

# حل معادلات اوپلر بر روی شبکه‌های بدون سازمان سه بعدی به روش GMRES+LU-SGS و یک جمله استهلاک ضمنی جدید

احمدرضا پیشه‌ور اصفهانی\* و علیرضا شاطری نجف آبادی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۲/۴/۴ - دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۳/۲۴)

**چکیده** - با افزایش توان محاسباتی و دسترسی به رایانه‌های پر بازده‌تر، امروزه استفاده از روشهای ضمنی برای حل معادلات حاکم بر جریان در حالت دایم بر روی شبکه‌های حجیم سه‌بعدی مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. با این وجود در روشهای مرسوم خطی سازی جملات استهلاکی که با جایگزینی ماتریس ژاکوبین با یک مقدار شعاع طیفی ثابت انجام می‌پذیرد خطای میرایی روشهای ضمنی نسبت به روشهای صریح متناظر با آن افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. هدف کار حاضر توسعه یک روش ضمنی بر پایه روش رو است که جمله استهلاک عددی آن، هم مرتبه با جمله استهلاکی روش صریح باقی می‌ماند. در حل معادلات خطی شده با این روش از تکنیک GMRES+LU-SGS که بر پایه زیر فضای کرایلف تعریف شده است، استفاده می‌شود. توانایی این روش در کاهش خطای میرایی با ارائه چند مثال و مقایسه عملکرد آن با روشهای مرسوم در انتها نشان داده خواهد شد.

واژگان کلیدی: معادلات اوپلر، شبکه بدون سازمان سه بعدی، خطای میرایی، روش GMRES+LU-SGS

## A New Implicit Dissipation Term for Solving 3D Euler Equations on Unstructured Grids by GMRES+LU-SGS Scheme

A. R. Pishavar and A. R. Shateri

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** Due to improvements in computational resources, interest has recently increased in using implicit scheme for solving flow equations on 3D unstructured grids. However, most of the implicit schemes produce greater numerical diffusion error than their corresponding explicit schemes. This stems from the fact that in linearizing implicit fluxes, it is conventional to replace the Jacobian matrix in the dissipation term by its constant spectral radius. The objective of the present

\*\* - دانشجوی دکترا

\* - دانشیار

*study is to develop a modified implicit solver based on Roe scheme so that its numerical dissipation is as much as the explicit one. In the proposed scheme, the Krylov subspace method with a LU decomposition preconditioner (GMRES+LU-SGS) is used to solve the linear systems. The efficiency of this method is shown by presenting some examples at the end.*

**Keywords:** Euler equation, Unstructured 3D grid, numerical diffusion, GMRES+LU-SGS

## ۱- مقدمه

در سالهای اخیر استفاده از شبکه‌های بدون سازمان به طور روزافزون در دینامیک سیالات محاسباتی مورد توجه قرار گرفته است. دلیل اصلی این استقبال را می‌توان در انعطاف پذیری این روش در ایجاد شبکه بر روی شکل‌های پیچیده و آسانی تطبیق این شبکه با خصوصیات جریان دانست. در مسیر توسعه الگوریتم عددی برای شبکه‌های بدون سازمان در ابتدا تکنیک‌های صریح در حل جریان تراکم پذیر مورد توجه قرار گرفت. روش رانگ کوتای چند مرحله‌ای برای به دست آوردن حل حالت دائمی، به صورت موفقیت آمیزی مورد استفاده قرار گرفت. استفاده از روش هموارسازی باقیمانده<sup>۱</sup> و تکنیک‌های چند شبکه‌ای<sup>۲</sup> [۱]، باعث افزایش همگرایی شدند. با پیدایش ماشین‌های موازی گرایش به استفاده از روش‌های ضمنی پیدا شد. به طور کلی، روش‌های ضمنی نیاز به حل دستگاه معادلاتی که از خطی سازی مسئله در هر گام زمانی به دست آمده‌اند، دارد. به هر حال برای یک مسئله با مقیاس بزرگ، روش‌های معکوس سازی مستقیم نمی‌توانست به دلیل هزینه محاسباتی و حافظه مورد نیاز بالا، زیاد مفید واقع شود. تلاش‌های در این زمینه، باعث توسعه و پیشرفت روش‌های تکراری شدند. دامنه این تلاش‌ها از روش نقطه‌ای گوس سایدل<sup>۳</sup> تا روش‌هایی که بر اساس زیرفضای کرایلف<sup>۴</sup> که از پیش شرط کننده‌های مختلف استفاده می‌کنند، گسترده است [۲]. هدف اصلی این روش‌ها، یافتن جواب‌های دقیق است به سئوالاتی نظیر: چگونه می‌توان با وجود خطای محاسباتی پایداری حل را بدون ایجاد نوسان در نزدیکی نا پیوستگی‌هایی نظیر امواج ضربه‌ای حفظ کرد و چگونه می‌توان سرعت همگرایی را در رسیدن به حل حالت دائمی افزایش داد. از ابتدای دهه ۸۰ روش‌های گسسته سازی مختلفی بر پایه

روش‌های بالادست<sup>۵</sup> بیان شدند. مزیت این روش‌ها عدم نیاز به استفاده از یک جمله استهلاک مصنوعی صریح در معادلات گسسته شده برای رسیدن به پایداری است. در این روش‌ها استهلاک عددی یک جزء ذاتی از روش است که در نواحی مورد نیاز به صورت خودکار عمل می‌کند. بیشتر این روش‌ها بر پایه حل مسئله ریمان<sup>۶</sup> در سطح یک سلول، بنا شده است. با این وجود حل کننده‌های دقیق ریمان، بسیار ناکارآمد بوده و نیازمند یک روش تکراری است. بدین خاطر حل کننده‌های ریمان تقریبی که بر اساس روش تقسیم شار<sup>۷</sup> پایه گذاری شده است، مانند روش رو<sup>۸</sup> [۳]، هم اینک استفاده می‌شود. با وجود پیشرفتهای به دست آمده، این طرح‌ها هنوز می‌توانند باعث افزایش خطای محاسباتی و حل غلط در نواحی از جریان که در آن گرادیانهای شدید وجود دارد مانند نزدیکی ناپیوستگیها و لایه مرزی شوند. در روش‌های عددی ضمنی به دلیل پیچیدگی و مشکلاتی که در فرمولبندی مسئله ظاهر می‌شود مرسوم است که برای ساده سازی از یک شعاع طیفی ثابت برای ایجاد استهلاک عددی ضمنی استفاده شود [۴] (این مسئله در قسمت سوم توضیح داده خواهد شد). تلاش این مقاله ارائه یک شکل جدید از جمله استهلاک عددی ضمنی است که می‌تواند در دقت حل معادلات اویلر موثر باشد. این روش از تکنیک GMRES برای حل سیستم معادلات خطی به دست آمده از معادلات گسسته شده، استفاده می‌کند. الگوریتم ارائه شده قابل کاربرد بر روی شبکه‌های بدون سازمان سه بعدی است. از آنجا که در این روش ماتریس ضرایب به دست آمده پراکنده و دارای عناصر صفر بسیار است یک روش بهینه برای ذخیره سازی اعضای غیر صفر این ماتریس ارائه می‌شود که حافظه رایانه‌ای مورد نیاز و حجم عملیات ماتریسی را بسیار کاهش می‌دهد.

در روش حجم محدود، شکل گسسته معادلات با اعمال قوانین بقاء در شکل انتگرالی بر زیر بازه‌هایی که به آنها حجم کنترل گفته می‌شود، به دست می‌آید. شکل انتگرالی معادله (۱) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \iint_S F(Q) \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (4)$$

که  $V$  و  $S$  اشاره به سطح و حجم کنترل می‌کند و  $\hat{n}$  بردار نرمال و روبه خارج سطح  $S$  است.  $F(Q)$  بردار شار بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(Q) \cdot n = (V \cdot \hat{n}) \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \cdot + p \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

### ۳- روش عددی

برای یک حجم کنترل کوچک، شکل نیمه گسسته معادله (۴) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j(i)} \Delta S_{ij} F(Q_i, Q_j, n_{ij}) \quad (6)$$

در گسسته سازی ممکن است از مقادیر در مراکز سلول<sup>۱۰</sup> و یا در رئوس سلول<sup>۱۱</sup> به عنوان مجهولات جریان استفاده شود. در حالت مرکز سلولی، سطح کنترل همان سطوح سلول است. ولی در حالت رأس سلولی اجتماع سلولهای در بر گیرنده این رأس، به عنوان حجم معیار در نظر گرفته می‌شود. روش عددی مورد بررسی در اینجا مبتنی بر یک روش مرکز سلولی است. همچنین از روش رو [۳] برای محاسبه شار عددی عبور کننده از هر سطح سلول استفاده می‌شود. بنابراین شار عبوری از سطح  $K$  ام یک حجم کنترل توسط معادله زیر بیان می‌شود:

$$F_k = \frac{1}{2} \left[ F(Q_L) + F(Q_R) - \overbrace{\tilde{A}(Q_L, Q_R)}^{\text{Dissipation Term}} \right] (Q_R - Q_L) \Big|_k \quad (7)$$

ساختار این مقاله به صورت زیر خواهد بود. در قسمت دوم به ارائه معادلات حاکم می‌پردازیم. در قسمت سوم ضمن بیان معادلات گسسته شده به ارائه روشی جدید در فرمولبندی ضمنی مسئله خواهیم پرداخت که مقدار استهلاک عددی را بدون از دست رفتن پایداری و ایجاد نوسانات غیر فیزیکی به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. همچنین در این قسمت روش حل دستگاه معادلات بسیار بزرگی که از خطی سازی مسئله در هر گام زمانی به دست می‌آید به روش GMRES توضیح داده خواهد شد و نحوه ذخیره سازی بهینه ماتریسهای پراکنده برای کاهش حجم حافظه مورد نیاز و کم کردن عملیات جبری مورد توجه قرار می‌گیرد. در انتها نتایج به دست آمده از این روش برای دو مسئله استاندارد مورد بحث قرار می‌گیرد.

### ۲- معادلات حاکم

به مجموعه معادلات جزئی بقای جرم، مومنتوم و انرژی برای سیال غیرلزج<sup>۹</sup>، معادلات اوپلر گفته می‌شود. این معادلات را در شکل بقایی به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $Q, F, G, H$  عبارات اند از:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \cdot \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho wv \\ \rho wH \end{bmatrix} \quad (2)$$

$Q$  بردار متغیرهای مجهول،  $\rho$  چگالی،  $u, v, w$  مولفه‌های بردار سرعت در جهتهای  $x, y, z$  فشار و  $e \cdot$  انرژی کل است. با فرض گاز کامل، ارتباط فشار با انرژی کل و سرعت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$p = \rho RT = (\gamma - 1) \left[ e \cdot - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (3)$$

که  $\gamma$ ، نسبت ظرفیت گرمایی ویژه و برای هوا  $1/4$  در نظر گرفته می‌شود.

$$|\Delta \tilde{F}_1| = |\tilde{U}| \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2} \\ 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \Delta w - n_z \Delta U \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v + \tilde{w} \Delta w - \tilde{U} \Delta U \end{array} \right\} + \tilde{p} \quad (11)$$

$$\tilde{U} = \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y + \tilde{w} n_z, \quad (12)$$

$$\Delta U = n_x \Delta u + n_y \Delta v + n_z \Delta w$$

استفاده از مقادیر متوسط سلولها در دو طرف سطح، ما را به سمت یک طرح مرتبه اول رهنمون می‌سازد که علیرغم توانایی در ایجاد یک گذار هموار در نزدیکی ناپیوستگیها، در بسیاری از موارد به دلیل خطای استهلاکی زیاد غیرقابل قبول است. برای داشتن دقت از مرتبه‌های بالاتر، ون لیر<sup>۱۲</sup> نشان داد که استفاده از میانبایی متغیرها از مرتبه‌های بالاتر در دو طرف سطح سلولهای مجاور می‌تواند مقدار خطای حل را تا همان مرتبه میانبایی کاهش دهد. ون لیر این روش را اختلاف MUSCL<sup>۱۳</sup> نامید [۵]. از تلاشهای انجام شده برای میانبایی متغیرهای جریان بر روی سطوح سلولها در شبکه‌های بدون سازمان می‌توان به کارهای انجام گرفته توسط بارت و جیسپرسون [۶] اشاره کرد. در این روش مقدار متغیر در سطح هر سلول به صورت معادله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q_{\text{face}} = q_{\text{cell}} + r_{\text{face}} \cdot \nabla q_{\text{cell}}, \quad q = [\rho \ u \ v \ w \ p]^T \quad (13)$$

که در آن  $q$  بردار کمیت‌های اولیه و  $r$  فاصله مرکز سلول تا مرکز سطح مورد محاسبه است. برای محاسبه گرادیان در مرکز هر سلول از یک روش هندسی استفاده می‌شود که در نهایت مقدار متغیرها در مرکز سطوح هر سلول را توسط معادله زیر به مقدار متوسط در مرکز سلول و مقادیر آن متغیر در رئوس سلول ارتباط می‌دهد. با استفاده از این روش، برای المانهای هرمی

که در آن ماتریس ژاکوبین مثبت شده  $[\tilde{A}]$  توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$[\tilde{A}] = T |\Lambda| T^{-1} \quad (8)$$

$[T]$  شامل بردارهای ویژه  $[A]$  و  $[\Lambda]$  ماتریس قطری از مقادیر ویژه است.  $Q_R$  و  $Q_L$  بردار متغیرها در سمت چپ و راست سطح  $K$  است. کمیات نشان داده شده توسط  $\sim$  در مقادیر متوسط رو به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{p} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L} w_L + \sqrt{\rho_R} w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{h} = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{a}^2 = (\gamma - 1) \left( \tilde{h} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2} \right) \quad (9)$$

که  $h$  و  $a$  سرعت صوت و انتالپی کل است. جمله استهلاک عددی در معادله (۷)، معمولاً "به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۸]:

$$[\tilde{A}(Q_L, Q_R)](Q_R - Q_L) = |\Delta \tilde{F}_1| + |\Delta \tilde{F}_4| + |\Delta \tilde{F}_5| \quad (10)$$

که :

$$|\Delta \tilde{F}_{4,5}| = |\tilde{U} \pm \tilde{a}| \frac{\Delta p \pm \tilde{p} \tilde{a} \Delta U}{2 \tilde{a}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} \pm n_y \tilde{a} \\ \tilde{w} \pm n_z \tilde{a} \\ \tilde{h} \pm \tilde{U} \tilde{a} \end{bmatrix}$$

با افزایش طول گامهای زمانی، تعداد تکرار برای رسیدن به جواب دائمی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر گام زمانی مجاز در میدان حل به توسط شرط کورانت محدود می‌شود. کنترل بر طول گام زمانی توسط ضریبی به نام کورانت-فردریخ-لوی<sup>۱۶</sup> که در طول گام زمانی بهینه ضرب می‌شود، صورت گرفته و کمترین طول گام زمانی مجاز در کل ناحیه به عنوان طول گام زمانی اصلی محسوب می‌شود [۷].

$$\Delta t \leq \min_i \left\{ CFL \frac{V_i}{(|u_i|+a_i)S_i^{(x)} + (|v_i|+a_i)S_i^{(y)} + (|w_i|+a_i)S_i^{(z)}} \right\} \quad (17)$$

S، مساحت تصویر المان بر صفحات دستگاه مختصات است. در حالت جریان دائم می‌توان ماکزیمم گام زمانی را به توسط روش رانگ کوتای m مرحله‌ای :

$$Q_i^{(0)} = Q_i^n, Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - \alpha_1 R_i^{(0)}, \dots, Q_i^{(m)} = Q_i^{(0)} - \alpha_m R_i^{(m-1)}, Q_i^{n+1} = Q_i^{(m)} \quad (18)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{m-k+1}, k=1, \dots, m$$

و هموارکردن باقیمانده‌ها<sup>۱۷</sup> با لحاظ سلولهای مجاور افزایش داد [۸].

$$\bar{R}_i^{(m)} = \left( R_i + \varepsilon \sum_{j=\kappa(i)} \bar{R}_j^{(m-1)} \right) / \left( 1 + \varepsilon \sum_{j=\kappa(i)} 1 \right) \quad (19)$$

در این صورت می‌توان هر زیر بازه را با طول گام زمانی مربوط به خود<sup>۱۸</sup> حل کرد.

**۳-۱-۲- روش ضمنی:** برای مسایل دائمی استفاده از روش صریح بسیار وقت گیر و احتیاج به تمهیداتی خاص دارد. بدین خاطر برای افزایش طول گام زمانی مجاز معمولاً از روشهای ضمنی استفاده می‌شود. در این روش شار عددی در لحظه n+1 در نظر گرفته می‌شود:

$$\Delta Q_i = - \frac{\Delta t_i}{V_i} \sum_{j(i)} \Delta S_{ij} F(Q_i^{n+1}, Q_j^{n+1}, n_{ij}), \quad (20)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n$$

شکل مقدار متغیر جریان در مرکز سطحی که شامل رئوس j, k, l و مقابل به رأس i است، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$q_{f_{jkl}} = q_c + \frac{1}{4} \left[ \frac{q_j + q_k + q_l}{3} - q_i \right] \quad (14)$$

c اشاره به مرکز سلول دارد و موقعیت مکانی آن، محل تلاقی میانهای هرم است. مقدار کمیت در رئوس سلول با متوسط گیری از مقادیر مرکز المانهایی که راس مورد نظر در آنها وجود دارد، به دست می‌آید:

$$q_m = \sum_{\kappa(m)} \frac{q_{c,m}}{r_m} / \sum_{\kappa(m)} \frac{1}{r_m} \quad (15)$$

r\_m فاصله هر نقطه از راس تا مرکز سلول و κ(m) معرف المانهایی در برگیرنده راس m است.

عموماً طرحهای بالا دست مرتبه دوم نیاز به استفاده از یک تابع محدود کننده<sup>۱۴</sup> گرادیان برای جلوگیری از ایجاد نوسان در مجاور ناپیوستگیها و واگرایی حل دارند. در روش فوق، گرادیانها به کمک مقادیر رئوس سلولها که از متوسط گیری وزنی مقادیر در مرکز سلولها به دست آمده‌اند، محاسبه می‌شوند، معادله (۱۵)، و چون عمل متوسط گیری به دلیل هموار سازی، مقدار تغییرات کلی<sup>۱۵</sup> جواب را کاهش می‌دهد، لذا گرادیان محاسبه شده در این روش نیازی به محدود شدن مجدد ندارد.

### ۳-۱-۳- روش انتگرال گیری در زمان

از دو روش صریح و ضمنی می‌توان برای انتگرال گیری در زمان استفاده کرد. به دنبال اشاره‌ای به هر دو روش می‌شود.

**۳-۱-۱- روش صریح:** در این روش مسئله با یک مقدار اولیه شروع و با طی کردن گامهای زمانی بسیار زیاد، حل دائمی به دست می‌آید. در این روش محاسبه شار عددی در گام زمانی قبل صورت می‌پذیرد:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t_i}{V_i} \sum_{j(i)} \Delta S_{ij} F(Q_i^n, Q_j^n, n_{ij}) \quad (16)$$

$$A_{i \rightarrow j}^+ = -A_{j \rightarrow i}^-, \quad A_{i \rightarrow j}^- = -A_{j \rightarrow i}^+ \quad (27)$$

نکته بسیار مهم، بیان معادله (25) بر روی سطوح مرزی است. با توجه به اینکه  $i$  المان اصلی و  $j$  همسایه آن است و بر روی سطوح مرزی المان همسایه وجود ندارد، لذا از مقدار  $\Delta Q_j$  برای المانهای مرزی صرف نظر می‌شود. نهایتاً مقدار  $Q$  در هر تکرار از فرمول  $Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q$  محاسبه می‌شود. استفاده از یک مقدار ثابت شعاع طیفی در تابع شار (22)، باعث افزایش خطا میرایی نسبت به تابع شار عددی (7) در نواحی با گرادیانهای شدید می‌شود. در کار حاضر شکل جدیدی برای شعاع طیفی بیان می‌شود که مقدار استهلاک عددی ایجاد شده را در حد معادله (7) نگه می‌دارد. بدین منظور، در ابتدا لازم است معادله شار (7) را بر اساس متغیرهای بقایی به جای متغیرهای اولیه بازنویسی کنیم. در این صورت اگر  $\Phi$  نمایش دهنده هر یک از سرعت‌های  $v, u, w$  باشد، می‌توانیم اختلاف مقادیر سمت راست و چپ یک سطح سلولی از کمیات،  $\Delta \Phi = \Phi_R - \Phi_L$  و  $\Delta(\rho \Phi^2) = \rho_R \Phi_R^2 - \rho_L \Phi_L^2$  را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$\Delta \Phi = a \Delta(\rho \Phi) + b \tilde{\Phi}, \quad \Delta(\rho \Phi^2) = c \Delta(\rho \Phi) + d \tilde{\Phi}$$

که،  $\tilde{\Phi}$  مقدار متوسط گیری شده رو از کمیت  $\Phi$  است. با مقایسه دو طرف معادلات فوق برای  $\Phi_R$  و  $\Phi_L$ ، مقادیر  $a, b, c$  و  $d$  قابل محاسبه اند و در نهایت  $\Delta \Phi$  و  $\Delta(\rho \Phi^2)$  بر حسب کمیت‌های بقایی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \left\{ \Delta(\rho \Phi) - \tilde{\Phi} \Delta \rho \right\} \quad (28)$$

$$\Delta(\rho \Phi^2) = \tilde{\Phi} \left\{ 2 \Delta(\rho \Phi) - \tilde{\Phi} \Delta \rho \right\}$$

با به کارگیری معادله فوق همه متغیرهای موجود در معادلات (10) و (11) را می‌توان بر حسب تغییرات متغیرهای بقایی  $\Delta Q$  بازنویسی کرد. به عنوان مثال برای  $\Delta p$  خواهیم داشت:

$$\Delta p = (\gamma - 1) \left[ \Delta e_0 - \frac{1}{2} \left\{ \Delta(\rho u^2) + \Delta(\rho v^2) + \Delta(\rho w^2) \right\} \right] = (\gamma - 1) \left\{ \Delta e_0 - \tilde{u} \Delta(\rho u) - \tilde{v} \Delta(\rho v) - \tilde{w} \Delta(\rho w) + \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2} \Delta \rho \right\} \quad (29)$$

با استفاده از روش خطی سازی برای  $F_{ij}^{n+1} = F(Q_i^{n+1}, Q_j^{n+1}, \rho_{ij})$  خواهیم داشت:

$$F_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n + \frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_j} \Delta Q_j + O(\Delta Q_i^2, \Delta Q_i \Delta Q_j, \Delta Q_j^2) \quad (21)$$

با توجه به هم مرتبه بودن جمله آخر با خطای روش عددی، از این جمله صرف نظر می‌شود. برای محاسبه  $\frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_i}$  و  $\frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_j}$  می‌بایستی از تابع شار عددی نسبت به متغیر مربوطه مشتق جزئی گرفت. برای کاهش حجم عملیات و امکانپذیری مشتق گیری، مرسوم است که تابع شار (7) با عبارت زیر تقریب زده شود [4]:

$$F(Q_i, Q_j) = \frac{1}{2} \left[ F(Q_i) + F(Q_j) - \lambda_{ij} (Q_j - Q_i) \right] \quad (22)$$

که  $\lambda_{ij}$  شعاع طیفی<sup>19</sup> ماتریس ژاکوبین است و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\lambda_{ij} = |V_{ij} \cdot \hat{n}_{ij}| + a_{ij} \quad (23)$$

$a_{ij}$  و  $V_{ij}$ ، سرعت صوت و بردار سرعت براساس متوسط گیری رو است. با این تعریف تابع شار، داریم:

$$\frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F(Q_i)}{\partial Q_i} + \lambda_{ij} \mathbf{I} \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F(Q_j)}{\partial Q_j} - \lambda_{ij} \mathbf{I} \right]$$

با استفاده از معادله (5) می‌توان  $\frac{\partial F(Q)}{\partial Q}$  را محاسبه کرد.

با استفاده از نماد  $A_{i \rightarrow j}^+ = \frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_i}$  و  $A_{i \rightarrow j}^- = \frac{\partial F_{ij}^n}{\partial Q_j}$  می‌توان

تابع شار را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$F_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n + A_{i \rightarrow j}^+ \Delta Q_i + A_{i \rightarrow j}^- \Delta Q_j \quad (25)$$

از جایگذاری معادله فوق در معادله (20) خواهیم داشت:

$$\left\{ \frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \sum_{j(i)} A_{i \rightarrow j}^+ \Delta S_{ij} \right\} \Delta Q_i + \sum_{j(i)} A_{j \rightarrow i}^- \Delta S_{ij} \Delta Q_j = \sum_{j(i)} F_{ij}^n \Delta S_{ij} \quad (26)$$

که برای  $A$  می‌توانیم معادلات زیر را بنویسیم:

### ۳-۲- روش حل عددی معادلات گسسته یافته

در فرمولبندی ضمنی، معادله (۲۶)، نهایتاً معادلات گسسته به صورت یک دستگاه معادلات همزمان بر حسب  $\Delta Q$  در خواهند آمد که آن را به صورت  $Ax=b$  نمایش می‌دهیم که در آن  $A$  ماتریس ضرایب،  $x$  بردار مجهولات (متغیرهای جریان  $\Delta Q$  در هر سلول) و  $b$  بردار معلومات طرف راست است. برای دستگاه معادلات بسیار بزرگ که معمولاً در مسایل سه‌بعدی با آنها مواجه می‌شویم، استفاده از روشهای مستقیم برای معکوس سازی دستگاه معادلات به دست آمده به دلیل محدودیتی که در امکانات رایانه ای نظیر CPU، I/O، حافظه و .... وجود دارد تقریباً "منسوخ شده و روشهای تکراری مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. روشهای تکراری را می‌توان به دودسته روشهای ایستا و غیر ایستا تقسیم کرد. روشهای ایستا مانند روش گوس سایدل و غیره به دلیل کند بودن نرخ همگرایی برای دستگاههای بسیار بزرگ کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

از میان روشهای غیرایستا در حالتی که  $A$  متقارن و مثبت<sup>۲۱</sup> باشد می‌توان به چند تکنیک موفق از جمله روشهای مزدوج گرادیان<sup>۲۲</sup> و مزدوج باقیمانده<sup>۲۳</sup> [۹ و ۱۰]، اشاره کرد. شکل کلی تر روش CG برای ماتریسهای متقارن و مثبت، روش مزدوج گرادیان دوتایی<sup>۲۴</sup> [۱۰]، است که مزیت آن نسبت به روش CG ذخیره‌سازی کم و عیب آن در عدم وجود خاصیت مینیم کردن است [۱۱].

در حالتی که  $A$  نامتقارن باشد، از دو روش مینیمم باقیمانده عمومی<sup>۲۵</sup> و مجذور مزدوج گرادیان<sup>۲۶</sup> بیشتر از بقیه استفاده می‌شود. روش CGS بر گرفته شده از روش BCG برای ماتریسهای نامتقارن، غیرمثبت با ضرایب حقیقی است (دراین زمینه نظریه های بسیار کمی در دسترس بوده و هیچ گونه اطمینانی به همگرایی این روش وجود ندارد). روش GMRES شکل تعمیم یافته روش SYMMLQ [۱] برای ماتریسهای نامتقارن است. در این روش بردارهای نرمال متوالی که خط جستجو را مشخص می‌کنند بر پایه زیر فضای

در نهایت پس از یک سری عملیات جبری  $|\Delta \tilde{F}_1|$  و

می‌توانند به صورت زیر بازنویسی شوند:

$$|\Delta \tilde{F}_1| = [C_1]_{5 \times 5} \Delta Q, \quad |\Delta \tilde{F}_{4,5}| = [C_{4,5}]_{5 \times 5} \Delta Q \quad (30)$$

که ماتریسهای  $[C_1]$  و  $[C_{4,5}]$  با استفاده از تعاریف فوق به دست می‌آیند. اکنون  $|\lambda_1|$  و  $|\lambda_{4,5}|$  را به صورت برداری که اعضای آن عناصر بر روی قطر اصلی  $[C_1]$  و  $[C_{4,5}]$  است، تعریف می‌کنیم:

$$|\lambda_{4,5}| = \left| \frac{\tilde{U} \pm \tilde{a}}{2\tilde{a}^2} \right| \begin{bmatrix} \frac{\gamma-1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) \mp \tilde{a} \tilde{U} \\ (\tilde{u} \pm n_x \tilde{a}) (- (\gamma-1) \tilde{u} \pm \tilde{a} n_x) \\ (\tilde{v} \pm n_y \tilde{a}) (- (\gamma-1) \tilde{v} \pm \tilde{a} n_y) \\ (\tilde{w} \pm n_z \tilde{a}) (- (\gamma-1) \tilde{w} \pm \tilde{a} n_z) \\ (\gamma-1) (\tilde{h} \pm \tilde{U} \tilde{a}) \end{bmatrix},$$

$$|\lambda_1| = |\tilde{U}| \begin{bmatrix} 1 - (\gamma-1) \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2\tilde{a}^2} \\ (\gamma-1) \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{a}^2} + 1 - n_x^2 \\ (\gamma-1) \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{a}^2} + 1 - n_y^2 \\ (\gamma-1) \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{a}^2} + 1 - n_z^2 \\ - (\gamma-1) \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2\tilde{a}^2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

که از عملیات جبری نحوه به دست آمدن این بردارها به دلیل خلاصه نویسی صرف نظر شده است. با استفاده از این تعریف،  $\lambda_{ij}$  به کار برده شده در معادلات (۲۲) و (۲۴) با بردار ارائه شده در زیر تعویض می‌شود، [۱۹]:

$$\rho_A = \max \left\{ \text{abs}(|\lambda_1|), \text{abs}(|\lambda_4|), \text{abs}(|\lambda_5|), \text{abs}(|\lambda_1| + |\lambda_4| + |\lambda_5|), (\text{abs}(\tilde{U}) + \tilde{a}) \underline{i} \right\} \quad (32)$$

که،  $\underline{i} = [1, 1, 1, 1, 1]^T$ . این نحوه تعریف شعاع طیفی، در عمل مقدار استهلاک عددی در نواحی گرادیان بالا را کاهش می‌دهد و قدرت تفکیک<sup>۲۰</sup> در تسخیر ناپیوستگی روش را بهبود می‌بخشد. این مسئله در انتها با ارائه چند مثال مورد تصدیق قرار خواهد گرفت.

do j=1, k	تکرارهای داخلی
y <sub>j</sub> =Av <sub>j</sub>	ضرب ماتریس-بردار
w <sub>j</sub> =P <sup>-1</sup> y <sub>j</sub>	مرحله پیش شرط کننده
do i=1, j	متعامدسازی گرام-اشمیت
h <sub>i,j</sub> =⟨w <sub>j</sub> , v <sub>i</sub> ⟩ .	
w <sub>j</sub> =w <sub>j</sub> -h <sub>i,j</sub> v <sub>i</sub> .	
end do .	
h <sub>j+1,j</sub> =  w <sub>j</sub>    <sub>2</sub>	
v <sub>j+1</sub> =w <sub>j</sub> /h <sub>j+1,j</sub>	به دست آوردن بردار کرایلف
end do	
z=min <sub>z</sub>   βe <sub>1</sub> -Hz   <sub>2</sub>	حل مینیمم مجموع مربعات
ΔQ=ΔQ <sub>0</sub> +∑ <sub>i=1</sub> <sup>m</sup> v <sub>i</sub> z <sub>i</sub>	اصلاح جواب تقریبی
if   βe <sub>1</sub> -Hz   <sub>2</sub> ≤ ε exit	بررسی همگرایی
ΔQ <sub>0</sub> = ΔQ	شروع مجدد
end do	

بیشترین استفاده از الگوریتم GMRES در حل مسایل دائمی است که در آن نتایج گامهای زمانی میانی اهمیتی ندارد. لذا در حل این مسایل از تمامی بردارهای زیر فضا استفاده نشده و از دو شرط  $m_{max}$  و  $\epsilon$  که به ترتیب بیانگر ماکزیمم تعداد بردارهای زیرفضا و حد همگرایی است، استفاده می شود. P در الگوریتم فوق ماتریس پیش شرط کننده بوده و در حالت نظری همان ماتریس A است. در عمل از شکلی برای این ماتریس استفاده می شود که تا حد امکان خواص ماتریس A را حفظ کرده و به راحتی معکوس پذیر باشد. به عنوان مثال در حل تقریبی معادله  $A\Delta Q=R$ ، می توان از تجزیه ماتریس A به  $A=L+D+U$  که L ماتریس پایین مثلثی، D ماتریس قطری و U ماتریس بالامثلثی استفاده کرد. با جایگذاری این شکل از A، معادله مورد نظر به صورت زیر بازنویسی می شود.

کرایلف  $\text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots\}$  ایجاد می شود که در آن  $r_0$  باقیمانده اولین تخمین از جواب است. در روش GMRES این فضای نرمال  $v_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$  به توسط الگوریتم زیر تولید می شود که به عمود سازی بهبود یافته گرام-اشمیت<sup>۲۷</sup> معروف است:

w <sub>i</sub> =Av <sub>i</sub>	
do k=1,...,i	
w <sub>i</sub> =w <sub>i</sub> -⟨w <sub>i</sub> , v <sub>k</sub> ⟩v <sub>k</sub>	(۳۳)
end do	
v <sub>i</sub> =w <sub>i</sub> /  w <sub>i</sub>	

از اعمال الگوریتم فوق بر فضای کرایلف  $\{A^k r_0\}$  (که به آن روش آرنولدی گفته می شود [۱۲]) به معادله زیر می رسیم:

$$Av_m = v_{m+1}H_m \quad (34)$$

که در آن  $H_m \in R^{(m+1) \times m}$  ماتریس هازنبرگ با عناصر غیر صفر  $h_{i,j}$  در  $1 \leq j \leq m$  و  $1 \leq i \leq j+1$  است. در این صورت الگوریتم بهبود جواب از یک تخمین اولیه  $x_0$  بصورت زیر بیان می شود:

$$x^{(i)} = x^{(0)} + y_1 v^{(1)} + \dots + y_i v^{(i)} = x^{(0)} + v_k y_k \quad (35)$$

که ضرایب  $y_k$  از جایگذاری معادله (۳۵) در  $\|b - Ax^{(i)}\|$  و مینیم کردن آن با استفاده از روش تفکیک  $\tilde{H}$  به Q (ماتریس متعامد) و R (ماتریس بالامثلثی) به دست می آیند [۱۳]. با تفسیرهای گفته شده مراحل الگوریتم GMRES(m) به صورت زیر بیان می شود:

do l=1, m	شروع تکرار m ام
v <sub>0</sub> =R-AΔQ <sub>0</sub>	باقیمانده اولیه
r <sub>0</sub> =P <sup>-1</sup> v <sub>0</sub>	مرحله پیش شرط کننده
β=  r <sub>0</sub>    <sub>2</sub>	نرم باقیمانده اولیه
v <sub>1</sub> =r <sub>0</sub> /β	اولین بردار کرایلف



$$(D+L)D^{-1}(D+U)\Delta Q=R+(\cancel{LD^{-1}U})\Delta Q$$

با توجه به اهمیت نتیجه پایانی و صرف نظر از  $(LD^{-1}U)\Delta Q$ ، معادله مورد نظر با فرایند جایگزینی رو به جلو و جایگزینی رو به عقب، به سادگی قابل حل است. با توجه به موارد ذکر شده، ماتریس پیش شرط کننده به صورت  $P=(D+L)D^{-1}(D+U)$  تعریف می‌شود. مزیت این تعریف سادگی محاسبه پیش شرط کننده و ذخیره سازی کم آن است. استفاده از این شکل پیش شرط کننده، به GMRES+LU-SGS معروف است.

### ۳-۳- شرایط مرزی

در مسایل مورد بررسی در این مقاله از سه نوع شرط مرزی استفاده می‌شود، که عبارت اند از شرط مرزی دیوار صلب، شرط مرزی ورودی و شرط مرزی خروجی یا دور دست.

شرط مرزی دیوار صلب: از این نوع شرط مرزی بر روی دیوار یا بر روی محور تقارن استفاده می‌شود برای هر سلول مرزی یک سلول مجازی با همان ابعاد در طرف دیگر آن در نظر گرفته شده که گرادیان کلیه متغیرهای جریان اعم از  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $e$  و مولفه‌های سرعت روی سطح آن صفر است و تنها مولفه عمودی سرعت بر روی سطح سلول در مجازی مربوطه‌اش، مقدار منفی قرار داده می‌شود (تصویر آینه‌ای).

شرط مرزی ورودی: این مرز در جلوی جسم قرار دارد و به اندازه‌ای از بدنه جسم، دور در نظر گرفته می‌شود که اغتشاشات به این مرز نرسد. اهمیت این موضوع بیشتر در جریان زیر صوت است. در حالت جریان فرا صوتی تمامی کمیت‌های روی مرز، همان مقادیر مربوط به جریان آزاد است. در حالت جریان زیر صوت کمیت فشار از مقادیر داخلی میانبایی شده و بقیه کمیتها همان مقادیر جریان آزاد است.

شرط مرزی خروجی یا دور دست: این مرز مربوط به اطراف جسم یا در خروج است. چنانچه جریان در خروج فرا صوتی باشد، گرادیان کمیتها در سطح خروجی صفر در نظر گرفته می‌شود و چنانچه جریان زیر صوتی باشد فشار در مقدار داده شده ثابت و بقیه کمیتها برونبایی می‌شوند.

### ۳-۴- نحوه ذخیره کردن اطلاعات

عموماً تعداد عناصر صفر ماتریس ضرایب دستگاه معادلات به دست آمده از گسسته سازی بسیار زیادند. چنانچه عناصر صفر این ماتریسها به نحوی در نظر گرفته نشوند، ذخیره سازی و روند حل مسئله می‌تواند بهبود یابد. عدم استفاده از عناصر صفر نیازمند به داشتن روشی برای ذخیره کردن عناصر غیرصفر است. از جمله روشهای ذخیره کردن عناصر غیرصفر ماتریسهای پراکنده می‌توان به روشهای فشرده ذخیره‌سازی سطری<sup>۲۸</sup>، سطری بلوکی<sup>۲۹</sup>، قطری<sup>۳۰</sup> و .... اشاره کرد که هرکدام مزایا و معایبی دارند. روش فشرده ذخیره سازی سطری از متداولترین روشهای ذخیره‌کردن ماتریسها به شمار می‌رود و در بیشتر نرم افزارهای عددی حرفه‌ای از آن استفاده می‌شود [۱۴]. به دنبال این روش منحصرأ توضیح داده می‌شود. در روش فشرده ذخیره سازی سطری، یک ماتریس نامتقارن و پراکنده با سه بردار  $col$ ،  $val$  و  $row$  نمایش داده می‌شود که به ترتیب مقادیر ذخیره شده در آنها از نوع مقادیر اعشاری، صحیح و صحیح اند. بردار  $val$  مقادیر غیرصفر از ماتریس پراکنده را شامل می‌شود. در بردار صحیح  $col$ ، شماره ستونهای عناصر ذخیره شده در  $val$  قرار می‌گیرد به طوری که اگر  $val(k)=a_{ij}$  عناصر ماتریس  $A$ ،  $col(k)=j$  است. بردار  $row$  تعداد عناصر غیر صفر در هر ردیف را بیان می‌کند به طوری که  $row(i) \leq k \leq row(i+1)-1$  در آن  $row(1)=1$  و  $row(n+1)=m+1$  فرض می‌شود که  $n$  تعداد سطر-ستون  $m$  و تعداد عناصر غیرصفر ماتریس  $A$  است. این روش ذخیره سازی بسیار کارآمد بوده به گونه‌ای که در آن تنها به  $2m+n+1$  موقعیت ذخیره سازی نیاز است. در روش مرسوم ذخیره‌سازی با در

جدول ۱- شرایط ورودی

$\gamma$	نسبت ظرفیت گرمایی ویژه	۱/۴۰۰
$\rho$	چگالی بدون بعد	۱/۰۰۰
$u$	سرعت بدون بعد در جهت x	۱/۰۰۰
$v$	سرعت بدون بعد در جهت y	۰/۰۰۰
$w$	سرعت بدون بعد در جهت z	۰/۰۰۰
$p$	فشار بدون بعد	۰/۱۷۹

( $L_2$ Norm) بر اساس تغییرات چگالی در دو تکرار متوالی بیان می‌شوند. میزان خطا ( $\epsilon$ ) در روش GMRES، تعداد زیرفضا کرایلف ( $m$ ) و تعداد تکرار مجاز در هر گام زمانی به ترتیب برابر  $10^{-3}$ ، ۵ و ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. شبکه بدون سازمان ساخته شده شامل: ۳۰۶۵۴ المان، ۶۶۶۵ نقطه و ۲۵۴۸ نقطه بر روی مرز است. نتایج به دست آمده از دو حالت شعاع طیفی ثابت و روش ارائه شده در این مقاله برای کانتور چگالی در شکلهای ۲- الف و ب نمایش داده شده است.

همان طور که مشاهده می‌شود، قدرت تفکیک ناحیه امواج ضربه‌ای توسط شکل جدید شعاع طیفی بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته است به طوری که انعکاس امواج از روی دیواره‌ها با ضخامت کمتری اتفاق افتاده است. از مقایسه نواحی B، C، D، E و از شکل ۲- الف با نواحی متناظر آن در شکل ۲- ب، G، H، I و J، این ادعا تصدیق می‌شود. پهنای ناحیه B تقریباً دو برابر پهنای ناحیه متناظر آن G است.

در شکل ۳ برای مقایسه کمی نتایج دو روش، توزیع فشار بدون بعد بر روی سطوح بالا و پایین کانال در دو حالت شعاع طیفی ثابت و روش حاضر با یکدیگر مقایسه شده است. همان طور که از نمودارها استنباط می‌شود، پهنای موج ضربه‌ای (فاصله طولی در جهت x بین نقاط مینیمم و ماکزیمم در یک پرش) در روش حاضر به طور محسوس کاهش یافته است همچنین از این شکل مشخص است که روش شعاع طیفی ثابت، مقادیر اکسترمم را مانند روشهای مرتبه اول کاهش می‌دهد. بدین منظور نتایج به دست آمده از روش شعاع طیفی

نظرگرفتن عناصر صفر و غیرصفر ماتریس، مقدار موقعیت ذخیره سازی به  $n^2$  افزایش می‌یابد. در مثال زیر نحوه ذخیره‌سازی برای یک ماتریس نمونه نشان داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

val	a <sub>11</sub>	a <sub>14</sub>	a <sub>21</sub>	...	a <sub>62</sub>	a <sub>65</sub>	a <sub>66</sub>
col	۱	۵	۱	...	۲	۵	۶

row	۱	۳	۶	۹	۱۳	۱۷	۲۰
-----	---	---	---	---	----	----	----

#### ۴- نتایج و بحث

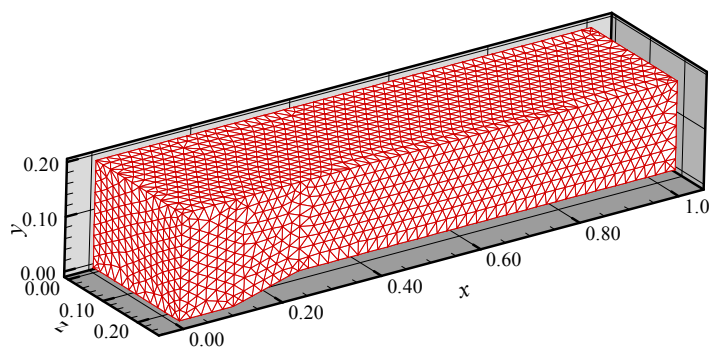
توانایی و کارایی روش ارائه شده در این تحقیق با ارائه دو مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مثالها شامل جریان فرا صوت از روی یک سطح شیب دار در یک کانال سه‌بعدی<sup>۳۱</sup> و جریان گذر صوتی از روی بال سه بعدی اونرا<sup>۳۲</sup> است که به صورت مثالهای استاندارد برای مقایسه نتایج در مراجع ذکر شده‌اند.

#### ۴-۱- جریان فراصوت از داخل یک کانال سه‌بعدی با سطح

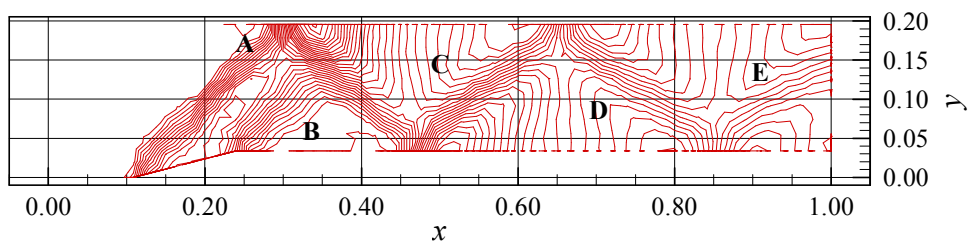
##### شیب‌دار

جریان فرا صوتی در یک کانال سه‌بعدی به عنوان آزمایش عددی اول در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. هندسه کانال مورد نظر و شبکه به کار گرفته شده در شکل (۱)، نشان داده شده است. صفحات  $x = 1/0$  و  $x = 0/0$  به ترتیب صفحات ورودی و خروجی جریان اند. صفحه مایل فوقانی دارای زاویه گوشه  $14/7^\circ$  از  $[0/109, 0/2, z]$  تا  $[0/239, 0/166, z]$  می‌باشد. شرایط ورودی ثابت و در جدول ۱ داده شده است.

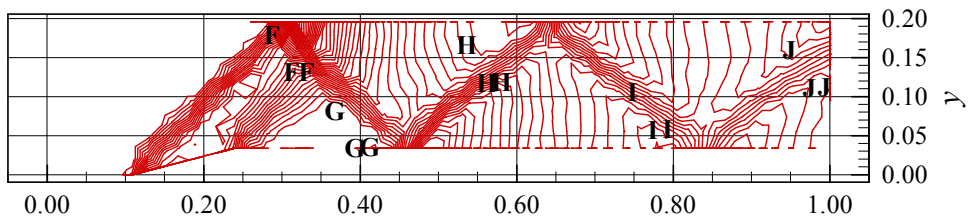
این شرایط متناظر با جریان فراصوت با عدد ماخ ۲/۰۰ در ورودی است. دیوارهای جانبی همگی به عنوان دیوار صلب در نظر گرفته می‌شوند و شرط مرزی انعکاسی بر روی آنها اعمال می‌شود. نتایج بر اساس کانتور چگالی و نرخ همگرایی



شکل ۱- کانال سه بعدی

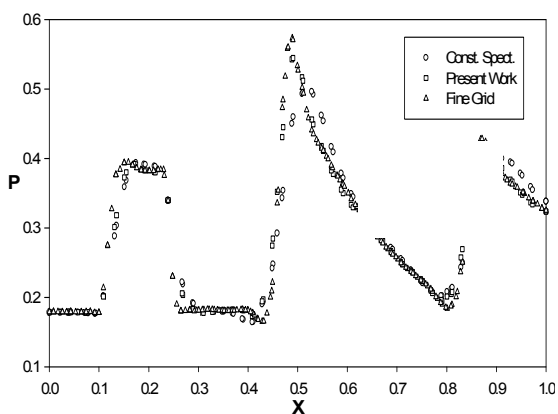


الف) شعاع طیفی ثابت

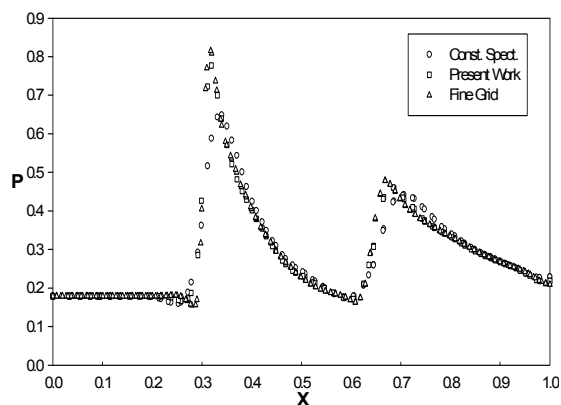


ب) روش حاضر

شکل ۲- کانتور چگالی



ب) سطح پایینی



الف) سطح بالایی

شکل ۳- توزیع فشار بر روی سطوح بالا و پایینی کانال سه بعدی

ثابت و با یک شبکه ریزتر شامل ۲۲۳۳۲۱ المان، ۴۴۲۰۸ نقطه و ۱۰۲۵۵ نقطه بر روی مرز با نمادهای مثلثی در روی شکل مشخص شده است. جالب توجه است که نتایج به دست آمده از روش حاضر کاملاً منطبق بر جوابهای به دست آمده از روش شعاع طیفی ثابت و تقریباً با ۷ برابر المان بیشتر است.

علت نوسانی بودن کانتورها، شکل (۲)، را می‌توان در دو عامل ذکر کرد: الف) جوابها، در صورت استفاده از شبکه‌های بدون سازمان بر خلاف شبکه‌های با سازمان دارای نوسانات ریز<sup>۳۳</sup> است. در شبکه با سازمان تغییر اندازه شبکه به صورت یکنواخت انجام می‌شود در حالی که در روش بدون سازمان تغییرات می‌تواند ناگهانی و به صورت غیریکنواخت باشد که این باعث به وجود آمدن نوسانهای با فرکانس بالا بر روی جواب می‌شود. با ریزتر و یکنواخت‌تر کردن شبکه می‌توان نوسانات را کاهش داد. ب) همچنین به خاطر کمتر شدن جمله استهلاکی، نوسانات در روش حاضر بیشتر از روش شعاع طیفی ثابت است. به این نکته می‌بایست توجه شود که روشهای یکنوای مرتبه اول که دارای استهلاک عددی زیادی اند می‌توانند جوابهای هموار و بدون نوسانی ایجاد کنند ولی این به معنای فیزیکی بودن این جوابها نیست. وجود نوسانات با دامنه کم بیشتر در روش حاضر خود گواهی بر کاهش استهلاک عددی است. به هرحال با افزایش تعداد المانها عملاً می‌توان این نوسانات کم را کاهش داد. در شکل (۴) نمونه کانتورهای دانسیته در یک شبکه ریزتر با ۲۲۳۳۲۱ المان آورده شده است.

به این نکته می‌بایست توجه شود که عدم وابستگی جواب به شبکه زمانی انجام می‌شود که بخواهیم همگرایی یک جواب عددی را به جواب معادله دیفرانسیل با لحاظ شبکه مورد بررسی قرار دهیم. در صورتیکه در این مقاله دو روش شعاع طیفی ثابت و روش حاضر در روی یک شبکه یکسان با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

از مقایسه نرخ همگرایی دو روش، شکل (۵)، درصد اختلاف زمانی دو روش در میزان خطای  $10^{-5}$  حدود ۲۴ درصد است. دلیل کاهش نرخ همگرایی را می‌توان بدین صورت

توجیه کرد که به دلیل کم شدن مقدار استهلاک عددی در روش پیشنهادی این روش در مدت طولانی‌تر قادر به حذف نوسانات خطا به دلیل پرش متناوب امواج ضربه‌ای از یک سلول به سلول مجاور در نزدیکی جواب حالت دائمی است در حالی که در روش شعاع طیفی ثابت چون امواج ضربه‌ای در تعداد سلول بیشتری تسخیر می‌شود پهنای موج ضربه‌ای بیشتر است و در نتیجه این نوسانات کمتر خواهد بود. این مسئله برای همه روشهایی که سعی در کاهش استهلاک عددی به کمترین مقدار مناسب دارند صحت دارد. با این وجود استهلاک عددی یک کمیت غیرفیزیکی است و مقدار آن تا حد امکان باید کاسته شود حتی اگر این امر به کند شدن روند همگرایی منجر شود.

اثر افزایش عدد CFL در سرعت همگرایی به حل حالت دائم در سه عدد CFL در شکل (۶) نشان داده شده است. جالب توجه است که با افزایش عدد CFL از  $10^3$  به  $10^5$ ، سرعت همگرایی به بیش از دو برابر افزایش یافته است.

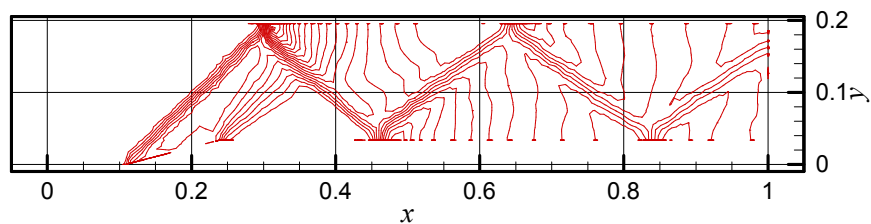
تمامی اجراها بر روی یک رایانه AMD با سرعت CPU، ۱/۸GHZ و مقدار حافظه ۱/۰GB، انجام شده است.

#### ۴-۲- جریان گذر صوتی از روی بال سه بعدی اونرا

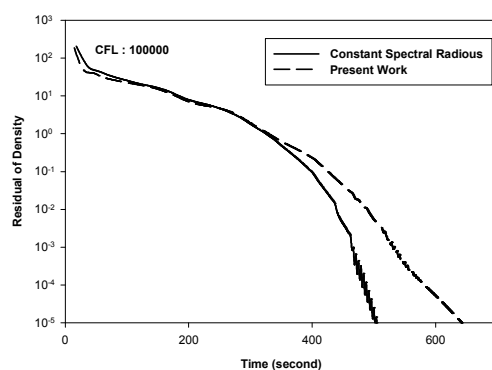
جریان گذر صوتی بر روی سطح یک بال سه بعدی که سطح آن از اتصال یک نقطه در فضا با نقاط منحنی پایه آن شکل می‌گیرد، را در این قسمت مورد بررسی قرار می‌دهیم. استفاده از این نوع بال برای تایید حلگرها بسیار مرسوم است و نتایج تجربی آزمایش تونل باد نیز برای آن موجود است [۱۶]. شکل و هندسه بال مورد نظر و همچنین شبکه به کار برده شده در این شبیه سازی در شکل (۷) نشان داده شده‌اند.

این بال در داخل ناحیه‌ای به شکل مکعب قرار گرفته است.  $x = 11/5, -6/5$ ، به ترتیب صفحات ورودی و خروجی جریان،  $y = 0/0$  به عنوان صفحه تقارن و صفحات  $z = 6/5, -6/5$ ، مرز دور دست اند. شرایط جریان آزاد در جدول (۲) نشان داده شده است.

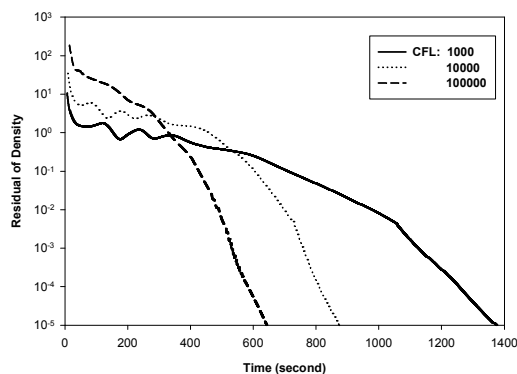
این شرایط متناظر با جریان آزاد با عدد ماخ  $0/84$  در ورودی و



شکل ۴- کانتورهای دانسیته برای شبکه بسیار ریز و کم شدن نوسانات.



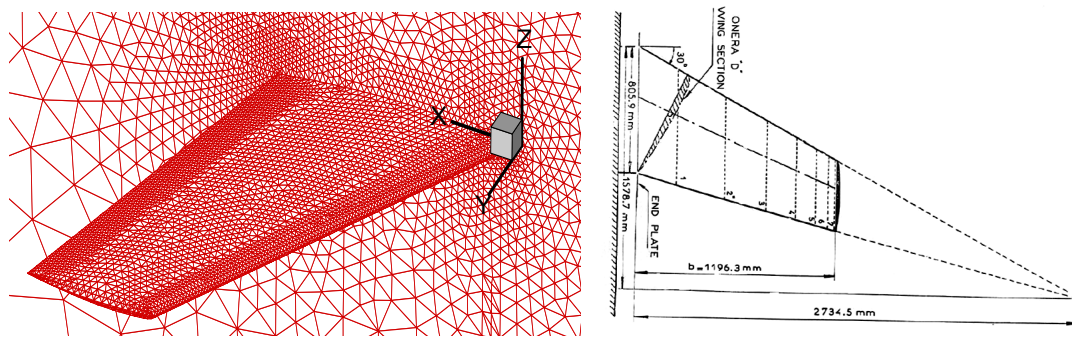
شکل ۵- مقایسه همگرایی برای دو حالت شعاع طیفی.



شکل ۶- مقایسه همگرایی برای CFLهای  $10^3$ ،  $10^4$  و  $10^5$ .

توسط کانتور چگالی در شکل (۸) نشان داده شده است. از مقایسه کانتورهای چگالی می‌توان این نتیجه‌گیری را داشت که تراکم خطوط و انحنای موج ضربه ای در حالت شعاع طیفی ثابت (الف) نسبت به روش حاضر (ب) کمتر است. جالب توجه است که کیفیت جواب به دست آمده در شکل ۸-ب، با جواب به دست آمده در مرجع [۱۷] با به کار بردن  $7000000$  المان

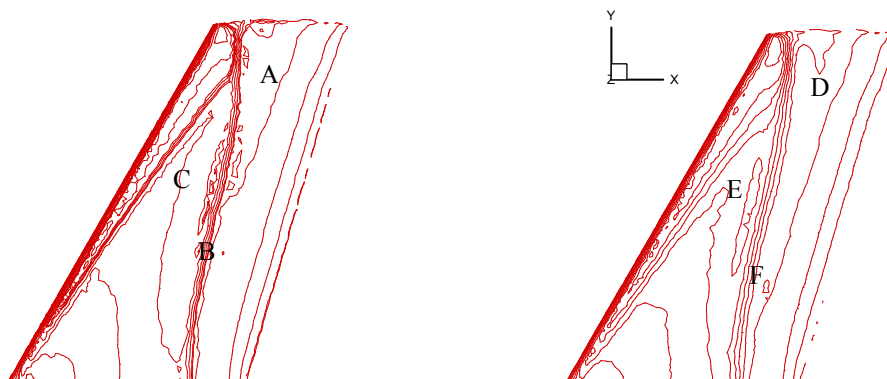
زاویه حمله  $3/06^\circ$  است. نتایج بر اساس کانتور چگالی و ضریب فشار ( $C_p$ ) و نرخ همگرایی بر اساس چگالی بیان می‌شوند.  $m$ ،  $\varepsilon$  و تکرار مجاز همان مقادیر استفاده شده در مثال قبلی است. شبکه بدون سازمان ایجاد شده شامل:  $310000$  المان،  $67235$  نقطه و  $7991$  نقطه بر روی مرز است. نتایج به دست آمده از دو حالت شعاع طیفی ثابت و روش ارائه شده



شکل ۷- مشخصات هندسی و شبکه مورد استفاده

جدول ۲- شرایط ورودی

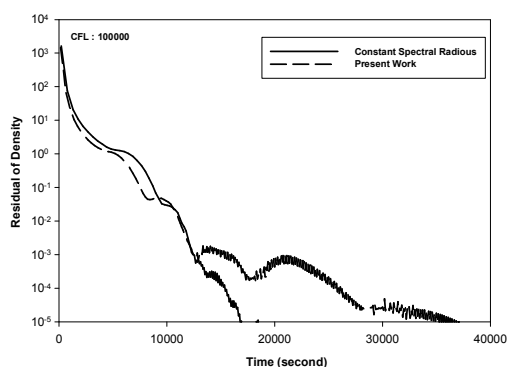
$\gamma$	نسبت ظرفیت گرمایی ویژه	۱/۴۰۰
$\rho$	چگالی بدون بعد	۱/۰۰۰
$u$	سرعت بدون بعد در جهت X	۰/۸۳۹
$v$	سرعت بدون بعد در جهت Y	۰/۰۰۰
$w$	سرعت بدون بعد در جهت Z	۰/۰۴۵
$p$	فشار بدون بعد	۰/۷۱۴



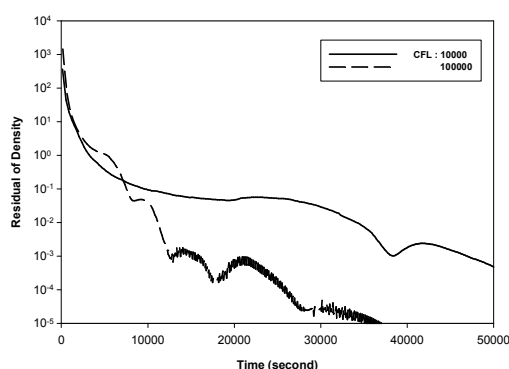
(ب) روش حاضر

(الف) شعاع طیفی ثابت

شکل ۸- کانتور چگالی



شکل ۹- مقایسه همگرایی برای دو حالت شعاع طیفی



شکل ۱۰- مقایسه همگرایی برای CFLهای  $10^4$  و  $10^5$

برابری می‌کند.

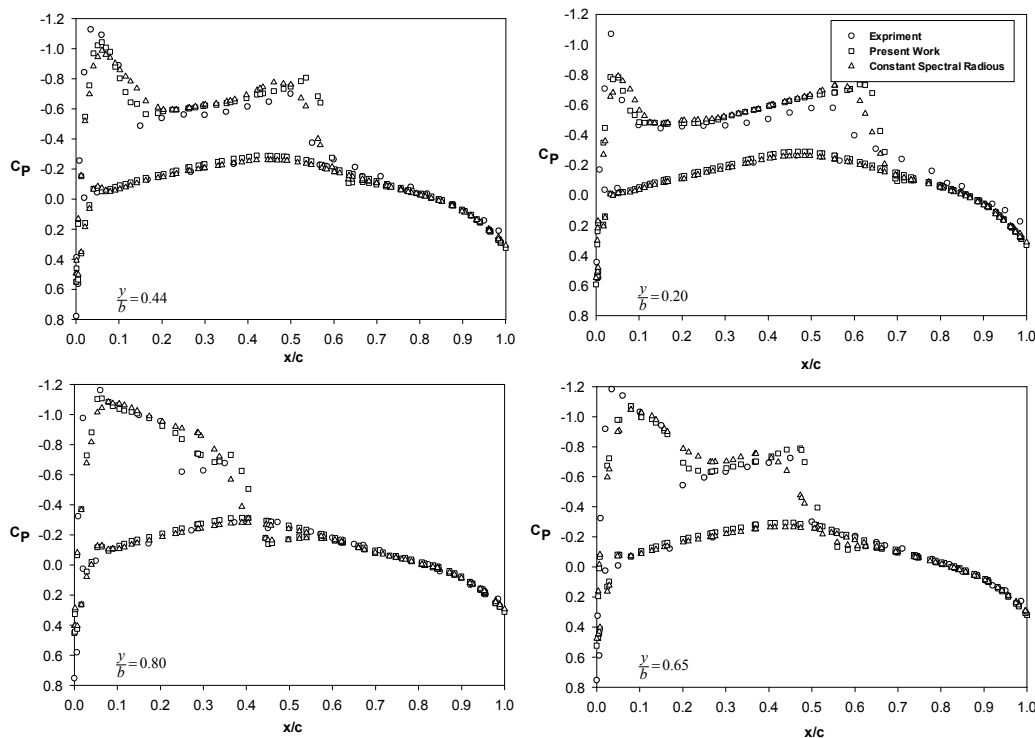
از مقایسه نواحی در شکل (۸)، نقطه سه‌گانه A نسبت به D از وضوح بیشتر و ضخامت کمتری برخوردار است. در ضمن ضخامت نواحی C و B متناظراً نسبت به E و F، کاهش یافته است.

سرعت همگرایی این دو روش در شکل (۹) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص می‌شود نرخ همگرایی تا خطای  $10^{-4}$  تقریباً یکسان است ولی به دلیل گفته شده در قسمت قبل با نزدیک شدن به حل حالت دائمی روش جدید دارای سرعت همگرایی کمتری است.

با این وجود با افزایش عدد CFL به  $10^5$  می‌توان سرعت همگرایی را همان‌طور که در شکل (۱۰) نشان داده شده است، افزایش داد. جالب توجه است که در صورت استفاده از روش صریح و تکنیکهای شتاب‌دهی مرسوم، زمان اجرای لازم برای

رسیدن به خطای  $10^{-4}$  در حدود سه شبانه‌روز بر روی رایانه مشابه است.

توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف بال در شکل (۱۱) نشان داده شده است. همان‌گونه که از این اشکال مشخص می‌شود ضخامت لایه موج ضربه‌ای در روش جدید نسبت به روش شعاع طیفی ثابت بسیار بهبود یافته است. با افزایش  $y/b$  دقت روش ارائه شده از دقت روش شعاع طیفی ثابت بیشتر است. همچنین همخوانی بسیار خوبی بین نتایج عددی و نتایج تجربی [۱۶] در نواحی خارج از ناحیه موج ضربه‌ای وجود دارد. علت اختلاف نتایج با مقادیر تجربی در نزدیکی موج ضربه‌ای را می‌توان در اندرکنش موج ضربه‌ای و لایه مرزی دانست. در حالت تجربی (نتایج ارائه شده در وب سایت ناسا)، سیال مورد آزمایش دارای لزجت بوده در صورتی که در حل مورد نظر سیال غیرلزج در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که از نمودارها



شکل ۱۱- توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف

می‌توان عدد CFL در حل معادلات را تا  $10^5$  مرتبه افزایش داد و بنابراین سرعت همگرایی حل حالت دائمی را بهبود بخشید. بهبود عملکرد این روش با ارائه دو مثال در مقایسه با روش استفاده از شعاع طیفی ثابت مورد تصدیق قرار گرفت. سعی مولفان در این مقاله ارائه یک روش ضمنی است که استهلاك عددي آن در حد استهلاك عددي روشهای صریح باقی بماند، بدون آنکه فرمولبندی حل دستگاه معادلات خطی به دست آمده دستخوش پیچیدگی شود. روش شعاع طیفی ثابت اگرچه در امر آخر موفق است ولی متاسفانه استهلاك عددي را نسبت به استهلاك عددي روشهای صریح افزایش می‌دهد.

مشخص می‌شود، در نواحی خارج از محدوده موج ضربه‌ای به دلیل کم بودن اندرکنش نواحی لزج و غیرلزج اثرات لایه مرزی در نزدیک سطح محدود می‌شود و فشار به دست آمده از تحلیل جریان سیال ایدئال، همخوانی خوبی با نتایج واقعی دارد.

## نتیجه‌گیری

در این بررسی یک جمله جدید استهلاك عددي برای روشهای ضمنی حل معادلات اویلر پیشنهاد شد که خطای میرایی در نواحی با گرادیان بالایی جریان مانند امواج ضربه‌ای را تا حدود نسبتاً زیادی کاهش می‌دهد. روش ارائه شده کاملاً با فرمولبندی حل ضمنی معادلات انطباق دارد. از روش GMRES+LU-SGS برای حل دستگاه معادلات به دست آمده از گسسته سازی معادلات استفاده شده است که به کمک آن



- |                                |   |   |
|--------------------------------|---|---|
| 1. residual smoothing          | 14. limiter                             | 26. conjugate gradient squared (CGS)        |
| 2. multi grid                  | 15. total variation                     | 27. modified Gram-Schmidt orthogonalization |
| 3. Gauss-Seidel                | 16. Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)       | 28. compressed row storage (CRS)            |
| 4. Krylov subspace             | 17. implicit averaging of the residual  | 29. block compressed row storage (BCRS)     |
| 5. upwind scheme               | 18. local time stepping                 | 30. compressed diagonal storage (CDS)       |
| 6. Riemann problem             | 19. Spectral Radious                    | 31. ramp                                    |
| 7. finite difference splitting | 20. resolution                          | 32. Onera M6                                |
| 8. Roe                         | 21. symmetric positive definite (SPD)   | 33. wiggles                                 |
| 9. inviscid                    | 22. conjugate gradient (CG)             |   |
| 10. cell centered scheme       | 23. conjugate residual (CR)             |   |
| 11. vertex scheme              | 24. biconjugate gradient (BCG)          |   |
| 12. Van Leer                   | 25. generalize minimum residual (GMRES) |   |
| 13. MUSCL differenceing        |   |   |

## مراجع

1. Sonneveld, P., Wesseling, P. and Zeeuw, P. M. de, "Multigrid and Conjugate Gradient Methods as Convergence Acceleration Techniques", Multigrid Methods for Integral and Differential Equations, D. J. Paddon, H. Holstein editors, Clarendon Press Oxford, pp.117-167, 1985.
2. Saad, Y., "Krylov Subspace Methods for Solving Large Unsymmetric Linear Systems", Math. Comp., Vol.37, No.105, 1981.
3. Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", J. Comp. Phys., Vol.43, pp.357-372, 1981.
4. Nakahashi, K. Togashi F., and Sharov, D. "Intergrid-Boundary Definition Method for Overset Unstructured Grid Approach", AIAA J., Vol .38, No. 11, pp. 2077-2084, November 2000.
5. Vanleer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. A Second Order Sequel to Godunov's Method", J. Comp. Phys., Vol.32, pp.101-136, 1974.
6. Barth T. J. and Jespersen, D. C., "The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes", AIAA Paper 89-0366, 1989.
7. Whitaker, D. L. "Two-Dimensional Euler Computations on a Triangular Mesh Using and Upwind Finite Volume Scheme", Ph.D Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1988.
8. Jameson, A., and Barth, T. J. "Solution of the Euler Equations for Complex Configurations", AIAA Paper 83-1929-CP, July 1983.
9. Hasbani, I., and Engelman, M. "Out of Core Solution of Linear Equations with Non Symmetric Coefficient Matrix", Comp. and Fluids, Vol.7, No.13, 1979.
10. Fletcher, R. (1975, 1976), "Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems, Proceedings of the Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis", G. A. Watson editor, Springer-Verlag, New York, (1975), and Lectures Notes in Mathematics 506, Springer-Verlag, New York, 1976.
11. Saad, Y., "The Lanczos Biorthogonalization Algorithm and Other Oblique Projection Methods".
12. Arnoldi, W. E., "The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem", Quart. Appl. Math., Vol.9, pp.17-29, 1951.
13. Golub H. G. and Van loan, C. F., "MATRIX COMPUTATION", Third Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
14. Barrett, R. M., Berry, T. F. Chan, J., Demmel, J. M., Donato, J. Dongarra, V., Eijkhout, R., Pozo, C., Romine and Van der Vorst, H., " Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods", 1994. <http://www.netlib.org/templates/templates.html>.
15. Bond, R. B. "A Conservative Interblock Communication Algorithm for Dynamically Discontinuous Multiblock Interface Grids", M.Sc Dissertation, North Carolina State University, 2001.
16. <http://www.grc.nasa.gov/www/wind/valid/m6wing/m6wing.html> .
17. Hong, L., Joseph D. B., and Rainald, L. "A Fast, Matrix-Free Implicit Method for Compressible Flows On Unstructured Grids", J. Comp. Phys., Vol. 146, pp. 664-690, 1998.
18. Frink, N. T. and Parikh, P. "A Fast Upwind Solver for the Euler Equations on Three-Dimensional Unstructured Meshes" AIAA-91-0102
19. Pishavar A. R. and Shateri, A. R. "A Flexible GMRES Scheme for Solving Euler Equations on 3D Unstructured Grid," Proceedings of 11<sup>th</sup> Annual Conference of the CFD Society of Canada, 2003.