

# شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد و مقایسه شرایط مرزی تقارنی و دقیق در سطح آزاد

محسن گودرزی\* و احمدرضا عظیمیان\*\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۱/۲/۱۴ - دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۲/۶)

**چکیده** - در شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد، اعمال شرط مناسب در سطح آزاد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای شبیه‌سازی سطح آزاد دو روش به کار رفته که در یکی از آنها از شرط مرزی تقارنی (تقریبی) و در دیگری از شرط مرزی دقیق استفاده شده است. برای اعمال شرط مرزی دقیق الگوریتمی معرفی شده که آن را به صورت یک زیربرنامه به یک برنامه رایانه‌ای سه بعدی منطبق بر مرز، که برای جریانهای دائم بدون سطح آزاد به کار می‌رود، اضافه کرده و به برنامه‌ای برای حل جریان دائم با سطح آزاد تبدیل کرده‌ایم. این الگوریتم به گونه‌ای است که به میزان قابل توجهی از ناپایداریهای ناشی از امواج سطحی می‌کاهد. برای اثبات کارایی این برنامه آن را برای دو کانال رو باز اجرا کردیم. از مقایسه نتایج حاصل از این برنامه با نتایج موجود، صحت عملکرد برنامه به اثبات رسید. پس از آن برنامه را برای دو جریان که با هم مخلوط می‌شوند به کار برده و نتایج آن را با نتایج حاصل از مدل سطح تقارنی مقایسه کردیم. این مقایسه نشان داد که اگر جابه‌جایی سطح آزاد کوچک باشد، هر دو مدل منجر به نتایج تقریباً مشابهی می‌شوند.

واژگان کلیدی: جریان با سطح آزاد، لایه اختلاط، فشار غیر هیدروستاتیک

## Numerical Simulation of Free Surface Flows and Comparison of Symmetry and Real Boundary Conditions at the Free Surface

M. Goodarzi and A. R. Azimian

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** For implementation of the free surface boundary condition, a new subroutine has been introduced to an existing steady 3-D body fitted code. This code was previously written for steady flow simulation in closed ducts. The algorithm used in this subroutine reduces the instability problem according to the free surface wave generation. For code validation, it was applied to two different open channels. The results obtained for these test cases were compared with existing data. The comparison of the two sets of data was promising and proved that with this subroutine it is possible to predict the free surface position very well. The results of this routine were also compared with the symmetry boundary condition at the free surface for two mixing flows and it showed that, if the changes of the free surface elevation were small, the symmetry boundary condition could be considered as an accurate enough method.

**Keywords:** Free surface flow, Mixing layer, Non-hydrostatic pressure.

\*\* - دانشیار

\* - دانشجوی دکتری

atm	زیرنویس برای خواص اتمسفر
fs	زیرنویس برای خواص در سطح آزاد
g	شتاب ثقل، متر بر مجذور ثانیه
h	ارتفاع سیال نسبت به دستگاه مختصات مرجع، متر
P	فشار استاتیک، پاسکال
t	زمان، ثانیه
u	مؤلفه سرعت در جهت x، متر بر ثانیه
v	مؤلفه سرعت در جهت y، متر بر ثانیه
W	مؤلفه سرعت در جهت Z، متر بر ثانیه
x	محور افقی مختصات
y	محور عرضی مختصات
Z	محور عمودی مختصات
$\rho$	چگالی سیال، کیلوگرم بر متر مکعب
$\psi$	فشار غیر هیدروستاتیک، پاسکال
$\kappa$	جهت عمود بر سطح آزاد در مختصات عمومی

## ۱- مقدمه

مدلسازی جریانهای با سطح آزاد یکی از مشکلترین مباحث عددی در دینامیک سیالات است. در مدلسازی عددی چنین جریانهایی اعمال شرط مرزی در سطح آزاد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بر حسب نوع جریان مورد مطالعه از شرایط مرزی دقیق و تقریبی در این سطح استفاده می‌شود. برای اعمال شرط مرزی دقیق که حرکت سطح آزاد را در حل معادلات وارد کند از دو روش کلی زیراستفاده می‌شود:

الف- ردیابی سطح آزاد درون یک شبکه ثابت به نحوی که سطح آزاد همیشه درون شبکه باشد. در این روش از یک کمیت اسکالر که معرف محل سطح آزاد است استفاده می‌شود. از میان روشهای به کار رفته در این دسته به روشهای MAC [۱] و VOF [۲] می‌توان اشاره کرد. در روش MAC از ذرات مجازی که در ابتدا روی سطح آزاد قرار دارند استفاده می‌شود. در صورتی که ناپیوستگی در سطح آزاد وجود نداشته باشد این ذرات در طی مراحل حل روی سطح آزاد باقی مانده و ردیابی آنها سطح آزاد را در هر لحظه مشخص می‌کند. در روش VOF کسر حجمی سیال در هر سلول از طریق حل معادله انتقال برای یک کمیت اسکالر در کل میدان به دست می‌آید و بدین ترتیب در هر لحظه محل سطح آزاد را می‌توان تعیین کرد. اطلاعات بیشتر در این زمینه‌ها را در مراجع معرفی شده می‌توان پیدا کرد. در این روشها اولاً محدوده میدان حل بزرگتر

از میدان سیال انتخاب می‌شود و ثانیاً به علت خطاهای ناشی از الگوریتمهای عددی از قبیل انتشار عددی، سطح آزاد محاسبه شده ممکن است دارای ضخامت و یا شکستگی باشد.

ب- ردیابی سطح آزاد به‌عنوان مرز شبکه حل. در این روش شبکه حل منحصر به سیال بوده و نقاط شبکه در خارج از سیال وجود ندارند و محل سطح آزاد به‌عنوان یکی از مرزهای میدان حل به‌طور پیوسته باید مشخص شود. بنابراین شبکه حل نیز در هر مرحله از محاسبات بازسازی خواهد شد. در این روش سطح آزاد به‌صورت یک رویه با ضخامت صفر معرفی می‌شود. این روش برای جریانهای دائم درون کانالها بسیار مناسب است.

در روش (ب) اگر جابه‌جاییهای سطح آزاد کوچک باشد اثر چندانی روی الگوی جریان نخواهد داشت. زیرا در چنین حالتی الگوی جریان بیشتر متأثر از تنشهای برشی و نیروهای اینرسی خواهد بود. برای چنین جریانهایی از جابه‌جایی سطح آزاد صرف‌نظر می‌شود و سطح آزاد را با یک سطح تقارن (سطح صلب بدون اصطکاک<sup>۱</sup>) تقریب می‌زنند. به‌عنوان مثال جریان الحاقی در کانالهای روباز را می‌توان در نظر گرفت. اغلب محققان برای شبیه‌سازی این جریان از شرط مرزی تقریبی استفاده کرده‌اند که به چند نمونه از آنها اشاره می‌شود.

دموران و رودی [۳] تزریق جریان از پهلو به یک کانال روباز را با استفاده از روشهای عددی بررسی کرده‌اند. آنها سطح آزاد را به‌صورت یک سطح تقارن مدل کرده‌اند. نتایج آنها یک

$$(w_{\text{convc.}}) - (w_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (3)$$

معادلات  $k-\varepsilon$  استاندارد هم برای مدل اغتشاشی به کار می‌روند که از تکرار آنها در اینجا خودداری شده است.

در صورتی که سیال جریان نداشته باشد، توزیع فشار استاتیکی همان توزیع فشار هیدروستاتیک درون سیال خواهد شد. در چنین حالتی سطح آزاد سیال موازی صفحه افق است. اگر سیال در حرکت باشد به علت وجود نیروهای اینرسی و لزجت، توزیع فشار درون سیال از حالت هیدروستاتیک انحراف پیدا کرده و شکل افقی سطح آزاد نیز تغییر می‌کند. با این حال اگر تغییرات سطح آزاد نسبت به حالت افقی کوچک باشد، باز هم سهم بیشتر فشار درون سیال همان فشار هیدروستاتیک خواهد بود.

اختلاف فشارهای استاتیکی و هیدروستاتیک را فشار غیرهیدروستاتیک<sup>۲</sup> می‌نامند. در صورتی که  $z=0$  را منطبق بر نقطه‌ای از سطح آزاد در نظر بگیریم که عمق سیال در آن نقطه معلوم است، شکل (۱)، در هر نقطه درون سیال فشار غیرهیدروستاتیک ( $\psi$ ) از معادله زیر محاسبه می‌شود

$$\psi = p + \rho g z - p_{\text{atm}} \quad (4)$$

که در آن جمله اول سمت راست فشار استاتیکی، جمله دوم فشار هیدروستاتیک، و جمله سوم فشار اتمسفر است. حال گرادیانهای فشار را در معادلات ممتوم با گرادیانهای فشار غیرهیدروستاتیک می‌توان جایگزین کرد

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \rho g \quad (5)$$

با توجه به معادلات (۵) معادلات ممتوم به صورت زیر می‌شوند

$$(u_{\text{convc.}}) - (u_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$(v_{\text{convc.}}) - (v_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7)$$

$$(w_{\text{convc.}}) - (w_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (8)$$

این معادلات مشابه معادلات ممتوم در جریانهای تراکم ناپذیر بدون سطح آزادند که در آنها نیروی ثقلی در نظر گرفته نمی‌شود. لذا از روشهای حل آنها برای جریانهای با سطح آزاد

ناحیه جدایش را در محل تزریق نشان می‌دهد. برای بررسی میدان جریان فوق، مک گوئیرک و رودی [۴] از یک مدل متوسط‌گیری عمقی استفاده کرده‌اند. در تحقیق آنها جزئیات جریان در راستای عمق کانال مهم نبوده و تنها طول ناحیه جدایش مورد نظر بوده است. ویراکون [۵] نیز مطالعاتی تجربی و عددی در یک کانال دو شاخه با زاویه برخورد ۶۰ درجه انجام داده است. در مدل عددی ویراکون هم سطح آزاد به صورت یک سطح تقارن در نظر گرفته شده است.

در این مقاله با استفاده از روش (ب) الگوریتمی عددی تهیه شده، که به صورت یک زیربرنامه به برنامه موجودی که برای جریانهای بدون سطح آزاد نوشته شده اضافه می‌شود و آن را به برنامه‌ای برای حل جریانهای با سطح آزاد تبدیل می‌کند. کارایی و دقت این الگوریتم توسط دو مثال و مقایسه نتایج آنها با نتایج تحلیلی و عددی موجود اثبات شده است. در ضمن برای دو جریان الحاقی موازی و غیرموازی نتایج عددی حاصل از مدل سطح تقارن با نتایج عددی مدل اخیر مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد، در صورتی که جابه‌جایی سطح آزاد کوچک باشد، مدل سطح تقارن تقریب خوبی برای شرط مرزی در سطح آزاد است.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر یک جریان دائم سه بعدی تراکم ناپذیر مغشوش شامل معادلات پیوستگی، ممتوم و یک مدل اغتشاشی است. با توجه به اینکه در جریانهای با سطح آزاد نیروی ثقل یکی از نیروهای وارد بر سیال است، در اینجا فقط معادلات ممتوم در دستگاه کارتزین  $(x, y, z)$  نوشته شده‌اند. در دستگاه مختصات انتخابی صفحه  $xy$  در صفحه افق بوده و محور  $z$  در امتداد قائم و در خلاف جهت شتاب ثقل قرار دارد. برای سادگی جملات جابه‌جایی و انتشار به صورت خلاصه معرفی شده‌اند

$$(u_{\text{convc.}}) - (u_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$(v_{\text{convc.}}) - (v_{\text{diff.}}) = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

سطح آزاد: شرط مرزی در سطح آزاد کمی پیچیده است و به صورتهای مختلفی آن را می‌توان اعمال کرد که در ذیل به شرح هر کدام می‌پردازیم. اما قبل از آن بهتر است که قدری به خود سطح آزاد بپردازیم.

از دیدگاه هندسی سطح آزاد رویه‌ای است که معادله آن به صورت زیر معرفی می‌شود

$$z = h(x, y, t) \quad (9)$$

مشتق کامل معادله (9) در میدان جریان و روی سطح آزاد به صورت زیر است

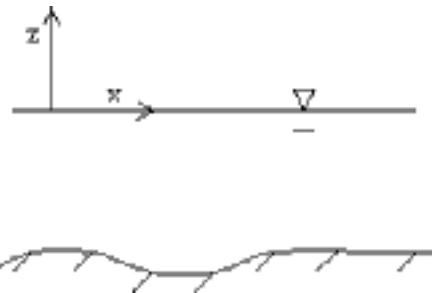
$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_{fs} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{fs} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (10)$$

این مشتق زمانی پیوسته است که معادله (9) (سطح آزاد) نقطه منفرد نداشته باشد. لذا جریانهایی که سطح آزاد آنها شکستگی دارد مورد نظر نیستند و ممکن است در این نوع جریانها یکی از دو مشتق سمت راست معادله (10) نامعین شوند. سمت چپ معادله (10) همان مؤلفه  $w$  سرعت در سطح آزاد است. بنابراین معادله (10) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$w_{fs} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_{fs} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{fs} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (11)$$

معادله (11) را شرط سینماتیکی در سطح آزاد می‌نامند. این رابطه نشان می‌دهد که مؤلفه‌های سرعت سیال در سطح آزاد به گونه‌ای هستند که دبی جرمی روی این سطح صفر است. در یک جریان دائم جمله اول سمت راست معادله (11) صفر است.

چون سطح آزاد حد فاصل بین دو محیط است، پس نیروهای وارد به دو طرف آن باید با هم در تعادل باشند. این نیروها شامل کشش سطحی، نیروی برشی ناشی از باد و فشارهای اتمسفر و سیال هستند. در اکثر جریانهای با سطح آزاد از دو نیروی کشش سطحی و تنش برشی صرف نظر می‌شود. بنابراین در تحلیل مورد نظر این مقاله پدیده گذرای ناپایداری هلمهلتز که امواجی را در سطح آزاد ایجاد می‌کند وجود نخواهد داشت و شرط دینامیکی در سطح آزاد برابری فشار سیال با فشار



شکل ۱- دستگاه مختصات کارتزین و سطح آزاد آب

نیز می‌توان بهره گرفت. تنها شرایط لازم در این مورد این است که دستگاه مختصات انتخاب شده منطبق بر شرایط فوق بوده و شرط مرزی سطح آزاد نیز به گونه مناسبی اعمال شود که این قسمت در بخش بعد تشریح خواهد شد. مفهوم فشار غیرهیدروستاتیک و دسته معادلات اخیر توسط محققان مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است [۶ و ۷].

### ۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی را در کانالهای باز به چهار شرط ورودی، خروجی، سطوح صلب که شامل دیوارها و کف کانال می‌شود، و سطح آزاد می‌توان تقسیم کرد.

سطوح صلب: در این سطوح از شرط عدم لغزش و یا قانون دیوار [۸] استفاده می‌شود. در این مقاله از قانون دیوار برای این مرزها استفاده شده است.

خروجی جریان: خروجی جریان جایی در نظر گرفته می‌شود که تغییر کمیتها در راستای جریان ناچیز باشند. لذا به طور معمول در این مرز از شرط گرادینان صفر در راستای جریان برای کلیه کمیتهای وابسته استفاده می‌شود.

ورودی جریان: در ورودی جریان از مقادیر مشخصی برای کمیتهای وابسته استفاده می‌شود. ساده ترین روش، استفاده از توزیع یکنواخت هر کمیت است. همچنین اگر ارتفاع سیال در ورودی مشخص باشد، فشار غیرهیدروستاتیک در این مرز صفر خواهد بود. شرایط ورودی و خروجی برای جریانهای الحاقی مخلوط شونده به اندکی تصحیح نیاز دارد که در قسمت مربوطه به آن اشاره خواهد شد.

اتمسفر خواهد بود. علاوه بر این صفر بودن تنش برشی در سطح آزاد به وجود گرادیان صفر برای مؤلفه‌های سرعت در راستای عمود بر سطح آزاد منجر می‌شود

$$P_{fs} = P_{atm} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0.0 \quad (13)$$

در معادله (۱۳)  $\zeta$  جهت عمود بر سطح آزاد در مختصات عمومی است.

#### ۴- معرفی الگوریتم حل برای جریان با سطح آزاد

در روشهای عددی ابتدا باید میدان جریان شبکه‌بندی شود. قبل از حل میدان جریان محل سطح آزاد مشخص نیست. لذا در ابتدا از یک شبکه حدسی استفاده می‌شود و در طی مراحل حل این شبکه تصحیح می‌شود. تصحیح شبکه تا زمانی ادامه می‌یابد که تغییرات سطح از یک حد معین کوچکتر شود. بهترین حدس برای شبکه بندی ابتدایی آن است که سطح آزاد یک سطح افقی باشد.

در سطح آزاد باید دو شرط دینامیکی و سینماتیکی، معادلات (۱۱) و (۱۲)، ارضا شوند. در هر مرحله حل از یکی از شرایط فوق به‌عنوان شرط مرزی در شبکه موجود استفاده کرده و شرط دیگر برای تصحیح شبکه به کار می‌رود. بسیاری از محققان شرط دینامیکی را برای حل معادلات به کار برده و از شرط سینماتیکی برای تصحیح شبکه استفاده کرده‌اند. جزییات بیشتر مربوط به این روش در مراجع [۶،۷ و ۹] موجود است.

در روش دیگری شرط سینماتیکی را در حل معادلات به کار برده و از شرط دینامیکی برای تصحیح شبکه استفاده می‌شود. در این روش پس از حل میدان جریان در شبکه موجود و محاسبه فشارهای غیرهیدروستاتیک در مرز سطح آزاد، محل جدید سطح آزاد را از معادله زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$z_{fs} = \frac{\Psi_{fs}}{\rho g} \quad (14)$$

هنگامی که تغییرات ارتفاع محاسبه شده بزرگ باشند، برای جلوگیری از ناپایداریهای احتمالی در هر مرحله از تصحیح شبکه درصدی از آنرا می‌توان اعمال کرد.

در این مقاله از روش دوم استفاده شده است. برای این کار یک برنامه رایانه‌ای سه بعدی منطبق بر مرز توسط نویسندگان نوشته شده است. این برنامه با استفاده از الگوریتم حل سیمپل [۱۰] و روش رای‌چو [۱۱] برای جلوگیری از نوسانات فشار در شبکه تلفیقی<sup>۳</sup>، نوشته شده است. گفتنی است که برنامه فوق برای حل جریان در مجاری بسته نوشته شده و با اضافه کردن یک زیربرنامه، از آن برای حل معادلات جریانهای با سطح آزاد می‌توان استفاده کرد. برای منفصل کردن جملات جابه‌جایی از شکل تصحیح شده روش لی و رادمن [۱۲] استفاده شده است. زیر برنامه اضافه شده، شرط دینامیکی (۱۴) را برای تعیین محل جدید سطح آزاد به کار می‌برد و پس از آن شبکه‌بندی جدید را انجام می‌دهد. الگوریتم حاصل به‌صورت زیر است:

۱- ساختن شبکه حل

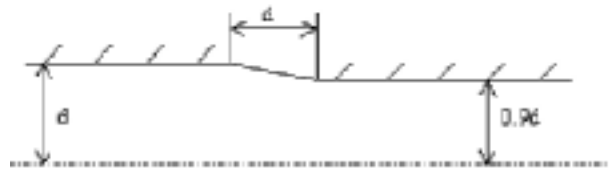
۲- حل میدان جریان در شبکه ساخته شده

۳- تعیین محل سطح آزاد

۴- ساختن شبکه جدید

۵- تکرار مراحل ۲ تا ۴ تا رسیدن به همگرایی نهایی

در روش فوق امواجی در سطح آزاد به‌وجود می‌آیند که سبب ناپایداری شده و در نتیجه الگوریتم ممکن است همگرا نشود. برای رفع این مشکل، حل عددی را در شبکه موجود تا رسیدن به جواب همگرا ادامه می‌دهیم. به این ترتیب امواج فشاری به‌وجود آمده در مراحل میانی از میدان جریان خارج شده و به یک جواب حدسی اما پایدار می‌رسیم. پس از به‌دست آوردن این جواب همگرا شده، سطح آزاد جدید مشخص و شبکه جدیدی ساخته می‌شود. نکته مهم این است که در این الگوریتم جوابهای همگرا شده در شبکه قبل به عنوان حدس خوبی (که بسیار به جوابهای نهایی در میدان اصلی نزدیک است) برای مراحل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین اگرچه در اولین مرحله محاسبات زمان زیادی صرف می‌شود اما



شکل ۲- مشخصات هندسی نیمه متقارن کانال با مقطع همگراشونده

مدل نمونه است که برای آزمایش برنامه‌های جدید در جریانهای با سطح آزاد از آن استفاده می‌شود. شکل (۲) مشخصات هندسی این کانال را نشان می‌دهد. دو قسمت کانال توسط منحنی  $\sin^2$  به هم وصل شده‌اند. پهنای کانال در بالادست ۲۰ سانتیمتر است که در قسمت پایین دست کانال ۱۰ درصد آن کاهش می‌یابد.

چون تغییر ارتفاع آب در اثر تغییر پهنای کانال به مراتب بزرگتر از اثرات اصطکاکی در طول کانال است و در ضمن نوریس [۷] هم که کار عددی مشابهی انجام داده است، نتایج عددی خود را با حل یک بعدی بدون اصطکاک [۱۳] مقایسه کرده است، نتایج عددی کار حاضر هم با این دو دسته جواب در شکل (۳) مقایسه شده‌اند. البته لازم به تذکر است که این مقایسه ایده‌آل و کاملاً مطلوب نیست ولی به هر حال با توجه به عدم دسترسی به اطلاعات تجربی منتشر شده، این مقایسه را به عنوان روشی برای حصول اطمینان از کارایی و دقت روش عددی معرفی شده می‌توان در نظر گرفت. نوریس برای تصحیح شبکه از شرط سینماتیکی استفاده کرده است. در ضمن وی از سیالی با ویسکوزیته دینامیکی بزرگتر از آب استفاده کرده است. برای حقیقی بودن نتایج، در کار حاضر از آب به عنوان سیال استفاده شده است. همان‌طور که از مقایسه این شکلها دیده می‌شود نتایج کار حاضر به خوبی مقادیر تحلیلی را پیش‌بینی می‌کنند و در مقایسه با نتایج نوریس در محل تغییر مقطع جریان نوسان ندارد. بنابراین دقت کار حاضر به مراتب بیشتر و بهتر از نتایج عددی نوریس است. اختلاف بین نتایج عددی و جواب تحلیلی ناشی از حضور اصطکاک در حل عددی و تشکیل لایه مرزی است. نکته‌ای که باید به آن اشاره کرد این است که با افزایش عدد فرود خطای نتایج عددی بیشتر می‌شود. این افزایش خطا ناشی از بزرگ شدن شیب سطح آزاد در پایین دست جریان است، که باعث می‌شود شرط مرزی جریان توسعه یافته که در حل عددی به کار رفته، از دقت خوبی برخوردار نباشد.

در مثال قبل تغییر ارتفاع آب در مقایسه با عمق آن کوچک بود. برای بررسی بهتر عملکرد برنامه رایانه‌ای کانال مستقیم

مراحل بعدی محاسبات در شبکه‌های جدید سریعتر همگرا شده و در ضمن احتمال وقوع ناپایداریهای عددی هم کاهش می‌یابد. الگوریتم جدید به صورت زیر معرفی می‌شود:

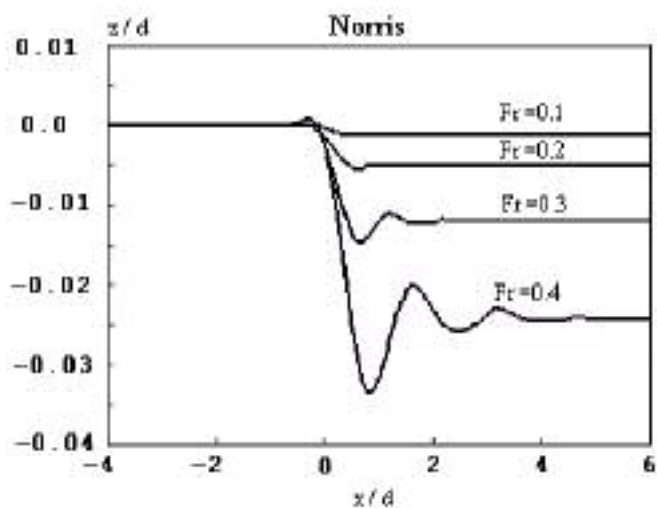
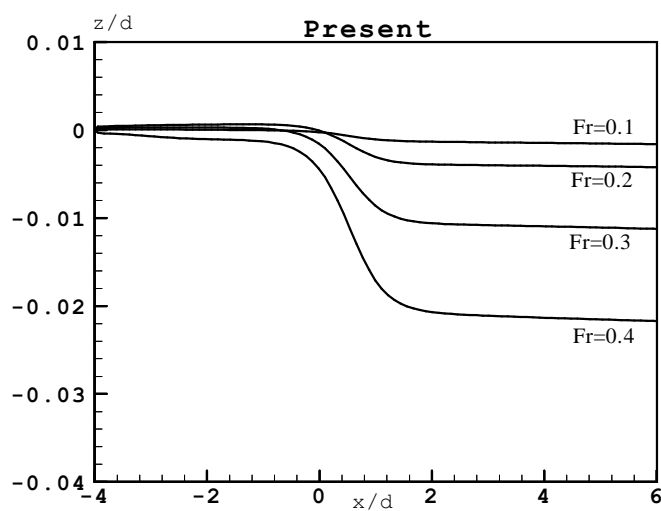
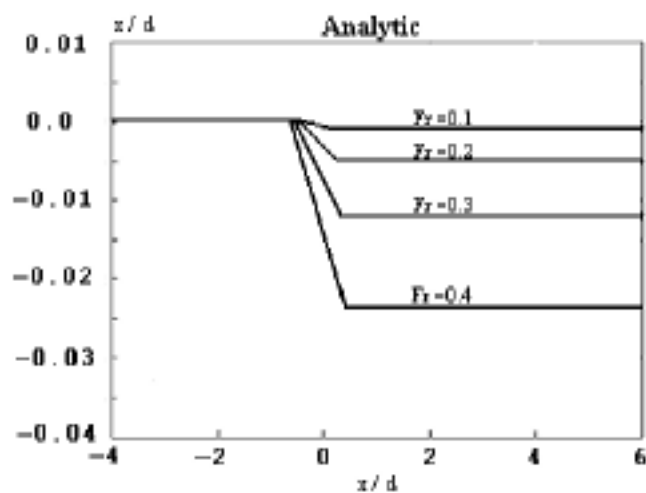
- ۱- ساختن شبکه حل
- ۲- حل میدان جریان در شبکه ساخته شده و تکرار آن تا رسیدن به جواب همگرا در این شبکه
- ۳- تعیین محل سطح آزاد
- ۴- ساختن شبکه جدید
- ۵- تکرار مراحل ۲ تا ۴ تا رسیدن به همگرایی نهایی

## ۵- مدل سطح تقارن به عنوان تقریبی برای سطح آزاد

در صورتی که جابه‌جا شدن سطح آزاد در اثر حرکت سیال نسبت به سطح افقی مرجع خیلی کوچک باشد، طبق معادله (۱۱) مؤلفه  $w$  سرعت در سطح آزاد نیز خیلی کوچک خواهد بود. در معادله (۱۴) نیز اگر سمت چپ معادله به سمت صفر میل کند، صورت کسر سمت راست معادله به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت از شرط دینامیکی در سطح آزاد صرف نظر می‌شود و سطح آزاد به صورت یک سطح تقارن فرض می‌شود. لذا شبکه حل ثابت بوده و تغییر نمی‌کند و شرط مرزی در سطح آزاد به شرط تقارنی برای تمام کمیت‌های وابسته تبدیل می‌شود.

## ۶- نتایج عددی

قبل از بررسی نتایج به دست آمده یادآور می‌شود که مقطع تمام کانالهای مورد مطالعه در این مقاله مستطیلی و شیب آنها صفراند. در ابتدا به ارزیابی برنامه رایانه‌ای تهیه شده می‌پردازیم. در این مورد ابتدا برنامه برای یک کانال افقی مستقیم که در مسیر آن سطح مقطع کاهش می‌یابد، اجرا شد. این کانال یک



شکل ۳- توزیع ارتفاع آب در کانال با مقطع همگرا شونده برای اعداد فرود مختلف، حل تحلیلی (بالا)، حل عددی حاضر (وسط)، حل عددی نوریس (پایین)

دیگری را در نظر می‌گیریم. در مسیر این کانال یک برآمدگی دوزنقه‌ای طبق شکل (۴) وجود دارد. در این شکل ابعاد کانال نیز مشخص شده‌اند که در آن  $D$  نصف پهنای کانال است. در شکل (۵) نتایج حل عددی برای عدد فرود  $0.28$  در بالادست کانال و بر اساس خطوط جریان و سطح آزاد پیش‌بینی شده واقع بر صفحه تقارن میانی کانال نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود بر خلاف مثال قبل تغییرات ارتفاع آب کوچک نبوده و این تغییرات به‌صورت هموار و مشخص روی برآمدگی دیده می‌شود. علاوه بر این جریان ثانویه ایجاد شده در پشت این برآمدگی به خوبی توسط روش عددی پیش‌بینی شده است. تحلیل یک بعدی نیز کاهش ارتفاع آب روی برآمدگی را پیش‌بینی می‌کند اما نمی‌تواند جریان ثانویه فوق‌الذکر را نشان دهد. به همین علت در این مثال مانند مثال قبل حل عددی و تحلیل یک بعدی با هم مقایسه نشده‌اند.

پس از حصول اطمینان از عملکرد خوب الگوریتم ارائه شده آن را برای جریان الحاقی به کار بردیم. در ابتدا جریانی در نظر گرفته شد که اولاً اختلاف سرعتها در دو شاخه کم باشد، و ثانیاً پدیده دیگری به غیر از لایه اختلاط، جریان را تحت تأثیر قرار ندهد. در چنین حالتی پیش‌بینی می‌شود که جابه‌جایی سطح آزاد بزرگ نباشد. شکل (۶) هندسه جریان را نشان می‌دهد. دو جریان موازی با دو دبی مختلف از بالا دست میدان به سمت یک ناحیه مشترک جریان دارند. مخلوط شدن این دو جریان در محل به هم پیوستن آنها باعث ایجاد یک لایه اختلاط در پایین‌دست این محل می‌شود. طبق مدل آزمایشی کوایک [۱۴] دبی حجمی در شاخه‌ها به ترتیب  $3/025$  و  $3/8$  لیتر بر ثانیه هستند. پهنای هر یک از دو جریان ۲۵ سانتیمتر، طول شاخه‌ها  $2/5$  متر، و طول کانال مشترک پایین‌دست ۷ متر است. تعداد نقاط شبکه  $12 \times 52 \times 65$  است که نسبت به دیواره میانی متقارن بوده و از ۶۵ نقطه شبکه در راستای  $x$ ، ۲۵ نقطه آن در شاخه‌ها قرار دارند.

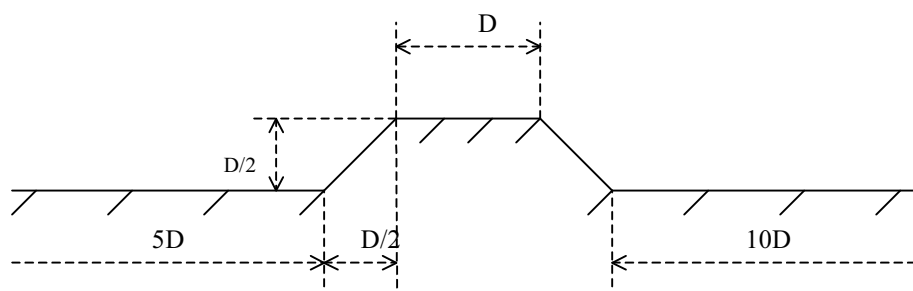
در این جریانها ارتفاع پایین‌دست مشخص می‌کند که دبی‌های ورودی باید با چه ارتفاعی وارد میدان مورد مطالعه

شوند. لذا ارتفاع آب در خروجی ثابت شده و مقدار آن در این مسئله ۱۰ سانتیمتر است. البته به علت حضور لایه اختلاط از نظر فیزیکی ارتفاع پایین‌دست کاملاً یکنواخت نیست، اما در روشهای عددی ناچاریم که از این تقریبات استفاده کنیم. ارتفاع آب در ورودیهای دو شاخه از برونیایی مقادیر درون میدان به‌دست می‌آیند. چون ارتفاع آب در هر مرحله تغییر می‌کند باید اندازه سرعتها در ورودیها به گونه‌ای تصحیح شوند که دبی حجمی ورودی به شاخه‌ها ثابت بماند. معیار همگرایی بر اساس حداکثر نرمال شده مانده جرمی در شبکه به مقدار  $10^{-6}$  و برای همگرایی شبکه بر اساس نسبت حداکثر تغییرات محل سطح آزاد به ارتفاع آب تا مقدار  $10^{-5}$  انتخاب شده‌اند.

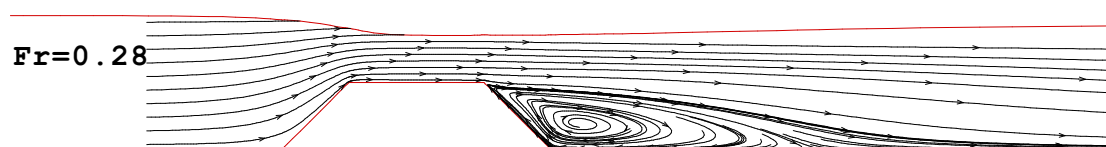
در شکل (۷) نمایی از سطح آزاد جریان ترسیم شده است. به علت کوچک بودن جابه‌جاییها در این شکل انحراف سطح آزاد را نسبت به حالت افقی نمی‌توان دید. برای نشان دادن تغییرات سطح آزاد در شکلهای (۸) و (۹) این سطح در محدوده تغییرات کوچک نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در شاخه‌ای که دبی حجمی بیشتر است ارتفاع آب نیز بیشتر است. شکل (۱۰) ارتفاع آب را در چند مقطع پایین‌دست محل به هم پیوستن دو شاخه جریان نشان می‌دهد. در این شکل  $y=0$  معرف دیواره مشترک دو شاخه است. همان‌گونه که در این شکل دیده می‌شود در وسط کانال به علت شتاب گرفتن سیال مجاور دیواره میانی ابتدا ارتفاع آب کاهش یافته و سپس مکانیزم اختلاط سطح آب را به شکل یکنواخت افقی تبدیل می‌کند.

شکل (۱۱) توزیع مؤلفه  $u$  سرعت را در سطح آزاد و در سه مقطع پایین‌دست محل پیوستگی دو شاخه نشان می‌دهد. در این شکل نتایج به‌دست آمده از مدل سطح تقارنی با نتایج مدل دقیق در یک نمودار ترسیم شده‌اند. هر دو مدل توزیع سرعت را شبیه به هم پیش‌بینی می‌کنند. هر چند که سرعتهای حاصل از شرط مرزی دقیق کمی بیشتر از مقادیر شرط تقارنی هستند، اما این اختلاف بسیار ناچیز است، زیرا در تمام طول میدان

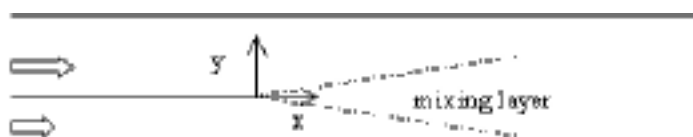




شکل ۴- مشخصات هندسی کانال با برآمدگی در بستر آن



شکل ۵- خطوط جریان و سطح آزاد روی برآمدگی کانال



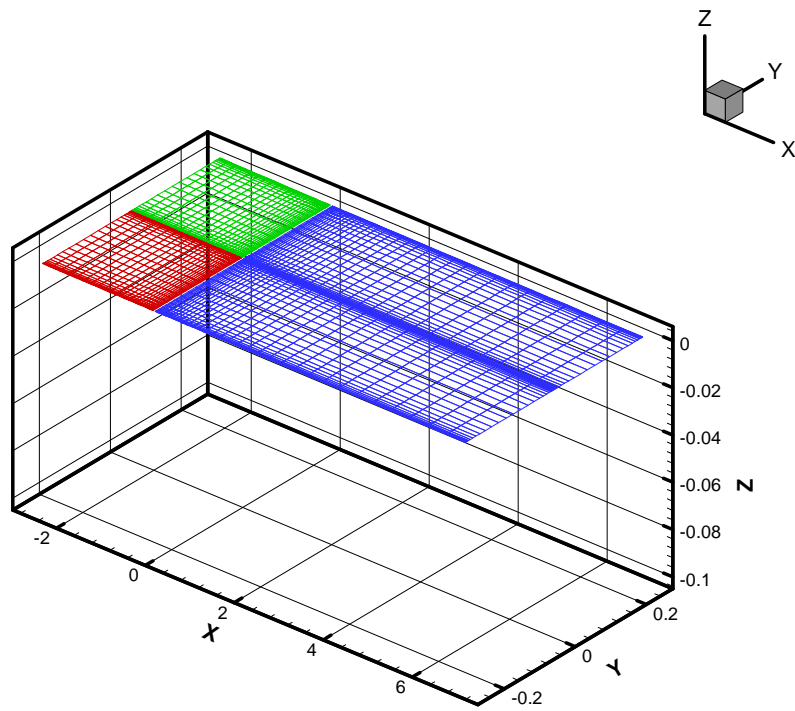
شکل ۶- هندسه دو جریان موازی و لایه اختلاط

و الگوی جریان در این ناحیه به دست آوریم. با بررسی نتایج به دست آمده و مقایسه آنها با نتایج تجربی چند نکته جالب حاصل می شود.

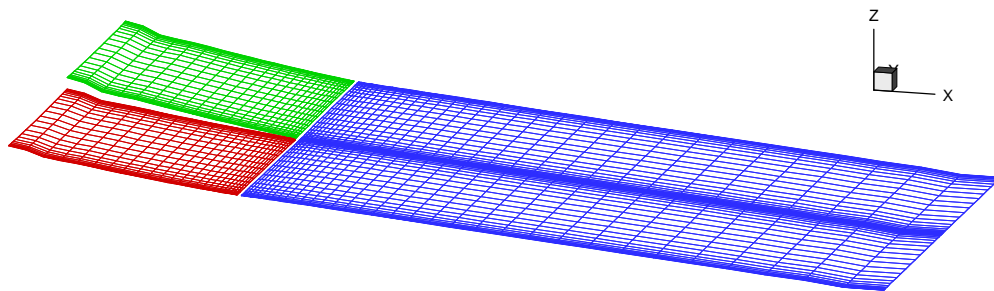
شکل (۱۲) سطح آزاد جریان در این کانال را نشان می دهد که در آن دو کانال با زاویه ۶۰ درجه به یکدیگر ملحق می شوند. پهنای کانالهای اصلی و فرعی به ترتیب ۵۵ و ۳۳ سانتیمتر هستند و امتداد کانال پایین دست دارای ابعاد کانال اصلی است. دبی حجمی در دو کانال بالادست به ترتیب ۹/۹ و ۱۰/۵۶ لیتر بر ثانیه هستند. شکل (۱۲) نشان می دهد که در سطح آزاد و در روی دیوار کانال یک فرورفتگی تیز وجود دارد که همان نقطه منفرد است. این فرورفتگی باعث می شود که یکی از مرزهای میدان حل عددی دارای شکستگی تیزی باشد. در نقاط درونی شبکه که در زیر این نقطه سطحی قرار دارند نیز این شکستگی به وجود می آید که باعث بروز اختلالات و خطاهای عددی در حول این نقطه می شود. به همین علت روش عددی در این مثال

جریان کاهش ارتفاع آب بسیار کوچک است، شکل (۹). پس برای چنین جریانهایی مدل سطح تقارنی برای شرط مرزی سطح آزاد تقریب بسیار خوبی است.

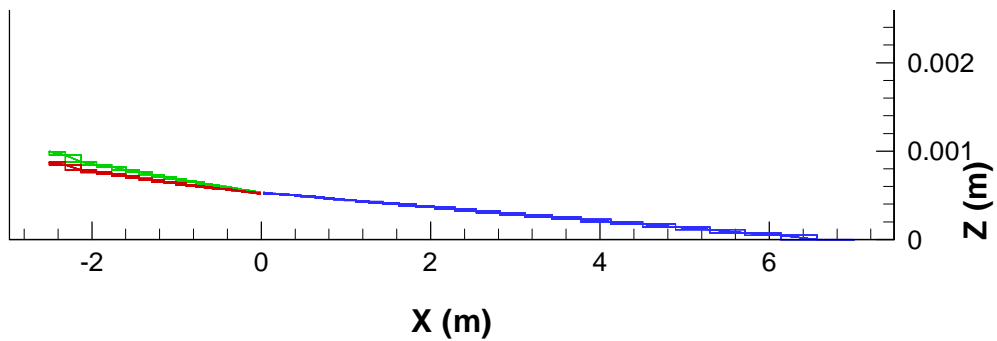
در مثال بعدی وضعیتی در نظر گرفته شده که در آن دو کانال با زاویه نسبتاً بزرگی به هم ملحق شده اند و اختلاف سرعتی دو کانال الحاقی کوچک نیست. در این حالت یک ناحیه جدایش جریان در محل الحاق دو کانال تشکیل می شود، شکل (۱۲) که در آن یک نقطه منفرد روی سطح آزاد به صورت شکستگی پله ای در نقطه جدا شدن جریان از دیواره کانال ایجاد می شود. همان طور که در بخش شرایط مرزی گفته شد، به علت حضور نقطه منفرد در سطح آزاد به کمک روشهای عددی نمی توان پیش بینی دقیقی از سطح آزاد و تغییرات آن در این محل به دست آورد ( اصولاً چنین مسائلی توسط الگوریتمهای مشابه نیز بررسی نشده است). با این حال سعی کردیم به کمک روش عددی معرفی شده تخمین مناسبی از تغییرات سطح آزاد



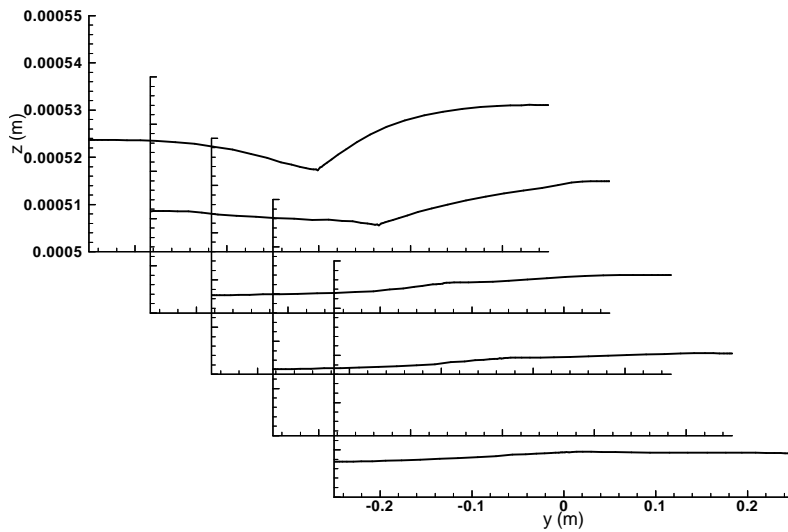
شکل ۷- نمای سطح آزاد دو جریان موازی در دستگاه مختصات



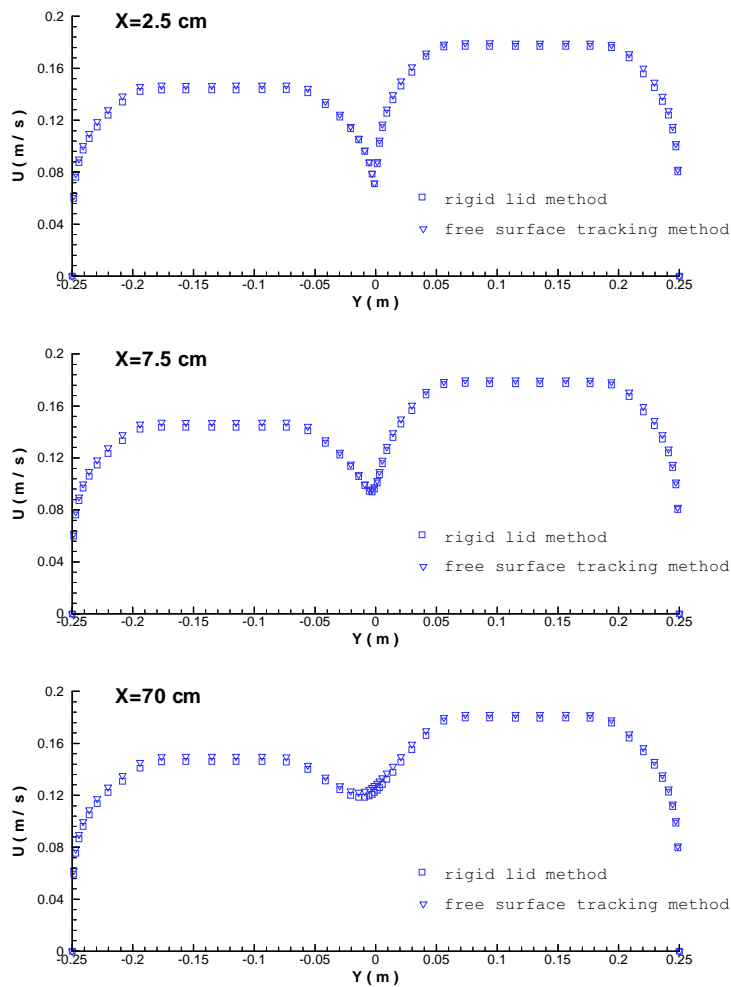
شکل ۸- نمای سطح آزاد دو جریان موازی در مقیاس بزرگ شده



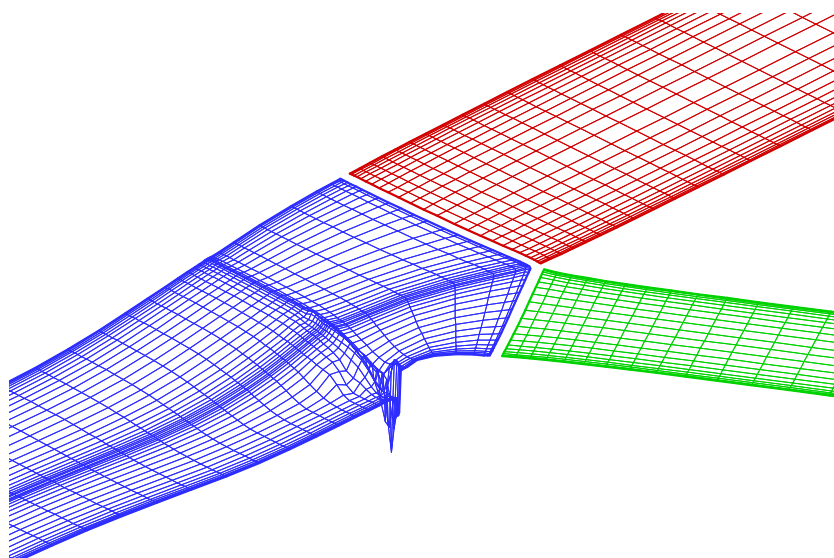
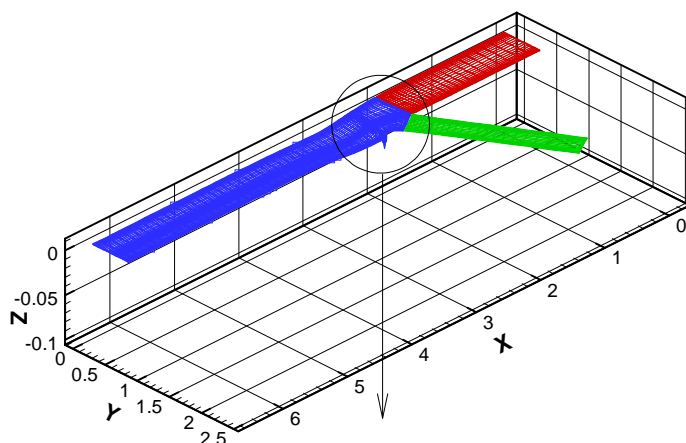
شکل ۹- نیمرخ سطح آزاد دو جریان موازی در مقیاس بزرگ شده



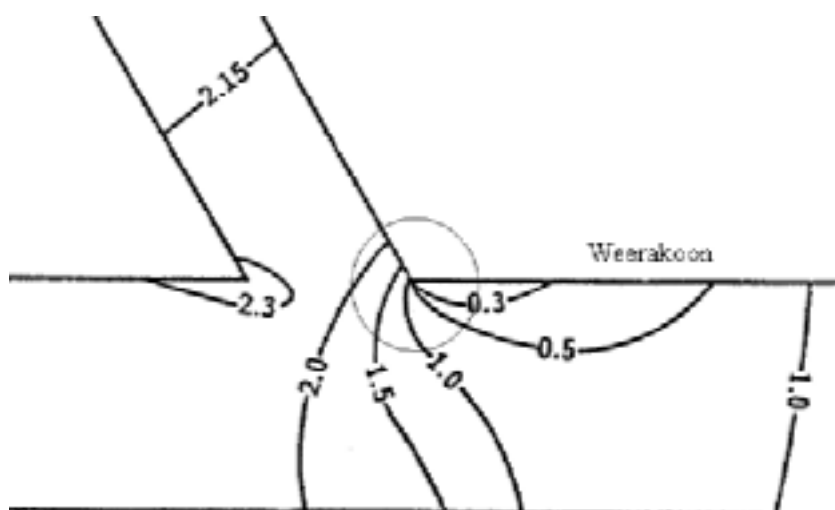
شکل ۱۰- روند تغییرات سطح آزاد دو جریان موازی پس از محل پیوستگی دو جریان



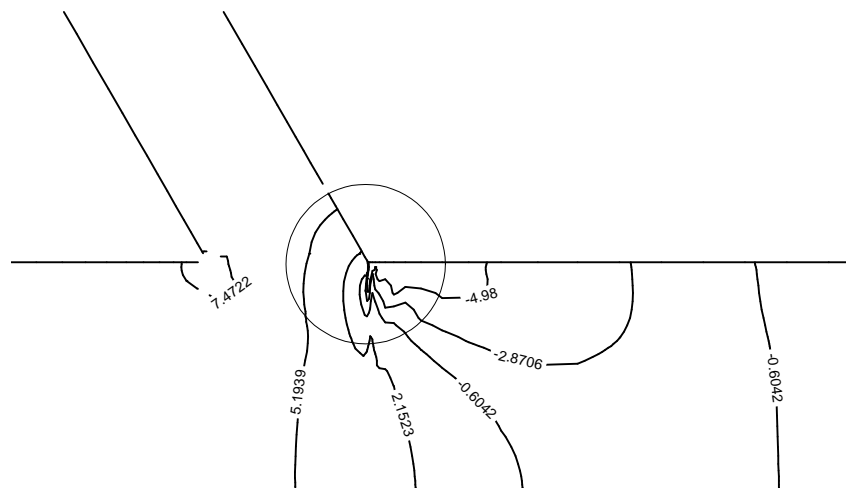
شکل ۱۱- توزیع سرعت (u) روی سطح آزاد در سه نقطه از پایین دست محل پیوستگی دو جریان موازی



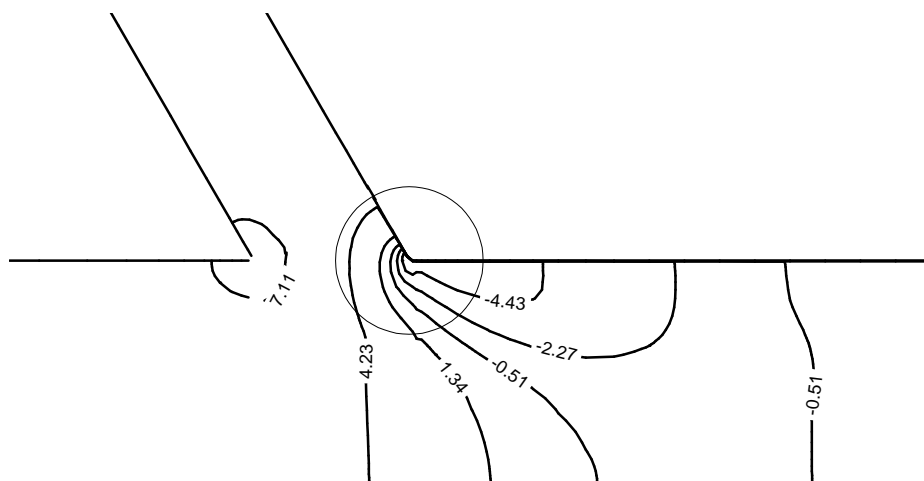
شکل ۱۲- سطح آزاد دو جریان مخلوط شونده غیر موازی (بالا)، و نمای بزرگ شده از ناحیه به هم پیوستن دو جریان (پایین)



شکل ۱۳- کانتورهای سطح آزاد دو جریان غیر موازی، نتایج تجربی ویراکون



شکل ۱۴- کانتورهای سطح آزاد دو جریان غیر موازی، آخرین تخمین نتایج عددی

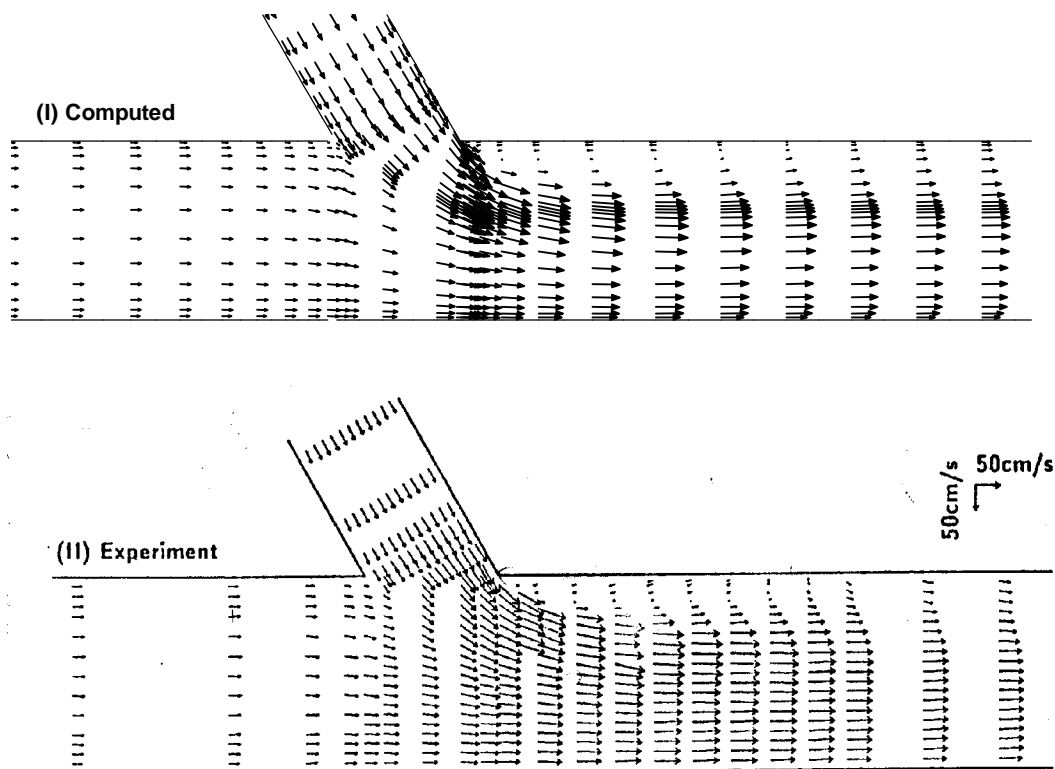


شکل ۱۵- کانتورهای سطح آزاد دو جریان غیر موازی، اولین تخمین نتایج عددی

مشخص شده روی شکل). زیرا تمرکز این کانتورها در این نقطه نشان می‌دهد که سطح آزاد جریان در این نقطه به صورت پله‌ای افت کرده است. در شکل (۱۴) نتایج عددی بر حسب میلیمتر ترسیم شده‌اند. لازم به توضیح است که مرجع اندازه‌گیری نتایج عددی و تجربی یکی نیستند. مقایسه اختلاف بین کانتورهای متوالی در هر دسته از نتایج تجربی و عددی نشان می‌دهد که روند تغییرات سطح آزاد در هر دو دسته نتایج شبیه به هم هستند اما کاملاً با هم مساوی نیستند. علت این اختلاف ایجاد خطای ناشی از حضور نقطه منفرد در روش عددی است. در شکل (۱۵) کانتورهای پیش‌بینی شده ارتفاع آب پس از اولین

مانند مثال قبل به معیار همگرایی لازم نرسید و جوابهای ارائه شده آخرین تخمین به دست آمده از روش عددی هستند. البته این یکی از خصوصیت‌های خوب الگوریتم معرفی شده است که در روند حل عددی واگرا نشده بلکه در سطح آخرین تخمین به دست آمده متوقف می‌شود.

در شکل (۱۳) نتایج تجربی ویراکون به صورت کانتورهای ارتفاع آب بر حسب سانتیمتر ترسیم شده‌اند. در این شکل نیز تمرکز سه کانتور با مقادیر عددی  $1/0$ ،  $0/5$  و  $0/3$  در نقطه‌ای روی دیواره کانال که همان نقطه جدا شدن جریان از دیواره است، معرف نقطه منفرد در سطح آزاد جریان است (مرکز دایره



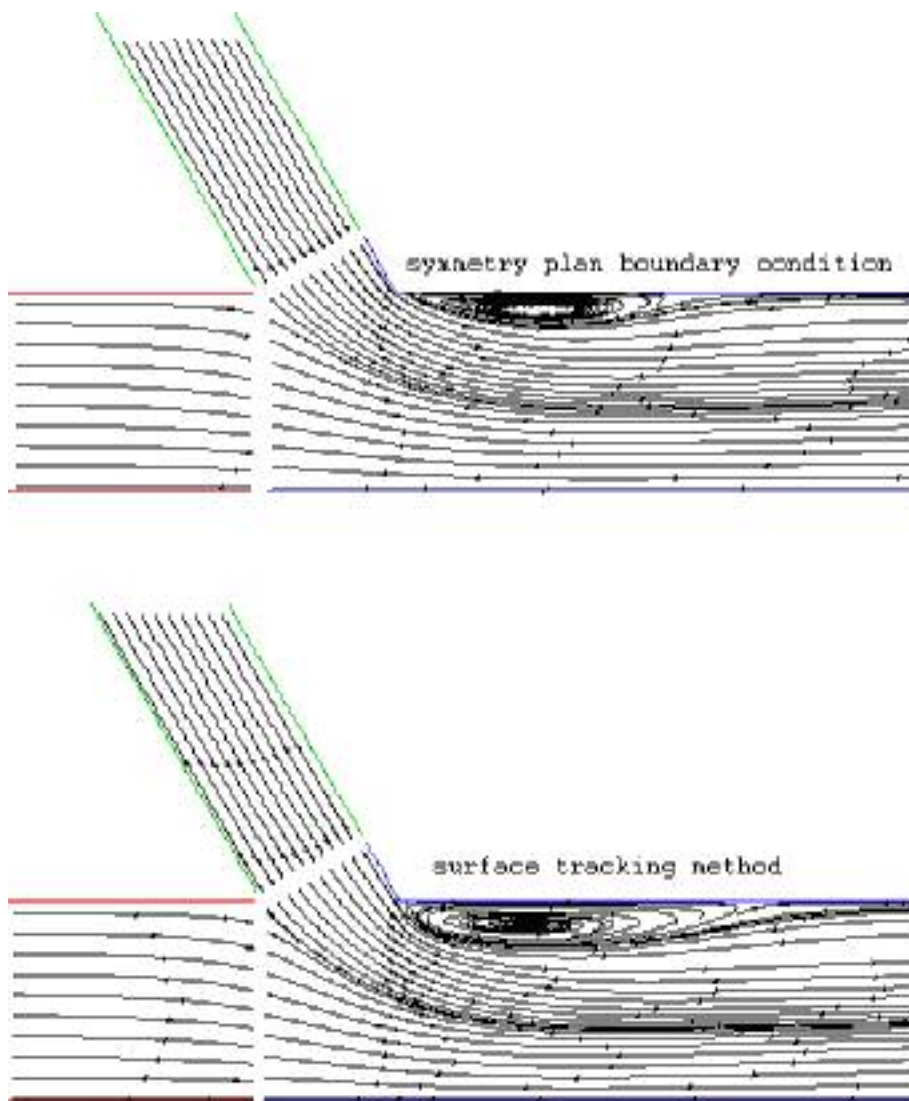
شکل ۱۶- بردارهای سرعت در سطح آزاد، نتایج عددی کار حاضر (بالا)، نتایج تجربی ویراکون (پایین)

البته همان‌طور که در شکل (۱۲) دیده می‌شود دامنه این اختلالات کوچک هستند اما برای اینکه این اختلالات بهتر دیده شوند از شکل (۱۴) استفاده شده است.

مقادیر عددی و تجربی کانتورهای فوق نشان می‌دهند که تغییرات ارتفاع آب در مقایسه با عمق آب بزرگ نیستند و این تغییرات کوچک خیلی بر الگوی جریان تأثیر نمی‌گذارند. زیرا الگوی جریان، به خصوص در ناحیه جدایش جریان بیشتر متأثر از دیوارهای کانال هستند. در شکل (۱۶) بردارهای سرعت در سطح آزاد جریان برای هر دو دسته نتایج تجربی و عددی نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که میدان جریان توسط روش عددی و پس از ردیابی سطح آزاد با دقت خوبی پیش‌بینی شده است و اگر تنها الگوی جریان از نظر میدان سرعت برای ما اهمیت داشته باشد، خطای موجود در پیش‌بینی ارتفاع آب اهمیت زیادی نخواهد داشت.

در شکل (۱۷) خطوط جریان در سطح آزاد برای شرط مرزی سطح تقارنی و شرط مرزی دقیق نشان داده شده‌اند. در

مرحله بازسازی شبکه حل در روش عددی نشان داده شده‌اند. در حقیقت در اولین شبکه حل (قبل از بازسازی) نقطه منفردی در مرز سطح آزاد انتخابی اولیه وجود ندارد و این سطح مثل یک سطح تقارن است. مقایسه کانتورهای شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نکته جالبی را نشان می‌دهد. در اولین مرحله حل کانتورهای به دست آمده هموارند و اختلال و اعوجاجی در آنها دیده نمی‌شود شکل (۱۵)، اما این مرحله نتوانسته نقطه منفرد واقع بر دیواره را پیش‌بینی کند (کانتورها در یک نقطه متمرکز نشده‌اند)، در حالی که در آخرین مرحله حل، شکل (۱۴)، نقطه منفرد به خوبی پیش‌بینی شده است. اما این امر به قیمت از دست دادن همواری کانتورها تمام شده است. زیرا بازسازی شبکه و نزدیک شدن به حالتی که در سطح آزاد نقطه منفرد ایجاد شود، باعث نفوذ اختلالات عددی به اطراف این نقطه می‌شود. به عبارت دیگر به کارگیری روش عددی برای ردیابی سطح آزاد از نظر پیش‌بینی نقطه منفرد مطلوب است اما از نظر هموار بودن کانتورها در مجاورت نقطه منفرد مطلوب نیست.



شکل ۱۷- خطوط جریان و ناحیه جدایش جریان در دو جریان غیر موازی، شرط مرزی تقارنی (بالا)، روش ردیابی سطح آزاد (پایین)

#### ۷- نتیجه گیری

برای حل جریان در کانالهای باز بحث مربوط به تعیین شرایط مرزی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که در این راستا شرط مرزی مربوط به سطح آزاد جایگاه خاصی دارد. مدل سطح تقارنی که در اغلب مقالات مربوط به جریانهای با سطح آزاد به کار می‌رود، در محدوده تغییرات اندک ارتفاع آب دقت مناسبی دارد. مدلی که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفت در جریانهایی که سطح آزاد هموار و پیوسته‌ای دارند (مانند جریان در یک مقطع همگرا شونده)، دقت بسیار خوبی دارد و برتری

شرط مرزی تقارنی ناحیه جدایی کوچکتر و در ضمن مرکز آن به دیواره نزدیکتر است، حال آنکه در شرط مرزی دقیق وجود تغییر ارتفاع شدید در ابتدای ناحیه جدایش باعث شده که ناحیه جدایش بزرگتر و مرکز آن از دیواره دورتر باشد. با این حال اختلاف بین نتایج این دو شرط مرزی خیلی زیاد نیست. بنابراین در جریانهایی از این قبیل با توجه به هزینه کمتر روش شرط مرزی سطح تقارن، استفاده از این روش مناسب به نظر می‌رسد.

شکل هموار و پیوسته‌ای نداشته باشد، پیش‌بینی‌های مدل عددی از سطح آزاد جریان در این نواحی اندکی قابل تأمل‌اند، هرچند که پدیده‌های دیگری که درون میدان جریان اتفاق می‌افتند به خوبی توسط مدل عددی پیش‌بینی می‌شوند.

این مدل بر مدل‌های به کار رفته توسط دیگران به اثبات رسید. در هر حال این مدل را برای جریان‌های پیچیده‌تری چون اختلاط دو جریان غیر موازی هم می‌توان به کار برد، ولی از آنجا که در نقاط خاصی از این گونه جریانها به علت جدایی جریان تغییرات موضعی شدیدی روی می‌دهد و ممکن است سطح آزاد

## واژه نامه

1. rigid lid surface
2. non-hydrostatic pressure
3. collocated grid

## مراجع

1. Harlow, F. H. and Welch, J. E., " Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Physics of Fluid*, 8 (12): pp. 2182-2189, 1965.
2. Hirt, C. W. and Nichols, B. D., " Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *Journal of Computational Physics*, 39: pp. 201- 225, 1981.
3. Demuren, A. O., and Rodi, W., "Side Discharges into Open Channels: Mathematical Model," *J. Hydr. Eng.*, Vol. 109, No. 12, pp. 1707-1722, 1982.
4. McGuiirk, J. J., and Rodi, W., "A Depth-averaged Mathematical Model for the Near Field of Side Discharges into Open-channel Flow," *J. Fluid Mech.* Vol. 86, Part 4, pp. 761-781. 1987.
5. Weerakoon, S. B., "Flow Structure and Bed Topography in River Confluences." Ph.D. Thesis, Univ. of Tokyo, Japan, 1990.
6. Farmer, J. Martinelli, L. and Jameson, A., " Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface ," *AIAA J.*, 32(6): pp. 1175-1182, 1994.
7. Norris, S. E., " A Parallel Navier-Stokes Solver for Natural Convection and Free Surface Flow," Ph.D. Thesis, University of Sydney, pp. 195-215, 2000.
8. Launder, B. E., and Spalding, D. B., "The Numerical Computations of Turbulent Flows," *Comp. Meth. in Appl. Mech. And Eng.*, 3, 269-289. 1974.
9. Ferziger, J. H., and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Corrected 2nd printing, Springer, pp. 333-343, 1997.
10. Patankar, S., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw Hill Book Co., New York. 1980.
11. Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
12. Li, Y., and Rudman, M., "Assesment of Higher-Order Upwind Schemes Incorporating FCT for Convection- Dominated Problems," *Numerical Heat Transfer*, Part B, 27: 1-12, 1995.
13. Fox, R. W., and McDonald, A. T., *Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, pp. 500-513, 1985.
14. Koike, A., " Organized Vortex in a River Confluence." M. E. Thesis, Kyoto Univ., 90. (In Japanese) 1986.