایفا می نماید نمایان می گردد. در چنین مسائلی (مثل جریان روی ایرفویل) با تغییر جزئی هندسه مسئله، روابط تجربی جداگانه ای باید بدست آورد.

ب - روش های انتگرالی

در چنین روش هایی معادلات اصلی جریان سیال در امتداد لاقبل یکی از محورهای مختصات انتگرال گیری می شود. به این ترتیب تعداد متغیرهای مسئله کاهش یافته و روابط ریاضی مسئله را تا حد زیادی ساده می نماید. در روشهای انتگرالی از نتایج تجربی و فیزیکی مسئله میتوان استفاده نمود. نتایج حاصل از چنین روشهایی بسیار مفید بوده و مورد استفاده زیادی قرار میگیرد. اشکال عمده این روشها این است که برای هر نوع جریان مشخصی باید روابط خاص خود را نوشته و ساده کرد. ضمناً نتایج حاصل از این روشها، رفتار کلی جریان را بدست میدهد.

1. Correlations.

ج - معادلات متوسط جریان

در این روش معادلات ناویر-استوکز نسبت به زمان و مکان با فاصله زمانی نسبتاً "کوچک" انتگرال گیری می‌شود. نتایج اصلی، معادلات متوسط جریان یا معادلات متوسط رینولدز نامیده می‌شود. معادلات متوسط بدست آمده که جریان متوسط سیال را توصیف می‌نمایند، شامل مقادیر متوسط حاصل ضرب مؤلفه‌های نوسانی سرعت نیز می‌باشند که بصورت عبارات مجهول به تعداد مجهولات معادله افزوده می‌شوند. درحقیقت به این ترتیب هرگز نمی‌توان از طریق انتگرال گیری مجدد معادلات سرعت‌های نوسانی سیال، تعداد معادلات و مجهولات را یکسان کرد. معادلات جریان در هر بار انتگرال گیری، شامل عبارات با مجهولات جدیدی می‌باشند که باید آنها را مدل کرد و لذا لازم است از مدل‌هایی برای عبارات مجهول استفاده نمود. این مسئله در حال حاضر مورد توجه زیاد محققین بوده و سهم زیادی در تحقیقات روی جریانهای مغشوش را به خود اختصاص داده است.

د- روش ادیهای بزرگ

در روش ادیهای بزرگ معادلات نسبت به فواصل بسیار کوچک انتگرال گیری می‌شود و در نتیجه اغتشاشات (نوسانات) بسیار ریز که مربوط به ادیهای کوچک در جریان می‌باشند از معادلات حذف می‌گردند و معادلات بدست آمده معرف رفتار ادیهای بزرگ در جریان می‌باشند. اثرات ادیهای کوچک بر روی ادیهای بزرگ از طریق مدل کردن آنها در معادلات منظور می‌گردد. در این گزارش به مقدار زیادی در رابطه با روش بررسی ادیهای بزرگ بحث خواهد شد.

ه - روش حل کامل معادلات جریان

در بررسی حل کامل معادلات جریان، حل عددی معادلات کامل ناویر-استوکز بدون مدل سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تنها خطای حاصل از این بررسی، در اثر خطاهای حل عددی مسئله می‌باشد. در اینجا

1. Reynolds average equations,

روش میتوان کلیه ادیهای از کوچک تا بزرگ را در جریان محاسبه و رفتار آنها را بدست آورد. برای این کار لازم است اندازه فاصله دو نقطه متوالی در حل عددی معادلات آنقدر کوچک باشد که از اندازه ادیهای کوچک در جریان کوچکتر باشد و تعداد نقاط در هر بعد با یکباره اندازه ای باشد که کلیه ادیهای بزرگ در جریان را شامل شود.

روشهای مذکور در ایندهای "د" و "ه" در فوق، صرفاً از طریق استفاده از کامپیوترهای بزرگ و سریع امکان پذیر میباشد. این روشها در حال حاضر مورد استفاده مهندسين طراح قرار نگرفته ولی ممکن است جای خود را بازنکنند.

مسئله مهم این است که در تقسیم بندی فوق، محاسبات در هر سطحی میتواند اطلاعاتی را بدست دهد که در سطوح پایین تر از آن مورد استفاده قرار گیرد. مثلاً نتایج حاصل از روش بررسی کامل معادلات جریان میتواند در تعیین مدلها در روش ادیهای بزرگ و معادلات متوسط جریان مورد استفاده قرار گیرد. نتایج حاصل از روش ادیهای بزرگ میتواند در مدل کردن عبارات در معادلات متوسط جریان قرار گیرد. معمولاً مهندسين طراح از روشهای مندرج در ایندهای "ب" و "ج" استفاده نموده نتایج میتوانند روابط تجربی را تکمیل نموده و مورد استفاده قرار دهند.

۳- مروری بر کارهای انجام شده

تاکنون هیچگونه جواب تحلیلی معادلات ناویرا-ستوکز برای جریان مغشوش بدست نیامده است و انتظار نمیرود که بتوان به حلهای تحلیلی برای چنین جریانهایی دست یافت. از طرفی به علت اهمیت تکنولوژیکی جریان مغشوش نیاز به بررسی چنین جریانهایی و توسعه روشهای محاسباتی جهت پیش بینی آنها محسوس است. تا قبل از سال 1960، به علت دردست نبودن کامپیوترهای با حافظه زیاد، تنها به حل معادلات دیفرانسیلی معمولی که از طریق معادلات انتگرالی حاصل میشدند و یا جریانهایی ساده دو بعدی پتانسیل از طریق کامپیوتر اکتفا میشد. پیشرفت در این زمینه عمدتاً در اثر نبودن کامپیوترهای بزرگ

محدود می‌شد. در دهه 1960 با پیچیده‌تر شدن و بزرگ‌تر شدن کامپیوترها روش‌های بررسی لایه مرزی ازدو طریق انتگرالی و دیفرانسیلی آغاز گردید و در آن زمان محققین شروع به حل معادلات دیفرانسیلی متوسط جریان برای جریان‌های ساده نمودند. افسالهای 1970 تا کنون، مدل‌های پیچیده‌تری برای جریان مغشوش توسعه یافته و همچنین جریان‌های پیچیده‌تری مورد بررسی قرار گرفته است.

اولین قدمی که در رابطه با روش ادیهای بزرگ برداشته شد توسط سما کورینسکی (1963) [۴] بود که جریان سه بعدی هوای اطراف جورا بررسی نمود. وی با استفاده از مدلی که ارائه نمود، ادیهای بزرگ جریان را از ادیهای کوچک جدا نموده و ادیهای بزرگ را مطالعه کرد. البته در آن زمان به علت کمبود حافظه کامپیوتری توانست فقط برای حالتی که تعداد نقاط داخل جریان سیال نسبتاً "کم باشند، مسئله را حل کند. دیردراف (1970) [۵] جریان در داخل کانال را با استفاده از روش ادی‌های بزرگ بررسی نمود و نتایج بسیار جالب و اساسی از جریان داخل کانال ارائه داد. سپس شومان (1973) [۶] و گرتربت (1978) [۷] روش وی را دنبال کرده و توسعه دادند. در سال (1972) در دانشگاه استنفورد گروهی تحت ریاست پروفیسور ویلیام رینولدز کار روی محاسبات عددی جریان از طریق روش ادیهای بزرگ را شروع کردند. این گروه جریان‌های ساده مغشوش را مطالعه و از طریق نتایج آن میانی جریان‌های مغشوش را مورد بررسی قرار دادند. کواک (1975) [۸] شانان (1975) [۹] جریان مغشوش همگن را بررسی و ادیهای کوچکتر از فواصل بین نقاط در محاسبات عددی را مدل نمودند. منصور (1978) [۱۰] جریان برشی آزاد از نوع اختلاط لایه‌ها^۱، الن کین (1978) [۱۱] جریان برشی آزاد در ناحیه گذرا و پرویز معین (1978) [۱۲] جریان در داخل کانال را بررسی نمود. کلارک (1978) [۱۳]، مکملان و فرزیگر (1979) [۱۴] و باردنیا (1980) [۱۵] معادلات دیفرانسیل را از طریق کامپیوتر بطور دقیق حل کرده و ادیهای کوچک را مدل نمودند. ابراهیم شیرانی (1981) [۱۶] حل دقیق معادلات

1. Mixing layer,

را برای جریان برشی و همگن هر ماه با تغییر درجه حرارت به عنوان یک کمیت اسکالر غیرفعال مورد بررسی قرار داد و اصول روش ادیهای بزرگ را آزمایش نمود. لزللی (1979) و گوارینی و لزللی (1979) [۱۷] - مدل های ادیهای کوچک را بررسی نمودند.

۴ - روش ادیهای بزرگ

در این قسمت به تشریح روش ادیهای بزرگ پرداخته میشود. ابتدا به اصولی که بر اساس آن این روش استوار است پرداخته، بعد به نحوه جداسازی ادیهای بزرگ از ادیهای کوچک (فیلتر کردن معادلات) سپس مدل کردن ادیهای کوچک و در نهایت به روش حل معادلات پرداخته میشود.

الف - اصول روش ادیهای بزرگ

همانطوریکه در مقدمه آمد، ساختمان جریانهای مغشوش از طولهای مینای متفاوتی تشکیل شده است که با توجه به اهمیت و نقش آنها در جریان، میتوان ساختمان جریان مغشوش را به دو قسمت ادیهای بزرگ و ادیهای کوچک تقسیم کرد. جدول (۱) تفاوت و نقش هر یک از این دو را مشخص میکند.

با توجه به مطالب مذکور در این جدول که در آن میان روش ادیهای بزرگ آمده است، میتوان نتیجه گرفت که ادیهای بزرگ را میتوان به سختی مدل کرد، در صورتیکه ادیهای کوچک قابل مدل شدن هستند. مدلهای ادیهای بزرگ نمیتوانند پیوند پیورسال باشند و از یک جریان تنها جریان دیگر متفاوت میباشند، ولی انتظار می رود برای ادیهای کوچک، بتوان مدل پیوند پیورسالی بدست آورد.

مباحث فوق منجر به طرح روش ادیهای بزرگ می شود که سه در آن ساختمان و شکل ادیهای بزرگ در جریان محاسبه می شود و ادیهای کوچک مدل میگردند، البته اصول مذکور در جدول (۱) در تمام جریانها صادق نمی باشد، این اصول در جریانهای برشی آزاد و جریانهای همگن صادق بوده ولی در لایه مرزی مخصوصاً "در نزدیکی دیواره، به علت اینکه در این

جدول شماره ۱ - وجه تمایز ادیهای بزرگ و کوچک در جریانهای مغشوش

ادیهای کوچک	ادیهای بزرگ	ردیف
ادیهای کوچک در اثر رفتار غیر سیال بوجود آمده و با آن تبادل انرژی و ممنتوم می نمایند. بزرگ دریافت می کنند.	ادیهای بزرگ توسط جریان متوسط ادیهای کوچک در اثر رفتار غیر سیال بوجود آمده و با آن تبادل انرژی و ممنتوم می نمایند.	۱
ادیهای کوچک انرژی خذ شده از ادیهای بزرگ را به گرماتبدیل می کنند و اثر زیادی روی جریان متوسط ندارد.	قسمت اعظم انتقال جرم، ممنتوم، انرژی و ذرات در جریان مغشوش توسط ادیهای بزرگ انجام میشود.	۲
شکل و ساختمان ادیهای کوچک معمولا "به هندسه و نوع جریان بستگی نداشته و در کلیه جریانهای مغشوش مشابهاست.	شکل و ساختمان ادیهای بزرگ به مقادیر زیادی به هندسه مسئله و طبیعت جریان (نوع جریان) بستگی دارد.	۳
ادیهای کوچک معمولا "ایزوتروپیک و در نتیجه دارای شکل کلی هستند.	ادیهای بزرگ معمولا "بسیار غیر ایزوتروپیک هستند.	۴
زمان مبنای ادیهای کوچک بسیار کوچکتر از ادیهای بزرگ است یعنی طول عمر آنها خیلی کمتر از ادیهای بزرگ است.	زمان مبنای ادیهای بزرگ تقریبا " برابر زمان مبنای جریان متوسط است، مثلا "در جریانی که از روی جسم عبور می کند، زمان مبنای ادیهای بزرگ متناسب با نسبت طول جسم به سرعت جریان آزاد سیال است.	۵

1. Concentration, 2. Time-scale, 3. Life-time of large scale structures.

جدول شماره ۲ مقایسه روشهای ادیهای بزرگ و جریان متوسط

ردیف	روش ادیهای بزرگ	روش جریان متوسط
۱	در روش ادیهای بزرگ قسمت اعظم انتقال جرم، ممنتم، انرژی و ذرات در جریان مغشوش مستقیماً محاسبه میشود و فقط آن قسمت از خصوصیات جریان مدل میشود که نقش بسیار کمی در انتقال جرم، ممنتم و انرژی دارند.	انتقال جرم، ممنتم، انرژی و ذرات در جریان متوسط کلاً مدل میشود
۲	نتایج کلی بدست آمده از روش ادیهای بزرگ نسبت به مدل انتخاب شده برای ادیهای کوچک غیرحساس بوده و میتوان یک مدل با جا معیت بیشتر برای تمام جریانها بدست آورد.	مدل انتخابی برای اعتشاشات و جریان جا معیت نداشته و در هر جریانی مدل مشخصی باید انتخاب نمود.
۳	معادلات جریان برای ادیهای بزرگ سه بعدی و غیر دائم بوده و لذا نیاز به حل معادلات از طریق عددی و با استفاده از کامپیوترهای بزرگ میباشد و مستلزم صرف وقت و هزینه زیاد است.	معادلات جریان متوسط عموماً "به صورت معادلات دیفرانسیلی معمولی (ODE) بوده و بر راحتی از طریق حل عددی معادلات قابل حل میباشد.

ناحیه عامل انتقال ممنتم و سایر خواص جریان می‌تواند ادای های کوچک جریان باشند، لزوماً " صادق نمی‌باشند و باید در بررسی چنین حالتی با دقت بیشتری به مسئله برخورد کرد.

برای روشن تر شدن مطلب در اینجا به مقایسه روش ادیهای بزرگ با روش معمولی بررسی متوسط جریان می‌پردازیم. جدول (۲) این دو روش را با هم مقایسه می‌کند.

ب- معادلات جریان برای ادیهای بزرگ

بطور کلی معادلات جریان برای جریان غیر قابل تراکم شامل معادلات بقای جرم و ممنتم (به فرم تنسوری) بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

که در آن u_i مولفه سرعت، p فشار، ρ دانسیته، ν ویسکوزیته سینما تیکی، t زمان، x_j طول در امتداد محورهای دستگاه مختصات کارتزین و زیر نویس i, j می‌تواند از یک تا سه تغییر کنند.

جهت بدست آوردن معادلات جریان برای ادیهای بزرگ لازم است در معادلات جریان سیال، ادیهای بزرگ را از ادیهای کوچک جدا کرده و سپس ادیهای کوچک را مدل کنیم. این کار مشابه روش رینولدز برای بدست آوردن جریان متوسط سیال است. روش های ریاضی متعددی وجود دارد که توسط آن می‌توان ادیهای بزرگ را از ادیهای کوچک جدا کرد. در کلیه این روشها سعی می‌شود از طریق انتگرال گیری معادلات جریان بر حسب ابعاد هندسی کوچک (ویا فیلتر کردن معادلات جریان در فرکانسهای بالا در فضای فوریه) ادیهای کوچک جریان را حذف و یا جدا نمود. برای جریان هگن ادیهای بزرگ از طریق فیلتر کانولوشن بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\bar{u}(\underline{r}) = \int G(|\underline{r}-\underline{r}'|) u(\underline{r}') d\underline{r}' \quad (2)$$

یا در فضای فوریه :

$$\hat{u}(\underline{k}) = \hat{G}(\underline{k}) \hat{u}(\underline{k}) \quad (4)$$

که در آن بالانویس "h" معرف تابع در فضای فوریه، زیرنویس "-" معرف بردار و بالانویس "-" معرف تابع فیلتر شده است. فیلتر G میتواند به فرم توابع مختلفی باشد. معمولاً توابعی که بکار رفته است عبارتند از: تابع پله‌ای، تابعی که در فضای فوریه پله‌ای باشد، و یا تابع گوس. دو تابع اول علی‌رغم اینکه مورد استفاده زیادی قرار گرفته‌اند و فرم ساده‌ای دارند، به علت اینکه سری فوریه آنها دارای مقادیر منفی بوده و نیز مشتق‌گیری از آنها مشکل است، مشکلاتی را ایجاد می‌نماید. لذا تابع گوس برای این کار پیشنهاد می‌گردد. این تابع ابتدا توسط لئونارد (1973) [18] پیشنهاد شده است. مزیت چنین تابعی این است که تبدیل فوریه آن نیز به فرم تابع گوس است. بنابراین تابع G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(\underline{r}) = A e^{-6r^2/\Delta^2} \quad (5)$$

و

$$\hat{G}(\underline{k}) = e^{-k^2 \Delta^2/24} \quad (6)$$

ضریب عددی در توان رابطه فوق طوری انتخاب شده است که همان دوم - رابطه فوق با تابع پله‌ای به عرض Δ یکی شود. معمولاً Δ برابر فاصله دو نقطه متوالی در حل عددی معادلات دیفرانسیل است و این فاصله طوری انتخاب می‌شود که برابر کوچکترین اندازه ادیهای بزرگ بوده و لسی ادیهای کوچک را شامل نشود. به همین علت ادیهای کوچک را SGS¹ گویند. ضریب A در رابطه فوق طوری انتخاب می‌شود که اصل بقای جرم، ممنتوم و انرژی در میدان جریان همچنان صادق باشد.

1. Subgrid scale,

با استفاده از رابطه (۳)، روابط (۱) و (۲) را فیلتر کرده و

داریم:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

و

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (8)$$

از طرفی خواص ادیهای کوچک SGS را می‌توان از تفاضل خواص جریان کلی و جریان فیلتر شده بدست آورد و با:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (9)$$

و

$$p = \bar{p} + p' \quad (10)$$

که در آن بالانویس " " معرف خواص ادیهای کوچک است و لذا داریم:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' u_j'} + \bar{u}_i u_j' + u_i' \bar{u}_j \quad (11)$$

در رابطه فوق اولین عبارت سمت راست تساوی معرف خواص ادیهای بزرگ بوده و سه عبارت دیگر سمت راست تساوی شامل خواص ادیهای کوچک یا SGS است. این سه عبارت در معادلات جریان ادیهای بزرگ ظاهر می‌شود و لازم است بر حسب خواص ادیهای بزرگ مدل شوند تا بتوان معادلات را حل کرد. به این سه عبارت "تنش برشی رینولدز SGS" گویند و آنها را با R_{ij} نمایش می‌دهند.

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} + \bar{u}_i u_j' + u_i' \bar{u}_j \quad (12)$$

از طرفی ماتریس R_{ij} را می‌توان به دو قسمت زیر تقسیم کرد:

$$R_{ij} = \zeta_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk} \quad (13)$$

که در آن τ_{ij} ماتریس بدون قطر می باشد. بالاخره عبارت R_{kk} را با رابطه فشار p ، در معادله جریان جمع می کنیم:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{3} R_{kk} \quad (14)$$

ولذا معادلات ادیهای بزرگ بصورت زیر درمی آید:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (16)$$

از آنجا که انتقال انرژی از جریان متوسط عمدتاً "به ادیهای بزرگ منتقل می گردد و نیز ادیهای کوچک کارافت انرژی مکانیکی و تبدیل آن به گرما را انجام می دهند، مرز بین ادیهای کوچک و بزرگ در ناحیه ای است که افت انرژی مکانیکی به گرما و نیز انتقال انرژی از جریان متوسط به اغتشاشات^۳ مینیمم باشد. بر همین اساس عرض فیلتر باید فاصله بین دو نقطه متوالی در محاسبات عددی جریان سیال، Δ باید طوری انتخاب گردد که پس از فیلتر شدن خواص جریان، کلیه ادیهای بزرگ را شامل شده ولی ادیهای کوچک را حذف نماید. از طرفی ابعاد هندسی مسئله باید آنقدر بزرگ انتخاب شوند تا تمام ادیهای بزرگ مسئله را شامل گردد و بر این اساس تعداد نقاط در محاسبه عددی مشخص میگردد (برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۱۶]).

در معادله (۱۶) عبارت آخر سمت راست شامل خصوصیات ادیهای کوچک است و بایستی مدل شود. مدل های متعددی برای این عبارت پیشنهاد شده است. این مدل ها عمدتاً "مشابه مدل های موجود برای عبارات تنش های رینولدز از معادلات متوسط جریان می باشد. رابطه زیر بر همین اساس بدست آمده است:

$$\tau_{ij} = 2\nu_T \bar{S}_{ij} \quad (17)$$

1. Traceless matrix, 2. Viscous dissipation, 3. Turbulent energy production,

که در آن v_{T} ادی ویسکوزیته و s_{ij} نرخ تغییر شکل زاویه‌ای بوده و -
بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

بسیاری از محققین v_{T} را بصورت زیر مشخص کرده‌اند:

$$v_{\text{T}} = (c\Delta)^2 |\bar{S}| \quad (19)$$

که در آن Δ طول مینا در مسئله بوده و برابر فاصله دو نقطه متوالی در حل عددی معادلات می‌باشد و:

$$|\bar{S}| = |\bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}|^{1/2} \quad (20)$$

می‌باشد. مدل ادی ویسکوزیته به فرم فوق در روش جریان متوسط رینولدز بسیار موفق بوده و انتظار می‌رود در روش ادیهای بزرگ نیز موفق باشد. نتایج حاصل از بکار بردن مدل فوق در روش ادیهای بزرگ برای جریانهای همگن و نیز جریانهای برشی نشان می‌دهد که این مدل بسیار مناسب می‌باشد [۱۶] و حتی استفاده از روش‌های پیچیده تر معمول مثل روش یک پارامتری یا دوپارامتری که در حل معادلات انتگرالی جریان متوسط در لایه مرزی از آن استفاده می‌شود، نتایج بهتری ارائه نمی‌دهد.

ج - روش حل عددی معادلات ادیهای بزرگ

روابط (۱۵) و (۱۶)، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای غیرخطی معرف جریان ادیهای بزرگ می‌باشد. طبیعی است این معادلات حاصل تحلیلی نداشته و لازم است از طریق عددی حل شوند. از طرفی برای حل این معادلات لازم است شرایط مرزی و شرایط اولیه مسئله مشخص گردند. در اینجا ضمن تعیین روش بدست آوردن شرایط اولیه و مرزی مسئله، به روش حل معادلات از طریق عددی پرداخته می‌شود.

تعیین شرایط اولیه کار ساده‌ای نیست زیرا برای این کار لازم است جزئیات جریان سیال را داشته باشیم و چنین جزئیاتی نه از طریق تجربی (آزمایش) و نه تئوری قابل تعیین است. یک روش تعیین شرایط اولیه مسئله از طریق مصنوعی و ساختگی است. به این صورت که

میدان جریانی بدست آوریم که اولاً " اصل بقای جرم در آن صادق بوده و ثانیاً " انرژی اغتشاش لازم را دارا باشد هر چند که جزئیات ساختمان ادیهای آن دقیقاً " با واقعیت یکی نباشد. برای این کار قدمهای زیر برداشته می شود [۱۶] ..

— برای هر مولفه سرعت در هر نقطه ایک عدد دردم (مثلاً "بین صفر تا یک") انتخاب می کنیم .

— کرل اعداد انتخابی فوق را بدست می آوریم . نتیجه حاصل دارای — دیورجانس صفر بوده و لذا میتوانند بصورت یک میدان سرعت غیر قابل تراکم مورد استفاده قرار گیرد .

— تبدیل فوریه میدان سرعت بدست آمده را محاسبه کرده و با داشتن اسپکتروم انرژی جنبشی مورد نیاز ، مقادیر مورد نیاز میدان سرعت در فضای فوریه انتخاب می شوند . سپس با تبدیل معکوس فوریه میدان سرعت مناسب که همگن بوده و دارای دیورجانس صفر است بدست می آید . نتیجه حاصل را میتوان بعنوان شرط اولیه مورد استفاده قرار داد . از آنجا که معادلات دیفرانسیلی پاره ای (۱۵) و (۱۶) غیر خطی بوده ، همیشه نمی توان دانست چه شرایط مرزی برای حل مسئله لازم است و آیا مسئله خوش ارائه هست یا نه .

در حل عددی معادلات باید علاوه بر اینکه دقت شود که پاسخهای بدست آمده از دقت لازم برخوردار بوده و روش عددی دارای جواب پایدار باشد ، لازم است نتایج حاصل ، اصول بقای جرم ، منسجم و انرژی را نیز در برداشته باشد . در غیر این صورت نتایج فاقد ارزش فیزیکی است . روش حل عددی پیشنهادی زیر بر چنین اساسی ارائه می گردد .

معادلات دیفرانسیل (۱۵) و (۱۶) از نوع مختلط بوده و شامل هر دو نوع معادلات پارابولیک و الپتیک می باشد . لذا لازم است روش حل معادلات هر دو روش پارابولیک و الپتیک را شامل باشد . معادلات مذکور را برای سادگی به فرم زیر می نویسیم :

1. Grid point, 2. Energy spectrum, 3. Well-posed problem,

استقلالاً.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{H}_i \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

که در آن H_i شامل عبارات جابجایی ممتنم و تنش برش SGS است. مشکل اصلی این است که معادلات (21) شامل مشتق نسبت به زمان می باشد، در حالی که معادله (22) چنین نیست و لذا حل همزمان آنها با اشکال روبرو می شود. یک روش این است که از دو معادله زیرجای آنها استفاده شود:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial x_i} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{H}_i \quad (24)$$

رابطه (23) از مشتق گیری رابطه (21) و با استفاده از رابطه (22) بدست آمده است. در روابط فوق \bar{H}_i فقط تابعی از مشتقات سرعت نسبت به مکان است. با داشتن میدان سرعت در هر لحظه می توان \bar{H}_i را محاسبه نموده و با استفاده از رابطه الپتیک و غیرهمگن (23) \bar{p} را محاسبه نمود و سپس با داشتن میدان سرعت و \bar{p} در یک لحظه، میدان سرعت در لحظه بعدی را با استفاده از رابطه پارابولتیک (24) حساب کرد.

روش های متعددی برای حل معادلات (23) و (24) وجود دارد.

خواننده می تواند به مراجع [5]، [6]، [16]، [19] مراجعه نماید. یک روش موفق و نسبتاً ساده که نویسنده مورد استفاده قرار داده است، استفاده از سری فوریه منقطع می باشد. این روش برای مسائلی که در آن جریان همگن بوده و در نتیجه بتوان از شرایط مرزی پریودیک استفاده نمود، مورد استفاده قرار میگیرد. در چنین روشی که مؤلف در مرجع [16] بکار گرفته است، از رابطه:

$$f(x_j) = \sum_{m=1}^N e^{ik_m x_j} \hat{f}(k_m), \quad k_m = \frac{2\pi m}{N\Delta x}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (25)$$

و تابع معکوس فوریه آن:

$$\hat{f}(k_m) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-ik_m x_j} f(x_j) \quad (26)$$

استفاده میشود. در این صورت مشتق تابع f برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^N ik_m \hat{f}(k_m) e^{ik_m x_j} \quad (27)$$

لذا با این روش مشتقات تابع براحتی قابل محاسبه است و کافی است تابع را در فضای فوریه در ik_m ضرب نموده و معکوس سری فوریه آنرا بدست آورد. لازم به توضیح است که جهت بدست آوردن سری فوریه تابع میتوان از الگوریتم FFT که روش سریع محاسبه سری فوریه را میدهد استفاده نمود. به این ترتیب مشتقات تابع نسبت به مکان بدست میآید. جهت محاسبه میدان جریان در زمان بعدی $(t + \Delta t)$ باید از روش حل عددی استفاده شود که خطای حاصل بیشتر از خطای حاصل از حل عددی مشتقات نسبت به مکان نباشد. ضمناً "جوابهای حاصل پایدار باشند. تجربه نشان میدهد که برای بدست آوردن دقت لازم در محاسبات، فاصله زمانی Δt در محدوده ای قرار میگیرد که میتوان با استفاده از روشهای ضریح جوابهای پایداری نیز بدست آورد. لذا روشهای ضریح برای حل مسئله در زمانهای بعدی کافی است. روشهای با خطاهای متناسب با Δt^2 مثل روش لیب-فراگ و یا آدامس بشفورس و یا روشهای با خطای متناسب با Δt^4 مثل روش رانگ-کاتا برای این کار توصیه میشود.

۵ - بحث و نتیجه گیری

نویسنده امیدوار است این مقاله بتواند ضمن ارائه مروری مقدماتی و کلی بر روشهای حل عددی معادلات جریانهای مغشوش و معرفی روش پر قدرت ادیهای بزرگ، قدمی هر چند کوچک در بوجسود آوردن زمینه های تحقیقاتی جریانهای مغشوش در ایران با استفاده از روشهای پیشرفته برداشته باشد. با توجه به مطالب ذکر شده در بخشهای قبلی، بطور کلی میتوان نتایج کلی زیر را در مورد روش ادیهای بزرگ بیان نمود:

الف: ایده اساسی روش ادیهای بزرگ بسیار موفق بوده و مخصوصاً میتوانند خوبی در رابطه با جریانهای همگن و پرسیسی آزاد مورد استفاده قرار گیرد. در مورد جریان نزدیک دیواره، وجود ادیهای ریز و مهم در نزدیکی دیواره سبب میشود که نتوان روش ادیهای

- بزرگ را بر اجتناب از اعمال کرد. علی‌رغم این مسئله پیشرفت خوبی در این زمینه انجام شده و همچنان ادامه دارد.
- ب :** در حال حاضر روش ادیهای بزرگ جای خود را در زمره روشهای اساسی در بررسی جریانهای مغشوش بازنموده و توانسته است نتایج و اطلاعات نسبتاً "دقیقی در مورد پدیده‌ها را مترها بی‌کسره اندازه‌گیری آنها از طریق آزمایش مشکل و یا غیرممکن است بدست دهد. لذا این روش قادر است مدل‌های موجود اغتشاشات در معادلات جریان را ارزیابی نماید.
- ج :** با استفاده از روش ادیهای بزرگ، جریان‌هایی که ایجاد آن از نظر آزمایشگاهی مشکل است از قبیل، جریان مغشوش با دوران و یا جریان قابل تراکم مغشوش، را می‌توان ایجاد و مورد بررسی قرار داد.
- د :** با استفاده از نتایج حاصل از روش ادیهای بزرگ برای بسک میدان جریان مشخص، می‌توان ساختمان جریان مغشوش را به تصویر کشید و از آن فیلم تهیه نمود. فیلم‌های تهیه شده در این مورد که جریان مغشوش سیال را با استفاده از روش ادیهای بزرگ نشان می‌دهد، با نتایج حاصل از طریق آزمایش مشابه‌اند.
- ه :** روش ادیهای بزرگ نیاز به کامپیوترهای بزرگ و وقت زیاد کامپیوتر دارد. هر چند برای جریان‌های ساده (مثل جریان ایزوتروپیک) در ظرف چند دقیقه می‌توان به نتیجه رسید، ولی برای جریان‌های پیچیده تر نیاز به ساعتها وقت کامپیوتر دارد.
- و :** ساختمان ادیها در جریان سیال بستگی به عدد رینولدز دارد. لذا نمی‌توان از اصل تشابه در بدست آوردن نتایج حاصل از جریان با یک عدد رینولدز برای عدد رینولدز دیگر استفاده نمود. از طرفی در اعداد رینولدز بالاتر، بعلاوه وسعت تر شدن محدود اندازه ادیها، ابعا دمسئله بزرگتر شده و نیاز به وقت کامپیوتر دارد. همچنین مدل‌های موجود برای SGS در جریان‌های بارینولدز پائین ترا صدق است و لازم است مدل‌های بهتری برای

جریان با اعداد رینولدز بالا بدست آورد.

در مورد کاهائی که در آینده در رابطه با روش ادیهای بزرگ بایستی انجام شود مسیرهای متعددی وجود دارد. در حال حاضر گروههای متعددی روی این موضوع کار می‌کنند و تعداد آنها روبه‌فزونی است. لذا انتظار می‌رود موضوع در آینده با رشد بیشتری دنبال گردد. البته پیش بینی آینده مشکل می‌باشد. ولی انتظار می‌رود در آینده نزدیک کارهای زیر انجام پذیرد:

- الف: تاکنون روش ادیهای بزرگ برای برخی از جریانهای ساده نظیر جریان ایزوتروپیک، جریانهای همگن، جریان با دوران و جریان در کانال مستقیم، مورد بررسی قرار گرفته است. لازم است روش مذکور برای جریانهای پیچیده‌تر نیز مورد استفاده قرار گیرد. این جریانها عبارتند از: جریان جت آزاد، اختلاف دو جریان موازی، جریان با هندسه پیچیده‌تر و نیز اثر تراکم پذیری و انتقال حرارت و یا انتقال جرم (مخلوط شدن دو یا چند ماده) در جریانهای مطالعه شده قبلی.
- ب: کار بیشتری روی جریان نزدیک دیواره با استفاده از شرایط مرزی مناسبتر.
- ج: استفاده از نتایج حاصل از روش ادیهای بزرگ برای مشاهده جزئیات جریان، مدل کردن اعتشاشات در جریان و نیز تست و ارزیابی مدل‌های قدیمی.
- د: مدل‌های موجود برای SGS ضعیف بوده و لازم است کار وسیعی در این زمینه صورت گیرد.
- ه: با استفاده از روش ادیهای بزرگ میتوان برخی از پدیده‌های جریان را بررسی نمود. این پدیده‌ها عبارتند از بررسی صدا در جریان، احتراق و غیره.



مراجع

1. Reynolds, O., "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the laws of resistance in parallel channels," Trans. Roy. Soc. London, Vol. 174, 1883.
2. White, F. M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, N. Y., 1974.
3. Kline, S. J., Morkovin M. V., Sovran, G., Cockrell D. J., "Computation of turbulent boundary layers" AFOSR-IFR-STANFORD CONFERENCE, VI 12, 1968.
4. Smagorinsky, J., "General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment," Mon. Wea. Rev., pp 91, 99, 1983.
5. Deardorff, J. W., "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number," J. Fluid Mech., 41, pp 425-480, 1970.
6. Schumann, U., "Results of a numerical simulation of turbulent channel flows," in Int'l. Meeting on Reactor Heat Transfer (M. Dalle-Donne, ed.), pp230-251, 1973.
7. Grotzbach, G., Direct Numerical Simulation of Secondary Currents in Turblent Channel Flows, Lect. Notes in phys. ., 76, pp 308-319, Springer Verlag 1978.

8. Kwak, D., "3-D time dependent computation of turbulent flows, " ph. D. Dissertation, M. W. Dept., Stanford Univ., 1975
9. Shaunan, S., "Numerical simulation of turbulence in the presence of shear, " Ph. D. Dissertation, M. E. Dept., Stanford Univ., 1975.
10. Mansour, N. N., Moin, p., Reynolds, W. C., Ferziger J. J., "Improved methods for large eddy simulation of turbulence, "proc. Symp. on Turbulent Shear Flows, Penn. State Univ., 1977.
11. Cain, A. B., Reynolds, W. C. Ferziger, J. H. "Simulation of the transition and early turbulence regions of a mixing layer," Report TF-14, M. E. Dept., Stanford Univ., Stanford, CA., 1981.
12. Moin, P., Reynolds, W. C. Ferziger, J. H. "Large eddy simulation of an incompressible turbulent channel flow, "Report TF-12, M. E. Dept Stanford, CA., 1978.
13. Clark, R. A. Ferziger J. H. Reynolds, W. C. "Evaluation of subgrid scale turbulence Models using a fully simulated turbulent flow," J. Fluid . 91, 92, 1979 .
14. Mcmillan, O. J., Ferziger J. H., "Direct testing of subgrid scale models, "AIAA Journal, 17, 1340, 1979.

15. Bardina, J., Ferziger, J. H. Reynolds, W. C. "Improved subgrid scale models for large eddy simulation," AIAA paper 80-1357, 1980.
16. Shirani, E., "Mixing of a passive scalar in isotropic and sheared homogeneous turbulence," Ph. D. Dissertation, M. E. Dept., Stanford Univ., 1981.
17. Leslie, D. C., Quarini, G. L. "The Application of turbulence theory to the formulation of subgrid modeling procedures," J. Fluid Mech., 91, 65, 1970.
18. Leonard, A., "Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows," Adv. in geophysics, 18A, 237, 1974.
19. Antonopoulos-Domis, M., "Large eddy simulation of the decay of a passive scalar in isotropic turbulence," J. Fluid Mech., 104, 55. 1981.
20. Brigham, E. O., The Fast Fourier Transform, prentice - Hall Inc., New Jersey, 1974.