

# تعیین ضرایب ظرفیت باربری خاک به کمک اجزای محدود مبتنی بر مدل الاستیک - موهر کولمب

محمود وفائیان\*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

دریافت مقاله ۷۹/۳/۲۸ - دریافت نسخه نهایی ۸۱/۱۱/۶

چکیده - با استفاده از یک برنامه رایانه‌ای اجزای محدود به نام Afena، ظرفیت باربری خاک زیر پی باریکه‌ای تحت اثر بار قائم محوری مورد بررسی قرار گرفت و مبتنی بر مدل رفتاری الاستیک - موهر کولمب و برای وضعیت‌های مختلف مشخصات خاک، ضرایب ظرفیت باربری محاسبه شد. همچنین اثر نوع توزیع بار وارد بر سطح خاک از طرف پی به صورت یکنواخت و نایکنواخت به صورت توزیع سهمی، و اثر ابعاد پی و تأثیر زاویه اتساع مورد مطالعه قرار گرفت. ضرایب ظرفیت باربری که از این مطالعه به دست آمد با بعضی از مطالعات دیگر که مبتنی بر همین معیار انجام گرفته، تطابق قابل قبول دارد ولی نسبت به نتایج بعضی از نظریه‌های سابق فاصله دارد و بیشتر به اعداد نظریه‌های "ترزاگی"، "وسیک"، "سوکولفسکی" و تحلیل "بری" و "راید" نزدیک است. با وجود این اگر با افزایش تراکم خاک، افزایش زاویه اتساع خاک در نظر گرفته شود، منحنیهای حاصل از این مطالعه، به اعداد تحلیلهای دیگر و به نتایج بعضی آزمایشها هم نزدیک می‌شود. از این مطالعه دو نتیجه کلی زیر حاصل شد: اولاً بیان مقادیر ضرایب ظرفیت باربری خاک به صورت اعداد بسیار دقیق و منحصر به فرد نمی‌تواند بیانگر واقعیت باشد زیرا عوامل متعددی ممکن است بر رفتار نهایی خاک تأثیر گذار باشند، از این رو مقادیر ضرایب ظرفیت باربری را باید به صورت متغیری که در محدوده طیف حداقل تا حداکثر قرار دارد در نظر گرفت. ثانیاً باتوجه به اینکه ارقام به دست آمده، بسیار نزدیک به تحلیلهای نظریه است، از این رو می‌توان در شرایطی که برای آنها تحلیل مشخصی وجود ندارد (مثل بار مایل، یا نامحوری [۲۱]، یا در شرایط لایه‌ای بودن خاک و شرایط دیگر) بر اساس همین محاسبات رفتار خاک را بررسی کرد.

واژگان کلیدی: ضرایب ظرفیت باربری خاک، اجزای محدود، موهر - کولمب

## Evaluating the Soil Bearing Capacity Coefficients by Means of A Finite Element Program Based on Elasto-Plastic Mohr-Coulomb Behavior

M. Vafaian

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract :** *A finite element program based on elastic-plastic model of Mohr-Coulomb criterion was used to evaluate the bearing capacity coefficients of soil under shallow strip flexible footing. The results were compared with others' analytical results and it was found that the present study could offer quite consistent and rather precise values for the bearing capacity coefficients.*

\* دانشیار

*The effect of different parameters such as  $E, \nu, \phi, \psi, \gamma$ , type of mesh idealization, type of elements, type of load distribution at the footing base have been examined and some new results obtained and discussed. The main conclusion can be summarized as : that the values of bearing capacity coefficients for any particular amount of friction angle should not be expressed as a single number solely dependent on the friction angle, but the accurate values must be considered as the values dependent on some other effective parameters, which have been mentioned above .*

**Keywords :** soil bearing capacity , finite element , Mohr-Coulomb , shallow footing

## ۱- مقدمه

مبحث ظرفیت باربری خاک زیر پی، از اولین مباحثی است که مورد توجه و مطالعه پژوهشگران حوزه مکانیک خاک قرار گرفته است، به طوری که اولین رابطه آن توسط ترزاگی [۱] در سال ۱۹۴۳ ارائه شد:

$$q_{ult} = 0.5\gamma BN\gamma + cN_c + qN_q \quad (1)$$

که در این رابطه، ضرایب  $N_q, N_c, N_\gamma$  به نام ضرایب ظرفیت باربری خاک زیر پی نامیده می‌شود و از آن زمان تاکنون آنچه بطور غالب مورد بحث قرار گرفته است، تعیین یا تصحیح مقادیر این ضرایب (مخصوصاً ضریب  $N_\gamma$ ) بوده است.

از دیدگاه تاریخی می‌توان به مقالات مایر هف (۵۵ و ۵۱ و ۵۰ و ۱۹۴۸)، سوکولفسکی (۱۹۶۰)، هانسن (۷۵ و ۱۹۶۵) و وسیک (۱۹۷۵) اشاره کرد که شرح مختصری از نتایج محاسبات نامبردگان در بعضی کتابها و مراجع دیگر [۲ تا ۵] درج شده است.

در مورد بررسی چگونگی رفتار خاک زیر پی از مرحله وارد آمدن بار پی تا مرحله گسیختگی خاک و مخصوصاً در مورد شکل و اندازه بخش گسیخته شونده زیر پی، تا کنون بحثهای مفصل و تحلیلهای متعددی توسعه یافته است که بعضاً در کتابهای درسی [۲، ۳، ۶ و ۷] ارائه شده است. با وجود این چون روشهای تحلیل خاک و نوع فرضهای ساده کننده در آنها یا انتخاب کمیتها و پارامترهایی که مبتنی بر تجربیات مدلی است متفاوت بوده است، طبعاً اعداد حاصل از تحلیلهای پژوهشگران متفاوت به دست آمده است.

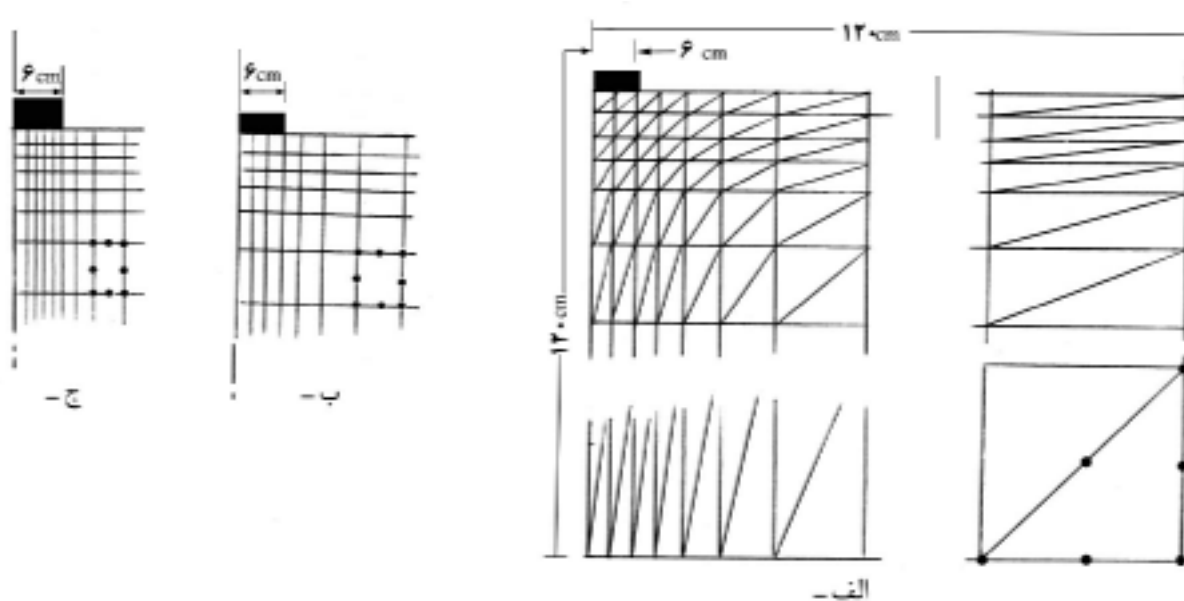
از سوی دیگر در کنار روشهای تحلیلی یا نیمه تحلیلی که از زمان ترزاگی و یا حتی قبل از وی مطرح شده است، استفاده از روشهای عددی مناسب و نیز کاربرد روش اجزای محدود به

صورت گسترده‌ای در بررسی این مبحث وارد شده و منجر به نتایج متعدد شده است. نمونه‌ای از این نوع مطالعات را می‌توان در مراجع [۸-۱۱] مطالعه کرد. در اینجا لازم به یادآوری است که هرچند استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل رفتار خاکها و از جمله در به دست آوردن ضرایب ظرفیت باربری از حدود سه دهه قبل در مقالات دیده می‌شود ولی به علت پیشرفت توان رایانه‌ها در چند سال اخیر و دسترسی به دقتهای بیشتر در اجرای برنامه‌ها، این موضوع هنوز هم مقتضی پژوهشهای جدیدتر است.

آنچه در مقاله حاضر مورد بحث قرار می‌گیرد نتایج استفاده از یک برنامه محاسباتی اجزای محدود به نام Afena است که در دانشگاه سیدنی استرالیا توسعه یافته است و یکی از کاراییهای آن بررسی رفتار خاک در شرایط الاستیک - پلاستیک کامل بر اساس موهر - کولمب در دو وضعیت وابسته<sup>۱</sup> و نا وابسته<sup>۲</sup> است. قابل ذکر است که استفاده از فرض رفتاری الاستیک - موهر - کولمب در برنامه های محاسباتی ضرایب ظرفیت باربری به کمک اجزای محدود نیز در سالهای اخیر کاملاً معمول بوده است [۹، ۱۰ و ۱۲]. در مقاله حاضر، علاوه بر ارزیابی کارایی این برنامه محاسباتی در مطالعه رفتار خاک و مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات دیگران، دیدگاههای دیگری در خصوص بعضی از متغیرها مورد توجه قرار گرفته و تأثیر آنها بررسی شده است.

## ۲- اشاره مختصر به برنامه رایانه‌ای مورد استفاده

همان طور که اشاره شد نرم افزار Afena در بخش مهندسی عمران (مرکز پژوهشهای ژئوتکنیک) دانشگاه سیدنی استرالیا توسعه یافته و یکی از مدلهای مورد محاسبه آن، مدل



شکل ۱- سه نوع شبکه بندی بکار برده شده در مطالعه حاضر الف - مثلث شش گرهی ب- چهارضلعی هشت گرهی ج- چهارضلعی با تمرکز زیر لبه پی

تا محور تقارن پی، حدود ۱۰ برابر عرض پی در نظر گرفته شد (شکل ۱). این فاصله عموماً بیش از حد مورد نیاز است زیرا چه در آزمایشها و چه در تحلیلهای نظری ظرفیت باربری، فاصله نهایی بخش گسیختگی خاک تا کناره پی حدود  $3/5B$  تا  $4B$  بیشتر نیست [۵، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۴]. همچنین با توجه به شرایط کرنش صفحه‌ای و پی باریکه‌ای مورد نظر، حل مسئله در شرایط دو بعدی انجام گرفته است.

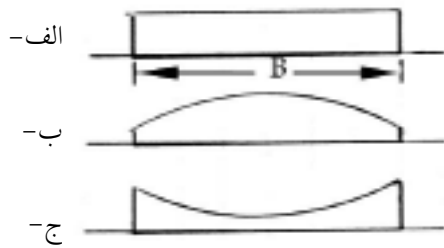
در این مطالعه، دو اندازه مختلف عرض پی، یعنی  $B_1=0/12m$  و  $B_2=1/2m$  به کار برده شد. تنها مزیت این اندازه‌های خاص این است که برای دانسیته  $1/6 \text{ t/m}^3$ ، مقدار  $0/5 \gamma B$  به ترتیب برابر ۱ و ۱۰ کیلو پاسکال است و مقدار به دست آمده برای  $q_{ult}$  همان  $N_{\gamma}$  یا  $10 N_{\gamma}$  خواهد بود. در عین حال در مواردی برای بررسی اثر ابعاد، در بعضی از حالتها، پیهای به عرض ۱۰ برابر کوچکتر و ۱۰ برابر بزرگتر هم در محاسبات به کار برده شد.

در انجام محاسبات، سه نوع شبکه بندی تعریف شد. این شبکه‌ها که در شکل‌های (۱- الف، ب و ج) دیده می‌شود با تقسیمات منظم مثلثی ۶ گرهی (شبکه TR)، تقسیمات مستطیلی ۸ گرهی (شبکه SQ) و با تمرکز اجزای زیر کناره پی

الاستیک - پلاستیک کامل با معیار موهر - کولمب است [۱۳]. در محاسبه مبتنی بر مدل موهر - کولمب می‌توان زاویه اتساع خاک را در ضمن مرحله پلاستیک شدن (گسیختگی) منظور کرد. اجزای قابل استفاده در این برنامه می‌تواند از نوع مثلثی ۳ گرهی، ۶ گرهی و ۱۰ گرهی و چهار ضلعیهای ۴ گرهی، ۸ گرهی و ۱۶ گرهی باشد. در پژوهش حاضر از اجزای چهار ضلعی ۸ گرهی و مثلثی ۶ گرهی استفاده شده است. این نرم افزار می‌تواند حدود ۳۵ نوع رفتار یا محاسبه را نشان دهد مثلاً المانهای تک بعدی، دو بعدی و با تقارن محوری، مدل‌های رفتاری الاستیک، الاستیک - موهر کولمب، کم کلی و هر کدام در شرایط همبسته و ناهمبسته، و با زیر گروهای متفاوت. این نرم افزار با یک برنامه نمایش نتایج همراه است که اطلاعات محاسباتی را به صورت نمودار به طرق مختلف نمایش می‌دهد.

### ۳- روش کار و مدل کردن فضای خاکی

با توجه به نوع مسئله که در شرایط متقارن و بار محوری قائم مورد بررسی است، کافی است که فقط نیمی از محیط خاکی مدل شود. در این مطالعه، فاصله مرزی محیط مدل شده



شکل ۲- سه نوع توزیع بار روی عرض پی

الاستیسیته زیاد هیچ گونه خطایی را به نتایج تحمیل نمی‌کند. به همین علت در سایر پژوهش‌های در این زمینه هم، [۸ تا ۱۰] و [۱۲]، برای تمام مقادیر  $\phi$  مقدار مدول الاستیسیته را  $200\text{MPa}$  و گاهی بزرگتر به کار برده اند. البته اگر محاسبه نشست واقعی و قابل مقایسه با نتایج تجربی منظور باشد، آن گاه لازم است مدول دگر شکلی واقعی به کار برده شود. در مورد زاویه اتساع، در بعضی از پژوهش‌ها، مقدار آن را از صفر تا مقدار  $\phi$  در نظر گرفته‌اند [۶] ولی نظر بعضی از محققان بر این است که مقدار زاویه اتساع معمولاً به بیش از یک سوم زاویه اصطکاک داخلی نمی‌رسد، [۱۵].

توزیع بار روی پی به صورت نیروهای گرهی در نظر گرفته شد، بنابراین در شبکه مثلثی TR، بارها توسط ۵ گره در نیم عرض پی (روی دو جزء) و در شبکه مربعی QR بارها توسط ۷ گره در نیم عرض پی (روی سه جزء) اعمال شده است. در این مطالعه، توزیع بار وارد بر گره‌ها به دو صورت آزمایش شد، یعنی علاوه بر توزیع یکنواخت که معمول است (شکل ۲-الف)، توزیع‌های نایکنواخت دیگری، مطابق شکل (۲-ب) و (۲-ج) مورد آزمایش قرار گرفت. علت انتخاب این نوع توزیع‌ها که تقریباً مشابه سهمی است، این است که تأثیر نوع توزیع بار پی بر مقدار به دست آمده برای ظرفیت باربری مشخص شود.

تقسیم بار گرهی روی گره‌ها بر اساس دستورات عمل نرم افزار مورد استفاده که باید مطابق شکل (۳-الف) باشد، انجام شد. در نتیجه، مقادیر بار گرهی برای توزیع یکنواخت به نسبت نشان داده شده در شکل (۳-ب) و برای توزیع سهمیهای

( شبکه RQ) به کار برده شد و در مورد شرایط مرزی بخش مدل شده، مرزهای قائم دو طرف فقط در امتداد  $x$  محدود شده و در امتداد  $z$  آزاد است.

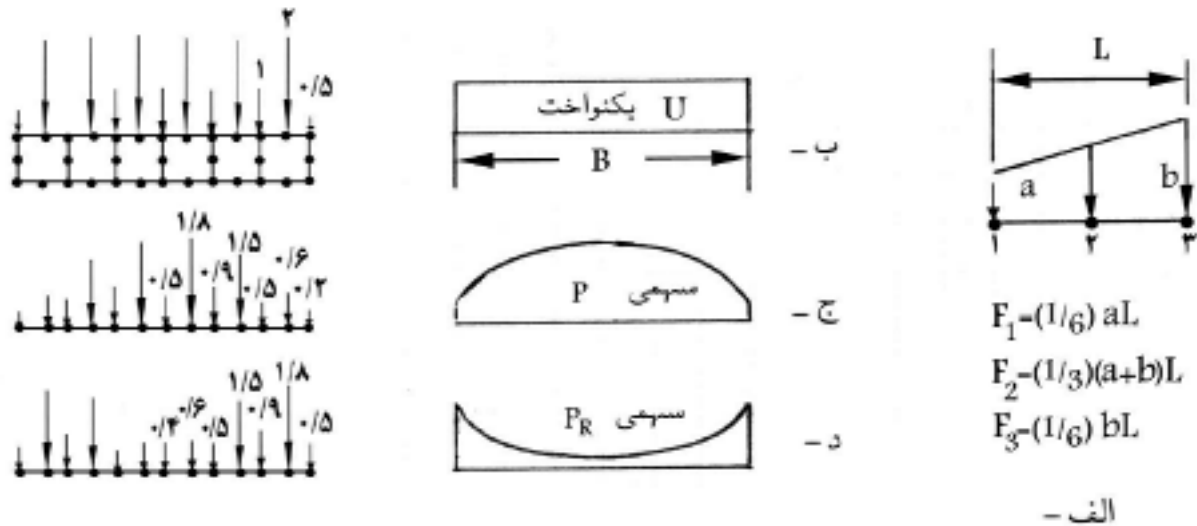
لازم به توضیح است که در ضمن محاسبات متعدد معلوم شد که شبکه مربعی SQ انعطاف پذیری بیشتری نشان می‌دهد و به همین علت، عمده محاسبات بر پایه همین نوع شبکه صورت گرفت. از طرفی مشاهده شد که افزایش فاصله‌های مرزی (بیش از آنچه که در شکل ۱ است) منجر به نتایج دقیقتر نمی‌شود. همچنین در بسیاری از موارد نتایج حاصل از نیم مقطع مورد محاسبه با نتایج حاصل از محاسبه مقطع کامل مقایسه شد.

تأثیر تغییر پارامترهایی چون  $E$ ،  $\nu$ ،  $k_0$  و تأثیر اندازه افزایش جزئی بار در هر مرحله مورد بررسیهای اولیه قرار گرفت که به نتایج مقایسه‌ای آنها اشاره خواهد شد.

#### ۴- ابعاد و کمیت‌های به کار برده شده

در این مطالعه، دو اندازه مختلف عرض پی، یعنی  $1/2$  متر و  $0/12$  متر (و در بعضی محاسبات به منظور مقایسه، ابعاد  $1/2$  سانتیمتر و  $12$  متر نیز) در شرایط کرنش مستوی به کار برده شد. زاویه اصطکاک داخلی خاک از صفر تا  $45^\circ$ ، زاویه اتساع از صفر تا  $3/3$  (و گاهی تا  $2/2$ )، وزن واحد خاک  $16\text{ kN/m}^3$ ، ضریب پواسون  $\nu = 0/15$ ، ضریب فشار جانبی  $K_0 = 0/5$  و مدول الاستیسیته  $E = 500\text{MPa}$  انتخاب شد. ضمن اینکه جز ارقام بالا، ارقام دیگری برای مقایسه و بررسی اثر پارامترها، نیز در مواردی در محاسبات به کار برده شد.

مقدار انتخابی برای مدول الاستیسیته، گرچه مقدار بزرگی به نظر می‌رسد (مخصوصاً برای خاکهای سست و با دانسیته متوسط)، ولی به این علت که تغییر شکلها و کرنشهای زیاد موجب خطا و تقریب زیادی در حل مسئله می‌شود و باید کوشش کرد که دگر شکلیها هرچه کوچکتر نگه داشته شوند و از طرفی چون سیلان پلاستیک در این برنامه صرفاً مبتنی بر تنش انجام می‌گیرد و کرنشها نقشی ندارند، از این رو مدول



شکل ۳- وضعیت کاربرد بار گرهی در توزیعهای مختلف فشار

متناظر با  $\gamma D_f N_q$  نشان می‌دهد، از این رو مقدار  $N_q$  در هر مورد، از رابطه زیر محاسبه شد.

$$N_q = (q_2 - q_1) / (\gamma D_f) \quad (4)$$

$q_1$  و  $q_2$  به ترتیب بار شکست منحنی در شرایط وجود روبرار ( $D_f \neq 0$ ) و در شرایط پی سطحی ( $D_f = 0$ ) است.

همان طور که اشاره شد، برای تعیین ضرایب ظرفیت باربری، ابتدا باید بار شکست، یعنی مقاومت نهایی ( $q_{ult}$ ) خاک به دست آید. در این راستا، در بعضی موارد به خوبی می‌توان از منحنیهای بار - نشست حاصل، نقطه معینی را که تغییر شیب منحنی کاملاً مشخص است به دست آورد، مثلاً در منحنیهای تعیین  $N_c$ ، برای مقادیر کوچک  $\phi$ ، محل تغییر شیب منحنی با وضوح قابل مشاهده است. در عین حال در بسیاری موارد محل شکست منحنی چندان مشخص نیست و تغییر شیب منحنی حالت تدریجی دارد. به منظور هماهنگی کامل بین تمام مقادیر به دست آمده، نقطه آغاز شاخه نهایی منحنی به عنوان ظرفیت باربری در نظر گرفته شد. می‌توان پذیرفت که تقریب انتخاب این نقطه در حد ۲٪ است. این تقریب در بررسیهای رفتاری خاک کاملاً موجه است زیرا بعضی از پژوهشگران حتی دو مقدار متفاوت برای ظرفیت باربری در نظر گرفته‌اند، یعنی مقدار ابتدایی متناظر با پلاستیک شدن بخش زیر پی (شروع خم

انتخاب شده به صورت شکل‌های (۳-ج) و (۳-د) به برنامه داده شد و در هر حال وضعیت پی، حالت انعطاف‌پذیر دارد.

برای محاسبه  $N\gamma$ ، محیط وزن دار ( $\gamma \neq 0$ ) در نظر گرفته شده و با شرایط  $c = 0$  و پی سطحی، و با انتخابهای مختلف  $\phi$ ، ترسیم نمودارهای بار - نشست و تعیین مقدار بار شکست، مقادیر  $N\gamma$  از رابطه:

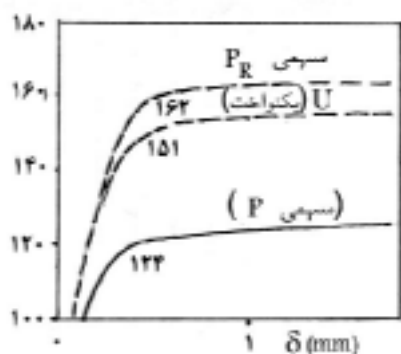
$$q_{ult} = 0.5 B N\gamma \quad (2)$$

محاسبه شد.

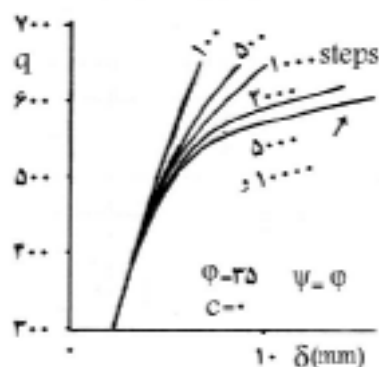
به منظور محاسبه ضریب  $N_c$ ، محیط بی وزن ( $\gamma = 0$ ) و با انتخابهای مختلف برای  $\phi$  مقدار بار نهایی شکست در هر مورد به دست آمد، در این صورت چون برای پی نواری سطحی،  $q_{ult} = c N_c$  است، با مقادیر ثابت  $c$  و افزایش  $\phi$ ، مقادیر  $N_c$  محاسبه شد.

$$q_{ult} = c N_c \quad (3)$$

برای تعیین ضریب  $N_q$ ، در همان شرایط محاسبه  $N\gamma$ ، لایه‌ای از خاک به ضخامت معین ( $D=B$ ) روی سطح خاک منظور شده و نتیجه حاصل از محاسبه به صورت نمودارهای بار - نشست در هر مورد به دست آمد. از آنجا که افزایش مقدار بار شکست مربوط به هر مورد نسبت به وضعیتی که لایه خاک روبرار در محاسبه نبوده است، میزان افزایش ظرفیت باربری را



شکل ۵- تأثیر چگونگی توزیع بار

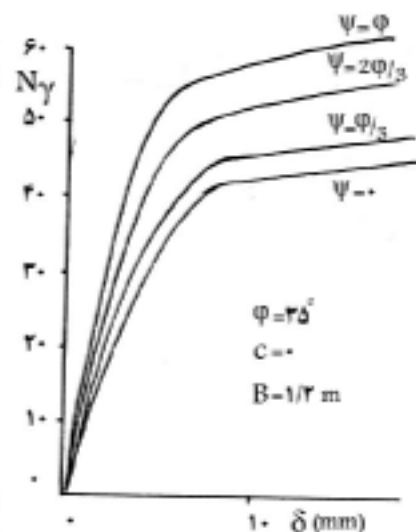


شکل ۴- تأثیر تعداد مراحل محاسبه بر نمودار بار-نشست

محاسباتی  $N_{\gamma}$  برای تعداد مراحل محاسبه ۵۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ به ترتیب ۳۷/۵، ۲۲/۳ و ۱۴/۱۶ به دست آمده است. در مطالعه حاضر، افزایش جزئی بار معمولاً در محدوده ۰/۰۱ تا ۰/۰۳ kPa انتخاب شده است. با وجود این در بعضی موارد ریزتر شدن مقدار افزایش جزئی بار موجب تخریب شدن محاسبات و حصول جوابهای ناهنجار می شود. عموماً مقدار افزایش جزئی بار روی نمودارهای مربوط به  $N_{\gamma}$  نشان داده شده است. در عین حال هر چه مقاومت خاک کمتر باشد باید مقدار جزئی افزایش بار را کوچکتر گرفت.

۲- تأثیر چگونگی توزیع بار در سطح تماس پی، در شکل (۵) نشان داده شده است. همان طور که از این شکل مشخص می شود، نمودار بار - نشست خاک تابع چگونگی توزیع بار در عرض پی است و برای بار سهمی،  $p$  در شکل (۲-ب)، ظرفیت باربری خاک کمترین مقدار را نشان می دهد. در مطالعه حاضر، عمدتاً از توزیع یکنواخت استفاده شده است.

۳- چگونگی اثر افزایش زاویه اتساع در شکل (۶) و (۷) دیده می شود. بطوری که ملاحظه می شود، افزایش زاویه اتساع از صفر تا  $\phi$  برای زاویه های اصطکاک تا  $30^\circ$  تأثیر اندکی دارد (شکل ۷) و از زاویه های  $35^\circ$  به بالا، تأثیر افزایش زاویه اتساع، قابل توجه است و این تأثیر با افزایش زاویه  $\phi$  نیز بطور نسبی افزایش می یابد. مثلاً برای  $\phi = 35^\circ$  افزایش زاویه اتساع از صفر تا  $\phi$  تأثیری تا حد ۳۰٪ در مقادیر  $N_{\gamma}$  دارد (شکل ۶)، در



شکل ۶- نمونه ای از چگونگی اثر افزایش زاویه اتساع بر مقدار نهایی ظرفیت باربری

شدگی منحنی) و مقدار نهایی، متناظر با گسترش یافتن منطقه پلاستیک به طرفین زیر پی (شروع شاخه نهایی منحنی).

## ۵- نتایج محاسبات

۱- تأثیر افزایش جزئی بار ( $\Delta q$ ) در شکل (۴) ارائه شده است. همان طور که قابل پیش بینی است ریزتر شدن مقدار افزایش جزئی (یا افزایش تعداد مراحل محاسبه) منجر به کاهش یافتن مقدار محاسبه شده ظرفیت باربری و مشخص شدن نقطه شکست می شود. در مرجع [۹] نیز اشاره شده است که مقدار

جدول ۱- مقایسه اعداد  $N_{\gamma}$  از نظریه‌ها و محاسبات مختلف

۱۴ P, PR	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	$\phi$
		۰		۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
		۱/۸		۱/۵	۱/۲	۱/۵			۰/۴۵	۰/۲	۰/۴	۰/۵	۰/۵	۵
		۳/۱			۳/۱	۳	۳		۱/۲۲	۰/۵	۱/۲	۱/۳	۱/۳	۱۰
		۶/۰۵		۴/۵	۵/۲	۵/۴	۶		۲/۶۵	۱/۲	۰/۹۵	۲/۳	۲/۹	۱۵
۸	۱۳/۸	۱۲/۵		۸ و ۱۰		۹/۷	۱۲		۵/۴	۲/۹	۱/۸	۴/۸	۶/۲	۲۰
				۲۲ و ۱۸	۲۰/۵	۱۷/۴	۲۳	۱۷/۵	۱۱	۷	۳/۲	۹/۷	۱۳	۲۵
۱۷	۲۵	۲۳	۱۰	۲۱ و ۱۸					۲۲/۴	۱۵	۵/۵	۱۹/۷	۲۷/۷	۳۰
۴۸ و ۳۰	۴۹	۴۴/۵	۲۱ و ۱۹	۴۵ و ۳۸		۳۲/۳	۵۵	۳۲/۴	۴۸	۳۵	۱۰	۴۲/۴	۶۱/۵	۳۵
۱۰۵ و ۶۳	۱۰۳	۹۴	۵۵ و ۴۴		۱۰۱	۶۳/۲		۶۲/۸	۱۰۹/۵		۱۹	۱۰۱	۱۴۵	۴۰
۱۴۱		۲۰۴	۱۵۷ و ۹۰		۲۶۰	۱۳۴		۱۳۱	۲۷۲		۳۵	۲۶۰	۳۷۳	۴۵

توضیح: ستونهایی که اعداد آنها کامل نیست به این علت است که آن اعداد در مرجع اصلی موجود نبوده است و یا محاسبه نشده است. شماره ستونها، به ترتیب مربوط به مراجع زیر است:

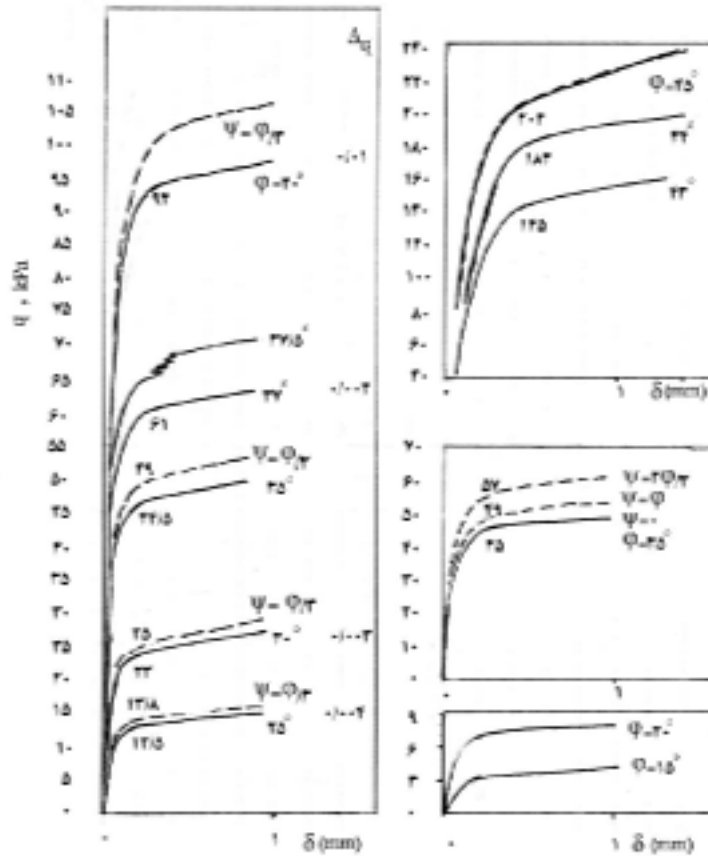
- ۱- پراندت (۱۹۲۱) [۱۲ و ۱۰]، ۳ و ۲- ترازگی (۱۹۴۳)، برش کلی و موضعی [۱]، ۴- هانسن و کریستنسن (۱۹۶۹) [۱۲ و ۱۰]،
- ۵- و سیک (۱۹۷۳) [۷]، ۶- پک و همکاران (۱۹۷۴) [۸]، ۷- گریفیت (۱۹۸۲) [۱۲] برای عرض پی ۱/۵ متر و ۳/۵ متر، ۸- بری و راید (۱۹۸۷) [۶]، ۹- هوانگ و چن (۱۹۹۴) [۸]، ۱۰- مانوهاران و دسگوپتا (۱۹۹۵) [۱۰]، ۱۱- فریدمن و برد (۱۹۹۷) [۹]، در ستونهای ۱۰ و ۱۱ دو عدد نشان داده شده است که این دو عدد مربوط به حالت‌های ناوابسته ( $\psi = 0$ ) و وابسته ( $\psi = \phi$ ) است،
- ۱۲- مطالعه حاضر، توزیع بار یکنواخت ( $\psi = 0$ )، ۱۳- مطالعه حاضر، بار یکنواخت و ( $\psi = \phi/3$ )، ۱۴- مطالعه حاضر، توزیع نایکنواخت بار ( $\psi = 0$ )

اندازه عرض پی از ۱۲ سانتیمتر تا ۱۲ متر تغییری در ضریب ظرفیت باربری  $N_{\gamma}$  ایجاد نمی‌کند ولی برای یک پی تصویری مدلی با عرض ۱/۲ سانتیمتر، این ضریب اندکی افزایش نشان می‌دهد. توضیح اینکه اعداد به دست آمده مربوط به شکست منحنیها به ترتیب باید بر ۰/۱، ۱، ۱۰ و ۱۰۰ تقسیم شوند تا ضریب  $N_{\gamma}$  به دست آید، (رابطه ۲). این نتیجه‌گیری قاعدتاً قابل پیش‌بینی است، زیرا نتایج آزمایشهای متعدد که گردآوری شده است همین واقعیت را نشان می‌دهد، شکل (۹).

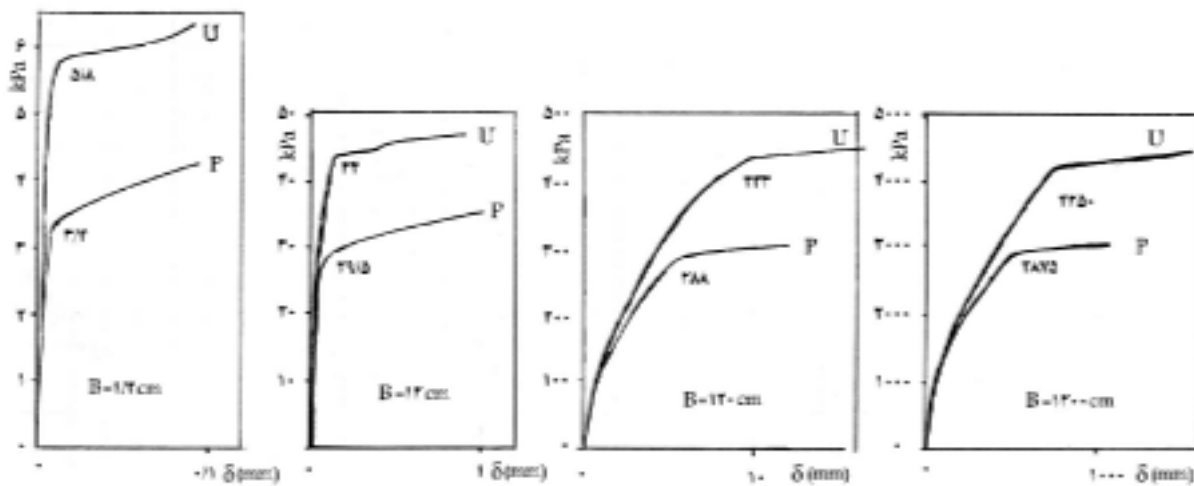
حالی که برای  $\phi = 40^\circ$ ، این افزایش تا ۵۰٪ می‌رسد.

۴- از نمودارهای بار - نشست در شکل (۷)، برای مقادیر مختلف  $\phi$  از صفر تا  $45^\circ$ ، مقادیر  $N_{\gamma}$  محاسبه شده و در جدول (۱) نشان داده شده است.

در شکل (۸) نمودارهای بار - نشست برای چهار اندازه مختلف عرض پی و هر کدام برای دو نوع توزیع بار، یعنی یکنواخت U و سهمی P- مراجعه به شکل (۳)، ارائه شده است و به طوری که از مقایسه این نمودارها مشخص می‌شود، تغییر



شکل ۷- وضعیت نمودارهای بار - نشست (در خاک وزین) برای محاسبه  $N_\gamma$  (توزیع بار U)



شکل ۸- منحنی بار - نشست برای چهار اندازه مختلف عرض پی و دو نوع توزیع بار (P و U)

شده بود برای محاسبه  $N_c$  به کار برده شد و مشاهده شد که منحنیهای نرمال شده آنها کاملاً بر هم منطبق بود.  
۵- مقادیر به دست آمده از منحنیهای بار - نشست در

باید یادآوری کرد که در مورد ضریب  $N_c$ ، اندازه عرض پی هیچ گونه تأثیری بر مقدار این ضریب ندارد. در مطالعه حاضر نیز همان اندازه‌های عرض پی که برای ضریب  $N_\gamma$  به کار برده



جدول ۲- مقادیر ضریب  $N_c$  از تحلیلها و محاسبات مختلف

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	$\phi$
۴/۶ و ۵/۷	۸	۵/۴۵	۵/۱		۵/۱۴	۵/۷	۵/۷	۰
			۶/۲	۷	۶/۴۹	۶/۸	۷/۵	۵
۷/۲ و ۸/۸	۹	۸/۷۵	۸	۹	۸/۳۵	۸	۹/۸	۱۰
			۱۲	۱۰/۵	۱۱	۱۰	۱۳	۱۵
۱۲/۴ و ۱۶/۹	۱۵/۵	۱۵/۱	۱۶	۱۵ تا ۱۶	۱۴/۸۳	۱۲	۱۷/۷	۲۰
			۲۱	۲۰ تا ۲۱/۵	۲۰/۷۲	۱۵	۲۵	۲۵
	۳۱	۲۸/۵	۳۰	۲۸ تا ۳۲	۳۰/۱۴	۱۹	۳۵	۳۰
			۴۰	۴۰ تا ۴۸	۴۶/۱۲	۲۵	۵۵	۳۵
	۵۹	۵۵/۵			۷۵/۳	۳۵	۹۵	۴۰
								۴۳
								۴۵

توضیح : شماره ستونها مربوط به مراجع زیر است:

۱- و ۲- ترزاگی (۱۹۴۳) [۱]، ۳- و سیک (۱۹۷۳) [۷] و سوکولفسکی، ۴- مانوهاران و دسگوپتا (۱۹۹۵) [۱۰]، ۵- گریفیت (۱۹۸۲) [۱۲]، ۶- مطالعه حاضر، بار یکنواخت ( $\psi = 0$ )، ۷- مطالعه حاضر، بار یکنواخت ( $\psi = \phi/3$ )، ۸- مطالعه حاضر، بار نایکنواخت ( $\psi = 0$  و PR,P)

۷- نمودارهای شکل‌های (۱۲) و (۱۳) مقادیر به دست آمده از این مطالعه برای ضرایب محاسبه  $N_c$ ،  $N_q$  و  $N_{\gamma}$  را به ترتیب در مقیاس معمولی و در نمایش نیمه لگاریتمی نشان می‌دهند.

### ۶- مقایسه نتایج به دست آمده با سایر پژوهشها

#### الف - در مورد ضریب $N_{\gamma}$

در جدول (۱) مقادیر حاصل از تحلیلها یا محاسبات متعدد در مورد ضریب  $N_{\gamma}$  در مقایسه با مقادیر محاسبه شده از مطالعه حاضر ارائه شده است و همین مقایسه در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نیز دیده می‌شود. به طوری که از این مقایسه‌ها مشخص می‌شود اعداد حاصل از محاسبه اخیر، در شرایط توزیع بار یکنواخت، عمدتاً اندکی کمتر از مقادیر نظری معمول به دست آمده است و در همین حال با افزایش زاویه اتساع و تغییر نوع توزیع بار، این اعداد به مقادیر تحلیل‌های دیگر نزدیک می‌شود.

شکل (۱۰) برای ضریب  $N_c$  و برای مقادیر مختلف  $\phi$  از صفر تا  $۴۰^\circ$ ، در جدول (۲) ارائه شده است.

در این منحنیها علاوه بر اثر زاویه اتساع، اثر نوع توزیع بار نیز منظور شده است. برای به دست آوردن مقادیر  $N_c$ ، عموماً مقدار  $c$  برابر  $۱۰ \text{ kPa}$  در نظر گرفته شده است بنابراین  $N_c = q_{ult}/10$ ، و در عین حال به منظور حصول اطمینان، محاسبات مشابهی برای شرایط  $c = ۱۰ \text{ kPa}$  برای زاویه اصطکاک صفر تا  $۳۰^\circ$  انجام گرفت و ملاحظه شد که نتایج حاصل از این محاسبات با مقادیر حاصل از محاسبات برای  $c = ۱۰ \text{ kPa}$  یکسان است، اما با توجه به اینکه افزایش مقدار  $c$  موجب افزایش تعداد مراحل محاسبات تا بار گسیختگی می‌شد، به این علت از مقدار  $۱۰ \text{ kPa}$  در محاسبات استفاده شد.

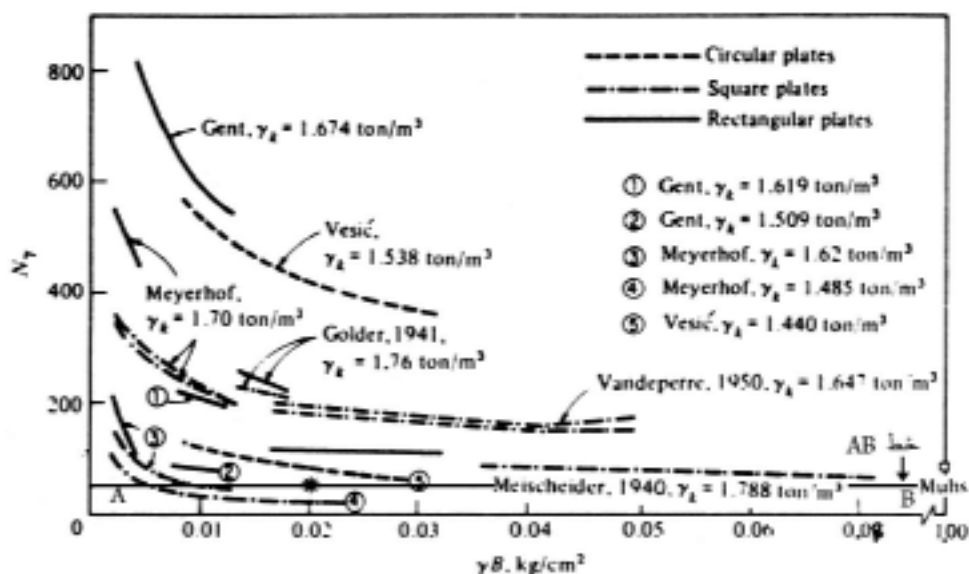
۶- منحنیهای بار - نشست برای تعیین ضریب  $N_q$  در شکل (۱۱) نشان داده شده است. از این منحنیها، مقادیر به دست آمده برای ضریب  $N_q$ ، در جدول (۳) ارائه گردیده است.

جدول ۳- مقادیر ضریب  $N_q$  از تحلیلهای و محاسبات مختلف

۵	۴	۳	۲	۱	$\phi$
		۱	۱	۱	۰
۰/۸		۱/۵۷	۱/۳۵	۱/۷	۵
۱/۷۵	۳/۳	۲/۴۷	۱/۸۳	۲/۷	۱۰
۳/۲	۶ تا ۵/۵	۳/۹۴	۲/۵	۴/۵	۱۵
۶	۱۲ تا ۱۰	۶/۴	۳/۷	۷	۲۰
۱۰/۵	۱۸ تا ۱۶	۱۰/۶۶	۵/۵	۱۲/۷	۲۵
۱۹/۵	۳۵ تا ۲۹	۱۸/۴	۸/۲	۲۲/۵	۳۰
۳۴		۳۳/۳	۱۲/۵	۴۱/۴	۳۵
۶۶		۶۴/۲	۲۰	۸۱/۳	۴۵
-		۱۳۵	۳۵	۱۶۰	

توضیح : شماره ستونها مربوط به مراجع زیر است:

۱ تا ۴- مانند جدول شماره ۲، ۵- مطالعه حاضر، بار یکنواخت

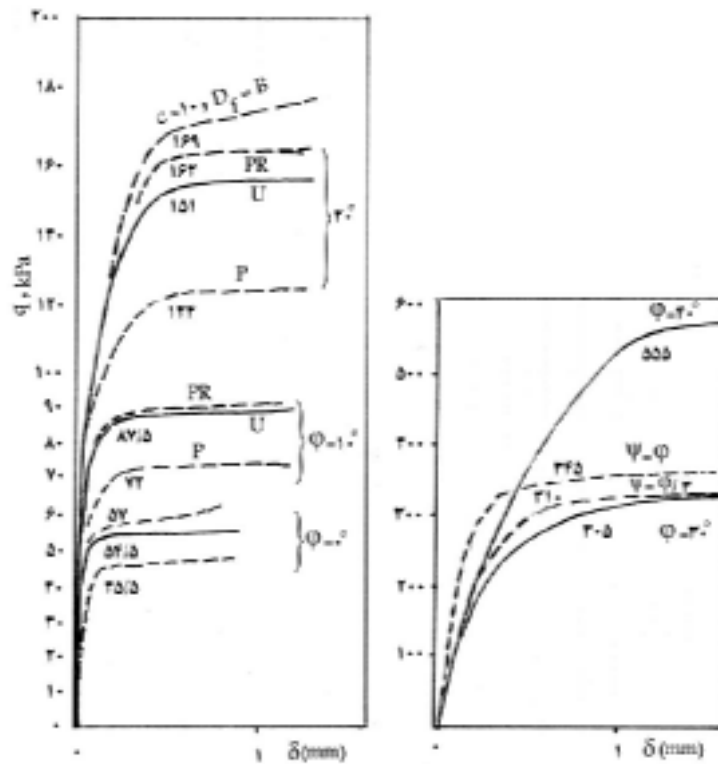


شکل ۹- تأثیر عرض پی بر مقدار  $N_q$  [۳] اقتباس از ۱۹۶۵ DeBeer

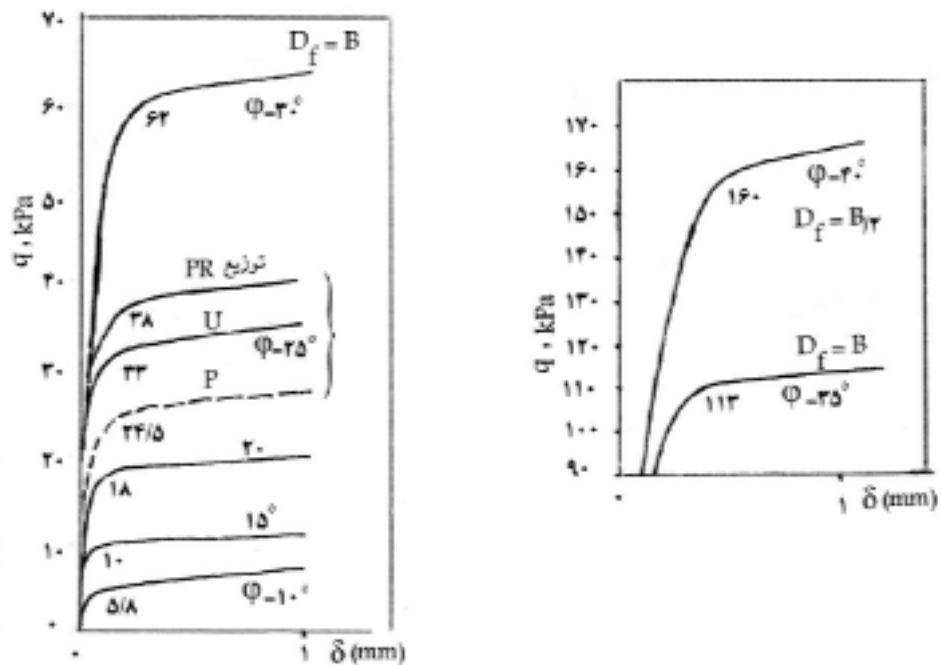
(خط AB مربوط به محاسبه مقاله حاضر مبتنی بر شکل ۸ است)

در این است که نمودارهای شکل (۱۴) حاصل از نظریه‌ها و تحلیلهای مبتنی بر سطح گسیختگی یا تحلیل حدی است، در حالی که نمودارهایی که در شکل (۱۵) مقایسه شده

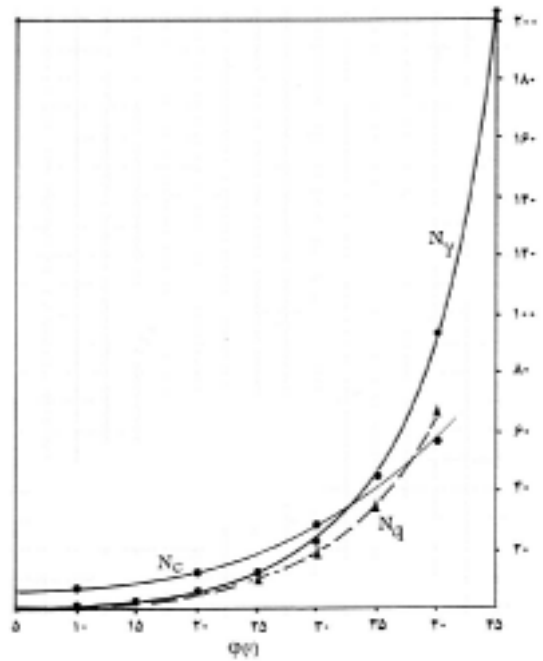
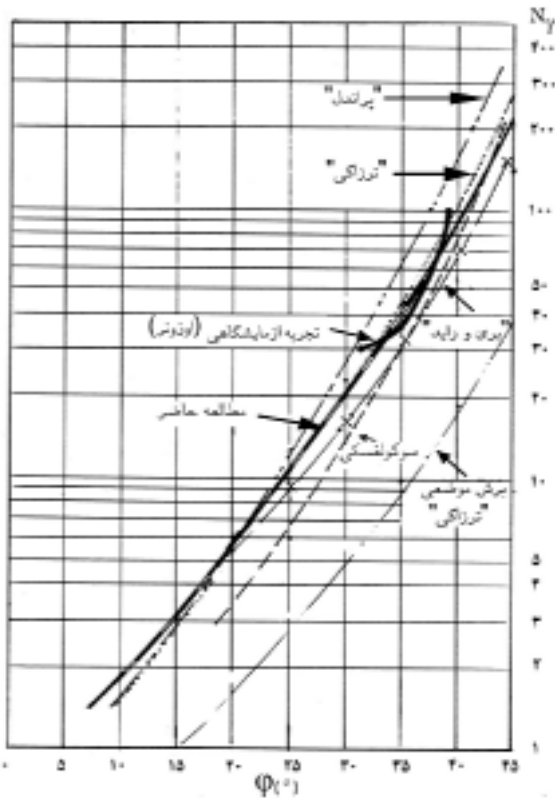
در شکل (۱۵)، این مقایسه‌ها با نتایج محاسبات مشابه از گریفیت [۱۲] و مانوهاران و دسگوپتا [۱۰]، فریدمن و برد [۹] انجام گرفته است. تفاوت نمودارهای شکل‌های (۱۴) و (۱۵)



شکل ۱۰- وضعیت نمودارهای بار - نشست (خاک بی وزن) برای محاسبه  $N_c$

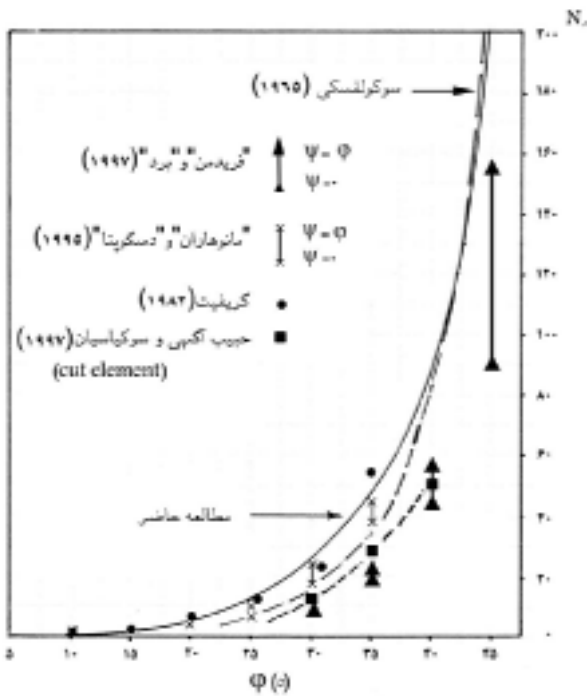


شکل ۱۱- منحنیهای بار - نشست برای محاسبه  $N_q$

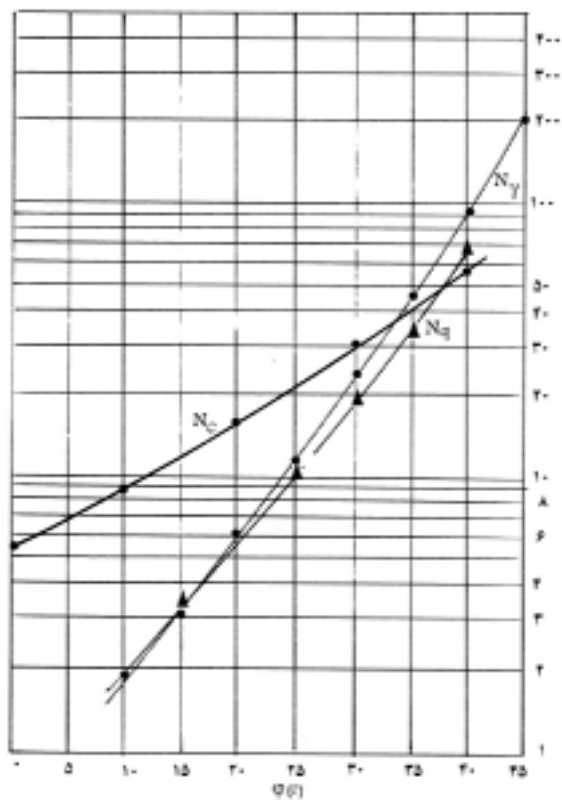


شکل ۱۲- نمودار ضرایب ظرفیت باربری به دست آمده از محاسبه حاضر

شکل ۱۴- مقایسه ارقام به دست آمده برای ضریب  $N\gamma$  با اعداد تحلیلیهای دیگران و تجربه آزمایشگاهی



شکل ۱۵- مقایسه ارقام به دست آمده برای ضریب  $N\gamma$  با نتایج محاسبات دیگر



شکل ۱۳- مقادیر به دست آمده برای ضرایب ظرفیت باربری در مقیاس نیمه لگاریتمی

$$N\gamma = 2[1 + \exp(\pi \tan \phi) N_\phi] \tan \phi \cdot \sqrt{N_\phi} \quad (\text{Prandtl, 1921})$$

$$N\gamma = 2 \tan \phi [\exp(\pi \tan \phi) N_\phi + 1] \quad (\text{Vesic, 1973})$$

$$N\gamma = \exp(\pi \tan \phi) N_\phi - 1 \quad (\text{Berry \& Reid, 1987})$$

$$N\gamma = 0.25 \sqrt{N_\phi} \left\{ \sqrt{N_\phi} \cdot \exp\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right] - 1 \right\} + \frac{3 \sin \phi}{1 + 8 \sin^2 \phi} \left\{ \left[ N_\phi - \frac{\cot \phi}{3} \right] \cdot \exp\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right] + \sqrt{N_\phi} \cdot \frac{\cot \phi}{3} + 1 \right\} \quad (\text{Huang \& Chen, 1994})$$

و در این رابطه‌ها،  $N_\phi = \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$  است.

### ب - در مورد ضریب $N_c$

در شکل (۱۶) نمودارهای به دست آمده برای ضریب  $N_c$  از نظریه‌های معمولی و نیز در مقایسه با نتایج کاربرد برنامه‌های اجزای محدود نشان داده شده است. بطوری که ملاحظه می‌شود محدوده مقادیر به دست آمده برای این ضریب وسیع است و تفاوت مقدار  $N_c$  با افزایش  $\phi$ ، افزایش می‌یابد، در بعضی از محاسبات تفاوت شرایط پی صاف و پی زبر هم با هم مقایسه شده است و این تفاوت بعضاً در جهت عکس مشاهده می‌شود [۱۲]. مقایسه عدد ۵/۴۵ حاصل از محاسبه حاضر با عدد ۵/۴۸ که از رابطه زیر برای شرایط  $\phi = 0$  به دست می‌آید. مبین دقت و صحت عملکرد برنامه به کار برده شده است.

$$\frac{V}{B} = S_u \left( 1 + \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \alpha + \sqrt{1 - \alpha^2} \right) \quad [19]$$

در این رابطه  $H, V, \alpha = H/B, S_u$  به ترتیب مؤلفه قائم و افقی بار وارد بر یک پی باریکه‌ای به عرض  $B$  روی خاک چسبنده با مقاومت  $S_u$  است و برای شرایط بار قائم  $H=0$  محسوب می‌شود.

از مجموع این بررسی می‌توان نتیجه گرفت که محاسبات اجزای محدود مبتنی بر مدل الاستیک - موهر کولمب منجر به مقادیر  $N_c$  کوچکتر از مقادیر نظری ترزاگی و تا حدی نزدیک ارقام پراندل و وسیک می‌شود. و تقریباً به طور کامل بر نتایج گرفتیت و مانوهاران و دسگوپتا منطبق است. در همین حال با افزایش زاویه اتساع، مقادیر به دست آمده برای ضریب  $N_c$  به

است نتایج کاربرد روش اجزای محدود و مبتنی بر مدل الاستیک - موهر کولمب است.

به طوری که از این نمودارها دیده می‌شود، ارقام حاصل از محاسبات مختلف، در محدوده‌هایی به هم نزدیک‌اند و با افزایش مقدار  $\phi$  تفاوت آنها زیاد می‌شود و معمولاً نمی‌توان با دلایل مستند نشان داد که خطای کدامیک نسبت به واقعیت کمتر یا بیشتر است، مگر اینکه نتایج آزمایشهای خیلی دقیق در دسترس باشد. از طرفی نتایج آزمایشهای تجربی آزمایشگاهی در مورد ضریب  $N\gamma$  نه تنها عموماً پراکندگی قابل توجهی دارند بلکه معمولاً از نتایج نظریه‌ها فاصله دارند. در عین حال وضعیت عمومی تفاوت آنها از نظریه‌ها طوری است که اگر زاویه  $\phi$  مربوط به آنها ۱۰ تا ۱۵ درصد افزایش داده شود یعنی شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شود [۱۷] معمولاً نتایج آزمایشگاهی به نمودارهای نظری نزدیک می‌شود. همچنین در نمودار شکل (۱۴) نتیجه تجربه آزمایشگاهی تجربیات اوزونر [۴] روی ماسه مشخصی دیده می‌شود. این مقایسه به این علت ارائه شده است که نگارنده مقاله، خود همین آزمایشها را برای بارهای نامحوری و مایل ادامه داده است [۵]. نکته مشخص در این مقایسه این است که شکل منحنی تجربی تغییرات  $N\gamma$  بر حسب  $\phi$  با منحنیهای حاصل از تحلیلهای نظری مشابه نیست و اصولاً نوع انحنای منحنیهای نظری و محاسباتی بیشتر به هم نزدیک‌اند تا با منحنیهای تجربی.

از این مقایسه مشخص می‌شود که نتیجه محاسبه اخیر، ارقامی را نشان می‌دهد که در محدوده نظریه‌های معروف قرار می‌گیرد و به نظریه‌های "ترزاگی" [۱] و "سوکولفسکی" [۱۸] نزدیکتر است و نیز تا حدی به ارقام "بری" و "راید" [۶] نزدیکتر از سایرین است ولی از آنجا که تغییرات  $N\gamma$  تابع نوع توزیع بار و میزان زاویه اتساع نیز هست، لذا می‌توان مقادیر حاصل از این محاسبه را به عنوان مقادیر محتمل واقعی پذیرفت.

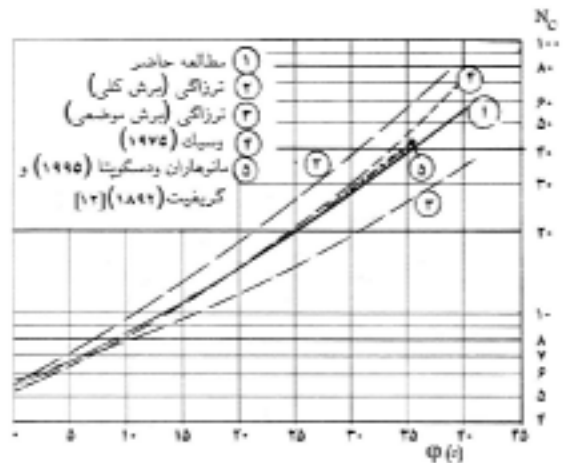
لازم به یادآوری است که مقادیر ستونهای ۱، ۵، ۸ و ۹ در جدول (۱) به ترتیب از رابطه‌های زیر محاسبه شده‌اند.

### ج - در مورد ضریب $N_q$

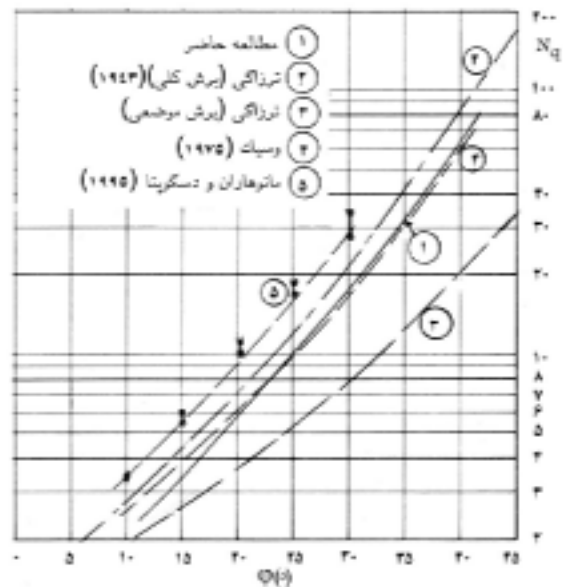
نمودارهای شکل (۱۷)، نشان‌دهنده مقایسه مقادیر به دست آمده از محاسبه اخیر با نتایج بعضی از نظریه‌ها یا محاسبات سایر پژوهشگران است و نتایج اخیر به ارقام حاصل از تحلیل وسیک کاملاً نزدیک است.

### ۷- نتیجه گیری

با استفاده از برنامه اجزای محدود مبتنی بر مدل الاستیک - موهر کولمب ضرایب ظرفیت باربری خاک زیر پیه‌های باریکه‌ای و بار قائم محوری محاسبه شد و مقادیر به دست آمده از این محاسبه، با مقادیر حاصل از نظریه‌ها و تحلیل‌های معمولی و محاسبات مشابه مبتنی بر اجزای محدود مقایسه شد. این بررسی نشان داد که مدل الاستیک - موهر کولمب می‌تواند در تحلیل و بررسی رفتار خاک مورد استفاده قرار گیرد و مخصوصاً با تنظیم منطقی و مناسب پارامترهای مؤثر در محاسبه در جهت تطابق دادن نتایج با ارقام تجربی، می‌توان مشخصات قابل قبولی برای آن محیط خاکی به دست آورد. با توجه به اینکه به جز زاویه اصطکاک داخلی و نوع توزیع بار، تغییر پارامترهای دیگر تأثیر محسوسی در محاسبه ظرفیت باربری خاک در شرایط پی باریکه‌ای و بار محوری قائم ندارد، می‌توان به این نتیجه رسید که عامل مهم در تفاوت نظریه‌ها با نتایج حاصل از روش‌های محاسباتی مبتنی بر اجزای محدود از یک سو، و با نتایج آزمایشها از سوی دیگر، انتخاب مناسب زاویه اصطکاک، زاویه اتساع خاک در ضمن گسیختگی و نوع توزیع بار است و به همین علت محاسبات متعددی که بر اساس کاربرد فرض موهر - کولمب در برنامه‌های اجزای محدود انجام گرفته است، هر چند قاعداً اصول برنامه نویسی و معیار گسیختگی برای همه آنها یکسان بوده است ولی جوابهای نهایی به طور کاملاً یکسان به دست نیامده است، از این رو می‌توان پذیرفت که اگر شرایط مبنایی وارد در محاسبه، مناسب تنظیم شود اثر سایر پارامترهای مؤثر را می‌توان با این مدل بررسی کرد.



شکل ۱۶- مقایسه ارقام بدست آمده برای ضریب  $N_c$  (بار یکنواخت و  $\psi = 0$ ) با نتایج بعضی از پژوهشگران



شکل ۱۷- مقایسه ارقام بدست آمده برای ضریب  $N_q$  (بار یکنواخت و  $\psi = 0$ ) با نتایج بعضی از پژوهشگران

نمودارهای نظری دیگر نزدیک می‌شود و همین امکان انتخاب متغیرهای مختلف از امتیازهای کاربرد برنامه اجزای محدود و نیز استفاده از فرض رفتاری الاستیک - موهر کولمب است که می‌توان بر اساس آن نتایج تجربیات را بررسی کرده و در راستای هماهنگی با آنها مناسبترین وضعیت محاسباتی را تنظیم کرد.

برای خاکهای سست ( $\phi \leq 30^\circ$ )،  $\psi = 0$ ، برای خاکهای متوسط ( $30^\circ < \phi < 36^\circ$ )،  $\psi = \phi/4$ ، و برای خاکهای متراکم ( $36^\circ < \phi \leq 41^\circ$ )،  $\psi = \phi/3$  و برای خاکهای خیلی متراکم ( $\phi > 41^\circ$ )،  $\psi = \phi/2$ .

از تطابق نتایج محاسبه با ارقام حاصل از بعضی نظریه‌ها و تجربه‌ها این نتیجه به دست آمد که اگر اثر زاویه اتساع به صورت افزایشی به موازات افزایش زاویه اصطکاک در محاسبات منظور شود، در این صورت منحنی تغییرات ضرایب ظرفیت باربری به واقعیت‌های تجربی و به بعضی از نظریه‌ها نزدیکتر می‌شود، برای این منظور ترتیب زیر پیشنهاد می‌شود:

## قدردانی

(ICL) است. از این رو شایسته است از موافقت و تصویب این پروژه قدردانی و سپاسگزاری گردد.

این مطالعه بخشی از پروژه تحقیقاتی مصوب حوزه معاونت محترم پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان (کد ۷۸۲

## واژه‌نامه

1. associated
2. non-associated

## مراجع

1. Terzaghi K., *Theoretical Soil Mechanics*; John Wiley, N. Y., 1943.
2. Bowles, J., *Foundation Analysis and Design*, 1982.
3. Winterkorn, H. F., and Fang, H.Y., *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand, 1975.
4. Uzuner, B. A., "Centrally and Eccentrically Loaded Strip Foundations on Sand", Ph. D. Dissertation, Strathclyde University, 1975.
5. Vafaeian, M., "Strip Foundations on Sand under Centrally and Eccentrically Inclined Loads", Ph.D. Dissertation; Strathclyde University, 1978.
6. Berry, P. L., and Reid, D., *An Introduction to Soil mechanics*, McGraw Hill, 1987.
7. Das, B. M., *Principles of Geotechnical Engineering*, 1994.
8. Chen, W. F., and Huang, T. K., *Plasticity Analysis in Geotechnical Engineering, in Developemnts in Geotechnical Engineering*, 1994.
9. Frydman, S., and Burd, H. J., "Numerical Studies of Bearing Capacity Factor  $N_\gamma$ ", *J. of Geotech. and Geoenv. Eng., ASCE*, Vol. 123, No.1, pp. 20-29 1997.
10. Manoharran, N., and Dasgupta, S. P., "Bearing Capacity of Surface Footings by Finie Elements" *Computers and Structures*, Vol. 54, No. 4, pp. 563-586 1995.
11. Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C., and Lewis, R. W., "Associaed and Non-Associated Visco-Plasticity and Plasticity in Soil Mechanics". *Geotechnique* 25, No.4, pp. 671-689 1995.
12. Griffiths, D. V., "Computation of Bearing Capacity Factors Using Finite Elements". *Geotechnique*, 32 No.3, pp. 195-202, 1982.
13. Carter, J. P., and Balaam, N. P., *AFENA Users' Manual*. Center for Geotechnical Research, University of Sydney, 1995.
14. Meyerhof, G.G., An Investigation of the Bearing Capacity of Shallow Foundations on Dry Sand, *Proc. 2nd ICSMFE*, Vol. 1, 1948.
15. Schanz, T., and Vermeer, P. A., Angles of Friction

- and Dilatancy of Sand, *Geotechnique* 46, No.1, pp. 145-151, 1996.
16. Ingra, T.S., and Baecher, G.B., Uncertainty in Bearing Capacity of Sands. *ASCE*, Vol. 109, No.7, pp. 899-914. 1983.
17. Lee, K, L., "Comparison of Plane Strain and Triaxial Tests on Sand" *J. of SM and FE Division, ASCE*, Vol. 96, SM3, pp. 901-921, 1970.
18. Sokolovski, V. V., "*Statics of Soil Media*," 1960.
19. Bolton, *A Guide to Soil Mechanics*, Mc Millan London, 1979.
20. Habibagahi, G., and Sookiasian, P., "Ultimate Bearing Capacity and Failure Characteristic of Strip Footings Resting on Elasto-plastic, Work Hardening" *Proc. 4th Int. Conf. on Civil Engineering.*, Tehran, Iran, pp. 212-221, 1997.
۲۱. وفائیان، م؛ "ارزیابی ضرایب بار مایل و بار نامحوری در ضرایب ظرفیت باربری خاک به کمک مدل الاستیک - پلاستیک با معیار موهر-کولمب"، نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، جلد ۳۶، شماره ۳- آذرماه ۱۳۸۱، ص ۳۸۳ تا ۳۹۶.