

ضریب طول مؤثر ستون در قابهای خورجینی

محمد رضایی پزند* و صفا پیمان**

گروه عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۸۰/۵/۱۵ - دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۷/۲۷)

چکیده - درباره ضریب طول مؤثر ستون در قابهای خورجینی سخن به میان می‌آید. برای محاسبه این ضریب، یک شیوه تقریبی با دقت مناسب پیشنهاد خواهد شد. از سوی دیگر، با بهره جویی از روش تحلیلی دقیق، طول مؤثر ستون در چند قاب خورجینی پیدا می‌شود و نتیجه با پاسخ فن پیشنهادی مقایسه می‌شود. این قیاس نشانگر درستی رابطه سازی پیشنهادی و دقت مناسب آن است. باید آگاه بود، روش پیشنهادی مشابه راهکار ژولین و لورنس است، با این تفاوت که شیوه پیشنهادی برای قابهای خورجینی به کار می‌رود و آن دیگری برای قابهای صلب مناسب است. واژگان کلیدی: قاب خورجینی، طول مؤثر، بار انشعاب، سختی دورانی، تحلیل ماتریسی، ضریب ستون.

Column Effective Length Factor in Khorjini Frames

M. Rezaiee-Pajand and S. Payman

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract: *This paper discusses the effective length factor of columns in Khorjini frames. In order to find this factor, a proper approximated method is proposed. In addition, accurate analysis is performed and the results are compared with those from the proposed technique. The comparison demonstrates the accuracy of presented FORMULATIONS. The proposed method is similar to Julian and Lawrence's, which is used for rigid frames.*

Keywords: *Khorjini Frame, Effective Length, Bifurcation Load, Rotational Stiffness, Matrix Structural Analysis, Column Factor.*

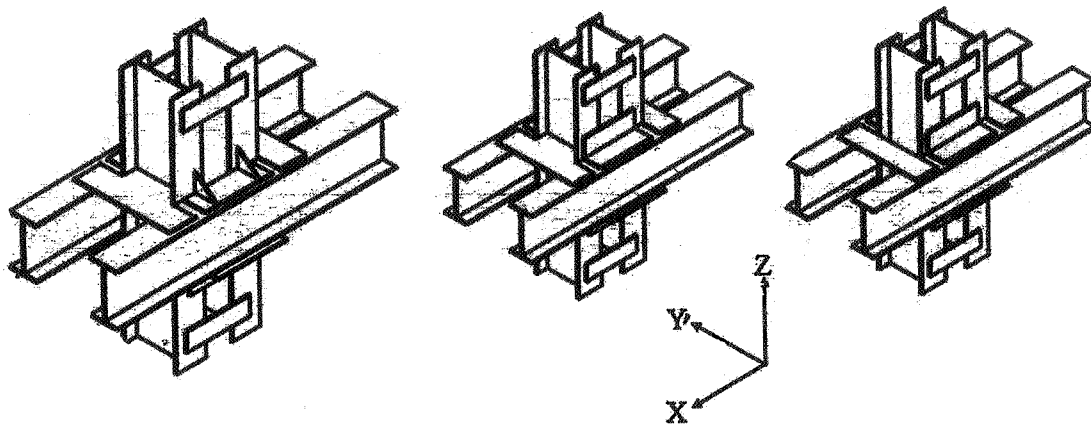
ممکن است یک عضو فشاری درون قاب فقط در امتداد محور عضو زیر اثر بار محوری باشد. در این صورت، این عضو همانند یک ستون معمولی طرح می‌شود. اگر ستون مزبور زیر اثر دو بارگذاری محوری و خمشی قرار گیرد، باید آن را یک تیر ستون پنداشت. در این صورت، با استفاده از یک معادله اندرکنش نیرو-لنگر، ستون مزبور طرح می‌شود. باید آگاه بود، در هر دو مورد، بار بحرانی عضو باید حساب شود. برای تعیین بار بحرانی ستونهای درون قاب، تحلیل پایداری کل قاب یکی از راه‌حلهاست. چنین تحلیلی، مقدار بارهای خارجی را هنگام ناپایدار شدن قاب به دست می‌دهد. سپس، نیروهای وارد بر هر عضو فشاری در هنگام کماتنش باسانی پیدا می‌شوند. خاطر نشان می‌سازد، به طور معمول، تحلیل کل قاب برای این گونه طراحی غیر ضروری است. زیرا، شیوه‌های تقریبی به سادگی نتیجه مطلوب را می‌دهند. پژوهشگران روشهای تقریبی مناسبی برای تحلیل پایداری قابها ارائه کرده‌اند [۲-۴]. از میان این فنهای، می‌توان روش "ژولین و لورنس" را نام برد [۲ و ۴]. ارزش این شیوه کار با توجه به این که بار بحرانی می‌تواند به طور هندسی به دست آید، بسیار زیاد است. باید آگاه بود، آیین نامه‌های سازه‌های فولادی، بتنی و پل آمریکا و همچنین، آیین نامه‌های مشابه در کشور ایران، محاسبه بار بحرانی ستونها را با روش مورد بحث می‌پذیرد. بر این اساس، بهبود فن مزبور دارای اهمیت است. در ادامه، پس از تشریح راهکار پیشنهادی، توانمندیهای آن به نظر خوانندگان می‌رسد.

۲- طول مؤثر ستون در قابهای خورجینی

در ایران، به دلیل کمبود نیمرخهای بزرگ، برای تیرریزی ساختمانهای متوسط و کوتاه از دو مقطع تیر با فاصله از یکدیگر استفاده می‌شود. در این نوع تیرریزی، به سبب نبودن فضای کافی برای اتصال در محل ستون، تیرها از کنار ستون عبور می‌کنند و توسط نبشهای بالایی و پایینی به ستون متصل می‌شوند. این گونه اتصال تیر به ستون را "اتصال خورجینی"

می‌گویند. همچنین، قابی که این گونه اتصال را داشته باشد به "قاب خورجینی" معروف است. شکل (۱) نمایانگر چند نمونه اتصال خورجینی می‌باشد. اتصال خورجینی تا حدودی دارای توانایی انتقال لنگر خمشی از تیر به ستون است. از ویژگیهای مهم این اتصال، رابطه بین برآیند لنگرخمشی تیرهای دو طرف اتصال، M ، و دوران نسبی θ بین عضوهای اتصال است. آزمایشها آشکار ساخته‌اند، رابطه بین لنگر M و زاویه دوران نسبی θ را می‌توان به صورت یک نمودار نشان داد [۱]. نمودارهای به دست آمده از پژوهشهای آزمایشگاهی، همانند شکل (۲) هستند. نمودارهای مزبور نشان دهنده رفتار لنگر-دوران غیر خطی برای این اتصال است. بر این اساس، اتصال خورجینی را می‌توان با یک فنر پیچشی الگو سازی کرد.

یادآوری می‌شود، اتصال خورجینی به طور گسترده‌ای در کشور ایران مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، بررسی پایداری قاب خورجینی دارای اهمیت است. در این مقاله، روش تقریبی برای محاسبه بار کماتنش یا ضریب طول مؤثر ستون، در قابهای با اتصال خورجینی پیشنهاد خواهد شد. این روش بر پایه رابطه‌های شیب و افت استوار است. باید دانست، اتصالهای خورجینی تا حدودی دارای توانایی انتقال لنگر خمشی از تیر به ستون هستند. یک اتصال خورجینی را می‌توان با فنر پیچشی به سختی پیچشی R ارائه کرد. در تحلیل پایداری، برای به دست آوردن سختی دورانی این فنرها، قاب خورجینی زیر اثر بارهای قائم وارد بر ساختمان، با فرض غیر خطی بودن نمودار لنگر-دوران اتصال، تحلیل می‌شود. خاطر نشان می‌کند، این تحلیل از مرتبه اول است. نظر به متغیر بودن سختی دورانی اتصالهای خورجینی در فرایند بارگذاری، بردار بار در n مرحله وارد می‌شود. در قدم اول بارگذاری، اتصالها سختی اولیه R_{ki} را دارند. سپس، در هر مرحله مقداری از بار به صورت تجمعی روی سازه قرار می‌گیرد و در هر قدم لنگر در کلیه اتصالها به دست می‌آید. در مرحله بعد، سختی دوران جدید برای اتصالی که لنگر آن M است، با استفاده از شیب نمودار لنگر-دوران حساب می‌شود. کمترین سختی دورانی اتصالها در هر طبقه،



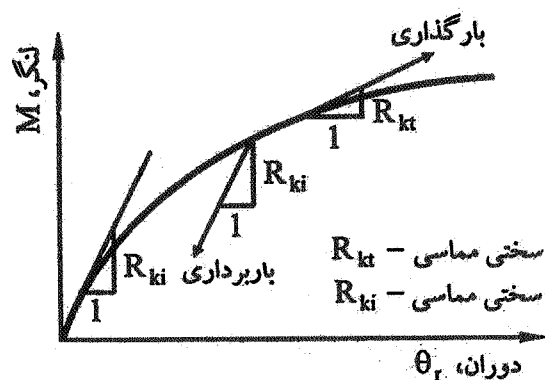
شکل ۱-چند نمونه اتصال خورجینی

- ۱- کلیه اعضا از مصالح همگن با رفتار کشسان خطی و ضریب کشسانی E ساخته شده‌اند.
- ۲- همه اعضاهای منشوری و با مقطع متقارن‌اند.
- ۳- نیروی محوری تیرها ناچیز است.
- ۴- کمانش در همه ستونها به طور همزمان اتفاق می‌افتد.
- ۵- عامل سختی $\sqrt{P/AE}$ ، L ، برای همه ستونها یکسان است.
- ۶- هنگام کمانش به دلیل نیمه صلب بودن اتصال خورجینی، دوران تیرها و ستونها در گره‌های A و B یکی نیست. فرض می‌شود، قدر مطلق دوران در دو سر دور و نزدیک تیرها با هم برابر باشد. همچنین، قدر مطلق دوران در سر دور ستونهای $C1$ و $C3$ ، به ترتیب، با قدر مطلق دوران در انتهای نزدیک ستونهای $C1$ و $C3$ یکی است.

هنگامی که کمانش اتفاق می‌افتد، در دو سر هر کدام از اعضا لنگر خمشی به وجود می‌آید. بنابراین، معادله شیب و افت برای اعضا را می‌توان نوشت. در این راستا، یک عضو تیر ستون با صلبیت خمشی EI و طول L ، همانند شکل (۴)، در نظر گرفته می‌شود. معادله شیب و افت برای این عضو به شکل زیر خواهد بود [۱]:

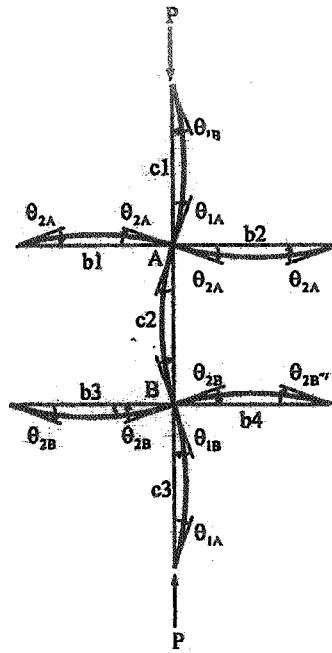
$$M_A = \frac{EI}{L} \left[S_{ii}\theta_A + S_{ij}\theta_B - (S_{ii} + S_{ij})\frac{\Delta}{L} \right] \quad (1)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[S_{ji}\theta_A + S_{jj}\theta_B - (S_{ji} + S_{jj})\frac{\Delta}{L} \right] \quad (2)$$

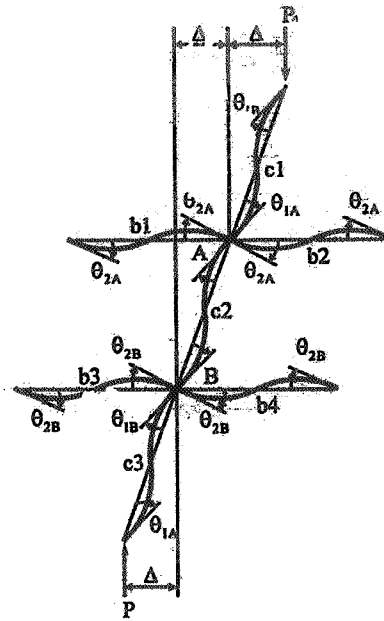


شکل ۲- نمودار لنگر - دوران اتصال خورجینی

پس از آخرین مرحله بارگذاری، برابر با سختی دورانی فنرهای جایگزین شده به جای اتصالها می‌شود. در این شیوه، فقط اثر ستون مورد نظر و تیرها و ستونهایی که به طور مستقیم به آن متصل‌اند وارد می‌شود. به سخن دیگر، از تأثیر عضوه‌های دیگر قاب که به طور مستقیم به ستون مزبور متصل نیستند، چشمپوشی خواهد شد. بر این اساس، همانند شکل (۳)، ستون مورد بررسی و عضوهایی که به طور مستقیم به آن متصل‌اند در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه ضریب طول مؤثر، ستون AB مورد بررسی قرار می‌گیرد. نخستین گام تحلیل، گزینش فرضیه‌هایی هماهنگ با رفتار واقعی قسمت جدا شده از قاب است. این فرضها به قرار زیر است:



(۱) - قاب مهاربندی نشده



(۲) - قاب مهاربندی شده

شکل ۳- الگوی کمانش برای قسمتی از قاب

$$M_i)_b = E \left(\frac{1}{L} \right)_b 2\theta_{bi} \quad i = A, B \quad (۶)$$

۲- معادله‌های شیب و افت برای تیر در قاب بدون مهاربندی جانبی:

$$M_i)_b = E \left(\frac{1}{L} \right)_b 6\theta_{bi} \quad i = A, B \quad (۷)$$

معادله‌های افت و شیب در گره‌های A و B برای هر کدام از ستونها را نیز می‌توان از معادله‌های (۱) و (۲) به دست آورد. باید افزود، برای ستونهای قاب مهاربندی شده شکل (۳-۱)، تغییر مکان نسبی دو سر ستون نسبت به هم، Δ ، برابر صفر خواهد بود. پس از نوشتن معادله‌های شیب و افت برای تیرها و ستونها، در گره‌های A و B، به سادگی می‌توان معادله‌های تعادل را برای جزء قابی نوشت. اینک به معادله‌های تعادل در جزء قاب مهاربندی شده پرداخته خواهد شد. برای جزء قاب مهاربندی شده شکل (۳-۱)، می‌توان دو معادله تعادل برای هر کدام از گره‌ها A و B به شکل زیر نوشت:

در اینجا، s_{ij} ، s_{ji} و s_{zz} تابعهای پایداری عضو تیر ستون نامیده می‌شوند. این تابعها، به هنگامی که نیروی محوری ستون فشاری باشد، به شکل زیر در خواهند آمد:

$$S_{ii} = S_{jj} = \frac{(KL) \sin KL - (KL)^2 \cos KL}{2 - 2 \cos KL - KL \sin KL} \quad (۳)$$

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{(KL)^2 - KL(\sin KL)}{2 - 2 \cos KL - KL \sin KL} \quad (۴)$$

در اینجا، K به صورت زیر است:

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (۵)$$

باید آگاه بود، در صورتی که نیروی محوری تیر ستون برابر صفر باشد، $S_{ij} = S_{ji} = 2$ و $S_{ii} = S_{jj} = 4$ خواهد بود. بر این اساس، معادله‌های شیب و افت را می‌توان برای هر کدام از تیرها و ستونها جزء قابهای نشان داده شده در شکل (۳)، به صورت زیر نوشت:

۱- معادله‌های شیب و افت تیر در قاب مهاربندی شده:

$$\alpha_B = \frac{R_{kA}}{2 \left[\left(\frac{EI}{L} \right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{b4} \right] + R_{kB}} \quad (15)$$

اکنون، اگر رابطه‌های (۱)، (۲) و (۱۳) در معادله‌های (۸) و (۹) قرار گیرند، پس از ساده‌سازی، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} S_{ii} + \frac{2}{G_A} S_{ij} & S_{ij} \\ S_{ij} & S_{ii} + \frac{2}{G_B} S_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{cA} \\ \theta_{cB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

در اینجا، G_A و G_B به صورت زیر هستند:

$$G_A = \frac{\left(\frac{1}{L} \right)_{c1} + \left(\frac{1}{L} \right)_{c2}}{\alpha_A \left[\left(\frac{1}{L} \right)_{b1} + \left(\frac{1}{L} \right)_{b2} \right]}$$

$$G_B = \frac{\left(\frac{1}{L} \right)_{c2} + \left(\frac{1}{L} \right)_{c3}}{\alpha_B \left[\left(\frac{1}{L} \right)_{b3} + \left(\frac{1}{L} \right)_{b4} \right]} \quad (17)$$

باید آگاه بود، کمناش هنگامی رخ داد که دترمینان ماتریس سختی صفر باشد. پس از گسترش دترمینان ماتریس سختی و برابر با صفر قرار دادن آن، با توجه به این واقعیت که نیروی محوری ستونها فشاری است، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{G_A G_B \left(\frac{\pi}{K} \right)^2}{4} + \left[\frac{G_A G_B}{2} \left[1 - \frac{\pi/K}{\tan(\pi/k)} \right] + \frac{2 \tan(\pi/2k)}{\pi/k} - 1 \right] = 0 \quad (18)$$

در این رابطه، عامل K که ضریب طول مؤثر ستون است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \sqrt{\frac{P_e}{P_{cr}}} \quad (19)$$

در اینجا، P_{cr} بار بحرانی ستون مورد بررسی و $P_e = \pi^2 EI / L^2$ ، بار بحرانی یک ستون دو سر مفصل است که مشخصه‌های آن همانند ستون C2 می‌باشد. از معادله (۱۹) و با روش آزمون و خطا، به ازای G_A و G_B های مشخص، مقدار K که همان ضریب طول مؤثر ستون C2 است، به دست می‌آید.

$$M_A)_{c1} + M_A)_{c2} + M_A)_{b1} + M_A)_{b2} = 0 \quad (8)$$

$$M_B)_{c3} + M_B)_{c2} + M_B)_{b3} + M_B)_{b4} = 0 \quad (9)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۶) در این معادله‌ها، آشکار می‌شود، که این دو معادله دارای چهار مجهول $\theta_{cB}, \theta_{bB}, \theta_{cA}, \theta_{bA}$ هستند. از سوی دیگر، پیوستگی بین تیرها و ستونها با اتصال خورجینی که سختی پیچشی آن مشخص است، برقرار شود. بر این اساس، به سادگی می‌توان معادله بین دوران تیرها و ستونها را در گره‌های A و B به دست آورد.

دو تیر $b1$ و $b2$ را می‌توان به صورت تیری یکسره به طول $(L_{b1} + L_{b2})$ در نظر گرفت. آنها از کنار ستونهای $c1$ و $c2$ عبور کرده و در گره A با فنری به سختی پیچشی R_{kA} به ستونها متصل شده‌اند. بنابراین، اگر فنر و تیر مورد نظر را از ستونها جدا کرد و تعادل در گره A برای قسمت جدا شده نوشته شود، معادله زیر به دست می‌آید:

$$M_A)_{b1} + M_A)_{b2} + R_{kA} (\theta_{bA} - \theta_{cA}) = 0 \quad (10)$$

اگر $M_A)_{b1}$ و $M_A)_{b2}$ از رابطه‌های (۶) و (۷) به دست آید و در معادله (۱۰) قرار گیرد، نتیجه زیر پیدا می‌شود:

$$\left(\frac{EI}{L} \right)_{b1} 2\theta_{bA} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{b2} 2\theta_{bA} + R_{kA} \theta_{bA} - R_{kA} \theta_{cA} = 0 \quad (11)$$

از این معادله θ_{bA} بر حسب θ_{cA} به دست می‌آید:

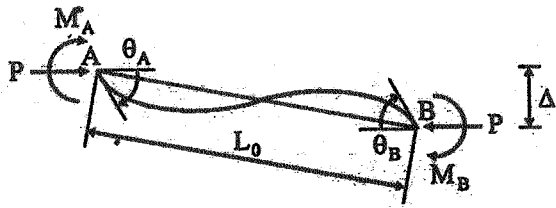
$$\theta_{bA} = \left(R_{kA} / \left[\left(\frac{2EI}{L} \right)_{b1} + \left(\frac{2EI}{L} \right)_{b2} + R_{kA} \right] \right) \theta_{cA} \quad (12)$$

به همین ترتیب، θ_{bB} را نیز می‌توان بر حسب θ_{cB} نوشت. بر این اساس، معادله شیب و افت برای تیرها در قاب خورجینی مهاربندی شده به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$M_i)_{b} = \alpha_i \frac{2EI}{L} \theta_{ci} \quad i = A, B \quad (13)$$

در این معادله، عامل α_i برای $i = A, B$ به شکل زیر است:

$$\alpha_A = \frac{R_{kA}}{2 \left[\left(\frac{EI}{L} \right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{b2} \right] + R_{kA}} \quad (14)$$



شکل ۴- عضو تیر ستون با نیروهای گرهی

دترمینان ماتریس ضریبها صفر شود. پس از گسترش دترمینان مزبور و برابر با صفر قرار دادن آن، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{G_A G_B (\pi/K)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{(\pi/K)}{\tan(\pi/k)} = 0 \quad (25)$$

با روش آزمون و خطا و به ازای G_A و G_B های متفاوت، مقدار K که همان ضریب طول مؤثر ستون است، مشخص می‌شود. ارزش شیوه پیشنهادی با توجه به این که ضریب طول مؤثر ستون می‌تواند به طور هندسی از نمودارهای نشان داده شده در شکل (۵) به دست آید، بسیار زیاد است. یادآوری می‌کند، نمودارهای مزبور به وسیله ژولین و لورنس برای محاسبه بار انشعاب ستون در قابها صلب پیشنهاد شده‌اند. افزون بر روش پیشنهادی، بار انشعاب ستونها به وسیله رایانه نیز حساب می‌شود. نویسندگان مقاله برنامه رایانه‌ای آماده کرده‌اند و تحلیلهایی دقیق را با آن انجام می‌دهند. برنامه نویسندگان توانایی تحلیل پایداری قابهای صلب، نیمه صلب و خورجینی را دارد. درستی کار برنامه با محاسبه بار بحرانی قابهایی، که مقدار آنها در مرجعهای معتبر درج شده‌اند، واریسی شده است. بنابراین، پاسخهای برنامه بدون خطا هستند.

۳- کارهای عددی

برای نشان دادن توانایی روش تقریبی پیشنهادی برای محاسبه بار انشعاب ستون قابهای خورجینی، چند قاب تحلیل پایداری می‌شوند. خاطر نشان می‌سازد، شیوه بررسی به این صورت است، نخست با استفاده از معادله پیشنهادی، و به

در ادامه، به معادله‌های تعادل در جزء قاب مهاربندی نشده، پرداخته خواهد شد. برای جزء قاب مهاربندی نشده شکل (۳-۲)، افزون بر دو معادله تعادل (۸) و (۹) که از صفر بودن لنگر در گره‌های A و B به دست آمدند، یک معادله تعادل نیز برای ستون $C2$ به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$M_A)_{c2} + M_B)_{c2} + p\Delta = 0 \quad (20)$$

به این ترتیب، سه معادله تعادل به دست می‌آید که دارای پنج مجهول $\theta_{cA}, \theta_{bA}, \theta_{cB}, \theta_{bB}$ و Δ هستند. همانند، قاب خورجینی مهاربندی شده، در اینجا نیز به سادگی می‌توان دوران تیرها را بر حسب دوران ستونها در گره‌های A و B نوشت. بر این اساس، معادله شیب و افت برای تیرها در قاب خورجینی مهاربندی نشده به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$M_{ij})_b = \alpha_i \frac{6EI}{L} \theta_{ci} \quad i = A, B \quad (21)$$

در این معادله، α_i برای گره‌های A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

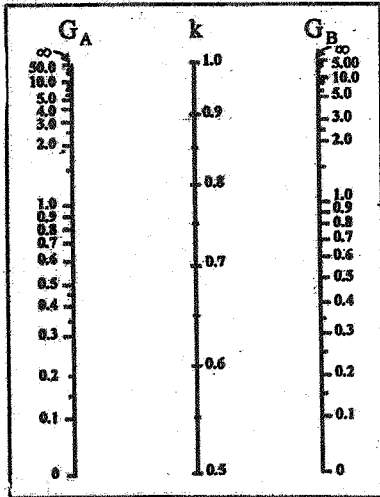
$$\alpha_A = \frac{R_{kA}}{6 \left[\left(\frac{EI}{L} \right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{b2} \right] + R_{kA}} \quad (22)$$

$$\alpha_B = \frac{R_{kB}}{6 \left[\left(\frac{EI}{L} \right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{b4} \right] + R_{kB}} \quad (23)$$

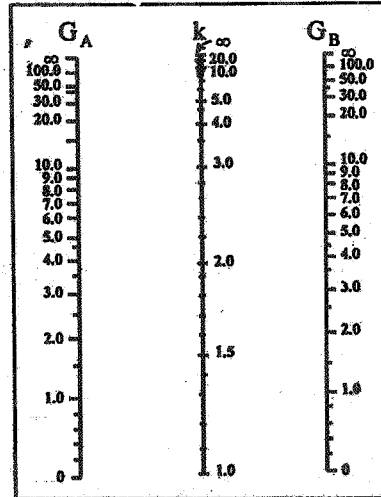
اکنون، اگر معادله‌های (۱)، (۲) و (۲۱) در معادله‌های (۸)، (۹) و (۲۰) قرار داده شوند، پس از ساده‌سازی، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \left(S_{ii} + \frac{6}{G_A} \right) S_{ij} - (S_{ii} + S_{ij}) \\ S_{ij} \left(S_{ii} + \frac{6}{G_B} \right) - (S_{ii} + S_{ij}) \\ -\frac{6}{G_A} - \frac{6}{G_B} (KL)_{c2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{cA} \\ \theta_{cB} \\ \frac{\Delta}{L_{c2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

عاملهای G_A و G_B از معادله (۱۷) به دست می‌آیند. باید دانست، در اینجا α_A و α_B برای محاسبه G_A و G_B ، به ترتیب، از معادله‌های (۲۲) و (۲۳) حساب می‌شوند. برای این که معادله (۲۴) پاسخهای غیر صفر داشته باشد، باید



شکل (۱) - قاب مهار بندی شده



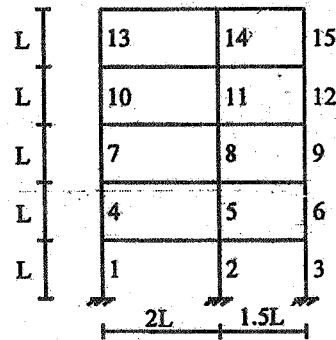
شکل (۲) - قاب مهار بندی نشده

شکل ۵- نمودار محاسبه ضریب طول مؤثر

۳-۱- قاب خورجینی دو دهانه

شکل (۶) نمایانگر یک قاب خورجینی دو دهانه و پنج طبقه است. سختی اتصال خورجینی برای قاب مزبور از مقدار $\frac{EI}{L}$ تا گیرداری کامل متغیر است. صلبیت خمشی همه تیرها برابر $2EI$ و سختی خمشی برای ستونهای کناری EI و برای ستونهای میانی $1.5EI$ است. سطح مقطع همه اعضا برابر $A=I$ در نظر گرفته می شود. اتصال ستون به پی گیردار فرض شده است. قاب مورد نظر زیر اثر بارهای متمرکز در سر ستونها و در راستای قائم قرار دارند.

باید افزود، بار بحرانی ستونهای شماره ۷، ۱۰، ۱۳ برابر بار بحرانی ستون ۴، بار بحرانی ستونهای ۸، ۱۱، ۱۴ همانند ستون ۵ و بار بحرانی ستونهای ۹، ۱۲، ۱۵ مساوی ستون ۶ به دست می آید. نتیجه های تحلیل در جدولهای (۱) و (۲) درج می شود.



شکل ۶- قاب خورجینی دودهانه

کمک نمودارها، ضریب طول مؤثر ستونهای قاب به دست می آید. سپس، به کمک این ضریب، بار کمانش یکایک ستونها محاسبه می شود. به دنبال این کار، برای قاب مورد بررسی به کمک برنامه رایانه ای، تحلیل پایداری دقیق انجام می گیرد. باید آگاه بود، در تحلیل رایانه ای، بارگذاری به گونه ای صورت می گیرد که نیروی محوری ستونها ضریبی از بار کمانش به دست آمده از تحلیل تقریبی باشد؛ سرانجام، بار کمانش ستونها از روش تقریبی با بار کمانش به دست آمده از روش دقیق مقایسه می شود و دقت آن بررسی می شود.

جدول ۱ - مقایسه بین بار انشعاب شیوه پیشنهادی با روش دقیق برای قاب خورجینی مهاربندی شده

۱- سختی دوران اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ در نظر گرفته شده است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۳/۶۶۰۳	۲۰/۰۱۶۸	۱۲/۷۴۴۸	۱۱/۱۶۹۸	۱۶/۰۶۳۸	۱۰/۹۳۵۸	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۴/۶۷۰۹	۲۱/۴۹۷۶	۱۳/۶۸۷۶	۱۱/۹۹۶۲	۱۷/۲۵۲۰	۱۱/۷۴۴۸	$\frac{EI}{L^2}$ *

۲- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۲ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۴/۱۵۵۵	۲۰/۹۸۱۳	۱۳/۳۴۴۰	۱۲/۱۸۴۷	۱۷/۸۷۷۶	۱۱/۹۱۸۴	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۴/۴۷۴۳	۲۱/۷۱۱۵	۱۳/۷۵۰۶	۱۲/۶۱۳۳	۱۸/۶۰۹۹	۱۲/۴۰۶۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

۳- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۴/۶۷۸۱	۲۱/۴۸۹۲	۱۳/۶۶۰۳	۱۳/۳۴۴۶	۱۹/۱۱۷۸	۱۲/۴۶۰۳	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۵/۵۸۸۷	۲۲/۸۲۲۳	۱۴/۵۰۹۷	۱۴/۱۷۲۰	۲۰/۳۰۳۱	۱۳/۲۳۳۱	$\frac{EI}{L^2}$ *

۴- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۱۰ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۰۴۳۰	۲۲/۵۶۴۵	۱۴/۶۷۸۳	۱۳/۶۶۰۲	۲۰/۴۹۰۵	۱۳/۰۳۹۶	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۵/۹۹۲۸	۲۳/۹۸۸۸	۱۵/۶۰۴۸	۱۴/۵۲۲۵	۲۱/۷۸۳۸	۱۳/۸۶۲۳	$\frac{EI}{L^2}$ *

۵- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۲۵ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۴۲۱۲	۲۳/۱۳۱۹	۱۴/۸۵۸۸	۱۴/۱۵۵۵	۲۱/۷۵۱۲	۱۳/۱۹۰۷	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۶/۴۰۵۳	۲۴/۶۰۸۰	۱۵/۸۰۷۰	۱۵/۰۵۸۸	۲۳/۱۳۹۲	۱۴/۰۳۲۴	$\frac{EI}{L^2}$ *

۶- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۸۱۴۱	۲۴/۰۳۳۳۴	۱۵/۰۴۳۰	۱۴/۶۷۸۵	۲۲/۵۶۴۳	۱۳/۶۶۱۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۶/۵۰۰۶	۲۵/۳۸۷۲	۱۵/۶۹۶۹	۱۵/۳۱۵۷	۲۳/۵۴۳۷	۱۴/۲۵۳۷	$\frac{EI}{L^2}$ *

۷- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۱۰۰ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۸۱۴۱	۲۴/۳۳۳۴	۱۵/۰۴۳۰	۱۴/۶۷۸۵	۲۲/۵۶۴۳	۱۳/۶۶۱۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۶/۶۴۶۷	۲۵/۶۱۱۹	۱۵/۸۳۵۹	۱۵/۴۵۱۴	۲۳/۷۵۲۰	۱۴/۳۸۰۰	$\frac{EI}{L^2}$ *

۸- سختی دورانی اتصالات خورجینی بی نهایت فرض می شود.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۸۱۴۱	۲۴/۳۳۳۴	۱۵/۰۴۳۰	۱۴/۶۷۸۵	۲۲/۵۶۴۳	۱۳/۶۶۱۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۱۶/۷۹۹۳	۲۵/۸۴۶۴	۱۵/۹۸۰۹	۱۵/۵۹۲۸	۲۳/۹۶۹۸	۱۴/۵۱۱۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

جانبی، از مهاربندی جانبی استفاده می کنند. بنابراین، بررسی پایداری قاب با اتصالات خورجینی در حالت بدون مهاربندی جانبی، برای این گونه اتصالات ارزش کاربردی ندارد و تنها از جنبه نظری دارای اهمیت است.

باید آگاه بود، در قابهای نیمه صلب، اگر سختی دوران اتصال کم باشد، تغییر مکان جانبی قاب بر اثر بارهای جانبی زیاد است [۱]. به همین دلیل، هنگامی که اتصالات قاب انعطاف پذیری زیادی داشته باشند، برای کم کردن تغییر مکانهای

جدول ۲ - مقایسه بین بار انشعاب روش دقیق و شیوه پیشنهادی برای قاب مهاربندی نشده.

۱- اگر سختی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ باشد.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۲/۶۴۹۶	۳/۷۰۱۱	۲/۶۴۹۶	۰/۸۵۳۸	۰/۹۲۵۳	۰/۸۵۳۸	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۲/۸۷۰۷	۴/۰۰۹۹	۲/۸۷۰۷	۰/۹۲۵۱	۱/۰۰۲۵	۰/۹۲۵۱	$\frac{EI}{L^2}$ *

۲- اگر سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ در نظر گرفته شود.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۳/۰۴۶۲	۴/۱۰۰۹	۳/۰۴۶۲	۱/۴۰۵۴	۱/۶۴۴۹	۱/۴۰۵۴	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۳/۲۶۳۲	۴/۳۹۳۱	۳/۲۶۳۲	۱/۵۰۵۵	۱/۷۶۲۱	۱/۵۰۵۵	$\frac{EI}{L^2}$ *

۳- اگر سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ فرض شود.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۳/۷۱۴۹	۵/۱۲۳۲	۳/۵۳۹۱	۲/۴۶۷۷	۳/۰۵۹۱	۲/۲۳۸۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۳/۹۳۷۶	۵/۴۳۱۵	۳/۷۵۲۱	۲/۶۱۵۶	۳/۲۴۳۲	۲/۳۷۲۸	$\frac{EI}{L^2}$ *

۴- سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۱۰ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۴/۱۶۱۲	۶/۰۰۶۳	۳/۸۵۵۶	۳/۱۸۶۹	۴/۵۱۸۳	۲/۷۹۲۴	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۴/۳۷۲۴	۶/۳۱۱۱	۴/۰۵۰۹	۳/۳۴۷۹	۴/۷۴۷۵	۲/۹۳۳۹	$\frac{EI}{L^2}$ *

۵- سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۲۵ می باشد.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۴/۸۲۶۵	۷/۲۳۹۷	۴/۲۷۱۸	۳/۸۵۵۳	۵/۷۸۳۰	۳/۴۱۵۱	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۵/۱۰۴۰	۷/۶۵۵۹	۴/۵۱۷۴	۴/۰۷۶۹	۶/۱۱۵۵	۳/۶۱۱۵	$\frac{EI}{L^2}$ *

۶- سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ در نظر گرفته شده است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۴/۹۶۴۵	۷/۶۶۲۸	۴/۵۶۷۱	۴/۲۷۲۵	۶/۸۵۱۵	۳/۶۶۹۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۵/۰۹۳۱	۷/۸۶۱۲	۴/۶۸۶۱	۴/۳۸۳۰	۷/۰۲۸۴	۳/۷۶۴۱	$\frac{EI}{L^2}$ *

۷- سختی دورانی اتصال خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۱۰۰ فرض می شود.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۵/۰۳۵۷	۷/۷۷۴۲	۴/۵۶۷۳	۴/۵۰۶۶	۷/۲۳۹۳	۳/۸۵۵۶	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۵/۰۲۳۱	۷/۷۵۵۶	۴/۵۵۶۶	۴/۴۹۵۲	۷/۲۲۱۲	۳/۸۴۵۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

۸- سختی دورانی اتصال بی نهایت می باشد.

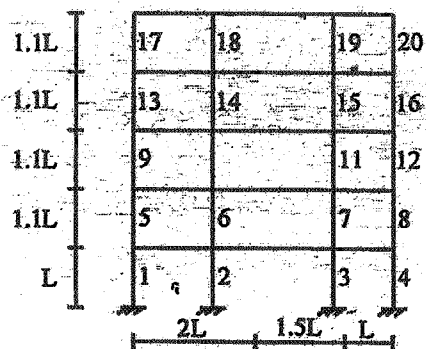
شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	ضریب
بار انشعاب از روش پیشنهادی	۵/۱۰۸۲	۷/۸۸۸۹	۴/۶۳۰۰	۴/۶۳۰۰	۷/۵۵۰۳	۳/۸۵۱۶	$\frac{EI}{L^2}$ *
بار انشعاب از تحلیل دقیق	۵/۰۹۶۳	۷/۸۶۸۵	۴/۶۲۳۰	۴/۵۶۰۷	۷/۳۲۶۴	۳/۹۰۱۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

۳-۲- قاب خورجینی سه دهانه

شکل (۷) نمایانگر یک قاب خورجینی سه دهانه و پنج طبقه است. سختی همه اتصالات خورجینی با هم یکی است و از EI/L تا گیرداری کامل تغییر می کند. سختی خمشی همه

تیرها برای $2EI$ سختی خمشی برای ستونهای کناری EI و برای ستونهای میانی $1.5EI$ است. سطح مقطع همه اعضا برابر $A=I$ در نظر گرفته می شود. اتصال ستون به پی گیردار فرض شده است.

بار بحرانی ستونهای ۹، ۱۳ و ۱۷ برابر ستون ۵، بار بحرانی ستونهای ۱۰، ۱۴ و ۱۸ همانند ستون ۶، بار انشعابی ستونهای ۱۱، ۱۵ و ۱۹ مساوی ستون ۷ و بار بحرانی ستونهای ۱۲، ۱۶ و ۲۰ برابر ستون ۸ به دست آمده است.



شکل ۷- قاب خورجینی سه دهانه

جدول ۳- مقایسه بین بار انشعاب شیوه پیشنهادی با روش دقیق برای قاب مهاربندی شده

۱- سختی دورانی اتصالهای خورجینی $\frac{EI}{L}$ در نظر گرفته شده است.

ضریب	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شماره ستون
$* \frac{EI}{L^2}$	۱۱/۵۵۹۹	۱۶/۵۴۲۸	۱۶/۱۶۴۷	۱۱/۲۸۹۵	۱۵/۰۴۲۸	۲۲/۰۱۷۲	۲۲/۰۱۷۲	۱۵/۰۴۲۸	بارانشعاب از روش پیشنهادی
$* \frac{EI}{L^2}$	۱۲/۴۴۶۴	۱۷/۸۱۱۴	۱۷/۴۰۴۴	۱۲/۱۵۵۳	۱۶/۱۹۶۷	۲۳/۷۰۵۸	۲۳/۷۰۵۸	۱۶/۱۹۶۷	بارانشعاب از تحلیل دقیق

۲- سختی دورانی اتصالهای خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۲۵ فرض می شود.

ضریب	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شماره ستون
$* \frac{EI}{L^2}$	۱۳/۵۸۰۳	۱۹/۸۵۴۸	۱۹/۱۱۷۳	۱۲/۴۳۲۱	۱۶/۲۲۲۲	۲۴/۳۳۳۳	۲۴/۰۲۴۳	۱۵/۸۱۴۱	بارانشعاب از روش پیشنهادی
$* \frac{EI}{L^2}$	۱۴/۱۵۱۰	۲۰/۲۵۰۷	۱۹/۷۸۸۱	۱۳/۸۲۰۰	۱۸/۴۱۴۸	۲۶/۹۵۲۳	۲۶/۹۵۲۳	۱۸/۴۱۴۸	بارانشعاب از تحلیل دقیق

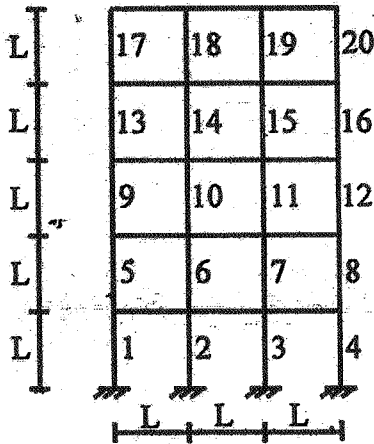
جدول ۴- مقایسه شیوه پیشنهادی و روش دقیق در محاسبه بار انشعاب قاب خورجینی بدون مهاربندی جانبی

۱- سختی دورانی اتصالهای خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۱۰ در نظر گرفته شده است.

ضریب	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شماره ستون
$* \frac{EI}{L^2}$	۳/۱۰۸۰	۴/۴۴۰۰	۴/۳۸۷۰	۲/۹۹۶۰	۴/۵۶۷۴	۶/۴۰۷۷	۶/۲۴۲۴	۴/۳۸۶۵	بارانشعاب از روش پیشنهادی
$* \frac{EI}{L^2}$	۳/۱۶۵۶	۴/۵۲۲۳	۴/۴۶۸۳	۳/۰۱۵۵	۴/۶۵۲۰	۶/۵۲۶۵	۶/۳۵۸۰	۴/۴۶۷۸	بارانشعاب از تحلیل دقیق

۲- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ضریب
بارانشعاب از روش پیشنهادی	۵/۱۰۸۲	۷/۶۶۲۳	۸/۰۰۴۱	۵/۶۶۴۴	۳/۸۷۹۵	۵/۸۱۹۳	۶/۲۴۲۴	۴/۴۷۵۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بارانشعاب از تحلیل دقیق	۵/۹۳۱۶	۸/۵۲۸۰	۸/۸۹۷۵	۶/۳۷۹۲	۴/۲۷۰۴	۶/۰۶۶۹	۶/۴۰۵۴	۴/۸۳۲۸	$\frac{EI}{L^2}$ *



شکل ۸- قاب خورجینی ۵ طبقه

۳-۳- قاب خورجینی پنج طبقه

شکل (۸) نمایانگر یک قاب خورجینی سه دهانه و پنج طبقه می باشد. سختی اتصال خورجینی برای قاب مزبور متغیر فرض می شود. سختی خمشی همه تیرها و ستونها برابر EI می باشد. سطح مقطع همه اعضا $A=I$ است. اتصال ستون به پی گیردار فرض می شود. قاب مورد نظر زیر اثر بار متمرکز در انتهای ستونها و در راستای قائم قرار دارد. بار انشعاب ستونهای ۹، ۱۳ و ۱۷ برابر بار انشعاب ستون ۵، بار انشعاب ستونهای ۱۰، ۱۴ و ۱۸ همانند ۶، بار انشعاب ستونهای ۱۱، ۱۵ و ۱۹ مساوی ستون ۷ و بار بحرانی ستونهای ۱۲، ۱۶ و ۲۰ برابر بار بحرانی ستون ۸ است.

جدول ۵- پاسخ شیوه پیشنهادی و روش دقیق برای بار انشعاب قاب خورجینی دارای مهاربندی جانبی.

۱- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵ است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ضریب
بارانشعاب از روش پیشنهادی	۱۴/۳۲۶۳	۱۵/۴۲۱۴	۱۵/۴۲۱۴	۱۴/۳۲۶۳	۱۳/۰۳۹۵	۱۴/۳۲۶۴	۱۴/۳۲۶۴	۱۳/۰۳۹۵	$\frac{EI}{L^2}$ *
بارانشعاب از تحلیل دقیق	۱۴/۸۴۵۲	۱۵/۹۸۰۰	۱۵/۹۸۰۰	۱۴/۸۴۵۲	۱۳/۵۱۲۷	۱۴/۸۴۵۲	۱۴/۸۴۵۲	۱۳/۵۱۲۷	$\frac{EI}{L^2}$ *

۲- سختی دورانی اتصالات خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ فرض شده است.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ضریب
بارانشعاب از روش پیشنهادی	۱۵/۰۴۲۸	۱۶/۲۲۲۲	۱۶/۲۲۲۲	۱۵/۰۴۲۸	۱۳/۶۶۰۱	۱۵/۸۱۴۸	۱۵/۸۱۴۸	۱۳/۶۶۰۱	$\frac{EI}{L^2}$ *
بارانشعاب از تحلیل دقیق	۱۶/۱۹۶۲	۱۷/۴۶۶۳	۱۷/۴۶۶۳	۱۶/۱۹۶۲	۱۴/۷۰۷۰	۱۷/۰۲۶۶	۱۷/۰۲۶۶	۱۴/۷۰۷۰	$\frac{EI}{L^2}$ *

جدول ۶- مقایسه بین پاسخ روش تقریبی و روش دقیق برای بار انشعاب قاب خورجینی بدون مهاربندی جانبی.

۱- اگر سختی دورانی اتصالهای خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ باشد.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ضریب
بارانشعاب از روش پیشنهادی	۳/۵۳۹۲	۳/۹۰۴۷	۳/۹۰۴۷	۳/۵۳۹۲	۲/۰۹۵۹	۲/۷۳۴۸	۲/۷۳۴۸	۲/۰۹۵۹	$\frac{EI}{L^2}$ *
بارانشعاب از تحلیل دقیق	۳/۸۶۹۴	۴/۲۶۸۵	۴/۲۶۸۵	۳/۸۶۹۴	۲/۲۹۱۶	۲/۹۸۹۳	۲/۹۸۹۳	۲/۲۹۱۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

۲- اگر سختی دورانی اتصالهای خورجینی $\frac{EI}{L}$ ۵۰ باشد.

شماره ستون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ضریب
بارانشعاب از روش پیشنهادی	۴/۴۴۶۶	۵/۴۹۶۷	۵/۵۹۶۷	۴/۴۴۶۶	۳/۶۶۹۰	۵/۱۰۸۸	۵/۱۰۸۸	۳/۶۶۹۰	$\frac{EI}{L^2}$ *
بارانشعاب از تحلیل دقیق	۴/۶۴۷۸	۵/۷۴۴۵	۵/۷۴۴۵	۴/۶۴۷۸	۳/۸۳۴۶	۵/۳۳۹۵	۵/۳۳۹۵	۳/۸۳۴۶	$\frac{EI}{L^2}$ *

۴- نتیجه گیری

بسیار غیر اقتصادی و خیلی محافظه کارانه است. زیرا، با در نظر گرفتن سختی دورانی بسیار کم برای اتصال، بار کمانش قاب به مقدار زیادی افزایش می‌یابد.

۵- در نظر گرفتن اتصال خورجینی به صورت یک اتصال به‌طور کامل صلب نیز عملی بسیار خطرناک است. زیرا، اثر سختی پیچشی اتصال خورجینی در تحلیل ایستایی و پویایی قاب خورجینی بسیار زیاد است [۱]. خاطر نشان می‌سازد، بسیاری از تحلیلگران به اشتباه این اتصال را صلب در نظر می‌گیرند.

۶- همان گونه که نمودارهای ژولین و لورنس را آیین نامه‌های معتبر به کار می‌برند، روش پیشنهادی شایستگی لازم برای بهره‌جویی طراحان را دارد.

افزون بر مسئله‌های درج شده، چندین قاب دیگر تحلیل پایداری شده است. نتیجه همه پاسخهای به دست آمده، مشابه این مثالها هستند. از مقایسه بار کمانش حاصل از تحلیل دقیق برای ستونهای قاب، با بار بحرانی محاسبه شده برای این ستونها با روش تقریبی پیشنهادی، نتیجه‌های زیر به دست می‌آید:

۱- روش پیشنهادی پاسخهای نزدیک به دقیق در اختیار می‌گذارد.

۲- روش پیشنهادی با استفاده از نمودار و با سرعت تحلیل را انجام می‌دهد. در برابر آن، تحلیل ماتریسی وقتگیر است و نیاز به رایانه، برنامه، داده‌دهی و داده‌ستانی دارد.

۳- با توجه به این که در این روش فرض شد که تمامی عضوهای متصل به ستون مورد نظر دچار کمانش می‌شوند، و در عمل چنین اتفاقی نادر است، روش پیشنهادی می‌تواند تا حدودی محافظه کارانه نیز باشد.

۴- در نظر گرفتن اتصال خورجینی به صورت یک اتصال ساده،

۱. مقدم، ح.، ح.، و کوهیان آفضلی، د.، بررسی مقاومت ساختمانهای اسکلت فولادی با اتصالات نیمه صلب (اتصالات خورجینی) در برابر زلزله، مؤسسه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، ۱۳۷۴.
2. Chen, W.f., and Lui, E.M., *Stability Design of Steel Frames*, CRC Press London, (1992).
3. Aristizabal-ochoa, J. D., "K-Factor for Columns In

- Any Type of Construction Nonparadoxical Approach," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.120, No. 4, PP. 1272-1290, 1994.
4. Kishi, N., Chen, W.F., and Goto, Y., "Effective Length Factor of Columns in Semirigid and Unbraced Frames," *Journal of Structural Engineering* Vol, 123, No.3, PP 313-320, 1997.