

## روشی کارا برای کاهش فاصله ثانویه در حل نوع خاصی از مسئله کوله پشتی

کوروش عشقی\* و حسن جوانشیر\*\*

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی

(دریافت مقاله: ۸۲/۳/۲۸ - دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۳/۲۴)

**چکیده** - یکی از انواع مسئله کوله پشتی مسئله کوله پشتی جدایی پذیر غیر خطی نام دارد. این مسئله به دلیل کاربردهای فراوان مورد توجه محققان قرار گرفته است. یکی از روشهای اصلی حل این مسئله برنامه ریزی پویا است اما به دلیل آنکه فضای متغیر حالت به سرعت رشد می کند مشکل ابعادی را بوجود می آورد. در این مقاله روشی کارا ارائه می شود تا ضرایب جانشین را در هر مرحله از برنامه ریزی پویا بیابد و با این کار مسئله اصلی را به مسئله ای با یک محدودیت موسوم به مسئله جانشین تبدیل کند. بر طبق نتایج محاسباتی حاصله حدود بالای و پایینی ناشی از حل مسئله جانشین می تواند متغیرهای حالت بسیاری را در برنامه ریزی پویا حذف کرده و فاصله ثانویه را به نحو چشمگیری کاهش دهد.

واژگان کلیدی: مسئله کوله پشتی جدایی پذیر، محدودیتهای جانشین، برنامه ریزی پویا

## An Efficient Algorithm for Reducing the Duality Gap in a Special Class of the Knapsack Problem

K. Eshghi and H. Djavanshir

Industrial Engineering Department, Sharif University of Technology  
Science and Research Branch, Islamic Azad University

**Abstract:** A special class of the knapsack problem is called the separable nonlinear knapsack problem. This problem has received considerable attention recently because of its numerous applications. Dynamic programming is one of the basic approaches for solving this problem. Unfortunately, the size of state-space will dramatically increase and cause the dimensionality problem. In this paper, an efficient algorithm is developed to find surrogate multipliers in each stage of dynamic

\* - دانشیار  
\*\* - دانشجوی دکترا

programming in order to transform the original problem to a single constraint problem called surrogate problem. The upper and lower bounds obtained by solving the surrogate problem can eliminate a large number of state variables in dynamic programming and extremely reduce the duality gap according to our computational results.

**Keywords:** Separable knapsack problem, Surrogate constraints, Dynamic programming

## ۱- مقدمه

### ۱-۱- تعریف مدل

مسئله کوله پشتی جدایی پذیر غیرخطی<sup>۱</sup> که در این مقاله به اختصار SNKP نامیده می شود با فرض غیرمنفی بودن تمام ضرایب و متغیرهای تصمیم گیری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{SNKP} \left[ \begin{array}{l} R = \text{Max} \sum_{j=1}^n r_j(x_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \in S_j = \{1, 2, \dots, k_j\} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

در این مدل فرض بر آن است که تصمیم گیرنده می خواهد در  $n$  موضوع تصمیم گیری کند و هر موضوع شامل تعدادی آترناتیو است. متغیر تصمیم گیری  $x_j$  می تواند یکی از مقادیر  $1, 2, \dots, k_j$  را اختیار کند که انتخاب  $q$  از بین آترناتیوهای  $1, 2, \dots, k_j$  نشانگر آن است که آترناتیو  $q$  برای موضوع  $j$  انتخاب و یا به عبارت دیگر  $x_j = q$  شده است. مقدار برگشت انتخاب این آترناتیو نیز با تابع غیرپیوسته  $r_j(q)$  مشخص شده به نحوی که انتخاب این گزینه مقدار  $a_{ij}(q)$  از منبع  $i$  ام را مصرف می کند. حداکثر مقدار منبع  $i$  ام نیز با  $b_i$  مشخص می شود. معمولاً تعداد آترناتیوها برای تمام متغیرهای یک مسئله مساوی و برابر  $L$  فرض می شود. همواره یک آترناتیو به نام "انجام هیچ کار" وجود دارد که در آن در حقیقت هم مصرف منابع و هم مقدار برگشتی صفر است. فرض می شود که در حالت عادی نتوان هیچ یک از آترناتیوهای یک متغیر را با توجه به مصرف منابع و برگشتی، بر سایر آترناتیوهای همان متغیر برتری داد. به عبارت

دیگر آترناتیوی وجود ندارد که با مصرف کمتر، سود بیشتری را نصیب ما سازد. بنابراین فرض می شود حذف آترناتیوی به نفع آترناتیو دیگر در ابتدا ممکن نیست. به همین دلیل معمولاً مقادیر برگشتی و مصارف منابع آترناتیوهای هر متغیر به صورت صعودی مرتب می شوند تا بتوان به راحتی دریافت که هر آترناتیو ضمن تولید برگشتی بیشتر، منبع بیشتری را نیز به کار گرفته است.

این مدل را می توان به صورت یک مسئله برنامه ریزی عدد صحیح با متغیرهای صفر و یک نیز مدل سازی کرد. در این صورت اگر  $r_{jk}$  را میزان برگشت آترناتیو  $k$  ام از متغیر  $j$  ام،  $a_{ijk}$  را میزان مصرف آترناتیو  $k$  ام از متغیر  $j$  ام و از منبع  $i$  ام فرض کنیم، می توان گفت مدل برنامه ریزی 0-1 مسئله SNKP به شکل زیر است که آن را به اختصار ZOKP می نامیم:

$$\text{ZOKP} \left[ \begin{array}{l} R = \text{Max} \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{k_j} r_{jk} x_{jk} \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{k_j} a_{ijk} x_{jk} \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1) \\ \sum_{k=2}^{k_j} x_{jk} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2) \\ x_{jk} = 0, 1 \quad k = 1, 2, \dots, k_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (3) \end{array} \right.$$

محدودیت های اصلی SNKP تشکیل محدودیت های ردیف (۱) را در ZOKP می دهند. همچنین برای جلوگیری از انتخاب بیش از یک آترناتیو از هر متغیر، محدودیت های ردیف (۲) اضافه شده اند که به نام محدودیت های گزینش چندگانه<sup>۲</sup> نامیده می شوند. باید یادآور شد که با تبدیل SNKP به شکل بالا، آترناتیو "انجام هیچ کار" از هر متغیر، به دلیل آنکه ضرایب متغیر مربوطه چه در تابع هدف و چه در محدودیتها صفر است، به طور خودکار از مدل ZOKP حذف می شود و عدم انتخاب هیچ یک از آترناتیوهای

یک متغیر، به منزلهٔ آلترناتیو "انجام هیچ کار" است. (توجه کنید که محدودیت (۲) به صورت نامساوی است.) آنچه که قابل توجه است، با این تبدیل ابعاد مسئله به شدت بزرگ می‌شود چرا که اگر مدل SNKP را شامل  $m$  محدودیت و  $n$  متغیر تصمیم‌گیری فرض کنیم که هر متغیر تصمیم‌گیری دارای  $L$  آلترناتیو (با احتساب آلترناتیو "انجام هیچ کار") باشد آن گاه مدل ZOKP معادل آن به دلیل آنکه به ازای هر متغیر یک محدودیت‌گزینش چندگانه را خواهد داشت دارای  $m+n$  محدودیت و  $n(L-1)$  متغیر خواهد بود.

## ۲- تاریخچهٔ علمی مسئله

مسئله SNKP به دلیل قابلیت تبدیل آن به شکل‌های مختلف کاربرد گسترده‌ای در مسائل تخصیص منابع، بودجه بندی سرمایه، ضایعات برش و همچنین نظریه‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح و پویا دارد [۳]. به همین خاطر ارائه یک روش کارا برای حل آن از دیرباز مورد نظر بسیاری از محققان بوده است. بیشتر این روشها متکی به استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا برای حل SNKP هستند اما به دلیل رشد ابعاد متغیر حالت<sup>۳</sup> و نیاز فوق‌العاده به حافظهٔ رایانه در مورد مسائل با متغیرهای گسسته، اغلب آنها با محدودیت روبرو شده و تنها برای مسائل با ابعاد کوچک قابل اجرا هستند. ابتدا در مرجع [۵] الگوریتمی برای حل مسائل برنامه‌ریزی پویای چند بعدی در یک فضای کاهش یافتهٔ متغیر حالت به نام Imbedded - State Space ارائه شد. سپس در مرجع [۳] در طی الگوریتمی به نام (M & MDP) قابلیت رویکرد Imbedded - State را در یافتن جواب بهینهٔ مسائل SNKP نشان داده شد. در همان سال با توسعهٔ الگوریتمی موسوم به Hybrid DP / B&B استفاده از روش B & B برای کاهش حافظهٔ مورد نیاز در حل مدل برنامه‌ریزی پویا پیشنهاد شد [۴] که بر پایهٔ آن با داشتن حدود بالایی و پایینی جواب بهینهٔ مسئله می‌توان نقاط غیرکارایی بیشتری را از فضای متغیر حالت حذف کرد که نرم افزار

رایانه‌ای MMDP با استفاده از این ایده طراحی شد و در مرجع [۲] توسعه داده شد.

متأسفانه در برنامهٔ رایانه‌ای MMDP علی‌رغم کارایی آن تخمین حدود بالایی و پایینی اولیه بسیار ضعیف انجام می‌شد به گونه‌ای که الگوریتم تنها برای مسائل کوچک و متوسط قابل استفاده بود. یک روش برای یافتن حد بالایی، انتخاب تصادفی تنها یکی از محدودیتها و صرف نظر کردن از سایر محدودیتها و حل مسئله تک محدودیتی حاصل از آن برای تعیین حد بالایی جواب بهینه است. این روش در حالات خاصی از مسائل SNKP از جمله مسئله کوله پشتی ۱۰-۱ در مرجع [۷] مورد بررسی قرار گرفته اما تنها قادر به تأثیر اندکی در حد بالایی است. به همین دلیل لزوم بررسی تکنیکهای دیگری در این رابطه احساس می‌شد که از جمله استفاده از محدودیتهای جانشین<sup>۴</sup> است که مورد توجه محققان واقع شد. در محدودیتهای جانشین تمام محدودیتها توسط یک محدودیت که از ترکیب خطی محدودیتهای اولیه به دست می‌آید جایگزین می‌شوند، که با این کار ما قادریم با حل مسئله تک محدودیتی حد بالایی (و نیز پایینی) مسئله اصلی SNKP را محاسبه کنیم.

در مرجع [۸] با ترکیب روش جستجوی ممنوع و برنامه‌ریزی خطی روشی برای حل مسئله ZOKP در حالت خاصی که محدودیتهای گزینش چندگانه وجود ندارد ارائه شد. در مرجع [۶] نیز روشی برای حل مسئله SNKP در حالت خاصی که در آن تنها یک محدودیت داریم طراحی شده است. در مرجع [۱] با بهره‌گیری از برنامه‌ریزی پویا و روش به روز در آوردن حد بالایی و پایینی الگوریتمی تحت نام "الگوریتم هایبرید اصلاح شده" توسعه داده شد. در الگوریتم مذکور ابتدا حدود بالایی و پایینی تعیین می‌شدند و ضمن حل برنامه‌ریزی پویا مسئله اصلی، این حدود تنگتر شده و رشد متغیرهای حالت را کند می‌ساختند. اگر چه با این روش حدود رشد متغیرهای حالت کندتر می‌شود، لیکن هنوز نمی‌تواند کاهش بسیار زیادی را به وجود آورد. از این رو در این مقاله با بهره‌گیری از

محدودیت‌های جانشین به یافتن حدود تنگتر و قویتری می‌پردازیم.

### ۳- الگوریتم Imbedded - State

الگوریتم Imbedded - State یک روش حل برای مسئله SNKP می‌باشد که به منظور آشنایی کامل با آن می‌توانید به مراجع [۳ و ۵] مراجعه کنید. چون این روش اساس کلیه روشهایی است که تا کنون برای بهبود در حل مسئله SNKP با کمک برنامه‌ریزی پویا توسعه داده شده است، به اختصار به توضیح آن می‌پردازیم. در این روش در ابتدا مجموعه  $G_j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_j = \{g_j \mid g_j = [a_{1j}(x_j), a_{2j}(x_j), \dots, a_{mj}(x_j)], \forall x_j \in S_j\}$$

در این صورت فضای متغیر حالت در رویکرد Imbedded - State برای زامین مرحله به ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} F_1 &= G_1 \\ F_j &= G_j \circ G_{j-1} \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

که در آن منظور از اپراتور "O" مجموع هر عنصر از  $G_j$  با هر عنصر از  $G_{j-1}$ ، برای تمام عناصر موجود در  $G_j$  و  $G_{j-1}$  است. بنابراین  $F_j$  تمامی فضای ممکن متغیر حالت را برای مراحل ۱ و ۲ و ... و  $n$  دربر می‌گیرد که باید با انجام آزمونهای قابل قبول بودن<sup>۵</sup> و تفوق داشتن<sup>۶</sup> بهبود یابد. در نتیجه آزمون قابل قبول بودن، عناصر غیرقابل قبول مجموعه  $F_j$  (عناصری که مقدار مصرف منابع آنها از میزان موجودی منابع بیشتر است) حذف شده و مجموعه ای از نقاط قابل قبول در هر مرحله به دست می‌آید. اگر  $F_j^f \subseteq F_j$  را به عنوان مجموعه نقاط قابل قبول از فضای ممکن متغیر حالت در زامین مرحله تعریف کنیم، در این صورت:

$$F_j^f = \{g_j' \mid g_j' \in (G_j \circ G_{j-1}), g_j' \leq (b_1, b_2, \dots, b_m)\}$$

که در آن بردار  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  مقادیر موجودی منابع  $1, 2, \dots, m$  (بردار سمت راست) را نشان می‌دهد. با اجرای آزمون تفوق نیز نقاطی از فضای قابل قبول متغیر حالت که

دارای مقدار برگشت کمتر با مصرف منابع بیشتر (یا مساوی) نسبت به سایر نقاط هستند، حذف می‌شوند. بنابراین  $F_j^e$  به عنوان مجموعه‌ای از نقاط قابل قبول و کارا به دست خواهد آمد. به عبارت دیگر این مجموعه در  $j$ -امین مرحله  $F_j^e \subseteq F_j^f \subseteq F_j$  است.

بنابراین در هر مرحله مانند  $j$  ابتدا باید کلیه نقاط فضای ممکن متغیر حالت  $F_j$  را یافت و سپس با انجام آزمون قابل قبول بودن، نقاط غیرقابل قبول را حذف و زیر مجموعه  $F_j^f$  را از آن به دست آورد و سرانجام با انجام آزمون تفوق، نقاط غیرکارا نیز حذف و زیر مجموعه  $F_j^e$  را در زامین مرحله از حل مسئله برنامه‌ریزی پویا به دست آورد. این فرآیند تسلسلی به ازای  $n, n-1, \dots, 2, 1$  ادامه یافته تا زمانی که در  $n$ امین مرحله  $F_n^e$  به دست آید. این مجموعه در واقع مجموعه کلیه نقاط قابل قبول و کارا برای مراحل  $n, n-1, \dots, 1$  را در بر می‌گیرد و لذا در این مجموعه نقطه (و یا نقاطی) با بیشترین مقدار برگشت تابع هدف، جواب بهینه مسئله را نشان می‌دهد.

### ۴- مسئله جانشین

چون رویکرد اصلی در الگوریتم Imbedded - State شمارش کلیه جوابهای ممکن فضای متغیر حالت مسئله است، با افزایش ابعاد متغیرهای تصمیم‌گیری، ابعاد متغیرهای حالت نیز به صورت سرسام‌آوری بزرگ می‌شود و اگر چه از طریق آزمونهای قابل قبول بودن و تفوق داشتن فضای متغیرهای حالت تا حدی کاهش می‌یابد، اما در مسایل بزرگ همین مقدار نیز در حجم حافظه‌های در دسترس رایانه‌های امروزی در حد معقولی نیست.

الگوریتم‌هایی به منظور بهبود Imbedded - State توسعه داده شده است که از جمله می‌توان به الگوریتمهای هایبرید<sup>۷</sup> و هایبرید اصلاح شده<sup>۸</sup> اشاره کرد که در مراجع [۱، ۳ و ۵] به تفصیل در مورد آن سخن رفته است. ایده اصلی در این الگوریتم تلفیق روش انشعاب و تحدید (B&B) با رویکرد Imbedded - State است، بدین معنی که با به دست آوردن

حدود بالایی و پایینی برای مسئله اصلی، حجم زیادی از جوابهای غیرکارا را در همان مراحل اولیه حل مسئله حذف کرده و سپس با به هنگامسازی حدود مذکور، حذف جوابهای غیرکارا برای مراحل بعدی نیز ادامه می‌یابد.

از آنجایی که در تعیین حدود اولیه در الگوریتمهای فوق، از روشهای ساده‌ای بهره گرفته می‌شود، علی‌رغم بهبود نسبی در فضای ممکن متغیرهای حالت باز هم در مسائل با ابعاد بزرگ کاهش نسبتاً کوچکی در این فضا ایجاد شده و این الگوریتمها غیرکارا هستند.

آنچه که مسلم است، در مسئله برنامه‌ریزی کوله‌پشتی غیرخطی جدایی پذیر (SNKP)، باید تا حد امکان فضای متغیر حالت کاهش یابد و این مهم به شدت وابسته به آن است که حدود اولیه تا آنجا که ممکن است، به جواب بهینه نزدیکتر باشند تا بتوان تعداد بیشتری از عناصر هر متغیر حالت را که غیرکارا هستند، حذف کرد.

هدف اصلی این مقاله، ارائه روشی برای تعیین حدود بالایی و پایینی مناسب برای به کارگیری در الگوریتم "هایبرید اصلاح شده" است. ساختار کلی این روش تبدیل مسئله اصلی به یک مسئله تک محدودیتی و استفاده از خواص موجود در مسئله تک محدودیتی برای تعیین حدود مسئله اصلی است. برای توضیح بیشتر فرض کنید که مسئله تک محدودیتی حاصل از مسئله SNKP را که مسئله جانشین می‌نامیم به صورت زیر تعریف کنیم و با SP نشان دهیم:

$$SP \left[ \begin{array}{l} R_{SP} = \text{Max} \sum_{j=1}^n r_j(x_j) \\ \text{s.t. :} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i a_{ij}(x_j) \leq \sum_{i=1}^m u_i b_i \\ \sum_{i=1}^m u_i = 1 \\ u_i \geq 0, i=1, \dots, m, \quad x_j \in S_j = \{1, 2, \dots, L\} \end{array} \right.$$

بردار  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  اصطلاحاً به بردار ضرایب جانشین<sup>۷</sup> معروف است و در این مقاله ما نحوه یافتن آن را

شرح خواهیم داد. اما قبل از آن بهتر است که به بررسی پاره‌ایی از خواص مسئله SP بپردازیم که به سادگی از روی تعریف به دست می‌آیند و در مرجع [۹] ذکر شده است:

**خاصیت ۱:** اگر  $X$  یک جواب قابل قبول مسئله اصلی باشد، این جواب حتماً در مسئله SP نیز قابل قبول خواهد بود.

**خاصیت ۲:** اگر  $X^*$  جواب بهینه مسئله SP باشد و در محدودیتهای مسئله اصلی نیز صدق کند آن گاه  $X^*$  جواب بهینه مسئله اصلی نیز خواهد بود. لازم به ذکر است که مسئله جانشین و خواص مربوط به آن در برنامه‌ریزی عدد صحیح کاربردهای فراوانی داشته که برای بررسی می‌توانید به مرجع [۹] رجوع کنید.

البته باید توجه داشت که هر جواب مسئله SP لزوماً در مسئله اصلی قابل قبول نیست و در واقع مسئله SP کاهش یافته<sup>۸</sup> مسئله اصلی است. لذا می‌توان حدود پایینی و بالایی اولیه مناسبی را از طریق حل مسئله تک محدودیتی SP و به کارگیری آن در روش برنامه‌ریزی پویا به دست آورد. بدیهی است که اگر جواب بهینه مسئله SP محدودیتهای مسئله اصلی را نیز راضی کند، طبق خاصیت ۲، جواب بهینه<sup>۹</sup> مسئله اصلی نیز خواهد بود و اگر جواب بهینه مسئله SP در محدودیتهای مسئله اصلی صدق نکند، طبق خاصیت زیریک حد بالایی اولیه<sup>۹</sup> مناسب را برای جواب بهینه مسئله اصلی تولید می‌کند.

**خاصیت ۳:** اگر  $X^*$  جواب بهینه مسئله SP با مقدار برگشت  $R_{SP}(X^*)$  باشد مقدار تابع هدف مسئله اصلی برای هر جواب قابل قبول  $X$  همواره کوچکتر یا مساوی  $R_{SP}(X^*)$  است یعنی:

$$R(X) \leq R_{SP}(X^*)$$

آشکار است که خاصیت ۳ با توجه به خواص ۱ و ۲ به دست آمده است. از طرف دیگر می‌توان با جستجو در جواب نهایی مسئله تک محدودیتی SP، از میان جوابهای متغیر حالت مرحله آخر (n ام) آن یک جواب قابل قبول برای مسئله اصلی جستجو کرد. این جواب نیز یک حد پایینی اولیه<sup>۱۰</sup> مناسب را برای جواب بهینه مسئله اصلی تولید می‌کند.

اما آنچه که اهمیت دارد آن است که بردار ضرایب جانشین

$$D_S \begin{cases} Z_{DS} = \text{Min } R^{(U)} \\ U \geq 0 \end{cases}$$

مسئله  $D_S$  به نام ثانویه جانشین خوانده می‌شود. به سادگی مشاهده می‌شود که  $R^{(U)}$  یک تابع شبه محدب به ازای مقادیر مختلف  $U$  است.

قضیه: به ازای هر  $U \geq 0$  داریم:  $Z_{DS} \geq R_{LK}$

اثبات: فرض کنید متغیرهای بهینه مسئله  $LK$  را با  $X_{LK}^*$  نشان دهیم. در این صورت  $AX_{LK}^* \leq b$  است. با ضرب طرفین این نامعادله در  $U \geq 0$  داریم:

$$UAX_{LK}^* \leq Ub \Rightarrow U(AX_{LK}^* - b) \leq 0$$

به عبارت دیگر  $X_{LK}^*$  در مسئله  $LK^{(U)}$  شدنی است. از طرف دیگر مسئله  $LK^{(U)}$  یک مسئله از نوع بیشینه‌سازی است و در نتیجه هر جواب بهینه مسئله  $LK^{(U)}$  به ازای بردارهای مختلف  $U$  یک حد بالایی را برای  $R_{LK}$  به دست می‌دهد:

$$\forall U \geq 0: R_{LK} \leq R^{(U)}$$

لذا بهترین مقدار  $R^{(U)}$  را که همانا  $Z_{DS} = \text{Min } R^{(U)}$  است نیز بهترین حد بالا برای  $R_{LK}$  محسوب می‌شود.

سوالی که اکنون با آن مواجه هستیم آن است که با توجه به یک نقطه شروع، چگونه می‌توان افزایش‌های جانشین را تولید و سپس بهبود بخشید و یا به عبارتی جهت نزولی مسئله جانشین چگونه به دست می‌آید (توجه کنید که ما قصد داریم به  $\min R^{(U)}$  برسیم). برای این منظور به قضیه زیر توجه کنید:

قضیه: اگر  $\bar{U} > 0$  بردار جانشین فعلی باشد، هر بردار  $d$  که به ازای  $\alpha \geq 0$  در شرط زیر صدق کند جهت صعودی را برای مسئله  $LK^{(U)}$  دارد یعنی در آن  $R^{\bar{U}+\alpha d} \geq R^{\bar{U}}$

$$\begin{cases} d(Ax-b) < 0 \\ X \in \Omega(D_S) \end{cases}$$

{ توجه: منظور از  $\Omega(\cdot)$ ، فضای جواب مسئله  $(\cdot)$  است. }

را به نحوی بیابیم که حتی الامکان فاصله مابین حد بالا و جواب بهینه مسئله اصلی که اصطلاحاً به آن فاصله ثانویه<sup>۱۱</sup> می‌گویند، صفر و یا بسیار کم شود تا در این صورت بتوان در رویکرد شاخه و کران مربوط به الگوریتم هابرید اصلاح شده، جوابهای جزئی<sup>۱۲</sup> هر مرحله را با این حدود مقایسه کرده و در صورتی که خارج از آن باشد از ادامه شاخه‌زنی خودداری ورزیده و گره مربوط به آن را بست و بدین طریق نقاطی که به جواب مناسبی رهنمون نمی‌شوند حذف می‌شوند. به عبارت دیگر هر چقدر محدودیت جانشین ما قویتر انتخاب شود فاصله ثانویه کمتر شده و به حل سریعتر مسئله اصلی منجر خواهد شد.

به دلیل آنکه مسئله SNKP دارای شکل جدایی پذیر بوده و غیر خطی است برای تعیین بردار جانشین آن از شکل تبدیل یافته آن یعنی ZOKP استفاده می‌کنیم. به علاوه برای ساده‌تر شدن و سرعت بخشیدن به روش یافتن بردار ضرایب جانشین شکل آزاد شده مسئله ZOKP که با حذف دسته محدودیت‌های (۲) حاصل می‌شود را بررسی می‌کنیم:

$$LK \begin{cases} R_{LK} = \text{Max } r x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \\ x = (0,1) \end{cases}$$

حال مسئله جانشین را برای مسئله فوق با کمک بردار  $U$  به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$LK^{(U)} \begin{cases} R^{(U)} = \text{Max } r x \\ \text{s.t. } U(Ax-b) \leq 0 \\ x = (0,1), U \geq 0 \end{cases}$$

مجموعه جوابهای شدنی مسئله  $LK^{(U)}$  را نیز  $S$  می‌نامیم. چون به ازای هر  $U \geq 0$  می‌توان یک  $LK^{(U)}$  تشکیل داد، هدف ما آن است که بهترین  $U$  را انتخاب کنیم که این امر معادل با این است که از بین مقادیر حاصله برای تابع هدف مسئله  $LK^{(U)}$  به ازای  $U$ های مختلف، بهترین بردار  $U$  انتخاب شود که تابع هدف را حتی الامکان کوچک کند. به عبارت دیگر بهترین بردار  $U$  از مسئله زیر حاصل می‌شود:

**اثبات:** اگر  $\underline{X}$  عضوی از  $\Omega(LK(\bar{U}))$  باشد، با توجه به شدنی بودن  $LK(\bar{U})$  داریم:

$$\bar{U} \quad (A\underline{X} - b) \leq 0 \quad (1)$$

حال اگر  $d(A\underline{X} - b) < 0$  باشد، در این صورت با توجه به فرض  $\alpha \geq 0$  می توان گفت:  $\alpha d(A\underline{X} - b) < 0$

در نتیجه با توجه به (1) داریم:  $(\bar{U} + \alpha d)(A\underline{X} - b) < 0$  یعنی  $\underline{X}$  در مسئله  $LK(\bar{U} + \alpha d)$  نیز قابل قبول است و چون مسئله به صورت Max است، پس

$$R(\bar{U} + \alpha d) \geq r \underline{X} = R(\bar{U})$$

که در نتیجه  $\bar{U} + \alpha d$  جهت صعودی می شود.

با توجه به قضیه فوق اگر بخواهیم بردار  $d$  را به نحوی تعیین کنیم که  $\bar{U} + \alpha d$  جهت غیر صعودی داشته باشد باید  $d(A\underline{X} - b) > 0$  شود. به عبارت دیگر این شرط یک شرط لازم برای اینکه جهت غیر صعودی داشته باشیم است.

بدین ترتیب اگر  $\bar{U}$  بهترین افزایشنده جانشین نباشد، به ازای  $X \in \Omega(LK(\bar{U}))$  باید  $d$  را به گونه ایی یافت که رابطه  $(\bar{U} + \alpha d)(A\underline{X} - b) > 0$  برقرار باشد که به معنی آن است که  $X \in \Omega(D_S)$  در مسئله  $LK(\bar{U} + \alpha d)$  غیر قابل قبول می شود.

نکته ایی را که باید در نظر داشت آن است که اگر در تکرار  $k$  ام بخواهیم  $U_{k+1}$  را برای تکرار بعد تعیین کنیم باید تمام متغیرهایی را که از تکرار 1 تا تکرار  $k$  ام حذف کردیم همچنان حذف شده باقی بمانند. برای این منظور از روشی مشابه روش بندرز<sup>13</sup> استفاده می کنیم. یعنی مسئله را به شکل زیر تشکیل می دهیم:

$$\text{Max } y \\ d(A\underline{X}_j - b) > y \quad j = 1, 2, \dots, k, d \geq 0$$

بدین ترتیب که در هر تکرار تنها یک محدودیت به محدودیت های قبلی مسئله بالا اضافه می شود. این کار سبب می شود که اولاً تمام  $X \in \Omega(LK(\bar{U}))$  در  $\Omega(LK(\bar{U} + \alpha d))$  غیر قابل قبول شده و ثانیاً با توجه به  $y$  می توان ادامه و یا توقف جستجو را تعیین کرد. بدین شکل که اگر  $y \geq 0$  بود، همچنان به جستجوی خود ادامه می دهیم. ولی اگر  $y \leq 0$  شد، یعنی اینکه دیگر هیچ افزایشنده ایی نظیر  $U_{k+1}$  وجود ندارد که بتواند تمام

نقاط  $x_1, \dots, x_k$  که قبلاً تولید شده است را حذف کند و در نتیجه متوقف می شویم.

## 5- الگوریتم یافتن بردار جانشین $U$

**تعاریف:**

جواب حاصل از حل مسئله  $X_k = LK^{U_k}$

در تکرار  $k$  ام

$\Omega =$  مجموعه جواب

$k =$  شمارنده تعداد تکرار الگوریتم

$N =$  حداکثر تعداد تکرار

$X^* =$  بهترین مقدار  $D_S$  تا تکرار فعلی

$U_k = k$  بردار جانشین حاصل از تکرار

$g_k = A\underline{X}_k - b$

**گام 0:**  $k=1$  قرار دهید. با یک مقدار اولیه غیر صفر برای  $U_1$

شروع کنید و آن را نرمال کنید.

**گام 1:** مسئله  $LK^{(U)}$  را به ازای  $U = U_k$  حل کرده و جواب

آن را  $X_k$  فرض کنید. اگر  $g_k \leq 0$  شد متوقف شوید.  $X_k$

جواب نهایی مسئله  $LK^{U_k}$  است و  $U^* = U_k$  قرار دهید.

در غیر این صورت به گام بعدی بروید.

**گام 2:** مسئله برنامه ریزی خطی زیر را حل کنید و جواب آن

را  $y$  و  $d$  فرض کنید.

$$\text{Max } y \\ \text{s.t: } dg_j \geq y \\ 1d = 1 \\ d \geq 0$$

**گام 3:** اگر  $y \leq 0$  شد، متوقف شوید. در این صورت

$U^* = U_k$  می شود.

در غیر این صورت  $\alpha$  را به گونه ای تعیین کنید که

$(U_k + \alpha d)(A\underline{X}_k - b) > 0$  شود و آن گاه  $U_{k+1} = U_k + \alpha d$

می شود. سپس  $U_{k+1}$  را نرمال کنید.  $k=k+1$  قرار دهید و به گام

1 برگردید.

الگوریتم فوق به دلیل آنکه فرض می شود مجموعه جواب،

گسسته و محدود است دارای همگرایی معینی خواهد بود. چرا

مثال:

$$\text{Max } Z = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 2 & x_1 + & 3 & & 6 & & 4 \\ 3 & & 4 & x_2 + & 9 & & 7 \\ 5 & & 5 & & 11 & & 10 \\ 8 & & 6 & & 13 & & 11 \end{vmatrix} x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 6 & x_1 + & 7 & & 8 & & 5 \\ 8 & & 10 & x_2 + & 10 & & 6 \\ 9 & & 12 & & 12 & & 9 \\ 11 & & 14 & & 15 & & 10 \end{vmatrix} x_4 \leq 26$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 3 & x_1 + & 4 & & 6 & & 4 \\ 4 & & 6 & x_2 + & 8 & & 8 \\ 5 & & 8 & & 9 & & 12 \\ 7 & & 10 & & 12 & & 15 \end{vmatrix} x_4 \leq 30$$

$x_j = (1, 2, 3, 4, 5)$

ابتدا مسئله را به شکل مسئله LK تبدیل می‌کنیم:

$$\text{Max } Z = 2x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 8x_{15} + 3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + \dots + 4x_{42} + 7x_{43} + 10x_{44} + 11x_{45}$$

$$\text{s.t.} \\ 6x_{12} + 8x_{13} + 9x_{14} + 11x_{15} + \dots + 5x_{42} + 6x_{43} + 9x_{44} + 10x_{45} \leq 26 \\ 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 7x_{15} + \dots + 4x_{42} + 8x_{43} + 12x_{44} + 15x_{45} \leq 30 \\ x_{ij} = (0, 1) \quad , \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 2, \dots, 5$$

حال فرض کنید  $U_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  باشد در این صورت

محدودیت جانشین به صورت زیر درخواهد آمد:

$$4.5x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 9x_{15} + \dots + 4.5x_{42} + 7x_{43} + 10.5x_{44} + 12.5x_{45} \leq 28$$

که با حل مسئله کوله پشتی خطی فوق خواهیم داشت:

$$x_{34} = x_{43} = x_{44} = 1$$

و مقادیر بقیه متغیرها صفر و  $z = 28$  می‌شود.

در این صورت بردار  $G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  به دست می‌آید که در نتیجه

آن باید مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کرد:

$$\text{Max } y \\ \text{s.t.} \quad d_1 - d_2 \geq y \\ d_1 + d_2 = 1 \\ d_1, d_2 \geq 0$$

که هر گاه گام ۳ موفقیت آمیز باشد به یک  $U$  جدید منجر می‌شود. در حقیقت عضو دیگری را از مجموعه جواب شدنی  $LK^{(U)}$  حذف می‌کنیم. اگر  $y \leq 0$  شد متوقف می‌شویم زیرا که در واقع هیچ گونه افزایشنده  $U_{k+1}$  وجود ندارد که بتواند تمام نقاط قبلی  $x_1, x_2, \dots, x_k$  قبلی را حذف کند و لذا  $U^* = U_k$  قرار داده و متوقف می‌شویم.

در مورد مقدار اولیه  $U_1$  که باید در گام ۰ مشخص شود، می‌توان تمام عناصر موجود در  $U_1$  را برابر  $\frac{1}{m}$  قرار داد که در آن،  $m$  تعداد محدودیتها است.

پس از یافتن بردار جانشین  $U^*$  از طریق فوق باید با توجه به آن، مسئله اصلی SNKP را به شکل مسئله SP تبدیل کرد و با حل مسئله جانشین حدود بالایی و پایینی را برای مسئله SNKP تعیین کرد.

الگوریتم زیر به طور خلاصه نحوه کاربرد محدودیت جانشین را در حل مسئله SNKP به روش "هایبرید اصلاح شده" نشان می‌دهد.

## ۶- الگوریتم کاربرد محدودیت جانشین در حل SNKP

گام ۰: ورودی: داده‌های مسئله اصلی SNKP

گام ۱: تعیین بردار جانشین با استفاده از "الگوریتم یافتن بردار جانشین  $U$ " برای مسئله LK که شکل آزاد شده مسئله اصلی است.

گام ۲: اعمال بردار جانشین به دست آمده برای مسئله SNKP

و تبدیل آن به شکل مسئله جانشین SP

گام ۳: حل مسئله جانشین SP با استفاده از نرم افزار "هایبرید اصلاح شده". در صورتی که جواب مسئله جانشین در مسئله اصلی صدق کند جواب بهینه مسئله اصلی به دست آمده است در غیر این صورت حدود بالایی و پایینی برای مسئله اصلی تعیین می‌شود.

گام ۴: حل مسئله اصلی SNKP با استفاده از نرم افزار "هایبرید اصلاح شده" و حدود به دست آمده از گام قبل.



که با حل آن  $d=(1,0)$  و  $y=1 > 0$  می‌شود. حال باید مقدار  $\alpha$  به گونه‌ایی تعیین شود که  $(U_1 + \alpha d)(Ax - b) > 0$  شود به عبارت دیگر:

$$(U_1 + \alpha d)(Ax - b) > 0 \Rightarrow \left\{ \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] + \alpha [1, 0] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow \alpha > 0$$

حال فرض کنید  $\alpha = 1$  قرار دهیم که در این صورت  $U_2 = (1.5, 0.5)$  شده که پس از نرمال کردن  $U_2 = (0.75, 0.25)$  می‌شود و محدودیت جانشین وابسته به آن به صورت زیر در می‌آید:

$$5.25x_{12} + 7x_{13} + 8x_{14} + 10x_{15} + \dots + 4.75x_{42} + 6.5x_{43} + 9.75x_{44} + 11.75x_{45} \leq 27$$

که با حل مسئله کوله پشتی خطی وابسته به این محدودیت خواهیم داشت:

$$x_{32} = x_{43} = x_{45} = 1$$

و مقادیر بقیه متغیرها صفر و  $Z = 24$  می‌شود. در این صورت

$$\text{چون بردار } G_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \text{ متوقف شده و بردار جانشین}$$

نهایی  $(U^* = (0.75, 0.25))$  است. حال با اعمال این بردار در

مسئله SNKP آن را تبدیل به مسئله جانشین SP می‌کنیم:

$$\text{Max } Z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 5 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 13 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 + \\ x_2 + \\ x_3 + \\ x_4 \end{matrix}$$

$$\text{s.t } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.25 & 6.25 & 7.5 & 4.75 \\ 7 & 9 & 9.5 & 6.5 \\ 8 & 11 & 11.25 & 9.75 \\ 10 & 13 & 14.25 & 11.25 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 + \\ x_2 + \\ x_3 + \\ x_4 \end{matrix} \leq 26$$

$$x_j = (1, 2, 3, 4, 5)$$

که با حل این مسئله توسط الگوریتم "هایبرید اصلاح شده" جواب زیر به دست می‌آید:

$$x_{35} = x_{45} = 1, z = 24$$

چون این جواب در مسئله اصلی شدنی است پس جواب بهینه مسئله SNKP نیز هست.

## ۷- نتایج محاسباتی

برای بررسی و آزمایش الگوریتم ارائه شده در این مقاله نرم‌افزاری به زبان C تهیه شد که مطابق گامهای ذکر شده مسائل نمونه را حل می‌کند. این الگوریتم سپس برای مسایل نمونه و با استفاده از یک رایانه شخصی با پردازنده 450MHz و ۳۲ مگابایت حافظه اصلی اجرا شده است.

در جدول ۱ نتایج محاسباتی حاصل از میانگین حل در ۱۰ دسته مساله نمونه که دارای ابعاد متفاوتی اند ارائه شده است. در هر دسته مسئله نیز برای مسائل رده‌های TP1 الی TP5 و ۱۰ نمونه مختلف و برای مسائل رده‌های TP6 الی TP10 ۴ نمونه مختلف مساله نمونه تولید شده و نتایج حاصل با توجه به میانگین نتایج در این نمونه‌ها به دست آمده است. بنابراین کلاً ۷۰ مسئله نمونه تولید و بررسی شده‌اند. ابعاد مسائل نمونه به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که قادر باشیم جواب بهینه اغلب آنها را با استفاده از نرم افزار "هایبرید اصلاح شده" برای حل مسئله SNKP نیز به دست آوریم.

کلیه ضرایب تابع هدف و محدودیتها در مسائل نمونه به صورت اعداد تصادفی یکنواخت در فاصله (۱۰ و ۱۰۰) هستند. برای تعیین مقادیر سمت راست نیز یک عدد تصادفی در بین مجموع حداقل و حداکثر ضرایب هر محدودیت تولید شده است. در ستونهای جدول ۱ به ترتیب از سمت چپ نام مسئله نمونه (TP)، تعداد موضوع تصمیم گیری (n)، تعداد محدودیتها (m)، تعداد الترناتیوها (k)، میانگین درصد فاصله ثانویه در هر دسته از مسائل نمونه آن دسته (D-Gap)، میانگین درصد اختلاف مابین حدود بالا و پایین حاصل از الگوریتم در هر دسته از مسائل نمونه آن دسته (% Gap)، بیشترین درصد فاصله ثانویه در میان تمام مسائل نمونه آن دسته (WORST %D-Gap) میانگین زمان یافتن بردار جانشین برای هر مسئله برحسب ثانیه (T0) میانگین زمان یافتن جواب بهینه هر مسئله با استفاده از به کارگیری حدود بالایی و پایینی در نرم‌افزار "هایبرید اصلاح شده" برحسب ثانیه (T1) کل میانگین زمان یافتن جواب بهینه هر مسئله با استفاده از به کارگیری

جدول ۱- نتایج محاسباتی حاصل از اجرای الگوریتم بروی ۱۰ دسته مسئله نمونه

TP	n	m	k	% D-Gap	% Gap	Worst % D-Gap	T0	T1	T2	T3	T2/ T3
TP1	10	10	5	3.02	7.04	9.061	33	109	142	201	0.63
TP2	10	10	10	6.43	14.97	14.05	74	143	217	463	0.58
TP3	15	10	5	7.19	17.04	22.05	88	159	247	652	0.38
TP4	20	10	5	9.94	23.25	26.11	111	320	431	810	0.53
TP5	30	10	5	12.45	26.28	34.06	460	753	1213	1943	0.62
TP6	50	5	7	16.01	34.34	39.88	512	872	1384	2297	0.60
TP7	50	8	10	20.42	39.22	42.71	890	1511	2401	****	-
TP8	40	10	15	17.63	33.04	55.04	698	1069	1767	2658	0.66
TP9	40	15	10	26.53	41.04	58.2	639	1260	1899	***	-
TP10	60	15	15	37.90	54.54	67.38	1012	1420	2432	***	-

در مواردی که در جدول علامت \*\*\* درج شده است به این معنی است که در بیش از ۴۰٪ از مسائل نمونه در آن رده تعیین جواب بهینه به دلیل رشد چشمگیر متغیرهای حالت مستقیماً با استفاده از الگوریتم هایبرید اصلاح شده امکانپذیر نبوده است.

الگوریتم جانشین در مسئله اصلی صدق کرده و جواب بهینه مسئله بوده است.

هنگامی که با استفاده از حدود اعمال شده از الگوریتم جانشین حل نهایی مدل انجام می شود در تمامی نمونه‌های حل شده آزمون تفوق زودتر از سایر آزمونها در الگوریتم هایبرید اصلاح شده شروع به کار کرده و نقاط غیر کارا را حذف می کند. آزمون قابل قبول بودن نیز در هیچ موردی زودتر از ۴۰٪ مراحل حل فعال نشده است.

همان گونه که در جدول مشخص است با رشد ابعاد مسئله حل آن توسط نرم افزار "هایبرید اصلاح شده" دچار مشکل می شود به نحوی که برای اغلب مسائل موجود در رده‌های TP7 و TP9 و TP10 حل مسائل نمونه به دلیل رشد بسیار زیاد متغیرهای حالت مستقیماً به وسیله الگوریتم "هایبرید اصلاح شده" امکانپذیر نیست اما با به کارگیری حدود حاصل از الگوریتم جانشین نقاط غیر کارا بسیاری در همان مراحل اول بررسی حذف شده به نحوی که الگوریتم هایبرید اصلاح شده قادر به حل تمامی نمونه‌های موجود در این رده‌ها شده است که با توجه به آن کارایی الگوریتم ارائه شده مشخص می شود. نکته جالب آنکه حتی در مواقعی که حل مسایل نمونه مستقیماً

حدود بالایی و پایینی در نرم افزار "هایبرید اصلاح شده" برحسب ثانیه (T2) (که در واقع مجموع عناصر موجود در دو ستون قبلی است) و میانگین زمان یافتن جواب بهینه هر مسئله بدون استفاده از به کارگیری حدود بالایی و پایینی در نرم افزار "هایبرید اصلاح شده" برحسب ثانیه (T3) و میانگین درصد صرفه جویی در زمان حل مسئله که در واقع نسبت مقادیر موجود در ستون T2/ T3 است.

برای تعیین فاصله ثانویه یا D-Gap % از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\% \text{ D-Gap} = (\text{UB-OPT})/\text{OPT}$$

که در آن منظور از OPT و UB به ترتیب جواب بهینه مسئله اصلی و حد بالای حاصل از الگوریتم محدودیت جانشین است. چون علاوه بر فاصله ثانویه، تعیین میزان اختلاف مابین حدود بالایی و پایینی حاصل از الگوریتم نیز مفید است برای این منظور از مفهوم Gap % به صورت رابطه زیر استفاده شده است:

$$\% \text{ Gap} = (\text{UB-LB})/\text{OPT}$$

که در آن منظور از LB حد پایین حاصل از الگوریتم محدودیت جانشین است.

از کل ۷۰ مسئله نمونه در ۲۳ مسئله جواب حاصل از

توسط الگوریتم "هایبرید اصلاح شده" امکانپذیر است بازهم به کارگیری حدود به دست آمده از الگوریتم جانشین بر سرعت

حل به نحو چشمگیری می‌افزاید به نحوی که بین ۲۵٪ تا ۶۵٪ صرفه‌جویی در زمان حل مسایل نمونه خواهیم داشت.

## واژه‌نامه

1. separable nonlinear knapsack problem
2. multiple choice constraints
3. state variable
4. surrogate constraints
5. feasibility test
6. dominancy test
7. surrogate multiplier vector
8. relaxation problem
9. initial upper bound
10. initial lower bound
11. duality gap
12. partial solutions
13. Benders' method

## مراجع

1. Ghassemi Tari, F., "A Hybrid Algorithm for Discrete Nonlinear Optimization," *Amirkabir Journal of Science & Technology*, Vol. 5, No. 20, 63-68, 1992.
2. Marsten, R.E., and Morin, T.L., "A Hybrid Approach to Discrete Mathematical Programming," *Math. Programming*, Vol. 14pp . 21-40, 1978.
3. Morin, T.L., and Marsten, R.E., "An Algorithm for Nonlinear Knapsack Problem," *Management Science*, Vol. 22, No.10, pp. 1147-1158, 1976.
4. Morin, T.L., and Marsten, R.E., "Branch and Bound Strategies for Dynamic Programming," *Operations Research*, Vol. 24, No.4, 1976
5. Morin, T.L., and Esogbue, A. M. O., "The Imbedded State Space Approach to Reducing Dimensionality in Dynamic Programs of Higher Dimensions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 48, pp. 801-810, 1974.
6. Nakagawa, Y., and Iwasaki, A. , "Modular Approach for Solving Nonlinear Knapsack Problems," *IEICE Trans.*, Vol. E82, No. 9, pp. 1860-1864, 1999.
7. Sarin, S., Karwan, M.H., and Rardin, R.L., "Surrogate Duality in a B&B Procedure for IP," *European Journal of Operational Research* , Vol. 33, pp. 326-333, 1988.
8. Vasquez, M., and Hao, J.K., "A hybrid Approach for 0-1 Multidimensional Knapsack Problem," *Proc. of IJCAI*, pp.328-333, 2001.
9. Wolsey, L.A., *Integer Programming*, John Wiley & Sons, 1998.