

## روش غیرمستقیم و با قاعده المان مرزی برای بررسیهای حرارتی<sup>۱</sup>

ترجمه : شهرام حمایت\*

### خلاصه

روش غیرمستقیم و با قاعده المان مرزی ، بدنبال روند پس ماند وزن دار رشد و توسعه یافته است . در این روش ، چگالی منبع فرضی که در معا دلات انتگرالی ظاهر می شود ، درست طحی که از مرز فیزیکی میدان جدا شده است ، توزیع می شود . این روش به محاسبه انتگرال های منفرد نیازی نداشته و حل های زوال ناپذیری را در ناپیوستگی های هندسی تولید می کند . روش نشان داده شده در این مقاله بر مسائل حرارتی دو بعدی و متقارن محوری اعمال شده است . در این روند که شامل زیر ناحیه سازی های مختلف است ، هر زیر ناحیه ای جداگانه در نظر گرفته شده و بدین ترتیب نیاز به طرح پیچیده ای جهت کاهش مسائل چند ناحیه ای از بین رفته است .

### مقدمه

مزیت اصلی روش ناحیه مرزی در بین روش های ناحیه ای نظیر روش المان محدود ، کاهش تعداد درجات آزادی مورد نیاز برای نیل به جاسازی قانع کننده و محاسبه انتخابی حل داخلی است .  
نظیر روش های ناحیه ای ، انواع مختلفی از روش های ناحیه مرزی وجود دارند که عموما " بر اساس " مستقیم " یا " غیرمستقیم "

\* فارغ التحصیل دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی اصفهان

1.J.L.Wearing & M.A.Sherikh, University of Sheffield, England,  
"A Regular Indirect Boundary Element Method for Thermal Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.25, pp.495-515, 1988.

بودن مشخص می‌شوند. روش مستقیم المان مرزی (DBEM)<sup>۱</sup> بطور کلی بر اساس شناسه گرین قرار داشته و هنوز هم کلیتی و متنوعتر از روش غیرمستقیم المان مرزی (IBEM) محسوب می‌شود[۱]. IBEM را میتوان حالت خاصی از DBEM تلقی کرد. در این روش، معادلات انتگرالی بر حسب حل منفرد (یا منبع) که معادله دیفرانسیل حاکم را ارضاء می‌کند، بیان می‌شوند. این حل منفرد با چگالی مشخص در ناحیه مسئله موردنظر توزیع شده است[۲]. توابع چگالی به تنها دارای اهمیت فیزیکی نیستند، ولی چون، این حل عددی معادلات انتگرالی بدست می‌آیند، مقدار پارامترهای جمل مواد نظری در ناحیه زمانی میتوان توسط انتگرال گیری‌های ساده محاسبه کرد. در این روش در روش IBEM، متغیرهای اولیه میدان (اظهر داما)، میوه مشتق‌های آنها (شاو حرارت)، بیطور غیرمستقیم یعنی یکدیگر متعلق به روز خلاف DBEM، روش IBEM فقط به معادلات اصلی انتگرالی بسته است. در اوضاع نیل به جل شار حرارت در ناحیه موردنظر، صیغه زینداست. در اوضاع DBEM لازم است که از توابع مرکزی (هسته‌ای) مشتق گیری شود. هر چند روش IBEM به علت سادگی آن، جذاب است اما ولی هنگامی که از آن به صورت مرسوم استفاده می‌شود، به اشکالات جدی برخورد می‌کند. در یک مرز صاف، میتوان با استفاده از روش غیرمستقیم به حل معتبری از معادلات انتگرالی دست یافت[۳]، ولی در حالی که مرز دارای نابیوستگی هاق هندسی، (اگوشه‌ها) ایسته ضمانتی بر این کم توزیع چگالی منبع این فرضی همین لست پیشنهاد شده، و جلو و پیش ندارد در این صورت، نابیوستگی در گوشها ایجاد شده است. این سازی در این نقاط شده و نهایتاً منجر به خطای خواهد شد. این ترکیبات ذاتی IBEM کاربردهای آن را محدود کرده و صرف نظر از

## **1. Direct Boundary Element Method**

روش دیگری از فرمولاسیون غیرمستقیم مرسوم، جابجا کردن سطح توزیع منبع در فاصله مشخصی از ناحیه<sup>۷</sup> فیزیکی مسئله میباشد که از معادلات انتگرالی با قاعده ناشی شده است [۴]. میتوان نشان داد که روش RIBEM، رفتار منفرد چگالی منبع را در گوشدها حذف میکند [۵]. بعلاوه، روش فوق از نیاز به اعمال عملیات دقیق و مخصوصی که برای محاسبه انتگرالهای منفرد در همسایگی نقطه<sup>۸</sup> منفرد لازمند، بری میباشد. بدین ترتیب روند با قاعده، توانائی و وسعت کاربردهای روش غیرمستقیم را افزایش میدهد.

در این مقاله، با استفاده از زیر ناحیه‌ها، روش RIBEM در مسائل دو بعدی و متقارن محوری حرارتی اعمال شده است. روند زیر ناحیه سازی بر این اساس بنا شده است که متغیرهای اولیه<sup>۹</sup> میدان و مشتقات آنها در IBEM بطور مستقیم به یکدیگر متصل میشوند. این مسئله تعیین ماتریس معکوس را بطور ناحیه‌ای مجاز ساخته و بدون اینکه ضرورتی به بیان ماتریس نهائی سیستم باشد، باعث میشود که بتوان مسائل مشکل را بدون نیاز به کاهش خاص حل کرد.

با لآخره، برای تشریح توانائی‌های RIBEM، دو مسئله هدایت حرارتی دائم مورد بررسی قرار گرفته و نتایج بدست آمده با حل‌های IBEM منفرد یا الگان محدود مقایسه شده‌اند.

#### فرمولاسیون غیرمستقیم BEM

در مسائل پتانسیل، معادله حاکم (لپلاس) که توسط تابع

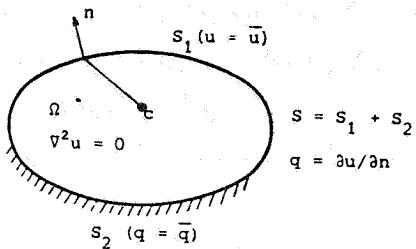
$u$  در ناحیه<sup>۱۰</sup>  $\Omega$  ارضاء میشود، به صورت زیر بیان میگردد:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

شرايط مرزی این مسئله عبارتند از (شکل ۱) :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{(شرط ضروری)} \\ q &= \bar{q} && \text{(شرط طبیعی)} \end{aligned} \quad (2)$$

که  $q = \partial u / \partial n$  و کل مرز برابر است .  $S = S_1 + S_2$



شکل ۱ - تعریف مسئله در روش DBEM

با استفاده از روند پس‌ماند وزن دار ، می‌توان معادله (۱) را به یک معادله انتگرالی برای روش DBEM تبدیل کرد [۶] . با معرفی تابع وزن  $w$  که دارای مشتقات اول پیوسته‌ای بوده و معادله حاکم (۱) را ارضاء می‌کند ، می‌توان عبارت پس‌ماند وزن دار را به صورت زیر نوشت :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{S_2} (q - \bar{q}) w dS - \int_{S_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (3)$$

با دو بار انتگرال گیری از عبارت لپلاسین معادله (۳) ، داریم :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega = - \int_{S_2} \bar{q} w dS - \int_{S_1} q w dS + \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (4)$$

با فرض اینکه متبعی در نقطه  $c$  داخل ناحیه  $\Omega$  متتمرکز شده است ، معادله حاکم برابر خواهد بود با :

$$\nabla^2 w + \Delta^c = 0 \quad (5)$$

که  $\Delta^c$  تابع دلتای دیراک بوده و برای آن می‌توان نوشت :

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 w + \Delta^c) d\Omega = \int_{\Omega} u(\nabla^2 w) d\Omega + u^c \quad (6)$$

اگر معادله (۵) توسط  $w$  ارضاء شود، داریم:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 w) d\Omega = -u^c \quad (7)$$

در این صورت، معادله (۶) برابر خواهد بود با:

$$u^c + \int_{S_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_2} u \frac{\partial w}{\partial n} dS = \int_{S_1} q w dS + \int_{S_2} \bar{q} w dS \quad (8)$$

اگر مقادیر  $\bar{u}$  و  $\bar{q}$  در نقاط مشخصی از مرز، معلوم باشند، بطور کلی میتوان معادله (۸) را برای کل مرز نوشت:

$$u^c = \int_S (qw - uf) dS \quad (9)$$

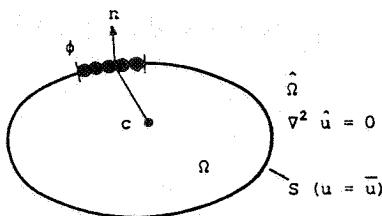
که  $f = \partial w / \partial n$  است. تابع وزن  $w$  را میتوان به صورت حل اساسی معادله حاکم لaplس اختیار کرد، که برای یک حالت ایزوتروپیک دو بعدی، برابر است با:

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (10)$$

فاصله بین نقطه منبع  $c$  و نقطه مورد نظر (نقطه میدان) را نشان می‌دهد.

اکنون ناحیه  $\bar{\Omega}$  را در نظر بگیرید که توسط  $S$  محصور شده، ولی خارج  $\Omega$  قرار دارد (شکل ۲). فرض کنید  $\hat{u}$  حل معادله لaplس زیر است:

$$\nabla^2 \hat{u} = 0 \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad (11)$$



شکل ۲ - تعریف مسئله در روش IBEM

در این حالت نیز، با دنبال کردن روند پس ماند سنگین و بیرون بردن انتگرالها به خارج از مرز  $S$  و ناحیه  $\hat{\Omega}$ ، ولی نگه داشتن نقطه میدان در  $c$ ، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$0 = \int_S (\hat{q}w + \hat{u}f) dS \quad (12)$$

با مقایسه با معادله (۹) :

(a) عبارت سمت چپ برابر صفر است، زیرا  $w$  در خارج  $\hat{\Omega}$  قرار دارد.

(b) علامت عبارت  $f$  عوض شده است، زیرا جهت عمود بر  $\hat{\Omega}$  مخالف جهت عمود بر  $\Omega$  می‌باشد.

اگر  $u$  حلی در  $\hat{\Omega}$  باشد که دقیقاً "همان شرائط مرزی مسئله اولیه ناحیه داخلی را بر روی  $0^\circ C$  داشته باشد، خواهیم داشت:

$$u = \bar{u} \quad S \text{ روی } \hat{\Omega} \quad (13)$$

با جای گذاری معادله (۱۳) در معادله (۱۲) و اضافه کردن نتیجه بدست آمده به معادله (۹) داریم:

$$u^e = \int_S (q + \hat{q})w dS \quad (14)$$

با تعریف  $\hat{q} = q + \phi$  ، معادلهٔ (۱۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$u^c = \int_S \phi w dS \quad (15)$$

بدین ترتیب ، فرمولاسیون "غیرمستقیم" از BEM مستقیم بددست می‌آیدکه  $\phi$  چگالی نا معلوم اولیهٔ حل منفرد ( $w$ ) روی  $S$  را نشان می‌دهد . به همین ترتیب داریم :

$$q^c = \int_S \phi f dS \quad (16)$$

در مسائل هدایت حرارتی دائم ، کمیات میدان ،  $u$  و  $q$  ، به ترتیب دما و شار حرارت هستند . به منظور فرموله کردن مسئله به عنوان یک روش مرزی ، باید نقطهٔ  $c$  را روی مرز اختیار کرد ، با بردن نقطهٔ میدان به روی سطح ، معادلهٔ (۱۵) میدان دمara که در هر نقطه پیوسته است ، مشخص خواهد کرد . به همین ترتیب ، معادله (۱۶) در هر جا بجز نقطه‌ای که در آن نقاط میدان و منبع بر هم منطبق می‌شوند ، ارضاء خواهد شد . از طرفی ، معادلهٔ (۶) را می‌توان بر حسب انتگرال مقدار اصلی کوشی روی یک سطح صاف بیان کرد :

$$q^c = -\frac{1}{2} \phi^c + \int_S \phi f dS \quad (17)$$

که  $\phi$  مقدار چگالی منبع در نقطهٔ  $c$  است . معادلات (۱۵) و (۱۷) ، اساس مدل سازی عددی در روش المان مرزی غیرمستقیم مرسوم ( منفرد ) به حساب می‌آیند . با وجود این ، صرفنظر از نیاز به محاسبهٔ انتگرال‌های منفرد که به بار کامپیوتر اضافه می‌شود ، این روش متحمل خطا نیز می‌گردد . در مسائلی که مرز از گوشه‌ها عبور می‌کند ، چگالی منبع  $\phi$  در این نقاط ، بی‌نهایت شده و مشکلات جدی مدل سازی را پدید می‌ورد [۷] . بر این اساس ،

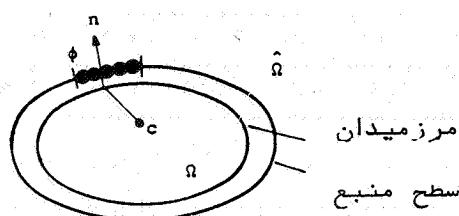
بعضی از محققین قبلی [۲]، شکل هندسی مسئله را با نشان دادن گوشها توسط دو گره مستقل که اندکی با گوشها واقعی فاصله دارند، تقریب می‌زندند. این روش اثر گرد کردن گوش را در بر دارد و باعث می‌شود که چگالی منبع، مقدار معینی را به خودگیرد. ولی، عدم مزیت آن از این مسئله نشأت می‌گیرد که نتایج حل آن در گوشها و لبه‌ها قطع نظر از رفتار میدان، ضعیف می‌باشد.

#### BEM غیرمستقیم با قاعده

یک روش جانشین که برای روند "منفرد" فوق پیشنهاد شده است، RIBEM می‌باشد که در آن سطح منبع از مرز میدان جدا بوده و بطوریکه در شکل ۳ دیده می‌شود، بطرف خارج انتقال یافته است. این عمل باعث می‌شود که معادلات انتگرالی در تمام نقاط با قاعده باشند.

$$\left. \begin{array}{l} u^c = \int_S \phi w dS \\ q^c = \int_S \phi f dS \end{array} \right\} \quad (18)$$

معلوم شده است که با چنین عملکردی، رفتار نامعین چگالی منبع در گوشها از بین می‌رود [۸].



شکل ۳ - تعریف مسئله در روش RIBEM

## حل عددی

معادلهٔ انتگرال مرزی با قاعدهٔ معاادلهٔ (۱۸)، حل دقیق یک مسئلهٔ داده شده را بیان می‌کند. ولی برای اغلب مسائلی که دارای مرزهای بی قاعده هستند، حل تحلیلی معاادلهٔ (۱۸) امکان‌پذیر نبوده و حل عددی لازم است. در این صورت، به علت جداسازی تقریبات عددی و حل متواالی معادلات جبری، خطاهای ظاهر می‌شوند. در این حالت نیز  $\phi$  مجھول حقیقی معادلات سیستم را نشان می‌دهد. اگر تعداد  $N$  نقطهٔ منظم در میدان مرزی  $S$  توزیع شده باشد و سطح منبع  $S_c$  به  $n$  تکه تقسیم شود (شکل ۴)، برای هر نقطهٔ  $c$ ، معاادلهٔ انتگرالی (۱۸) به شکل مجزای زیر نوشته خواهد شد:

$$\left. \begin{aligned} u^c &= \sum_{r=1}^n \int_{\Delta S} w_{cr} \phi_r dS \\ q^c &= \sum_{r=1}^n \int_{\Delta S} f_{cr} \phi_r dS \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

که:

 $\Delta S$  = تکهٔ مرز میدان فیزیکی. $\phi_r$  = تغییر چگالی منبع در تکهٔ  $r$ . $w_{cr}$  = حل اصلی مربوط به نقطهٔ  $c$  و تکهٔ منبع  $r$ . $w_{cr}$  = مشتق های  $f_{cr}$ 

را نشان می‌دهند.

اگر تغییر درجه دوم برای منبع تعریف شود (شکل ۵)،  $\phi_i$  را می‌توان با استفاده از توابع شکل  $N_{ri}$  بر حسب مقادیر گرهی  $\phi_i$  نوشت:

$$\phi_r = N_{ri} \phi_i \quad (20)$$

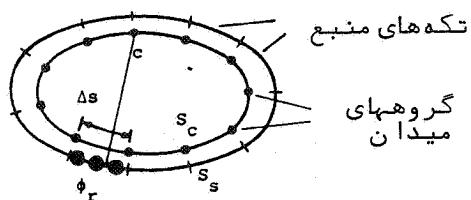
که:

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad N_{ri} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

$$N_1 = 2(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$$

$$N_2 = -4\xi(\xi - 1)$$

$$N_3 = 2\xi(\xi - \frac{1}{2})$$

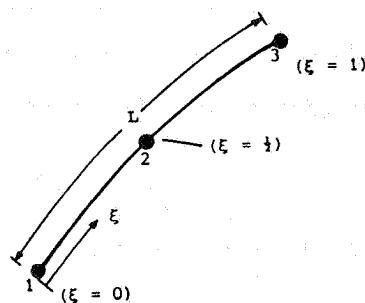


شکل ۴ - جداسازی در روش RIBEM

که  $\zeta$  مکان موضعی نقطه منبع روی تکه  $i$  به طول  $L$  است. بنابراین از معادلات (۱۹) داریم:

$$u^c = \sum_{r=1}^n \left[ \int_{\Delta S} w_{cr} N_{ri} dS \right] \phi_i \quad (۲۱)$$

$$q^c = \sum_{r=1}^n \left[ \int_{\Delta S} f_{cr} N_{ri} dS \right] \phi_i$$



شکل ۵ - الگان درجه دوم

معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} [u] = [W][\phi] \\ [q] = [F][\phi] \end{array} \right\} \quad (22)$$

در روش نقاط منظم روی مرز، باید تعداد نقاط با تعداد گره‌های منبع برابر باشد. در هر گره، چه از نوع شرط مرزی دما و چه از نوع شار معلوم، معادله (۲۲)، به سیستم معادلات جبری منجر می‌شود.

#### مکان سطح منبع

در روش RIBEM از نظر تئوری، می‌توان منابع مربوط به نقاط منظم را در هر فاصله‌ای خارج از ناحیه قرارداد. ولی در عمل، این مسئله به سادگی امکان پذیر نیست. قراردادن منابع در نزدیکی مرز، بطوری که ماهیت منفرد حل‌های اساسی، عملیات مخصوص انتگرال گیری در همسایگی منابع را ایجاب کند، امری است نامطلوب. از طرفی، قراردادن منابع بدور از مرز، اهمیت خطاهای گرد کردن و وابستگی خطی را افزایش خواهد داد. بنا براین، ناحیه‌ای، بین این دو واحد انتخاب می‌شود که به حل پایدار منجر می‌گردد (شکل ۶).

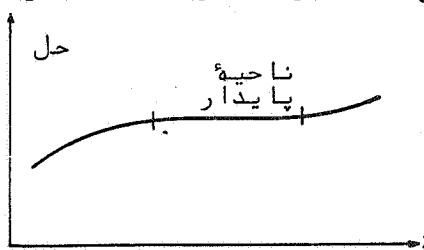
در الگوریتم صفحه بعد برای RIBEM، فقط شکل هندسی مرز

## استقلال

فیزیکی یک مسئله ( $S_c$ ) تعریف شده است. هر تکه از منبع با انتقال تکه  $S_c$  روی عمودهای روبرو خارج به فاصله  $R$  ( ضریب بدون بعد ) ، شکل میگیرد . فاصله حقیقی  $R$  بین دو سطح برابر است با :

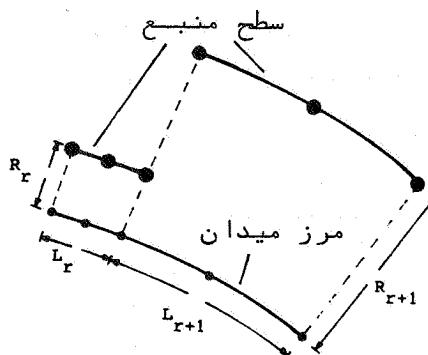
$$R_r = \lambda L_r / 2 \quad (23)$$

که  $L_r$  طول موضعی  $r$  امین المان را نشان می دهد (شکل ۷) .



شکل ۶ - تغییرات حل بدست آمده بر حسب موقعیت سطح منبع که توسط  $\lambda$  مشخص می شود ( RIBEM )

بدیهی است که در حالتی که دو تکه مجاور روی مرز میدان، دارای طولهای متفاوتی هستند، تکههای منبع دارای ناپیوستگی هائی خواهند بود. بطوریکه در روش DBEM با استفاده موقیت آمیز از المانهای ناپیوسته دیده شده است، میتوان این نوع مدل سازی را بنا کرد [۹] . در اینجا، روش مذکور با ثابت نگه داشتن نسبت  $R/L$  در سرتاسر طول مرز، بکار گرفته شده است. بعلاوه، صرفنظر از تکههای گوشهایی، تکههای مجاور همان مقدار چگالی منبع در نزدیکترین گرهها را به خود میگیرند. این مسئله باعث کاوش قابل ملاحظه ای در تعداد درجات آزادی سیستم می شود. روش دیگری را نیز میتوان با ثابت نگه داشتن همان فاصله بین دو سطح در سرتاسر مرز، اعمال کرد.



شکل ۷ - تفکیک سطح منبع از مرز فیزیکی میدان در روش RIBEM

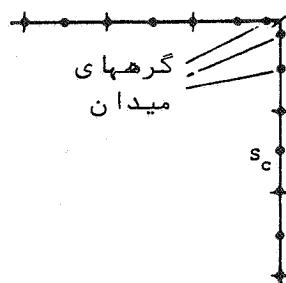
### مدل سازی گوشه‌ها

در اغلب کاربردهای مهندسی، مرزها دارای ناپیوستگی‌های هندسی نظیر گوشه‌ها هستند. ولی، بطوریکه قبل "دیدیم، این موضوع منشاء مشکلات روش المان مرزی غیرمستقیم منفرد می‌باشد، زیرا رفتار چگالی منبع در گوشه‌ها نا معین است. برای غلبه بر این مسئله، از روند زیر برای مدل سازی گوشه‌ها در RIBEM استفاده می‌شود:

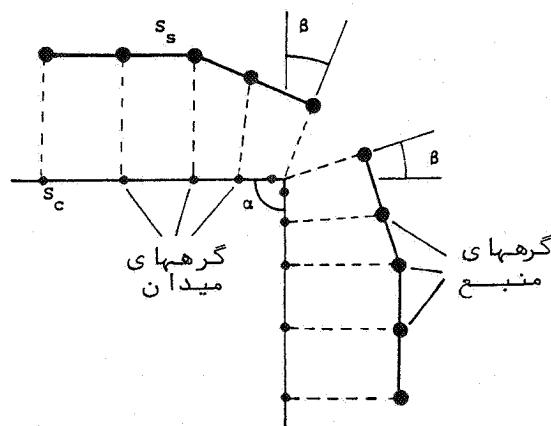
گره‌های میدان = به منظور بدست آوردن مقدار معینی برای  $\phi$  در گوشه، مفهوم "گره مرکب" برای انواع شرایط مرزی معروفی شده است. بر این اساس، نقطهٔ مورد نظر اندکی با گوشه فاصله داشته و توسط دو گره نشان داده می‌شود (شکل ۸).

گره‌های منبع = با کشیدن سطح منبع روی مرز، توزیع چگالی منبع گردها در گوشه سطح مورد نظر بدست می‌آید (شکل ۹). آخرین گره‌های منبع در هر طرف گوشه، زاویه  $\beta$  را در بر می‌گیرند که  $0 \leq \beta \leq \alpha/2$  می‌باشد. هر

چند انتخاب  $\beta$  یک امر اختیاری است ، ولی در الگوریتم ذیل  $\beta = x/3$  اختیار شده است .



شکل ۸ - مدل سازی مرز میدان فیزیکی روی یک گوشه در روش RIBEM



شکل ۹ - مدل سازی سطح منبع روی یک گوشه در روش RIBEM

## مسائل متقارن محوری

مسائل متقارن محوری را میتوان توسط سیستم مختصات استوانهای  $(r, z)$  نشان داد که در این صورت، الگوریتم آن ضرورتاً دو بعدی خواهد بود [۲].

با استفاده از معادله انتگرالی بر حسب منبع  $w$  که با چگالی مخصوص  $\phi$  روی یک سطح مشخص توزیع شده است، دمای نقطه  $(r, z)$  در مسائل متقارن محوری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w^e = \int_S r_0 w \phi dS \quad (24)$$

حل اصلی مسئله سه بعدی برابر است با :

$$w = \frac{1}{4\pi r} \quad (25)$$

اشر یک منبع حلقوی به شعاع  $r_0$  و عمق  $z_0$  (شکل ۱۰) را میتوان با بیان کردن معادله (۲۵) در مختصات استوانهای  $(r, \theta, z)$  و انتگرال گیری از عبارات منتجه نسبت به  $\theta$  در محدوده ۰ و  $\pi$  بدست آورد:

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a - b \cos \theta}} \quad (26)$$

که  $b = 2rr_0$  و  $a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2$  است. معادله (۲۶) را میتوان توسط یک انتگرال بیضی گون نشان داد:

$$w = \frac{2}{\pi \sqrt{a+b}} K(m) \quad (27)$$

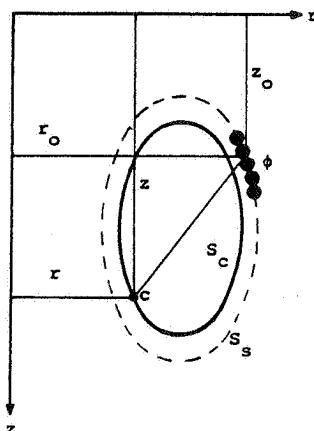
که  $K(m)$  یک انتگرال بیضی گون کامل با مدول  $m$  از نوع اول و مدول مکمل  $m_1 = m-1$  است:

$$K(m) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m \sin^2 \theta}} \quad (28)$$

با انتخاب یک تقریب چند جمله‌ای برای  $K(m)$  ، که توسط آبرامو ویتز<sup>۱</sup> و استگن<sup>۲</sup> داده شده است ، داریم :

$$K(m) = \sum_{j=0}^n \left[ a_j m_{1j} + b_j m_{1j} \ln\left(\frac{1}{m_1}\right) \right] + \varepsilon(m) \quad (29)$$

برای  $n=4$  ، عبارت خطای  $\varepsilon(m) \leq 2 \times 10^{-8}$  ثابتند .



شکل ۱۰ - فرمولاسیون مسائل متقارن محوری در روش RIBEM

شار حرارت در نقطه  $c$  برابر است با :

$$q^c = \int_S r_0 f \phi dS \quad (30)$$

که :

1. Ababmowitz

2. Stegan

$$f = - \left[ \frac{\partial w}{\partial r} n_r + \frac{\partial w}{\partial z} n_z \right]$$

که در معادلهٔ فوق،  $n_r$  و  $n_z$  مولفه‌های عمودیکه در نقطهٔ  $\sigma$  را به ترتیب در جهت‌های  $r$  و  $z$  نشان می‌دهند، با استفاده از مشخصهٔ

$$E(m) = m_1 \left[ 2m \frac{dK(m)}{dm} + K(m) \right] \quad (31)$$

که  $E(m)$  انتگرال بیضوی کاملی از نوع دوم است، می‌توان  $f$  را به صورت زیر بیان کرد:

$$f = n_r \frac{[E(m) - K(m)]}{\pi r \sqrt{a+b}} + \frac{[n_r(r-r_0) + n_z(z-z_0)]}{2\pi(a-b)\sqrt{a+b}} E(m) \quad (32)$$

در اینجا نیز،  $E(m)$  توسط تقریب چند جمله‌ای زیر بیان شده‌است:

$$E(m) = \sum_{j=1}^n \left[ c_j m_{1j} + d_j m_{1j} \ln \left( \frac{1}{m_1} \right) \right] + \varepsilon(m) \quad (33)$$

که برای  $n=4$ ، عبارت خطای  $\varepsilon(m) < 2 \times 10^{-8}$  و  $c_j$  و  $d_j$  ثابتند.

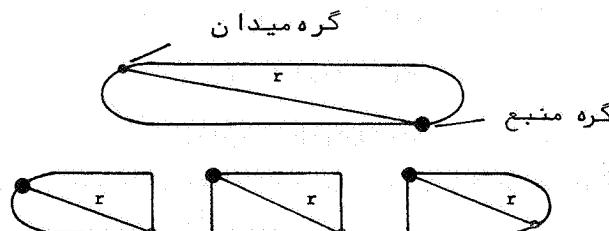
### زیر ناحیه سازی

هنگامی که مسائل مورد نظر دارای نواحی بزرگ و مرزهای بی‌قاعده‌ای هستند، استفاده از ناحیهٔ واحد دارای مایبی است وقتی ما تریس سیستم کا ملا" انباشته می‌شود، باعث تولید ردیف‌های بیشماری از ضرایب شده و زمان لازم برای فرموله کردن و حل چنین سیستمی قابل ملاحظه بوده و بجز موقوعی که روش کاوش موثری در دسترس است، در سایر مواقع، محدودیت بر اندازهٔ مسئله وجود

دارد. علاوه بر آن، هنگام تجزیه و تحلیل سازه‌های طویل و باریک سیستم ماتریسی منتهی دارای عبارات کوچک قطری خواهد بود که بیانگر غیر موثر بودن محاسبات است. اثر زیر ناحیه سازی، عبارتست از رفع باریکی سازه (شکل ۱۱). با ضافه، هنگام استفاده از روش با قاعده، مسائلی که از اشکال هندسی مقعر ظاهر می‌شوند، باعث انبساطگی گره‌های چگالی منبع روی سطوح مورد نظر خواهند شد. استفاده از زیر ناحیه‌ها، بطور موثری اشکال هندسی مقعر را از بین می‌برد (شکل ۱۲).

اغلب روش‌های مرسوم زیر ناحیه سازی، به سرهم گذاشتند ماتریس‌های زیر ناحیه‌ای روی آخرین ماتریس نواری متول می‌شوند [۲]. ولی در روش حاضر شکل متفاوتی برای زیر ناحیه سازی بکار گرفته شده که در آن از فرمولاسیون ماتریس سیستم اجتناب شده است. در این روش، هر ماتریس زیر ناحیه‌ای، معکوس شده و بلاقله ذخیره می‌گردد که در این صورت نیازی به روند کاهش وجود نخواهد داشت. همچنین در این روش زمان کمتری برای معکوس سازی موردنیاز است، زیرا زمان لازم برای معکوس کردن  $\mathbf{N}$  ماتریس به اندازه  $N$  کمتر از زمان لازم برای معکوس کردن یک ماتریس به اندازه  $nN$  می‌باشد.

در روش غیر مستقیم BEM، کمیات میدان (نظیر دما و شار) توسط معادلات مجزای انتگرالی که بطور غیرمستقیم توسط توزیع چگالی منبع به هم متصلند، بیان می‌شوند. چون ارتباط زیر ناحیه‌های مجاور به صورت ارتباط بین کمیت‌های میدان صورت می‌گیرد نه چگالی منبع، لذا این ترکیب طبیعی روش مذبور را می‌توان با فرموله و معکوس کردن مجزای ماتریس‌ها در هر زیر ناحیه بدست آورد. مجھولات هر فصل مذبور را می‌توان با فرموله و معکوس کردن مجزای ماتریس‌ها در هر زیر ناحیه بدست آورد. مجھولات هر فصل مشترک با حل مجموعه‌ای از معادلات هم زمان که از روابط فصل مشترک



شکل ۱۱- زیر ناحیه‌سازی برای رفع باریکی از سازه

استخراج می‌شوند، بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ q_1 &= -q_2 \end{aligned} \quad (۳۴)$$

که اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب به نواحی ۱ و ۲ اشاره می‌کنند. مثلاً برای مسئله‌ای با دو زیر ناحیه (شکل ۱۳)، داریم:

$$n_1 = \text{گره‌های واقع در مرز خارجی ناحیه } (S_{11})$$

$$n_2 = \text{گره‌های واقع در مرز مشترک نواحی ۱ و ۲} (S_{22})$$

$$n_{12} = \text{گره‌های واقع در فصل مشترک نواحی ۱ و ۲} (S_{12})$$

با نوشتن معادله (۲۲) برای ناحیه  $\Omega_1$  به معالات زیر می‌رسیم:

$$[u] = [W_1][\phi_1] \quad (۳۵a)$$

$$[q] = [F_1][\phi_1] \quad (۳۵b)$$

و با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$[v_1] = [A_1][\phi_1] \quad (۳۶)$$

که  $[v_1]$  شامل مقادیر معلوم مرزی مجھولات فصل مشترک ( $q$ 's و  $u$ 's) و  $[A_1]$  شامل ردیف‌های ما تریس‌های  $[W_1]$  و  $[F_1]$  هستند.

معکوس کردن معادله (۳۶) به صورت زیر انجام می‌شود:

$$[\phi_1] = [A_1^{-1}][v_1] \quad (۳۷)$$

و با جای گذاری معادله (۳۷) در معادله (۳۵) داریم :

$$[u] = [W_1][A_1^{-1}][v_1] \quad (38a)$$

$$[q] = [F_1][A_1^{-1}][v_1] \quad (38b)$$

با جداسازی متغیرهای معلوم محیطی و مجہول فصل مشترک داریم :

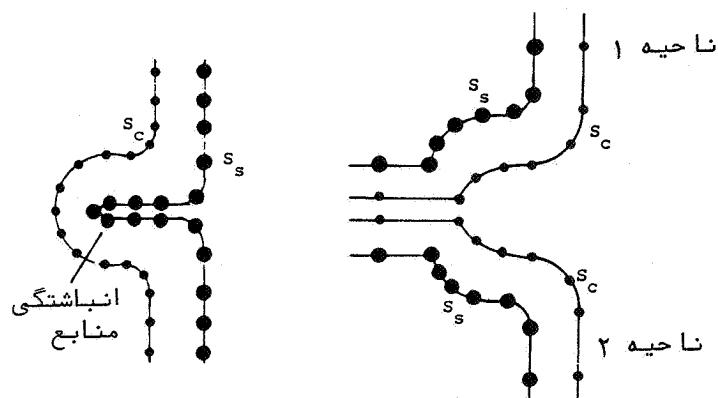
$$[v_1] = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}^{\text{علوم}} \quad (39)$$

جای گذاری معادله (۳۸) در معادله (۳۹) نتیجه زیر را می‌دهد :

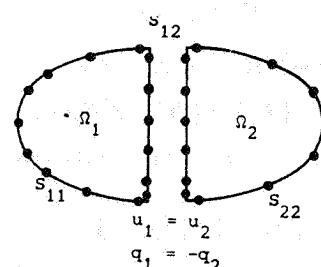
$$[u] = [W_1][A_{11}^{-1}][v_{11}] + [W_1][A_{12}^{-1}][v_{12}] \quad (40a)$$

$$[q] = [F_1][A_{11}^{-1}][v_{11}] + [F_1][A_{12}^{-1}][v_{12}] \quad (40b)$$

$$[A_1^{-1}] = [A_{11}^{-1} \quad A_{12}^{-1}]$$



شکل ۱۲ - زیرناحیه‌سازی در روش RIBEM به منظور اجتناب از انباستگی  
منابع در قسمتهای مقعر جسم



شکل ۱۳ - یک مسئله با دو زیر ناحیه

## روش غیرمستقیم و با قاعدهٔ ...

۱۲۳

به همین ترتیب برای ناحیهٔ  $\Omega_2$  داریم :

$$[u] = [W_2][A_{21}^{-1}][v_{21}] + [W_2][A_{22}^{-1}][v_{22}] \quad (41\text{a})$$

$$[q] = [F_2][A_{21}^{-1}][v_{21}] + [F_2][A_{22}^{-1}][v_{22}] \quad (41\text{b})$$

$$[v_2] = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{جهول} \\ \text{معلوم} \end{array}$$

$$[A_2^{-1}] = [A_{21}^{-1} \quad A_{22}^{-1}]$$

اکنون، با در نظر گرفتن فصل مشترک  $S_{12}$  ( یا  $S_{21}$  ) ، اگر این مکان بطور دلخواه توسط دماهای مجهول معین شده باشد، میتوان با انجام تبدیل زیر :

$$u_{12} \text{ به } v_{12}$$

$$u_{21} \text{ به } v_{21}$$

و

روابط فصل مشترک را در گره آزاد واقع در فصل مشترک به صورت زیر نوشت :

$$u_{12} = u_{21} \quad (42\text{a})$$

$$q_{12} = -q_{21} \quad (42\text{b})$$

با جای گذاری معادلات ( ۴۰b ) و ( ۴۱b ) در معادلهٔ ( ۴۲b ) داریم :

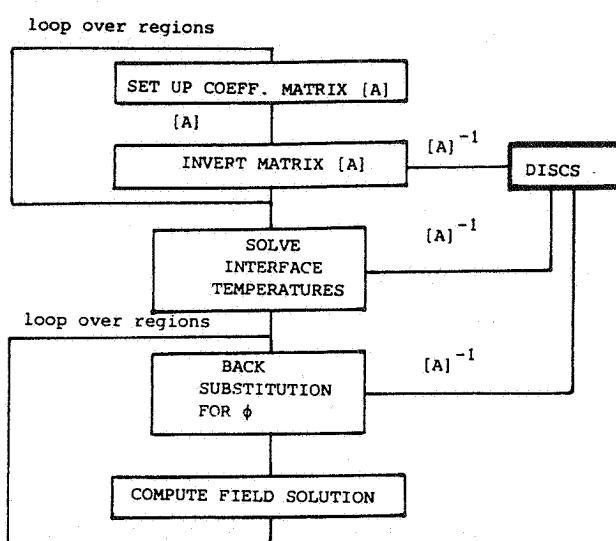
$$[F_1][A_{11}^{-1}][v_{11}] + [F_1][A_{12}^{-1}][u_{12}] + [F_2][A_{21}^{-1}][u_{12}] + [F_2][A_{22}^{-1}][v_{22}] = 0 \quad (43)$$

معادلهٔ ( ۴۳ ) به صورت زیر مرتب میشود :

$$\{[F_1][A_{12}^{-1}] + [F_2][A_{21}^{-1}]\}[u_{12}] = -\{[F_1][A_{11}^{-1}][v_{11}] + [F_2][A_{22}^{-1}][v_{22}]\} \quad (44)$$

از معادلهٔ ( ۴۴ ) میتوان برای فرموله کردن تعداد  $n_{12}$  معادله

برای تعیین  $n_{12}$  دمای فصل مشترک  $(u_{12})$  استفاده کرد. با پیدا شدن  $u_{12}$ ، کلیه ضرائب  $[v_1]$  و  $[v_2]$  معلوم خواهند شد. چگالی های منبع برای هر زیر ناحیه نیز با استفاده از معادله (۳۷) بدست می آیند. با در نظر گرفتن هر زیر ناحیه به عنوان یک مسئله مجزا، حل میدان در هر نقطه از مرز یا داخل زیر ناحیه ها را می توان از توزیع چگالی منبع و با استفاده از معادلات (۳۵ a) و (۳۵ b) تعیین کرد. فلوچارت این الگوریتم در شکل ۱۴ دیده می شود.



شکل ۱۴- فلوچارت الگوریتم زیر ناحیه سازی در روش RIBEM

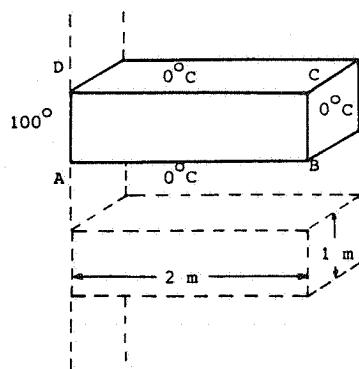
#### حالات خاص

هذا بیت حرارتی در یک پره محدود دمای طرف AD یک پره (شکل ۱۵) در  $100^{\circ}\text{C}$  و بقیه سطوح مرزی در  $0^{\circ}\text{C}$  نگه داشته می شوند. چون شکل پره ساده است، انتظار می رود

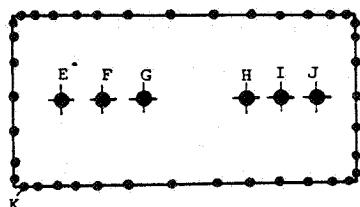
## روش غیرمستقیم و با قاعدهٔ ...

۱۲۵

که شار حرارت در نقاط A و D برابر باشد. ضریب هدایت حرارتی جنس ماده برابر واحد،  $AB=2\text{ m}$  و  $BC=1\text{ m}$  اختیار شده‌اند. شکل ۱۶، اندازهٔ شبکه‌ای مورد استفاده در حل این مسئله توسعه روش‌های منفرد و با قاعدهٔ IBEM را نشان می‌دهد.



شکل ۱۵ - شرایط مرزی پرده



شکل ۱۶ - شبکهٔ الگان مرزی در پرده

شکل ۱۷، تغییرات شار حرارت در سمت AB پرده را برای دو روش فوق و مقایسه آن با حل سری‌های فوریه نشان می‌دهد [۱۱]. در جدول (۱) دمای‌های داخلی ناحیه و شار حرارت در گره گوشی‌ای K، مقایسه شده‌اند.

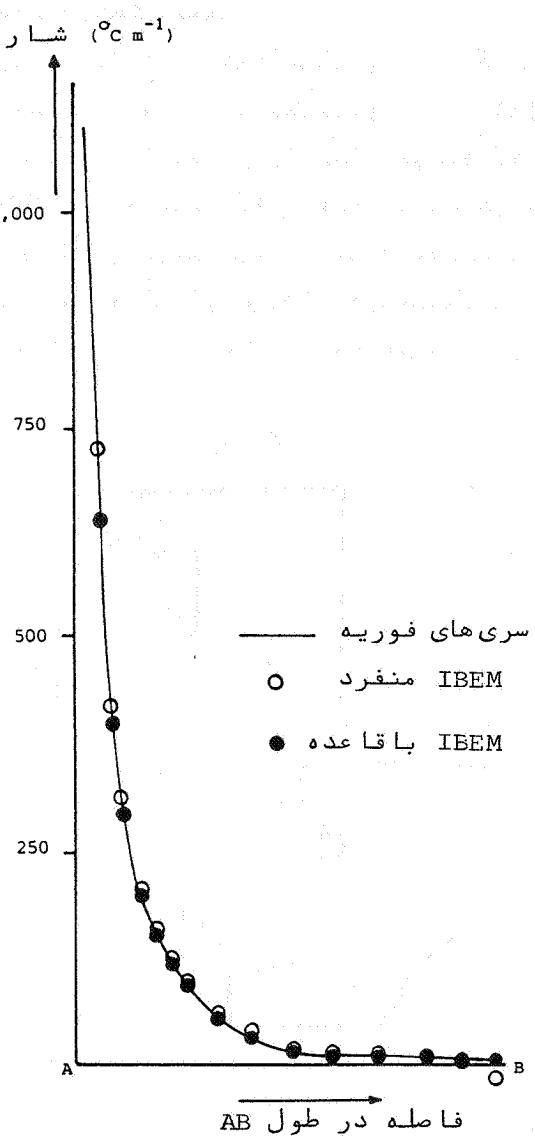
جدول ۱ - مقایسه حل‌های مختلف برای مسئله پرہ

نقطه	متغیر میدان	حل سری‌های فوریه	حل IBEM با قاعده	حل IBEM منفرد
E	دما ( °C )	62.400	62.340	62.290
F	دما ( °C )	35.300	35.250	35.220
G	دما ( °C )	19.180	19.150	19.130
H	دما ( °C )	1.094	1.092	1.087
I	دما ( °C )	0.518	0.517	0.511
J	دما ( °C )	0.152	0.152	0.148
K	شار ( °cm <sup>-1</sup> )	$2.947 \times 10^3$	$3.013 \times 10^3$	$3.448 \times 10^3$

واضح است که هر دو روش به خوبی با حل سری‌های فوریه در مرز و داخل ناحیه بجز گوشه‌ها مطابقت می‌کنند. خطای تولید شده (نسبت به حل‌های فوریه) برابر ۱/۰ درصد برای روش با قاعده و ۶/۴٪ برای روش منفرد می‌باشد. ولی در گروه گوششای K، روش با قاعده خطای برابر ۲/۲ درصد و روش منفرد خطای برابر با ۱/۷ درصد تولید می‌کنند. همچنین، شارهای بدست آمده توسط روش منفرد در گوششای B و C رو به زوال گذاشته است. توجه داشته باشید که حل ارائه شده توسط روش با قاعده در محدوده وسیعی از سطح منبع در خارج ناحیه،  $\lambda = 0.5-6.5$ ، پایدار است.

## روش غیرمستقیم و با قاعدهٔ ...

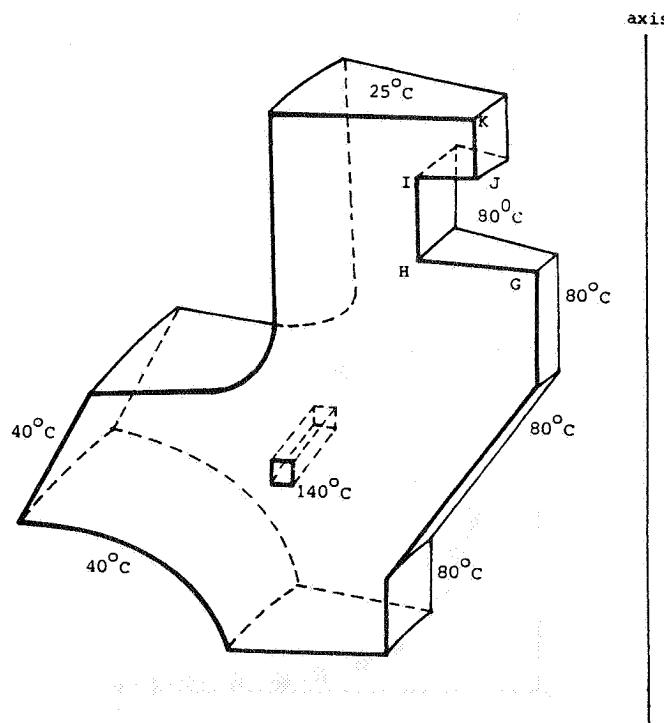
۱۲۷



شکل ۱۷ - تغییرات شار حرارت در لبهٔ AB پره

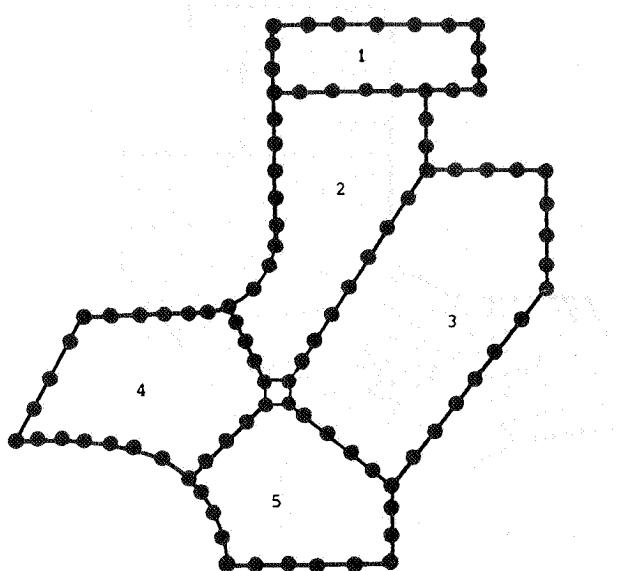
## میدان دما در بدنه همگن پمپ

تعیین میدان دما در بدنه همگن پمپ، یک مسئله حرارتی دائم و متقارن محوری است که شرایط مرزی آن در شکل ۱۸ دیده می‌شود. شکل ۱۹، مدل جدا شده‌ای را نشان می‌دهد که برای تجزیه و تحلیل توسط IBEM باقاعدۀ بکار رفته است. در این مدل از ۵ زیر ناحیه و ۱۰۵ المان درجه دوم استفاده شده است. در شکل ۲۰ نیز شبکه المان محدود که از ۲۵۶ المان مستطیلی درجه دوم با ۸۶۵ درجه آزادی تشکیل شده است، دیده می‌شود، حل(FEM)<sup>۱</sup> بـ



شکل ۱۸ - شرایط مرزی در بدنه همگن پمپ

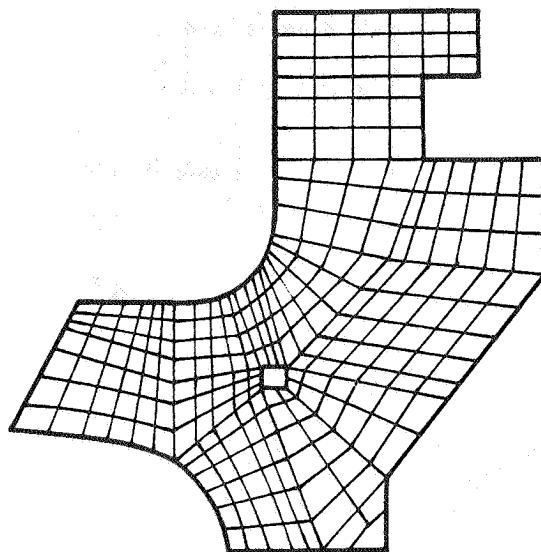
1. Finite Element Method



شکل ۱۹ - مدل RIBEM برای بدنهٔ پمپ

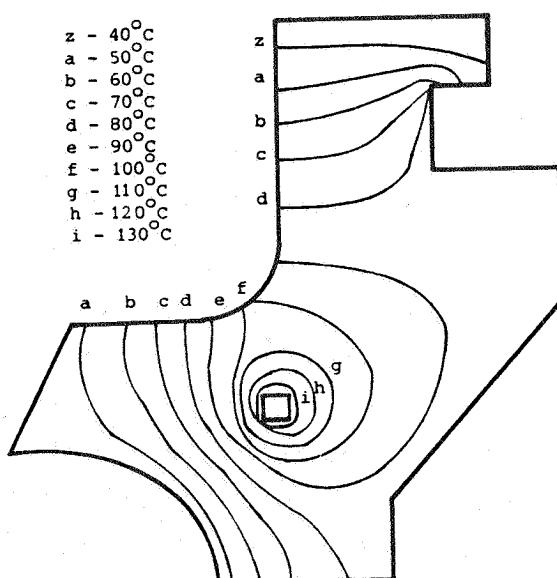
استفاده از برنامه PAFEC 75 به دست آمده است. تصاویر ۲۱ و ۲۲ به ترتیب میدان‌های دمای بدبست آمده توسط RIBEM و FEM را نشان می‌دهند. واضح است که هر دو روش در درون و مرز ناحیه با هم مطابقت دارند.

در جدول ۲، پارامترهای محاسباتی در روش‌های RIBEM و FEM مقایسه شده‌اند. بطوری که مشاهده می‌شود، از نظر پردازش داده‌های ورودی و زمان مورد نیاز، روش RIBEM نسبت به FEM مناسب‌تر است. زمان لازم برای بدبست آوردن مجھولات اولیه در روش FEM برابر ۵۸ ثانیه می‌باشد، در حالی که کل زمان مورد نیاز برای معکوس کردن ماتریس‌ها و حل آن‌ها برای تعیین دمای‌های فصل مشترک، در روش RIBEM برابر ۱۶ ثانیه است. با وجود این، در روش FEM زمان  $\frac{117}{3}$  ثانیه و در روش RIBEM زمان ۶۵ ثانیه برای مرتب

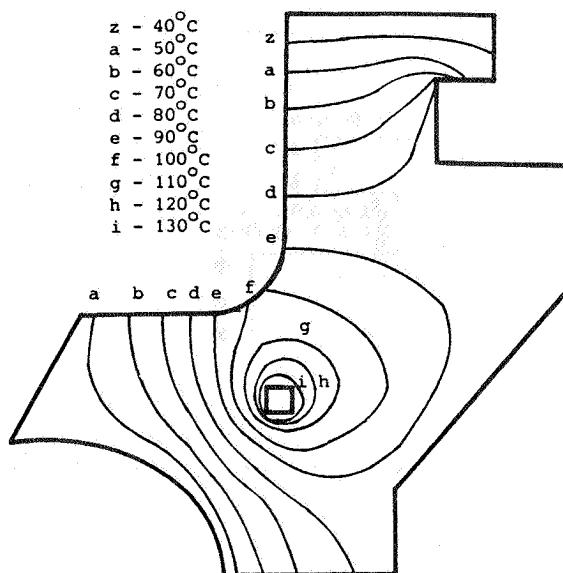


شکل ۲۰ - مدل FE برای بدنه پمپ

$z = 40^\circ\text{C}$   
 $a = 50^\circ\text{C}$   
 $b = 60^\circ\text{C}$   
 $c = 70^\circ\text{C}$   
 $d = 80^\circ\text{C}$   
 $e = 90^\circ\text{C}$   
 $f = 100^\circ\text{C}$   
 $g = 110^\circ\text{C}$   
 $h = 120^\circ\text{C}$   
 $i = 130^\circ\text{C}$



شکل ۲۱ - میدان دما در بدنه پمپ (RIBEM روش)



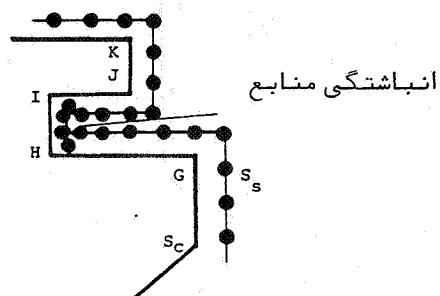
شکل ۲۲ - میدان دما در بدن پمپ (روش FEM)

جدول ۲ - مقایسه پارامترهای محاسباتی برای مسئله بدن پمپ

FEM	کل	RIBEM						زمان محاسبه در
		5	4	3	2	1	1	
50	1.0	-	-	-	-	-	-	پردازش داده های ورودی
665	79.93	7.43	23.6	20.9	11.9	16.1		مرتب کردن ماتریس
58	14.56	0.96	4.81	4.07	1.88	2.84		معکوس سازی کاوش
								ماتریس فصل مشترک
-	37.4	-	-	-	-	-		مرتب کردن
-	1.58	-	-	-	-	-		حل
-	0.26	-	-	-	-	-		حل داخلی
-	133.73							کل

کلیه زمانها بر حسب ثانیه در سیستم ICL 1906S اندازگیری شدند.

کردن ماتریس‌ها صرف شده است.



شکل ۲۳ - قسمت CHIJK بدنده پمپ

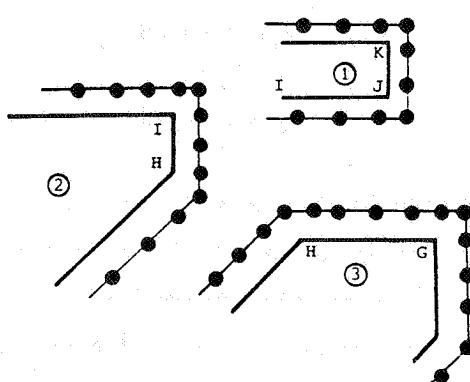
هنگامی که زیر ناحیه سازی مرسوم در روش غیر مستقیم به کار گرفته شود، ابعاد ماتریس سیستم به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\left[ \sum_{i=1}^n N_i \right]^2$$

که  $N_i$  تعداد کل درجات آزادی زیر ناحیه  $i$  و  $n$  تعداد زیر ناحیه‌ها را نشان می‌دهند. برای مسئله بدنده پمپ، ماتریسی به ابعاد  $393 \times 293$  لازم است، در حالی که با فرمولاسیون حاضر این ماتریس به ماتریسی با ابعاد  $72 \times 72$  تبدیل شده است. بنابراین، توانائی روش مرسوم برای رقابت با روش حاضر، همواره به نوع روند کاهش که مزیت ماتریس نواری روش مرسوم را برآورده سازد، بستگی دارد.

در روش باقاعدۀ زیر ناحیه سازی از انباشتگی گره‌های منبع در نواحی مقعر جلوگیری می‌کند. قسمت GHIJK مرز بدنده پمپ را در نظر بگیرید (شکل ۲۳)، اگر مدل سازی بدون استفاده از زیر ناحیه‌ها صورت گیرد، ساده‌ترین مکانیزم انتقال سطح منبع

در طول عمود رو به خارج در مرز، با این نباشتگی منابع در این قسمت خواهد شد. در این حالت، حل سریع و ساده با زیرناحیه سازی قسمت مورد نظر بدست می‌آید (شکل ۲۴).



شکل ۲۴ - زیرناحیه‌سازی بدنۀ پمپ در روش RIBEM به منظور جلوگیری از انباشتگی منابع در قسمت GHIJK

### خلاصه

روش BEM غیرمستقیم، به دو علت نسبت به روش مستقیم دارای مزیت است. اولاً "به علت تولید حل داخلی، این روش فقط به انتگرال کمیت منفرد  $\phi$  (چگالی منبع) نیاز دارد، در حالی که در BEM مستقیم، انتگرال‌های مرزی متغیرهای میدان (دما و شار حرارت) محاسبه می‌شوند.

$$u_c = \int_S w q dS - \int_S f u dS : \text{مستقیم}$$

$$u_c = \int_S w \phi dS : \text{غیرمستقیم}$$

علاوه بر آن، برای محاسبه شارهاي داخلی، IBEM فقط به مشتقهای اول نیازمند است، در حالی که در روش DBEM باید مشتقهای دوم حل اساسی  $w$  نیز محاسبه شوند، ثانیاً "در IBEM، دمای و شارهاي جريان بطور غيرمستقيم توسط توزيع چگالی منبع  $\phi$  به يكديگر متصلاند :

$$u_c = \int_S w \phi dS$$

$$q_c = \int_S f \phi dS$$

که  $f = \partial w / \partial n$  است. اين ماهيه طبيعي، فرصت بحث مجزا روی هر زير ناحيه، يك مسئله، چند ناحيه اي را فراهم ميکند. يك روش جديد زير ناحيه سازي بدست آمده است که نياز به روند کاوش مصنوعي را از بين برد و ضمن انجام اين عمل در بار كامپيوتر، آنرا در زمان معکوس سازي ذخирه ميکند.

در شكل مرسوم ( منفرد ) IBEM، چگالی منبع  $\phi$  که در معادلات انتگرالي ظاهر ميشود، در مرز حقيقي مسئله توزيع شده است. اين روش داراي دو عيب است. اولاً، به محاسبه دقيق انتگرالهاي منفرد نياز دارد که به بار محاسباتي اضافه ميشوند. ثانياً و مهمتر، در مسائلی که شكل هندسي داراي ناپيوستگي هائی است، چگالی منبع  $\phi$  در اين نقاط نامعيين ميگردد. اين موضوع با عث بروز مشكلات مدل سازي در اين نواحي و پديد آمدن خطایشود. بنابراین نوع باقاعدۀ IBEM بر اساس انتقال توزيع منبع به خارج از ناحيه فيزيکي، رشد و توسعه يافته است. و اين روش بر مشكلات IBEM منفرد غلبه کرده و كيفيت حل را در گوشها با لا ميبرد.

### قدرتانی

تحقيقات رايه شده در اين مقاله، از پشتيبانی انجمن

تحقیقات علوم و مهندسی انگلستان برخوردار بوده است.

مراجع

1. C.A.Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.
2. P.K.Banerjee and R.Butterfield, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
3. V.D.Kupradze, *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
4. J.L.Wearing, C.Patterson, M.A.Sheikh and A.G.Abdul Rahman, "A regular indirect boundary element method for heat conduction", *Numerical Methods in Thermal Problems*, Pineridge Press, Swansea, 1987.
5. A.G.Abdul Rahman, "An investigation of the regular indirect boundary element method", *Ph.D.Thesis*, University of Sheffield, 1985.
6. C.A.Brebbia and S.Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.

7. C.Patterson,J.L.Wearing and M.A.Sheikh, " A review of recent developments in boundary domain techniques " , *Boundary Element Methods-Theory and Applications*, The Institute of Physics,London,1986.
8. J.L.Wearing,C.Patterson,M.A.Sheikh and A.G.Abdul Rahman, " On the application of the regular indirect boundary element method for axisymmetric thermal analysis using subregions " ,*Boundary Elements IX*,Springer-Verlag,Berlin 1987.
9. C.Patterson and M.A.Sheikh," Interelement continuity in the boundary element method ",*Topics in boundary Element Research*,Vol.1, Springer-Verlag,Berlin,1984.
10. M.Abramowitz and I.A.Stegun,*Handbook of Mathematical Functions*,Dover,New York,1974.
11. V.S.Arpaç, *Conduction Heat Transfer*,Addison-Wesley, Reading,MA,U.S.A.,1966.