تعیین تحلیلی عددنوسلت دردهانه ورودی مجاری

سعید مرتضوی ـ علی‌اصغر رستمی

دانشگاه صنعتی اصفهان ـ دانشکده مکانیک

مقدمه

مبدلهای حرارتی عموما" از تعدادی مجاری جریان تشکیل میشوندکه سیال درداخل آنها حرکت میکند. ودرواقع ضریب اصطکاک وضریب انتقال حرارت جابجائی درطول مجرای جریان تغییرمیکند. ولی طراحان مبدلهای حرارتی معمولا" از یک ضریب متوسط استفاده میکنند. درمواردی که نسبت طول مجرا به قطرهیدرولیکی آن بزرگ باشدمیتوان جریان را ازلحاظ هیدرودینامیکی وحرارتی توسعه یافته فرض نمودواز یک ضریب انتقال حرارت ثابت استفاده نمود. اما چنانچه این نسبت کوچک باشد، تغییرات ضریب انتقال حرارت در طول مجرا بایستی درنظرگرفته شودوخطای ناشی از چشم پوشی از این تغییرات گاهی اوقات قابل ملاحظه خواهدبود. ضمنا" درمبدلهای حرارتی فشرده (Compact) دربسیاری ازمواردبواسطه کوچکی قطر هیدرولیکی مجرا، جریان آرام خواهدبود.

مسئله انتقال حرارت جابجائی برای جریان آرام دردهانه ورودی مجاری باتوجه به نوع جریان ازنظرتوسعه یافته ویا درحال توسعه بودن توسط بسیاری ازمحققین بطرق مختلف موردبررسی قرار گرفته است. نشانداده شده که خواص فیزیکی سیال، بویژه عددپراندل (Pr)درشدلایه مرزی هیدرودینامیکی وحرارتی دردهانه ورودی تاثیر دارد. برای توضیح این مطلب سیالی با عددپراندل (Pr) نسبتا" زیاد را درنظربگیرید. با توجه به اینکه برای این نوع سیال دیفیوژن ممنتوم بسیاربیشترازدیفیوژن حرارت میباشد، سیال ازنظر هیدرودینامیکی نسبت به حرارتی دردهانه ورودی بسیارسریع‌ترتوسعه یافته خواهدشد. وتوزیع سرعت شکل ثابتی رااختیارخواهدنمود. و بنابراین برای این نوع سیال درقسمت اعظم مجرا، جریان ازلحاظ

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

هیدرودینامیکی توسعه یافته خواهد بود و میتوان اثر جزئی ابتدائی دهانه ورودی را صرفنظر نمود. این نوع جریان (جریان درحال توسعه حرارتی وتوسعه یافته هیدرودینامیکی) اولین بار توسط گراتز (Graetz) درسال ۱۸۸۳ برای دهانه ورودی لوله بررسی شده است و به مسئله گراتز معروف است . وی از روش جدا کردن متغیرها (Separation of Variables) برای حل معادلهٔ انرژی استفاده کرد. نتیجهٔ بدست آمده بصورت یک سری نامحدود که شامل مقادیر بردارهای مشخصه وثابتهائی میباشد ظاهر میشود. با این روش مسئله فوق برای دهانه ورودی لوله ، دوصفحهٔ موازی، مجاری با مقطع مثلثی وبیضوی وجریان بین دولولهٔ هم محورحل شده است.[۱]

کاربردعملی این مسئله درمبدلهای حرارتی مثل کندانسورها واواپراتورها برای سیالهائی با عددپراندل حدوداً "بزرگتر از" ۵ " میباشد.

اشکال عمدهٔ حل سری نامحدود که با این روش بدست میآید، عدم همگرائی آن درفواصل نزدیک به دهانهٔ ورودی است. مثلاً در $x^*<10^{-4}$ تعداد[۱] "۱۲۰" جمله از سری مذکور دقت مناسب را بدست نمیدهد.[۱]

برای جبران نارسائی مذکور، لوک (Leveque) حل تقریبی را بروش تشابهی (Similarity Solution) ارائه نموده، که درفواصل نزدیک به دهانه یعنی حدودی که سری گراتز همگرائی لازم را ندارد، جواب بسیار مناسبی را بدست میدهد،[۲].

برای جریان سیالاتی با عددپراندل حدود یک ویا بیشتر (ونه خیلی زیاد) مثل هوا مسئله قدری پیچیده تر است. دراین حالت دیگر فرض توزیع سرعت توسعه یافته مناسب نیست. به عبارت دیگر در دهانه

---

۱ - فهرست علائم درانتهای مقاله آمده است

ورودی مجرا گسترش همزمان سرعت ودرجه حرارت وجوددارد ولایه مرزی حرارتی وهیدرودینامیکی همزمان درحال رشدهستند (Simultaneously Developing Flow) . برای حل این مسئله میبایست معادلات دیفرانسیل ممنتوم وانرژی رادردهانه ورودی تواماً حل نمود . بعبارتی دیگربرای حل معادلة انرژی دردهانه ورودی احتیاج به توزیع سرعت دردهانه ورودی است که خوداز حل معادله ممنتوم دردهانه ورودی بدست می آید .

برای حل معادله ممنتوم دردهانه ورودی روشهای متفاوتی وجوددارد . درروش انتگرالی که ازمعادلات انتگرالی ممنتوم و پیوستگی استفاده میشود ،توزیع سرعت درلایه مرزی بوسیلهٔ یک چند جمله ای که تابعی ازضخامت لایه مرزی (δ) میباشد ،حدس زده میشود. همچنین ازمعادله برنولی درروی محورلوله که جریان غیرلزج است استفاده میشود .این روش اولین باربوسیله Schiller [۳] برای جریان داخل لوله ودوصفحهٔ موازی مورداستفاده قرارگرفت . روش دیگرکه به روش خطی کردن معادلات مرسوم است ، این است که جملهٔ مربوط به اینرسی درمعادلهٔ دیفرانسیل ممنتوم که غیرخطی است بصورت یک تابعی اختیاری درنظرگرفته میشودکه به این ترتیب معادله دیفرانسیل ممنتوم بفرم خطی تبدیل میشود .

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\beta^{2}(x)\,u$$

که درآن β تابعی از x است . این معادله با شرایط مرزی واولیه مشخص حل شده و $\frac{u}{U}$ بصورت تابعی از y و β بدست میآید ،سپس β بصورت ذیل محاسبه میگردد : (a) معادله ممنتوم وپیوستگی روی سطح مقطع جریان انتگرال گرفته شده ودرهم ادغام میشوند .(b) معادله ممنتوم راروی محورلوله نوشته وازرا (a) کم میکنیم که در نتیجه جملهٔ گرادیان فشارحذف میگردد . (c)با قراردادپروفیل سرعت بدست آمده ازحل معادله بالا رابطه ای بین β و x بدست میآید و نهایتاً افت فشارازمعادلهٔ ممنتوم روی محورلوله محاسبه میگردد .

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

این روش اولین بار بوسیلهٔ Langhaar بکار برده شده است،[۴].
Sparrow نیز معادله ممنتوم را به ترتیب زیر خطی نموده است،[۴]:

$$\varepsilon(x)\,\bar{U}\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda(x) + \nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right\}$$

که در آن $\Lambda(x)$ مربوط به جمله $g_c \frac{dp}{dx}/\rho$ وجمله دیگر اینرسی است. او گرادیان فشار را از معادلهٔ ممنتوم و معادله انرژی مکانیکی برابر قرار داده و $\varepsilon(x)$ را از این طریق محاسبه کرده است. این روش خطی کردن برای مجاری که پروفیل سرعت فقط بستگی به یک متغیر دارد مثل لوله، دو صفحه موازی ویا جریان بین دو لوله بکار رفته است برای حل معادله انرژی در دهانهٔ ورودی برای جریان در حال توسعه همزمان با توجه به خطی که برای مسئله هیدرودینامیکی در دهانه ورودی درنظر گرفته میشود، از روشهای نیمه عددی ویا کاملاً عددی استفاده شده است. کیز (Kays) که از روش نیمه عددی برای حل معادله انرژی استفاده کرده، توزیع سرعتی را که با استفاده از روی خطی کردن معادله ممنتوم که توسط Langhaar [۴] بدست آمده در معادلهٔ انرژی بکار برده وسپس توزیع درجه حرارت را از حل معادله انرژی به روش عددی محاسبه کرده است. وی که این عمل را برای سیال با عدد پراندل Pr=0.7 انجام داده است، [۵]، مولفهٔ سرعت شعاعی را در دهانه ورودی درنظر نگرفته است که درنتیجه عدد نوسلت بدست آمده از این روش دارای تقریب اضافی نسبت به روشهای دقیق ترخواهد بود. Goldberg، حل کیز را برای اعداد پراندل از ۰/۵ تا ۵ توسعه داده است که نتایج آن در مرجع [۶] موجود میباشد.

Schmitz و Ulrichson حل کیز را با درنظر گرفتن توزیع سرعت محوری بوسیله Langhaar وهمچنین مولفهٔ سرعت شعاعی بدست آمده از معادله پیوستگی تکمیل نمودند، [۷]. حل مذکور برای جریان درحال توسعه همزمان به روش Finite Difference برای عدد پراندل 0.7 بدست آمده است. اثر مولفهٔ شعاعی سرعت که درحل کیز درنظر گرفته نشده، فقط درمحدودهٔ $x^* < ۰/۰۴$ ظاهر میگردد. در این محدوده عدد

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

نوسلت موضعی بدست آمده توسط آنان کمتر از مقدار بدست آمده توسط کیز میباشد .

در روش کاملا" عددی توزیع سرعت و درجه حرارت هردو از حل عددی معادلات مننتوم و انرژی بدست میآیند .مسئله حرارتی دهانه ورودی با این روش بوسیله Hornbeck [۸] برای لوله وهمچنین بوسیله Hwang و Fan [۹] برای دوصفحهٔ موازی حل شده است .

نتایج بدست آمده تاکنون برای این نوع جریان به روشهای فوق بصورت نتایج عددی ویا بصورت منحنی بوده وهیچگونه رابطهٔ تحلیلی که مشخصا "عددنوسلت را در دهانه ورودی بصورت تابعی از مختصات محوری مجرا وخواص سیال پیش بینی کند ،بدست نمیدهد .

دربررسی حاضر ،گسترش همزمان پروفیل سرعت ودرجه حرارت در دهانه ورودی جریان بین دوصفحهٔ موازی برای سیال غیرقابل تراکم باخواص فیزیکی ثابت باعددپراندل حدودیک ویا بزرگتر از یک مطالعه شده است . روش حل Leveque که برای فواصل نسبتا "کم ازدهانه ورودی مناسب میباشد ،برای جریان درحال توسعه همزمان تکمیل شده وسپس رابطهٔ تحلیلی برای عددنوسلت موضعی وعددنوسلت متوسط برای این نوع جریان بدست آمده است .نتیجه بدست آمده برای عدد نوسلت به این روش،تا ناحیه ای که توزیع سرعت توسعه یافته میشود و حتی بعداز آن نتیجهٔ نسبتا "دقیقی برای عددنوسلت ارائه میدهد .

همچنین نتیجه بدست آمده برای جریان داخل لوله نیزقابل استفاده خواهدبود .وبا توجه به فرضیات بکاررفته درروش Leveque یعنی صرف نظرکردن ازانحناءدرفواصل نزدیک به دهانه ،میتوان با تقریب نسبتا "خوب ضریب انتقال حرارت دردهانه ورودی را نیز پیش بینی نمود .

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

تجزیه و تحلیل

(a) جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی در دهانه ورودی:

همانطورکه قبلاً اشاره شد برای $x^* < 10^{-4}$ تعداد ۱۲۱ جمله از سری گراتز نیز جواب مناسبی برای عدد نوسلت بدست نمیدهد.

Leveque در مرجع [۴] این مسئله را با استفاده از تقریب دو صفحه موازی در دهانه ورودی حل نموده است.

Leveque فرض نمود در فواصل خیلی نزدیک به نقطه ای که شرط مرزی حرارتی اعمال میگردد، چون ضخامت لایه مرزی حرارتی بسیار کم است، توزیع سرعت درداخل لایه مرزی حرارتی خطی است.

بعبارت دیگر:

$$u = Cy$$

$$\tau_\omega = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \mu C$$

$$C = \tau_\omega/\mu \qquad u = \frac{\tau_\omega}{\mu} y$$

با توجه به پروفیل سرعت توسعه یافته، تنش برشی ودرنتیجه C مقادیرثابتی هستند. درنتیجه معادله انرژی بصورت زیردرمیآید:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\frac{C}{\alpha}\right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

معادله فوق به روش حل تشابهی قابل حل است. برای اینکه شرایط روش حل تشابهی ارضاء شود، بایستی یکی از ابعاد بسمت بینهایت میل کند. این شرط باین ترتیب اعمال میشود که درفواصل دور از سطح درجه حرارت سیال به درجه حرارت سیال ورودی میرسد. بنابراین شرط تقارن درروی محورمجرا به $T=T_i$ ناحیه دوراز دیواره تبدیل میشود.

با این فرضیات Leveque حل زیر را برای دهانهٔ ورودی لوله بدست

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

آورد :

$$\theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_i} = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^{\eta} \exp(-\sigma^3)\, d\sigma \quad , \quad \eta = y\left(\frac{C}{9\,\alpha x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

دررابطهٔ فوق η متغیرتشابه و δ یک متغیر dummy است .
مانندحل سری گراتز ، جواب Leveque نیزبرای توزیع درجه حرارت وعددنوسلت بصورت تابعی ازکمیت بدون بعد x^* بدست میاید .
Mercer - Worsϕe - Schmidt [۱۰]، Newman [۲]، حل Leveque را برای مقادیرمتوسط (نه خیلی کم) x^* یعنی حدودی که نه حل گراتزونه حل Leveque صحیح است ، تکمیل نمودند .حل تکمیل شدهٔ Leveque

$$\theta\,(\zeta, \eta) = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \sum_{n=0}^{N} \zeta^n \theta_n(\eta) \quad , \quad \zeta = (9\,x^*)^{\frac{1}{3}}$$

$$\eta = y\left(\frac{C}{9\alpha x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

معادله قبلی درحل Leveque جملهٔ اول این سری است .

(b) جریان درحال توسعه حرارتی وهیدرودینامیکی (Simultaneously Developing Flow) :

ابتدا حالتی را درنظربگیریدکه از v درمعادله انرژی صرفنظرشود .درحل (a) پروفیل سرعت توسعه یافته درنظرگرفته شده ولی دراینجا تنش برشی را تابعی از x درنظرمیگیریم وبا این عمل درواقع پروفیل سرعت رادرحال توسعه فرض میکنیم :

$$u = \frac{\tau_\omega(x)}{\mu}\, y$$

با اینحال ازمولفهٔ سرعت درجهت y درمعادله دیفرانسیل انرژی صرفنظر میکنیم درنتیجه :

$$\frac{\tau_\omega(x)}{\mu\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

با انتخاب متغیرجدید s به ترتیب زیرفرم معادله انرژی به حالت (a) تبدیل میشود :

$$ds = \frac{\mu\alpha}{\tau_w(x)} dx \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

که از حل این معادله به روش تشابهی توزیع درجه حرارت وعددنوسلت بدست میآید :

$$\Theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_i} = \frac{1}{0.893} \int_0^{\omega} \exp(-\omega^3)\, d\omega \quad , \quad \omega = \frac{y}{(9s)^{\frac{1}{3}}}$$

$$Nu_x = \frac{x}{0.893} \left(\frac{1}{9s}\right)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad s = \mu\alpha \int_0^x \frac{dx}{\tau_\omega(x)}$$

بنابراین با داشتن توزیع تنش برش ازهیدرودینامیک مسئله در دهانه ورودی میتوان عددنوسلت را محاسبه نمود .

عددنوسلت دراین حالت برخلاف حالت (a) بصورت تابعی ازدو متغییر x^* وعددپراندل Pr بدست میآید .وبنابراین عددپراندل Pr مستقلا" درجواب مسئله اهمیت پیدا میکند .اصولا" برای جریان در حال توسعه همزمان حرارتی وهیدرودینامیکی عددنوسلت تابعی از x^* و Pr هردومیباشد .

(c) جریان درحال توسعه حرارتی وهیدرودینامیکی با فرض $v \neq 0$ در فواصل نزدیک به دهانه :

این بخش شامل حل نسبتا" دقیق معادله انرژی برای جریان سیال آرام ،غیرقابل تراکم ،خواص فیزیکی ثابت بین دوصفحه موازی میباشند .که البته با صرفنظرکردن ازانحناء درفواصل نزدیک به دهانه با تقریب نسبتا" خوب برای لوله نیزصادق خواهدبود .درواقع هدف اصلی پیداکردن عددنوسلت درجریان درحال توسعه همزمان در دهانه ورودی با استفاده ازاین روش که مولفه سرعت درجهت y نیز

درمعادله انرژی منظور میشود ، میباشد .ازهدایت طولی وتلفات اصطکاکی ،کارجریان وتولیدانرژی حرارتی درسیال نیزصرفنظر میشود .

تنها تقریبی که دراین بخش بکا ربرده میشود ،خطی گرفتن پروفیل سرعت درفواصل نزدیک به دهانه است .این تقریب با توجه به بررسی هائی که روی نتایج بخش (a)و (b) انجام‌شده است بسیار مناسب است .

Worsφe - Schmidt [۱۰] حل Leveque را با درنظرگرفتن‌انحناء وپروفیل سرعت سهمی تکمیل نموده‌اند . درحالی که Nunge [۱۱]همین کا ررا با درنظرگرفتن‌انحناء وپروفیل سرعت خطی انجام‌داده است و نشان داده است تقریب پروفیل سرعت خطی درنزدیکی دیواره بسیار بجا ومناسب است .

معادلات انرژی وپیوستگی برای جریان درحال توسعه‌همزمان با درنظرگرفتن فرضیات گذشته‌عبارت است از :

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

این معادلات را میبایست به‌شکلی تبدیل نمودکه بتوان آنرا با روش حل تشابهی حل کرد ، (مانندبخشهای a و b) . به‌همین منظورازتبدیل ون مایزز (Von Mises Tarnsformation) ، [۱۲]استفاده میشود . در این تبدیل ازمتغیر ψ تابع جریان به‌جای مختصات y درمعادله انرژی استفاده میشود .بابکا ربردن این تبدیل (x,y → x, ψ) معادله انرژی بصورت زیردرمیآید :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}-v\dfrac{\partial}{\partial \psi}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}=u\dfrac{\partial}{\partial \psi}\end{cases} \qquad \begin{cases}u=\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\\[2mm] v=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \qquad (۲)$$

فرم معادله (۲) شبیه معادله انرژی بدست آمده از روش های (a) و (b) است . با توجه به فرض خطي بودن پروفیل سرعت و با استفاده از معادله پیوستگی u را بصورت تابعی از تنش برش و ψ بدست آورده و در رابطهٔ (۲) جایگزین نموده که نهایتاً "معادله زیر حاصل میگردد ، [۳؛۲] :

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \qquad (۳)$$

$$ds = \alpha \left(\frac{2 \tau_{\omega}(x)}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

معادله (۳) به روش تشابهی قابل حل است و با انتخاب متغیر تشابه مناسب تبدیل به معادلهٔ دیفرانسیل عادی میشود :

$$\eta = \psi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{9s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2 T}{d \eta^2} + 3 \eta^2 \frac{dT}{d\eta} = 0 \qquad (۴)$$

شرایط مرزی برای معادله (۴) عبارتند از :

$$y = 0 \quad , \quad T = T_0 \quad (\psi = 0 \quad , \quad \eta = 0)$$

$$y \to \infty \quad , \quad T = T_i \quad (\psi \to \infty \; , \; \eta \to \infty)$$

$$x = 0 \quad , \quad T = T_i \quad (s = 0 \quad , \quad \eta \to \infty)$$

معادله (۴) با شرایط مرزی فوق قابل حل است . توزیع درجه حرارت بصورت زیر حاصل میشود :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \frac{1}{0.893} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^3) \, d\eta \quad , \quad \eta = \psi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{9s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\psi = \frac{\tau_{\omega}(x)}{\mu} \quad \frac{y^2}{2}$$

$$ds = \alpha \left(\frac{2 \tau_{\omega}(x)}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

عددنوسلت موضعی (Nu_2) را میتوان با توجه به تعریف و با داشتن توزیع درجه حرارت محاسبه نمود :

$$Nu_2 = \frac{-(\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_0 - T_i} d \text{ ، } \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{T_i - T_0}{0.893} \left(\frac{\tau_\omega (x)}{2\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{9S}\right)^{\frac{1}{3}}$$

که پس ازجایگزاری وخلاصه نمودن :

$$Nu_2 = \frac{d\, \tau_\omega^{\frac{1}{2}} (x)}{0.893 \left(9 \alpha \mu \int_0^x \tau_\omega (x)^{\frac{1}{2}} dx\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad (۵)$$

همانطورکه دیده میشود ،عددنوسلت موضعی بصورت تابعی ازتنش برشی بدست آمده است .با داشتن توزیع تنش برشی از حل مسئلهء هیدرودینامیکی دردهانه ورودی عددنوسلت موضعی مشخصاً "بصورت تابعی از x^* وعددپراندل Pr دردهانه ورودی بدست خواهدآمد .

با انجام موازنه انرژی درجه حرارت متوسط وازآنجا عدد نوسلت موضعی Nu_1 وهمچنین عددنوسلت متوسط Nu_{1m} و Nu_{2m} محاسبه میشوند ، [۵]:

$$\theta_m = 1 - 4 \int_0^{x^*} Nu_2 \, dx^* \qquad (۶)$$

$$Nu_1 = \frac{Nu_2}{\theta_m} \qquad (۷)$$

$$Nu_{2m} = \frac{1}{4x^*} (1 - \theta_m) \qquad (۸)$$

$$Nu_{1m} = \frac{1}{4x^*} \ln\left(\frac{1}{\theta_m}\right) \qquad (۹)$$

(d) تنش برشی برای جریان بین دوصفحه موازی :

عددنوسلت درحل اخیرتابعی ازتنش برشی دردهانه ورودی است. بنابراین برای بدست آوردن جواب تحلیلی برای عددنوسلت باید

توزیع مناسب برای تنش برشی داشته باشیم که از طرفی از سادگی کافی برخوردار بوده و قابل انتگرال گیری باشد، (چون در رابطهٔ عددنوسلت به انتگرال تنش برشی نیاز است) و از طرف دیگر دقت لازم را نیز دارا باشد. تا جواب مناسبی برای عددنوسلت بدست آید. چون هرچه توزیع تنش برشی دقیقتر باشد، عددنوسلت نیز دقیقتر خواهد بود این مسئله بعداً "با اعمال توزیع تنش های برشی مختلف روشن خواهد شد.

برای حل مسئله هیدرودینامیکی در دهانه ورودی از روش انتگرالی با بکاربردن معادلات انتگرالی ممنتوم وپیوستگی استفاده میشود. مزیت این روش این است که رابطهٔ تحلیلی ومناسب با دقت خوب برای تنش برشی در دیواره از آن نتیجه میشود. روشهای دیگر مثل خطی کردن معادلات یا روشهای عددی دارای نتیجهٔ تحلیلی برای توزیع سرعت وتنش برشی نیستند.

معادلات انتگرالی ممنتوم وپیوستگی را میتوان با انتخاب حجم معیار دیفرانسیلی درلایه مرزی روی یک سطح ویا با انتگرال گرفتن از معادلات دیفرانسیل لایه مرزی بدست آورد. نتیجه معادله ممنتوم بصورت زیر میباشد:

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho} = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{d}{dx}(U_1^2\delta_2) + \delta_1 U_1 \frac{dU_1}{dx} \qquad (۱۲a)$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_1}\left(1 - \frac{u}{U_1}\right)dy \qquad (۱۲b)$$

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_1}\right)dy \qquad (۱۲c)$$

رابطهٔ دیگری نیز از بقای جرم بین U_1 ، δ ، $\overline{U}$ با گرفتن حجم معیاری در دهانه ورودی بدست میآید:

$$\overline{U}a = \int_0^\delta u\,dy + U_1(a-\delta)$$

$$a\left(1 - \frac{\overline{U}}{U_1}\right) - \delta_1 = 0 \qquad (۱۳)$$

سپس برطبق روش Karman - Pohlhausen توزیع سرعت را در داخل لایه مرزی بوسیله یک چندجمله ای از y (مثلا "درجه دوم یا سوم) که دارای ضرایبی که تابعی از x هستندبدست میآوریم ،وضرایب آنرا با اعمال شرایط مرزی دردیواره مجرا و مرزلایه ومعادلات (۱۲) و (۱۳) بدست میآوریم .

رابطهٔ ساده ومعمولی که غالبا "برای توزیع سرعت درلایه مرزی استفاده میشودپروفیل سرعت درجه دوم است :

$$u = U_1 \{ 2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2 \} \quad 0 < y < \delta \qquad (۱۴)$$

که شرایط مرزی زیررا ارضاء میکند :

$$u = 0 \quad , \quad y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad y = \delta$$

اما یک شرط مرزی راکه ازمعادله دیفرانسیل ممنتوم روی دیواره حاصل میشود ،ارضاء نمیکند :

$$\left(y = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

با قراردادن توزیع سرعت ازمعادله (۱۴) درمعادلات(۱۲)و(۱۳)نتایج زیربدست میآید :

$$\delta_1 = \frac{\delta}{3} \qquad \delta_2 = \frac{2}{15} \delta$$

$$(12a) \qquad 2\nu \frac{U_1}{\delta} = U_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{15}\delta\right) + \frac{2}{15}\delta \left(\frac{9}{2}\right) U_1 \frac{dU_1}{dx}$$

$$(13) \qquad \frac{\delta}{a} = 3 \left(1 - \frac{\bar{U}}{U_1} \right)$$

ونهایتا "درمعادله (۱۲)به جای δ ازمعادله (۱۳)قرارداده میشود :

$$dx = \frac{3}{10} \frac{a^2}{\nu} \frac{(U_1 - \bar{U})(9U_1 - 7\bar{U})}{U_1^2} dU_1 \qquad (۱۵)$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

فرم بدون بعد معادله (۱۵) عبارت است از :

$$dx^{+} = \frac{3}{160} \frac{(U_1^{*}-1)(9U_1^{*}-7)}{U_1^{*2}} dU_1^{*} \qquad (۱۶)$$

برای جریان توسعه یافته $U_1^{*}=1.5$ (چون $U_1 = 1.5\bar{U}$) است. بایستی متذکر شد که حل حاضر برای تغییرات سرعت بطوریکنواخت وآرام بسمت پروفیل سرعت توسعه یافته میل نمیکند، زیرا وقتی U_1^{*} به سمت 1.5 میل میکند، $\frac{dU_1^{*}}{dx}$ به سمت صفر میل نمیکند، درفواصل نزدیک به دهانه میتوان از تقریب زیر در معادله (۱۶) استفاده کرد :

$$U_1^{*2} \simeq 1. \qquad 9U_1^{*} - 7 \simeq 2.$$

$$U_1^{*} - 1 = \sqrt{\frac{160x^{+}}{3}} \qquad (۱۷)$$

همچنین با انتگرال گیری ازمعادله (۱۶) رابطهٔ بین x^{+} و U_1^{*} بدست میآیـــد :

$$x^{+} = \frac{3}{160}\left(9U_1^{*} - 16\ln U_1^{*} - \frac{7}{U_1^{*}} - 2\right) \qquad (۱۸)$$

تنش برشی با داشتن پروفیل سرعت ورابطهٔ بین δ و U_1^{*} بصورت تابعی از U_1^{*} محاسبه میشود :

$$\tau_\omega = \mu \frac{\partial u}{\partial Y}\Big|_{Y=0} = 2\mu \frac{U_1}{\delta} \quad , \quad (۱۳) \rightarrow \delta = 3a\left(1-\frac{\bar{U}}{U_1}\right) = 3a\left(1-\frac{1}{U_1^{*}}\right)$$

$$\tau_\omega = \frac{2\mu U_1}{3a\left(1-\frac{1}{U_1^{*}}\right)} \quad , \quad \tau_\omega = \frac{2\mu\bar{U}}{3a} \frac{U_1^{*2}}{(U_1^{*}-1)} \qquad (۱۹)$$

برای بدست آوردن توزیع تنش برشی برحسب x^{*} میبایست U_1^{*} را بـــر

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

حسب x^+ بدست آوریم. اما با توجه به معادله (۱۸) این کار امکان پذیر نیست. بنابراین معادلات زیر مجموعاً "توزیع تنش برشی را در دهانه ورودی برحسب x^+ ارائه میدهند:

$$\tau_\omega = \frac{2\mu\bar{U}}{3a} \frac{U_1^{*2}}{U_1^* - 1}$$
$$x^+ = \frac{3}{160}\left(9U_1^* - 16\ln U_1^* - \frac{7}{U_1^*} - 2\right) \qquad (۲۰)$$

ولی اگر از معادله (۱۷) یعنی حل تقریبی برای U_1^* استفاده شود تنش برشی مستقیماً "بصورت تابعی از x^+ بدست میآید:

$$\tau_\omega = \frac{2\mu\bar{U}}{3a} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{160}{3}x^+}\right)^2}{\sqrt{\frac{160}{3}x^+}} \qquad (۲۱)$$

که البته این توزیع تنش برشی دقت معادله (۲۰) را دارا نیست:

(e) عددنوسلت برای جریان بین دوصفحهٔ موازی:

رابطهٔ بدست آمده برای عددنوسلت دربخش (c) یعنی معادله (۵) تابع حساسی از تنش برشی بوده ودقت آن بستگی به رابطهٔ توزیع تنش برشی دردهانه ورودی دارد. بنابراین با توجه به روابط بدست آمده برای توزیع تنش برشی دردهانه ورودی یعنی معادلات (۲۰) و (۲۱) ، عددنوسلت مربوطه را محاسبه نموده وسپس با نتایج بدست آمده از روشهای عددی ویا روشهای دیگرکه دیگران بدستآورده‌اند ونتایج آنها بصورت منحنی رسم شده است ، مقایسه مینمائیم. تابع توزیع تنش برشی از معادله (۲۱) عبارت است:

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

$$\tau_\omega = \frac{8\,\mu\,\overline{U}}{3d}\;\frac{\left(1+\sqrt{\frac{160}{3}\,x^{+}}\right)^2}{\sqrt{\frac{160}{3}\,x^{+}}}$$

عددنوسلت بدست آمده با استفاده از معادله (۵) :

$$Nu_{\circ} = 0.242\;\frac{\left(1+\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}}\,Pr^{\frac{1}{2}}\,x^{*\frac{1}{2}}\right)}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}}\,Pr^{\frac{1}{2}}\,x^{*\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\;x^{*-\frac{1}{2}}\;Pr^{-\frac{1}{6}} \qquad (۲۲)$$

همانطورکه از معادله (۲۲)دیده میشودعددنوسلت مشخصاً"بصورت تابعی از x^* وعددپراندل بدست آمده است .معادله دیگربرای توزیع تنش برشی رابطهٔ (۲۰)است .اگرچه دقت این رابطه ازرابطهٔ قبلی یعنی (۲۱) بیشتراست، امادراین معادله تنش برشی تابعی از U_1^* است وعددنوسلت نیزبصورت تابعی از U_1^* بدست میآید .که البته رابطهٔ بین U_1^* و x^+ مشخص ومعلوم است .ابتداانتگرال زیرراکه دررابطهٔ عددنوسلت لازم است ، محاسبه میکنیم :

$$I = \int_0^x \tau_\omega^{\frac{1}{2}}(x)\,dx = d.Re\int_0^{U_1^*} \tau_\omega(U_1^*)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dx^+}{dU_1^*}\,dU_1^*$$

$$\tau_\omega = \frac{8\,\mu\,\overline{U}}{3a}\;\frac{U_1^{*2}}{U_1^*-1}$$

$$I = d.Re\,\sqrt{\frac{8\,\mu\,\overline{U}}{3d}}\;\frac{3}{160}\left\{6(U_1^*-1)^{\frac{3}{2}}-14(U_1^*-1)^{\frac{1}{2}}+14\tan^{-1}\sqrt{U_1^*-1}\right\}$$

با قراردادن این نتیجه درمعادله (۵)وخلاصه نمودن، نتیجه نهائی

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

برای عددنوسلت بصورت زیربدست میآیــد :

$$Nu_2 = 2.23 \frac{U_1^* Pr^{\frac{1}{3}}}{(U_1^*-1)^{\frac{1}{2}} \{3(U_1^*-1)^{\frac{3}{2}} - 7(U_1^*-1)^{\frac{1}{2}} + 7\tan^{-1}\sqrt{U_1^*-1}\}^{\frac{1}{3}}}$$

$$x^* = \frac{3}{160Pr}\left(9U_1^* - 16\ln U_1^* - \frac{7}{U_1^*} - 2\right) \qquad (۲۳)$$

معادله (۲۳) با دقت بسیار خوب عددنوسلت را دردهانه ورودی برای جریان درحال توسعه همزمان بدست میدهد . اما همانطورکه دیــده میشود ،عددنوسلت مستقیما "بصورت تابعی از x^* و Pr بدست نیامــده است .این معادله درواقع دقیقترین رابطه تحلیلی برای عــدد نوسلت با استفاده از روش بخش (c) میباشد .برای اینکه عددنوسلت را درمعادله (۲۳) بصورت تابعی از x^* و Pr بدست آوریم میتوان در نتیجه نهائی برای عددنوسلت که برحسب تابعی از U_1^* بدست آمـده از رابطه تقریبی (۱۷) استفاده کرد :

$$U_1^* - 1 = \sqrt{\frac{160x^+}{3}} = \sqrt{\frac{160\ x^* Pr}{3}}$$

با قراردادن این رابطه به جای U_1^* درمعادله (۲۳) داریم :

$$Nu_2 = 2.23 \frac{(1+\xi^2) Pr^{\frac{1}{3}}}{\xi\{3\xi^3 - 7\xi + 7\tan^{-1}\xi\}^{\frac{1}{3}}}, \quad \xi = \left(\frac{160x^*\ Pr}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (۲۴)$$

اختلاف درمعادله (۲۲) و (۲۴) این است که درمعادله (۲۲) ازابتــدا رابطه تنش برشی را با معادله (۱۷) تقریب زدیم ،ولی درمعادله (۲۴) بعدازانتگرال گیری ازتنش برشی ودرنتیجه نهائی برای عددنوسلت این تقریب رابکاربردیم . معادله (۲۴) ازطرفی دارای دقت بسیار خوب است (تقریبا "نزدیک به معادله (۲۳))وازطرفی نیــــز

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

عددنوسلت مستقیما "بصورت تابعی از x^* و Pr بدست آمـــده است . بنا براین نسبت به معادله (۲۳) ارجحیت دارد .

(f) محاسبه θ_m و عددنوسلت متوسط :

برای محاسبهٔ عددنوسلت متوسط ، ابتدا باید θ_m را از معادله (۶) بدست آوریم . انتگرال گیری ازعددنوسلت موضعی بجزدرموردمعادله (۲۲)بطریق تحلیلی امکان پذیرنیست .بنا براین درموردمعادلـه (۲۲) با انتگرال گرفتن ازآن ومحاسبه θ_m میتوان برای عــــدد نوسلت متوسط نیزنتیجهٔ تحلیلی بدست آورد . که درواقع نتیجـــه تحلیلی برای عددنوسلت متوسط بزرگترین مزیت این رابطه نسبت به روابط دیگراست . والبته دقت خوبی رانیزدارا میباشـــــد . درمـــــوردمعادلهٔ (۲۴) بایستـی θ_m را با انتگرال گیری عددی ازآن بدست آورد .

برای محاسبه θ_m از معادلهٔ (۲۲) داریم :

$$Nu_2 = 0.242 \frac{\left(1+\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^{*\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5} \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^{*\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} x^{*-\frac{1}{2}} Pr^{-\frac{1}{6}} \qquad (۲۲)$$

یا :

$$Nu_2 = \left(\frac{160}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{0.893} \left(\frac{8}{3\times 36}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1+g)\, Pr^{\frac{1}{3}}}{g\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}g\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$g = \left(\frac{160}{3} x^* Pr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_m = 1-4\int_0^{x^*} Nu_2\, dx^*$$

بعدا زانتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\theta_m=1-\frac{3}{20}\left(\frac{160}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5}{.893}\right)\left(\frac{8}{3\times 36}\right)^{\frac{1}{3}}Pr^{-\frac{2}{3}}\left\{3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}g\right)^{\frac{5}{3}}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}g\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

یا

$$\theta_m=1-1.3276944\,Pr^{-\frac{2}{3}}\left\{3t^5-t^2\right\} \qquad (۲۵)$$

که درآن

$$t=\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{160}{3}x^*Pr\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

درنتیجه

$$Nu_{1m}=\frac{1}{4x^*}\ln\left\{1-1.3276944\,Pr^{-\frac{2}{3}}(3t^5-t^2)\right\}^{-1} \qquad (۲۶a)$$

$$Nu_{2m}=\frac{1}{4x^*}\left\{1.3276944\,Pr^{-\frac{2}{3}}(3t^5-t^2)\right\} \qquad (۲۶b)$$

$$t=\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{160}{3}x^*Pr\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

نکته قابل توجه درمعادلات (۲۵)و (۲۶) این است که چون درفواصل نزدیک به دهانه مقدار θ_m بسیار نزدیک به یک میباشد و از طرفی عدد نوسلت متوسط تابع بسیار حساسی از θ_m است ، لذا درمحاسبه عدد نوسلت متوسط ازمعادله (۲۶)، θ_m را میبایست با دقت بسیار زیاد محاسبه نمود .

مراتب فوق را عینا "میتوان برای پروفیل سرعت درجه سوم به جای پروفیل درجه دو برای توزیع تنش برشی که از حل هیدرودینامیک مسئله بدست میآید تکرار نمود :

$$u=U_1\left\{\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\}$$

دراین حالت نیزیکی ازشرایط مرزی که ازمعادله دیفرانسیل ممنتوم روی دیواره حاصل میشود، ارضاء نمیشود.

نتیجهٔ حاصله برای عددنوسلت موضعی ومتوسط با درنظرگرفتن توزیع سرعت درجه سوم عبارت است از:

$$Nu_2 = 4.7999 \frac{(1+f^4)\ Pr^{\frac{1}{3}}}{f\left(\frac{122}{3}f^3 - 96f + 96\tan^{-1}f\right)^{\frac{1}{3}}} \text{ و } f = \left(\frac{630}{13} x^* Pr\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (۲۹)$$

$$\theta_m = 1 - 0.3461043\ Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2(1+f^2)\ df}{\left(\frac{61}{144}f^3 - f + \tan^{-1} f\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad (۳۰)$$

$$Nu_{1m} = \frac{1}{4x^*} \ln\left\{1 - 0.3461043\ Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2(1+f^2)\,df}{\left(\frac{61}{144}f^3 - f + \tan^{-1} f\right)^{\frac{1}{3}}}\right\}^{-1} \qquad (۳۱a)$$

$$Nu_{2m} = \frac{1}{4x^*} \left\{0.3461043\ Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2(1+f^2)\,df}{\left(\frac{61}{144}f^3 - f + \tan^{-1} f\right)^{\frac{1}{3}}}\right\} \qquad (۳۱b)$$

بحث ونتیجه‌گیری :

عددنوسلت متوسط برای دوصفحهٔ موازی (Nu_{1m}) با استفاده ازمعادله(۲۶) که بهترین نتیجه را بدست میدهدوبصورت رابطهٔ

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

تحلیلی میباشد . برای اعداد پراندل 0.7 , 50,10 بصورت تابعی از x^* درشکلهای ۱و۲و۳ رسم شده اندوهمانطورکه دیده میشودتطبیق بسیارخوبی با نتایج عددی که ازحل عددی معادلات ممنتوم وانرژی بدست میآیدودرمرجع [۹] بوسیله Fan و Hwang انجام شده دارد.

چون برای عددنوسلت موضعی برای دوصفحهٔ موازی نتیجه ای چه بصورت رابطهٔ تحلیلی وچه بصورت ترسیمی موجودنبوده است ، معادلات بدست آمده ،برای عددنوسلت موضعی یعنی (۲۲)، (۲۴)،(۲۹) برای دوصفحهٔ موازی رسم نشده اند .برای جریان دردهانه ورودی لوله عددنوسلت موضعی با استفاده ازرابطهٔ (۲۹)که ازتوزیع سرعت درجه سوم بدست آمده وتطبیق بهتری بانتایج لوله دارد،برای اعداد پراندل 0.7, 2, 5 درشکلهای ۴و ۵و ۶ بانتایج موجودبرای لوله دردهانه ورودی مقایسه شده است .البته چون نتایج بدست آمده ازحل عددی عددنوسلت موضعی دردهانه ورودی لوله براساس Nu_1 بوده است، عددنوسلت موضعی بدست آمده ازمعادله (۲۹) بر θ_m تقسیم شده تا با توجه به معادله (۷) عددنوسلت موضعی Nu_1 بدست آید .

توزیع دقیق تنش برشی (معادله ۲۰) با توزیع تقریبی تنش برشی (معادله ۲۱) دردهانه ورودی درشکل ۷ با یکدیگرمقایسه شده است .همانطورکه دیده میشود ،نتیجه بدست آمده ازمعادله (۲۱)بسیار نزدیک به نتایج حاصله ازتوزیع دقیق بوده وتاحدودی که جریان توسعه یافته میشود ($U_1^* = 1.5$) ازتقریب نسبتا "خوبی برخوردار است.البته ازتوزیع تنش برشی تقریبی یعنی معادله (۲۱)درمعادله (۲۲) استفاده شده است .

خلاصه نتایج بدست آمده برای عددنوسلت موضعی Nu_2 با توجه به تقریبهای بکاررفته ،ازجمله درتوزیع سرعت وتنش برشی وهمچنین حدودی از x^* و Pr که قابل استفاده هستند ،درجدول(۱)مندرج شده است.

همانطورکه درمنحنیهای رسم شده برای اعدادنوسلت متوسط بر حسب x^* دیده میشود ، برای جریان درحال توسعه همزمان ،برای هر عددپراندلی یک منحنی جداگانه وجوددارد .برخلاف جریان درحال

توسعه حرارتی وتوسعه یافته هیدرودینامیکی با پروفیل سرعت سهمی که تنها یک منحنی برای عددنوسلت برحسب x^* بدست میآید ،وبرای تمام اعدادپراندل صادق خواهدبود. برای هرعددپراندل مشخص عددنوسلت برای جریان درحال توسعه همزمان بیشتراز مقدارآن برای جریان درحال توسعه حرارتی وتوسعه یافته هیدرودینامیکی میباشد (البته برای مقادیرثابت x/d و Re)چون مقادیرسرعت در نزدیکی دیواره برای پروفیل سرعت درحال توسعه بیشتر ازپروفیل سرعت سهمی است .

انتظارمیرودکه درفواصل نسبتا "زیاداز دهانه ورودی اثر توسعه نیافته بودن پروفیل سرعت روی عددنوسلت بدست آمده ازجریان درحال توسعه همزمان با نتایج پروفیل توسعه یافته مطابقت خواهند داشت .ولی عملا" دریک طول مشخصی اختلاف درعددنوسلت ناچیز میشود وازآن به بعدیکی خواهندشد .درنتیجه بدست آمده برای عددنوسلت دربخش (c) نیزاین مسئله مشخص است .درمعادله (۵) اگر تنش برشی مقدارثابتی قرارداده شود ، همان نتیجه بخش (a)بدست خواهد آمد. به عبارت دیگروقتی توزیع سرعت توسعه یافته نشود ،تنش برشی نیزمقدارثابتی خواهدبود ،که درنتیجه همان نتایج پروفیل توسعه یافته بدست میآید. اما توزیع تنش برشی که دربخش (c) مورداستفاده قرارگرفته (معادله ۲۰) به سمت مقدارثابتی میل نمیکند .بنابراین عددنوسلت متوسط محاسبه شده دربخش (c) با دورشدن ازدهانه ورودی به سمت حالت حدی یعنی جواب بخش (a) میل نخواهدکردوبازیادشدن فاصله خطای معادله افزایش مییابد. بطورخلاصه ، باتوجه به منحنی های رسم شده درشکلهای ۱ و۲ و۳ رابطه بدست آمده برای عدد نوسلت ازروش بخش (c) تاحدودی که توزیع سرعت توسعه یافته میشود وحتی برای فواصل بعدازآن جواب مناسبی ارائه میدهد.

البته اشکال فوق الذکردرموردروشهای دیگرارائه شده برای حل مسئله جریان درحال توسعه همزمان دردهانه ورودی وجوددارد .درمرجع [۱۴]که ازروش انتگرالی این مسئله حل شده ونتایج آن بازبصورت حل

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

عددی معادلات مربوطه میباشد، نیز به این اشکال توجه شده است و راه حلی که برای رفع این اشکال در این مرجع پیشنهاد شده است، استفاده از منحنی های مناسب (Faired Curves) به ترتیبی که نتایج بدست آمده از حل جریان در حال توسعه همزمان را به نتایج پروفیل سرعت سهمی پیوند دهد، میباشد.

تاثیر عدد پراندل روی عدد نوسلت را میتوان با مقایسه دو منحنی با اعداد پراندل مختلف مشاهده نمود. برای یک $\frac{x/d}{Re}$ معین سیالی که دارای عدد پراندل بیشتری است، عدد نوسلت بزرگتری را نیز دارد. این نتیجه از روابط تحلیلی که برای عدد نوسلت موضعی بدست آمده نیز مشهود است. عدد نوسلت برای یک مقدار ثابت $\frac{x/d}{Re}$ با عدد پراندل افزایش مییابد. چون عدد نوسلت با رشد لایه مرزی حرارتی کاهش مییابد و رشد بیشتر لایه مرزی حرارتی به معنی عدد پراندل کوچکتر است.

با توجه به شکلهای ۱ و ۲ و ۳، معادله (۲۶) نتیجهٔ نسبتاً "دقیقی در مقایسه با نتایج عددی حاصله از حل معادلات انرژی و ممنتوم برای دو صفحه موازی در دهانه ورودی ارائه میدهد، چون معادله (۲۶) مشخصاً" عدد نوسلت متوسط را بصورت رابطهٔ تحلیلی برحسب خصوصیات سیال و مختصات محوری مجرا بدست میدهد، میتوان براحتی با داشتن طول مجرا، ضریب انتقال حرارت متوسط و از آنجا میزان انتقال حرارت را در دهانه ورودی مجاری محاسبه نمود.

البته بایستی درنظر داشت که در روش Leveque پروفیل سرعت را درفواصل نزدیک به دهانه خطی فرض کردیم که این فرض درفواصل نزدیک به دهانه برای سیالات با عدد پراندل حدود یک و یا بزرگتر از آن فرض بسیار خوبی است. ولی اگر عدد پراندل خیلی کوچکتر از یک باشد، (مثلا" برای فلزات مذاب) چون ارتفاع لایه مرزی حرارتی نسبت به لایه مرزی هیدرودینامیکی خیلی بیشتر میشود، (دیفیوژن ممنتوم بسیار کمتر از دیفیوژن حرارت است)، لذا در قسمت اعظم لایه مرزی حرارتی توزیع سرعت یکنواخت (Slug Flow) خواهد بود و بنابراین

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

فرض توزیع سرعت خطی فرض مناسبی نمیباشد. بنابراین بررسی حاضر برای اعداد پراندل حدود یک و یا نزدیک به یک مثل هوا و یا بیشتر مناسب خواهد بود. و هرچه عدد پراندل کوچکتر شود، خطای آن افزایش مییابد.

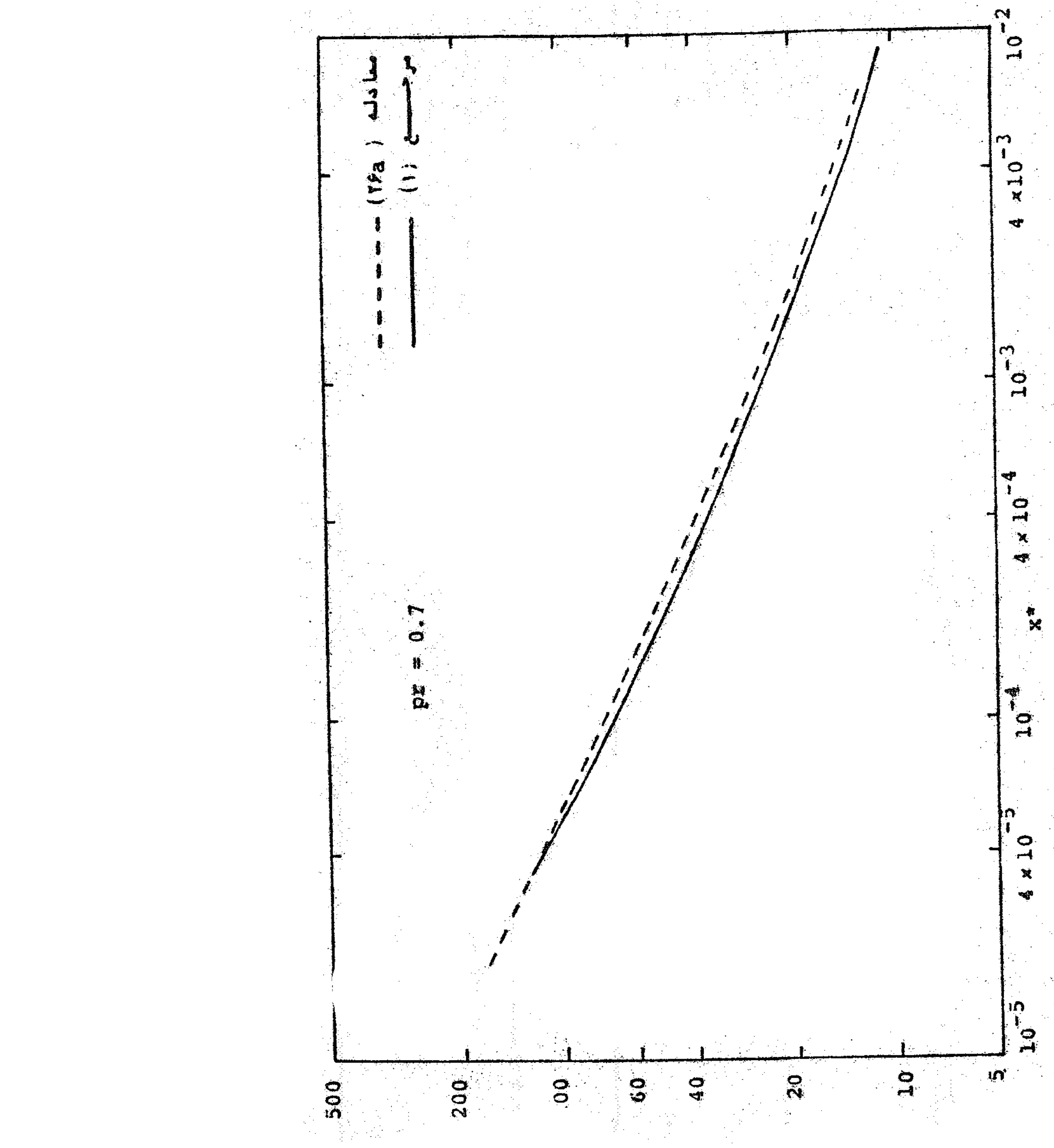
عدد نوسلت موضعی بدست آمده از معادله (۲۹) در شکلهای ۴ و ۵ و ۶ با مقادیر موجود در مرجع 1 برای دهانه ورودی لوله مقایسه شده است. که نشان میدهد با صرفنظر کردن از انحناء در فواصل نزدیک به دهانه میتوان از نتیجهٔ بدست آمده در این مقاله برای دهانه ورودی لوله با تقریب خوب استفاده کرد. معادله انرژی یعنی معادله (۱) از معادله کلی انرژی برای سیال با خواص فیزیکی ثابت، بدون تلفات اصطکاکی و همچنین صرفنظر کردن از هدایت طولی یعنی جمله $K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ در مقابل هدایت عرضی بدست آمده است. برای سیالاتی که دارای عدد پراندل خیلی کم هستند مثل فلزات مذاب، چون سریعا" از لحاظ حرارتی توسعه یافته میشوند، و یا به عبارت دیگر تغییرات درجه حرارت در یک طول بسیار کمی از مجرا اتفاق میافتد، این جمله اهمیت پیدا میکند چون شرط $x \gg \Delta$ دیگر صادق نخواهد بود. و بنابراین دیفیوژن حرارت در جهت x نیز مقدار قابل ملاحظه ای خواهد داشت.

در خاتمه بایستی یادآور شد که رابطه تحلیلی تقریبی بدست آمده برای عدد نوسلت موضعی و نوسلت متوسط برای جریان در حال توسعه حرارتی و هیدرودینامیکی مزیت بزرگ بررسی حاضر نسبت به روشهای دیگر است. چون تا بحال هیچکدام از نتایج موجود برای این نوع جریان به رابطهٔ تحلیلی برای عدد نوسلت نرسیده است.

جدول شماره ۱۵ – خلاصه فرمولها با شرایط مربوطه

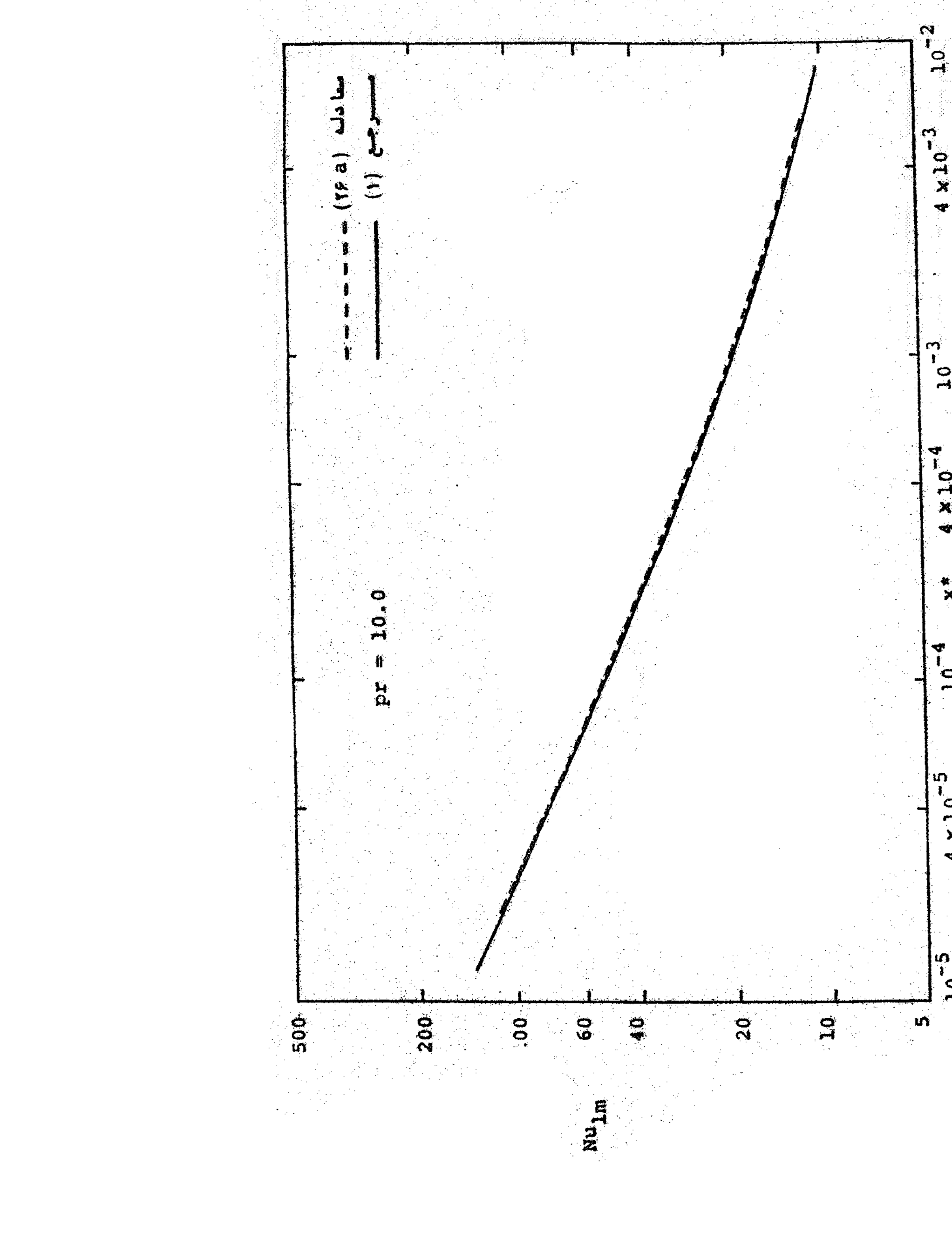
حدود و مورد استفاده	تقریب بکار رفته	توزیع سرعت و تنش برشی	عدد نوسلت موضعی
عددنوسلت متوسط نیز به صورت رابطه تحلیلی بر حسب x^* و Pr بدست میآید و در مقایسه با نتایج دو صفحه موازی برای عددنوسلت متوسط نتیجه نسبتاً خوبی میدهد. $Pr \geq 0.7$ $x^* < 0.01$	از تقریب $U_1^* - 1 = \sqrt{\frac{160}{3} x^+}$ مستقیماً در توزیع تنش برشی استفاده شده است.	$\tau_w = \frac{8 \mu \bar{U}}{3d} \frac{(1+\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^{+\frac{1}{2}})^2}{\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^{+\frac{1}{2}}}$ توزیع سرعت : درجه دوم	$Nu_2 = 0.242 \frac{(1+\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} Pr^{\frac{1}{2}} x^{*\frac{1}{2}})}{(\frac{1}{3}+\frac{1}{5} \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} Pr^{\frac{1}{2}} x^{*\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} x^{*-\frac{1}{2}} Pr^{-\frac{1}{6}}$ ۲۲)
در مقایسه با نتایج لوله دارای تقریب نسبتاً خوبی است هرچه عدد پراندل Pr بیشتر باشد دقت معادله افزایش مییابد. $Pr \geq 0.7$ $x^* \leq 0.002$	بعد از انتگرال گیری از توزیع تنش برشی در رابطه نهائی برای عدد نوسلت از تقریب $U_1^* - 1 = \sqrt{\frac{630 x^+}{13}}$ استفاده شده است.	$\tau_w \frac{9 \mu \bar{U}}{4d} \frac{U_1^{*2}}{U_1^* - 1}$ توزیع سرعت : درجه سوم	$Nu_2 = 4.7999 \frac{(1+f^2) Pr^{\frac{1}{3}}}{f(\frac{122}{3} f^3 - 96f + 96f + 96\tan^{-1} f)^{\frac{1}{3}}}$ $f = (\frac{630}{13} x^* Pr)^{\frac{1}{4}}$ (۲۹)

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]



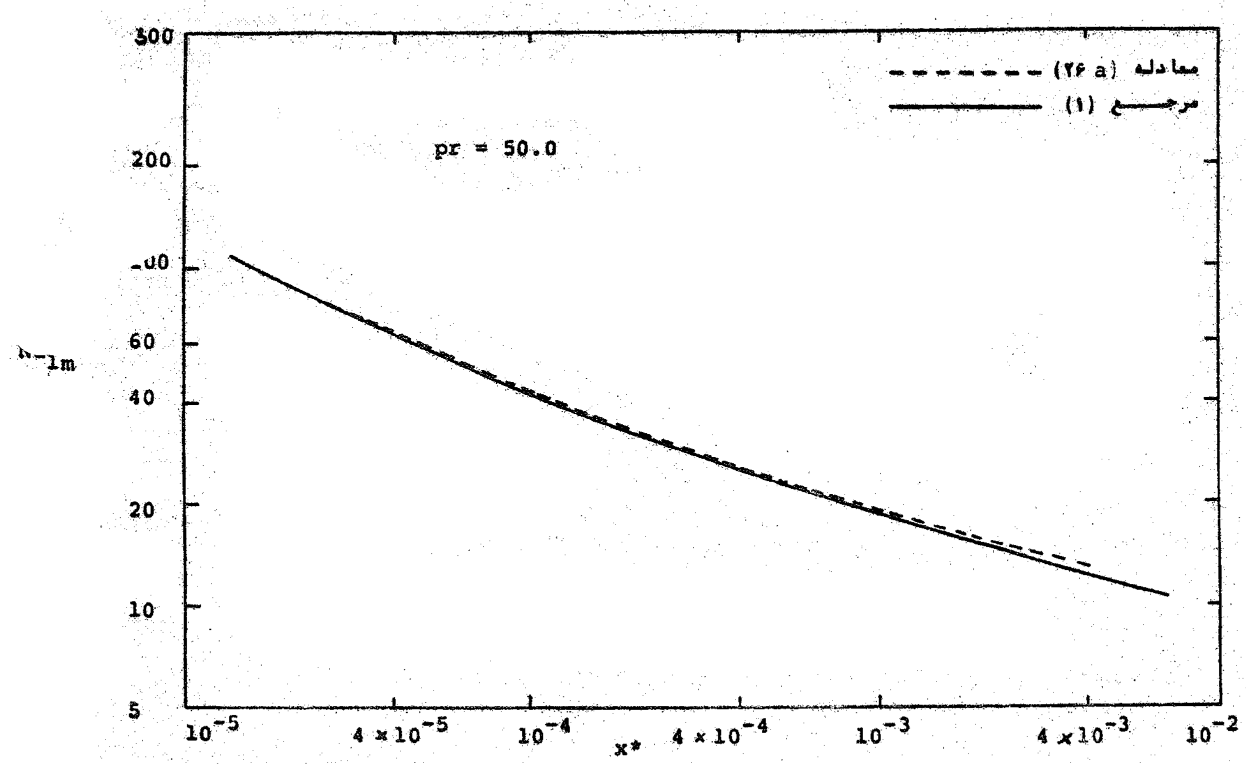
شکل ۱ – منحنی تغییرات عدد نوسلت متوسط (Nu_{1m}) برحسب x^* در مقایسه با نتایج دو صفحه موازی برای عدد پراندل pr = 0.7

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]



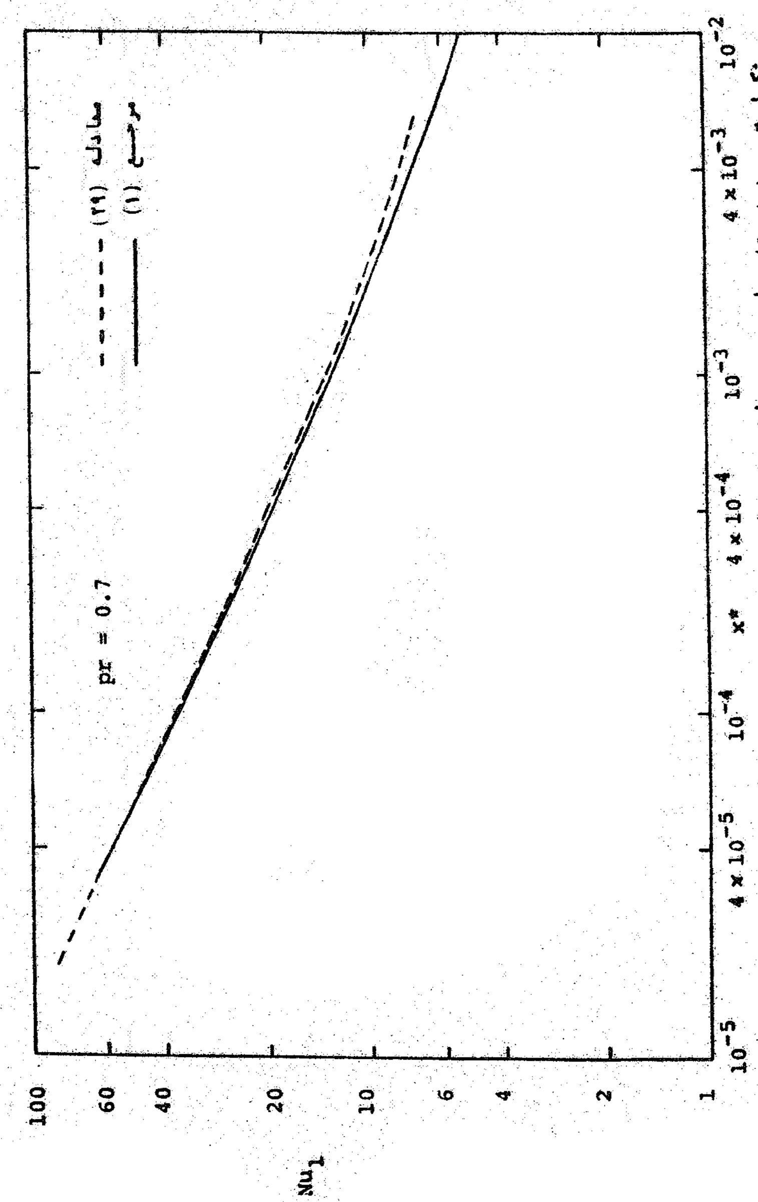
شکل ۳ – منحنی تغییرات عدد نوسلت متوسط (Nu_{1m}) برحسب x^* در مقایسه با نتایج دو صفحه موازی برای عدد پراندل pr = 10.0

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]



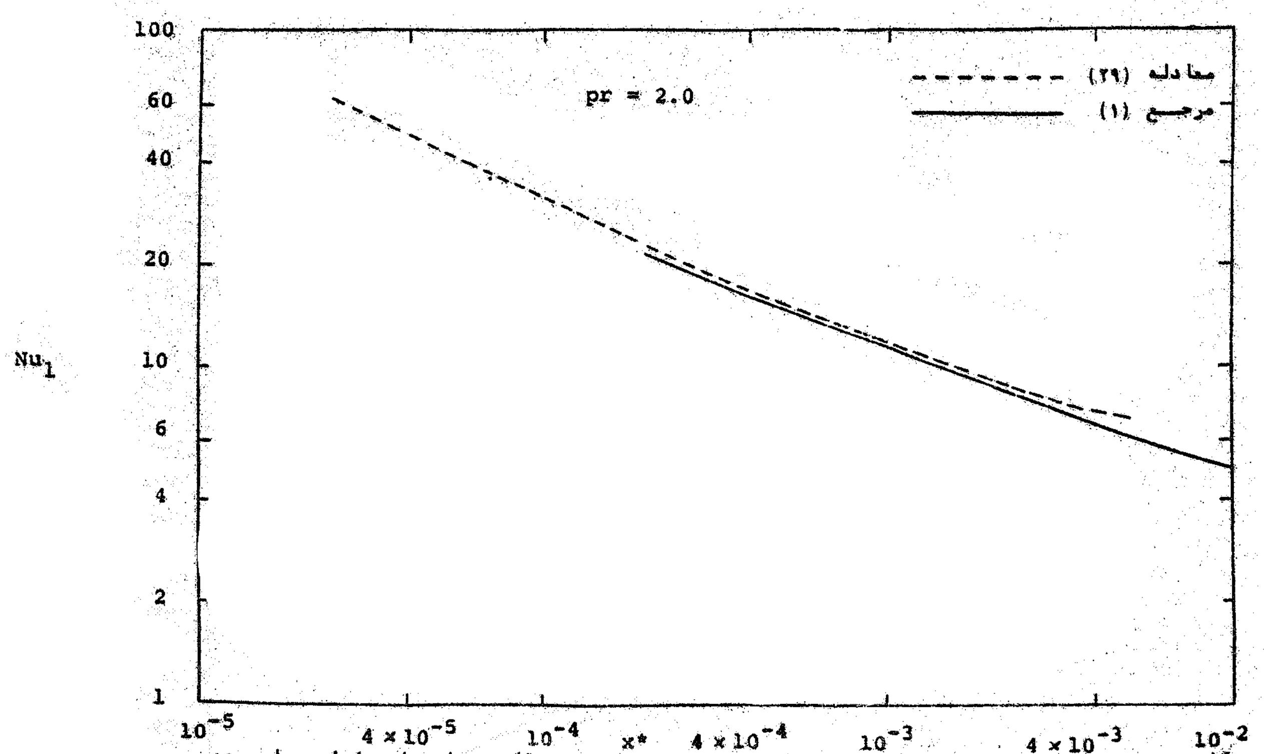
شکل ۳ ـ منحنی تغییرات عدد نوسلت متوسط (Nu_{lm}) برحسب x^* در مقایسه با نتایج دو صفحهٔ موازی برای عدد پراندل pr = 50.0

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]



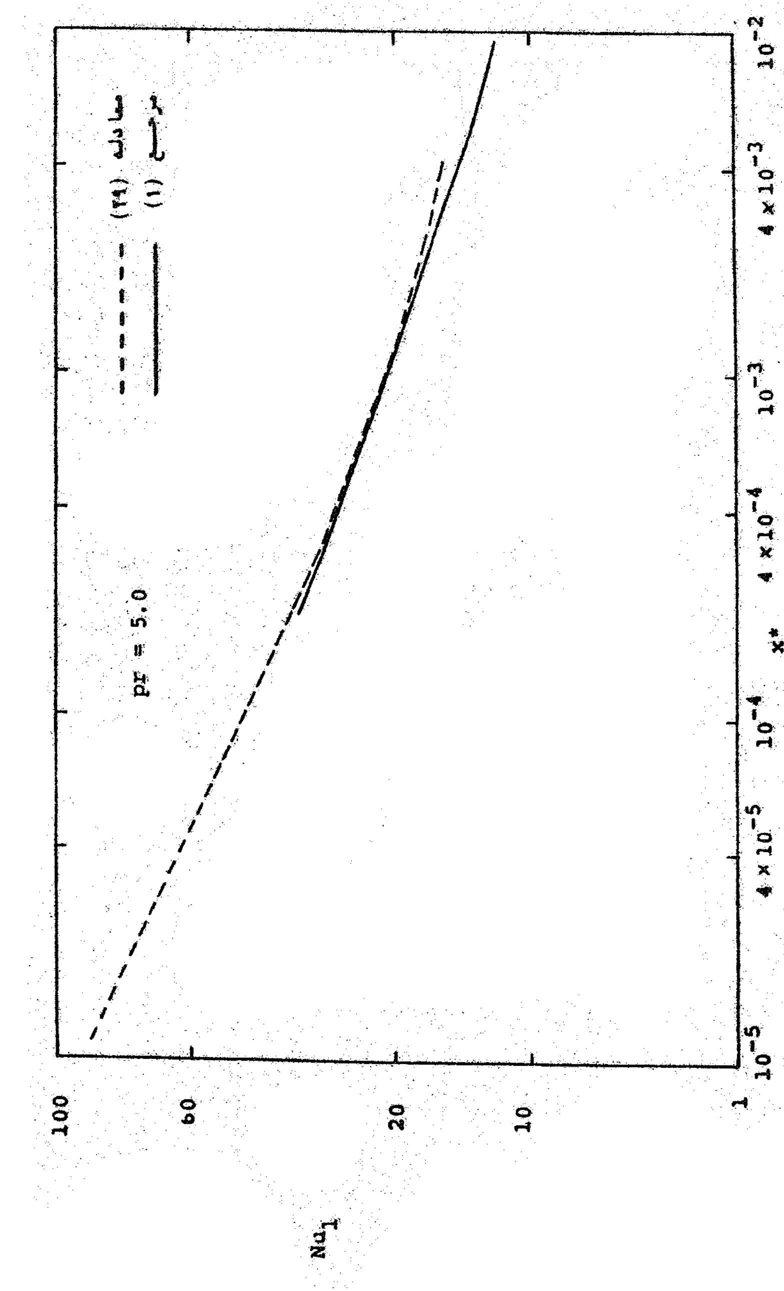
شکل ۴ – منحنی تغییرات عدد نوسلت موضعی (Nu_1) برحسب x^* در مقایسه با نتایج لوله برای عدد پرانتل pr = 0.7

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

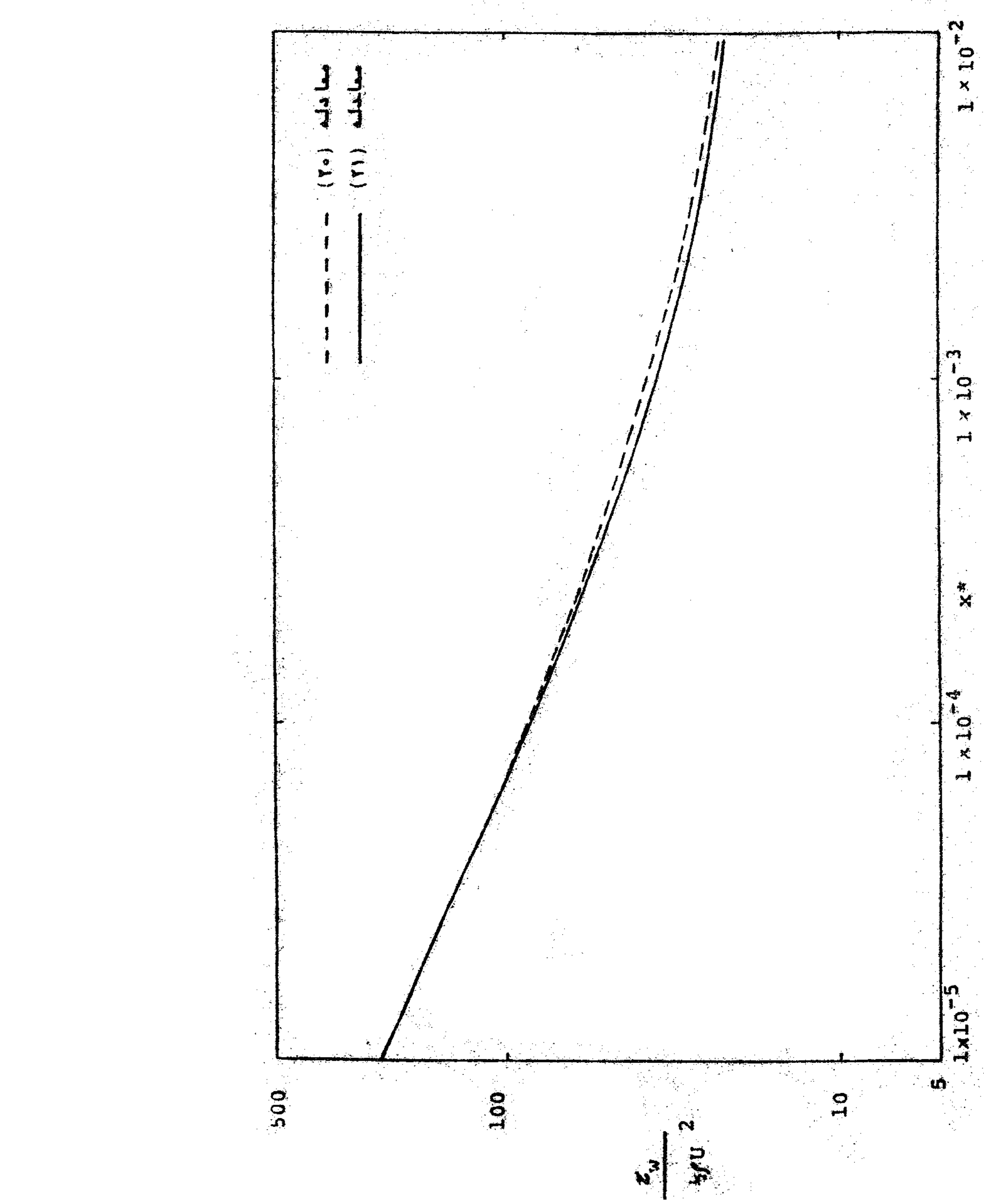


شکل ۵ – منحنی تغییرات عدد نوسلت موضعی (Nu_1) برحسب x^* در مقایسه با نتایج لوله برای عدد پراندل pr = 2.0

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]



شکل ۶ - منحنی تغییرات عدد نوسلت موضعی (Nu_1) برحسب x^* در مقایسه با نتایج لوله برای عدد پرانتل pr = 5.0



شکل ۷ – منحنی تغییرات تنش برشی بدون بعد، برحسب x^* در دهانه ورودی برای دو صفحه موازی

فهرست علائم

تعریف	علائم
نصف فاصله بین دو صفحهٔ موازی	a
حرارت مخصوص درفشار ثابت	Cp
قطرهیدرولیکی	$d = 4a$
پارامتربدون بعدمورداستفاده درمعادلات ۲۹ و ۳۰	$f = \left(\frac{630}{13} x^{*} Pr\right)^{\frac{1}{4}}$
دبی جرمی سیال عبورکننده‌ازمجرا	$\dot{m} = \rho \bar{U} 2a$
عددنوسلت موضعی براساس شرط مرزی درجه‌حرارت سطح ثابت	$Nu_{x,T} = \frac{hx}{k}$
عددنوسلت موضعی برمبنای‌اختلاف درجه‌حرارت سطح‌ومتوسط سیال	$Nu_1 = \frac{h_1 d}{k} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\Big\vert_{y=0}}{(T_0 - T_m)} \frac{d}{k}$
عددنوسلت موضعی برمبنای‌اختلاف درجه‌حرارت سطح وسیال ورودی	$Nu_2 = \frac{h_2 d}{k} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\Big\vert_{y=0}}{(T_0 - T_i)} \frac{d}{k}$
عددنوسلت متوسط‌برمبنای Nu_1	$Nu_{1m} = \frac{\int_0^x Nu_1 dx}{x}$
عددنوسلت متوسط‌برمبنای Nu_2	$Nu_{2m} = \frac{\int_0^x Nu_2 dx}{x}$
توزیع فشاردردهانه ورودی	P
عددپراندل	$Pr = \nu / \alpha$
عددرینولدزبرمبنای قطرهیدرولیکی	$Re = \frac{\bar{U} d}{\nu}$
عددرینولدزبرمبنای‌فاصله‌ازدهانه	$Re_x = \bar{U} x / \nu$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

استقلال

T	مربوط به شرط مرزی درجه حرارت سطح ثابت
T	درجه حرارت موضعی سیال
T_m	درجه حرارت متوسط سیال
T_0	درجه حرارت دیواره مجرا
T_i	درجه حرارت سیال وارد شونده در دهانه ورودی
$t=\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}(\frac{160\,x^{*}Pr}{3})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$	پارامتر بدون بعد مورد استفاده در معادلات (۱۲a) و (۱۲b)،
$\overline{U}$	سرعت متوسط سیال
U_1	سرعت سیال درهسته غیرلزج
$U_1^{*}=\frac{U_1}{\overline{U}}$	سرعت بدون بعد درهسته غیرلزج
U	سرعت جریان آزاد برای صفحه مسطح
u	مولفه سرعت درجهت x
v	مولفه سرعت درجهت y
$x^{+}=\frac{x/d}{Re}$	کمیت بدون بعدی از فاصله محوری
$x^{*}=\frac{x/d}{Re\ Pr}$	کمیت بدون بعدی از فاصله درجهت محور مجرا (عکس عدد گراتز)
$\alpha={}^{K}/\rho c p$	ضریب پخش حرارت
Γ	تابع گاما
Δ	ارتفاع لایه مرزی حرارتی
δ	ارتفاع لایه مرزی هیدرودینامیکی
δ_1	ضخامت جابجائی
δ_2	ضخامت مومنتوم

[DOR: 20.1001.1.2251600.1366.5.1.3.7]

متغییر تشابه

لزجت سینماتیکی سیال

پارامتر بدون بعد مورد استفاده درمعادلات (۲۴)

$$\xi = \left(\frac{160\, x^{*} Pr}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

تابع جریان

مـــراجع

۱۳ . سیدسعید مرتضوی"بدست آوردن عددنوسلت دردهانه ورودی". تــز فوق لیسانس ،دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتـــــی اصفهان ، ۱۳۶۶ .

1. Shah, R.K., London. A. L., Advances in Heat Transfer: Laminar Flow Forced Convection in Ducts. Academic Press, Inc., 1978.

2. Newman, J.,"Extension of the Leveque solution" J. Heat Transfer 91, pp177-178, 1969.

3. Goldstein, S., Modern Developements in Fluid Dynamics. Dover Publications Inc., 1965.

4. Knudsen, J. G., Katz, D. L., Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill, Inc., 1958.

5. Kays, W. M., Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, Inc., 1966.

6. Rohsenow, W. M. Choi, H. T., Heat, Mass and Momentum Transfer. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1961.

7. Ulrichson,D. L..Schmitz,R. A."Laminar - flow heat transfer in the entrance region of circular tubes," I. J. Heat Mass Transfer vol.8, pp253-258, 1965.

8 . Hornbeck, R. W.,"An all - numerical method for heat transfer in the inlet of a tube," Am. Soc. Mech. Eng.,Pap.65-WA/HT - 36, 1965

9 . Hwang, C. L., Fan, L. T.,"Finite difference analysis of forced- Covection heat transfer in entrance region of a Flat rectangular duct,"Appl. Sci. Res., Sect. A13 ,401-422, 1967.

10. Worsφe, P. W., Schmidt, E.,"Heat Transfer in the thermal entrance region of circular tubes and annular passages with fully developed laminar flow," Int. J. Heat Mass Transfer, vol.10, pp541-551, Pergamon Press Ltd., 1967.

11. Nunge, R. J., Porta, E. W., Bentley, R,"A correlation of local Nusselt Number for laminar flow heat transfer," in annuli," Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp927-931, Pergamon Press Ltd, 1970.

12. Eckert, E. R. G., Drake, R. M., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw- Hill, Inc. 1972.

14. Sparrow, E. M.,"Analysis of Laminar Forced Convection Heat Transfer in Entrance Region of Flat Ractangular Ducts," National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 3331, 1954.