تحلیل خمش و واخمش ورق ناهمسانگرد در شرایط کرنش صفحه‌ای

محمود سلیمی*، مصطفی جمشیدیان، علی بهشتی** وعبدالرحیم صادقی دولت‌آبادی*****

دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

مجتمع فولاد مبارکه

(دریافت مقاله: ۸۵/۷/۳- دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۶/۲۷)

چکیده – رفتار مکانیکی ورقهایی که به صورت سرد نورد می‌شوند به طور قابل توجهی به تنش پسماند وابسته است. این تنش بعضا در فرایندهای خمش- واخمش به وجود می‌آید. اندازه‌گیری تنش پسماند بیشتر محدود به روشهای سطحی است و مشخص کردن توزیع تنش در جهت ضخامت ورق، مشکل و وقت‌گیر است. این مقاله حل بسته‌ای را ارائه می‌کند که در آن فرایند خمش- واخمش به صورت یک مسئله الاستوپلاستیک با شرایط کرنش صفحه‌ای مدل می‌شود. ماده مورد بررسی نیز به صورت ناهمسانگرد فرض شده است. حل عددی به کمک روش اجزای محدود، به منظور بررسی و تأیید صحت حل تحلیلی آورده شده است. این تحقیق در بررسی تاثیرات فرایندهای باز و بسته کردن ورق حول کویل پیچ ،همترازسازی ورق و از بین بردن موج ورق کاربرد دارد.

واژگان کلیدی : تنش پسماند، خمش و واخمش الاستو پلاستیک، ناهمسانگردی، روش اجزای محدود

Bending-Unbending Analysis of Anisotropic Sheet under Plane Strain Condition

M. Salimi, M. Jamshidian, A. Beheshti, and A. Sadeghi Dolatabadi

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology
Mobarakeh Steel Complex

Abstract: ***The mechanical behavior of cold rolled sheets is significantly related to residual stresses that arise from bending and unbending processes. Measurement of residual stresses is mostly limited to surface measurement techniques. Experimental determination of stress variation through thickness is difficult and time-consuming. This paper presents a closed form solution for residual stresses, in which the bending-unbending process is modeled as an elastic-plastic plane strain problem. An anisotropic material is assumed. To validate the analytical solution, finite element simulation is also demonstrated. This study is applicable to andlysis of coiling-uncoiling, leveling and straightening processes.***

* – استاد ** – دانشجوی کارشناسی ارشد *** – کارشناس ارشد واحد نورد سرد مجتمع فولاد مبارکه

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]

Keywords: *Residual stresses, Elastic-plastic Bending-unbending, Anisotropy, Finite element method*.

فهرست علائم

علائم اصلی		ν	ضریب پواسون
E	مدول یانگ	σ	تنش
k	انحنا	ω	نسبت تنش
R	نسبت کرنش در معیار هیل		
R′	متغییر کمکی	**اندیسها**	
y	فاصله از محور خنثی	b	مرحله خمش
Y	تنش تسلیم ماده	e	الاستیک
dε	کرنش جزیی	p	پلاستیک
dλ	ثابت آنی تناسب در قانون جریان	r	پسماند
dσ	تنش جزیی	u	مرحله واخمش
dω	نسبت تنش جزیی	x, y, z	راستاهای مختصات
ε	کرنش	Y	نقطه تسلیم

۱- مقدمه

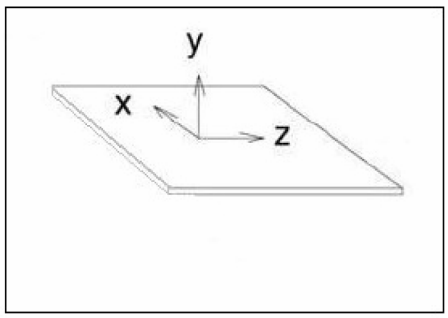
توزیع تنش جاری و تنش پسماند که در فرایند خمش - واخمش در ورقهای تولیدی نورد سرد به وجود می‌آید نقش بسیار مهمی در میزان تحمل بار ومقاومت ورق ایفا می‌کند. اندازه‌گیریهای تجربی از ورقهای ضخیم نشان می‌دهد که توزیع تنش پسماند در راستای ضخامت ورق نسبتا پیچیده است. روشهای تجربی که به دو دسته تخریبی و غیر تخریبی تقسیم می‌شوند، محدودیتهایی دارند. متأسفانه روشهای تخریبی نظیر مقطع زدن و لایه برداری سطحی، گران و وقت‌گیرند. از طرف دیگر روشهای غیر تخریبی هم توانایی کافی برای مشخص کردن توزیع تنش را ندارند. از این‌رو استخراج یک حل تحلیلی برای بیان توزیع تنش مفید و منطقی است.

مطالعات بسیاری روی فرایند خمش - واخمش انجام شده است. این مطالعات گستره وسیعی از الاستیسیته و پلاستیسیته، شعاع انحنای خمش کوچک و بزرگ، خمش خالص و خمش همراه با کشش، مواد بدون کار سختی و مواد کار سخت، روشهای تجربی، روشهای تحلیلی و روشهای عددی دو بعدی و سه بعدی را شامل می‌شود[۱-۳]. بیشتر این تحقیقات از روابط ساده برای بیان توزیع تنش و کرنش استفاده کرده‌اند و از میان آنها تعداد نسبتا کمی به بررسی جزئیات توزیع تنش جاری و تنش پسماند اختصاص دارد.

اینگوارسون و کاتو خمش خالص یک صفحه پهن را به صورت کرنش صفحه‌ای و با کمک روش عددی برای کرنشهای جزئی مدل کردند. در این حالت فرض شده بود که ماده از معیار تسلیم فون مایز و قانون جریان همراه پرانتل-راس تبعیت می‌کند[۴و۵].

روندال یک تحلیل عددی ساده برای حالت خمش خالص پلاستیک در یک صفحه پهن را ارائه کرد و سپس از روی آن یک حل تقریبی برای توزیع تنش پسماند به‌دست آورد[۶] . در این روشها از اثرات الاستیسیته بر فرایند صرف‌نظر شده است،

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]



شکل ۱- مختصات در نظر گرفته شده برای حل تحلیلی

در صورتی که وقتی انحنا چندان زیاد نیست این اثرات مهم و غیر قابل صرف‌نظرند.

تان و همکارانش توزیع تنش جاری و تنش پسماند را در خمش برای حالت کرنش صفحه‌ای بررسی کردند. در تحلیل آنها خمش به صورت خالص وبا انحنای زیاد فرض شده است[۷].

اسچیلینگ از روش اجزای محدود برای مشخص کردن تنش پسماند در خمش برای حالت کرنش صفحه‌ای استفاده کرد و چهار مدل مختلف را در بار برداری مقایسه کرد[۸].

برای پیش بینی دقیق تنش پسماند در ورقهایی که به صورت سرد نورد شده‌اند، به یک مدل بسته نیاز است. از آنجایی که پیش از فرایندهای اصلی شکل دهی نظیر کشش عمیق، عموما اعمالی همچون باز و بسته کردن ورق حول کویل پیچها و همترازسازی ورق رخ می‌دهد، در مقاله حاضر تنها تاثیرات این‌گونه فرایندهای خمشی بررسی می‌شود.

کواچ و همکارانش یک مدل تحلیلی دقیق با در نظر گرفتن شرایط خمش خالص و کرنش صفحه‌ای برای فرایند ارائه کردند، اما تاثیرات ناهمسانگردی ورق را که عمدتا بعد از نورد رخ می‌دهد در نظر نگرفتند[۹].

این مقاله مدل بسته‌ای را برای بیان تنش پسماند ارائه می‌دهد که در آن فرایند خمش - واخمش به صورت یک مسئله الاستوپلاستیک در شرایط کرنش صفحه‌ای و با این فرض که ماده ناهمسانگرد و از معیار تسلیم هیل و قانون جریان همراه تبعیت می‌کند، مدل شده است. حل عددی به کمک روش اجزای محدود، به منظور مقایسه و بررسی صحت حل تحلیلی آورده شده است. از آنجایی که در فرایند مورد نظر تغییر انحنا چندان زیاد نیست، این تحلیل برای بررسی فرایندهای باز و بسته کردن ورق حول کویل پیچ، همترازسازی ورق و از بین بردن موج ورق قابل استفاده است.

۲- روش تحلیلی

۲-۱- فرضیات

در این بررسی فرض می‌شود که ورق تخت فولادی اولیه تنش زدایی شده و در نتیجه عاری از تنش پسماند اولیه بوده و آثار کارهای پلاستیک قبلی حذف و منحنی تنش- کرنش تا قبل از تسلیم هموار و خطی است.

از آنجایی که ماده تحت کرنشهای بزرگ قرار نمی‌گیرد، می‌توان از آثار کرنش سختی صرف‌نظر کرد و به این ترتیب رفتار ماده به صورت الاستیک کاملا پلاستیک فرض می‌شود که البته از معیار تسلیم هیل و قانون جریان همراه پیروی می‌کند.

روند کلی حل معادلات با استفاده از روش ارائه شده توسط آقای کواچ و همکارانش [۹] انجام گرفته است.

شکل (۱) هیئت به‌کار رفته در خمش و واخمش برای شرایط کرنش صفحه‌ای در صفحه y-z را نشان می‌دهد. محور خم در جهت عرضی ورق است و راستای طولی همان راستای محیطی است.

همچنین فرض می‌شود ورق دارای همسانگردی متقارن محوری حول محور y است.

۲-۲- خمش

کرنش الاستیک یا کرنش الاستوپلاستیک برای هر نقطه دلخواه در فرایند خمش به انحنای k_b و فاصله از محور خنثی y بستگی دارد. به دلیل وجود شرایط کرنش صفحه‌ای در صفحه yz و تنش صفحه‌ای در صفحه xz ،کرنشها در صفحه ورق با توجه به قانون هوک به صورت زیر خواهند بود

$$\varepsilon_{z,b} = \frac{\sigma_{z,b} - \nu\sigma_{x,b}}{E} \qquad (۱\text{-الف})$$

$$\varepsilon_{x,b} = \frac{\sigma_{x,b} - \nu\sigma_{z,b}}{E} = 0 \qquad (۱\text{- ب})$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]

که در آن E مدول الاستیسیته، $\sigma_{x,b}$ و $\sigma_{z,b}$ به ترتیب تنش در راستاهای x و z و $\varepsilon_{x,b}$ و $\varepsilon_{z,b}$ کرنشهای مربوطه‌اند. معیار هیل[۱۰] برای مواد ناهمسانگرد با همسانگردی متقارن محوری حول محور y(همسانگردی صفحه‌ای) به صورت زیر بیان می‌شود

$$\sigma_{x,b}{}^2 - \left(\frac{2R}{1+R}\right)\sigma_{x,b}\sigma_{z,b} + \sigma_{z,b}{}^2 = Y^2 \qquad (۲)$$

که Y تنش تسلیم و R نسبت کرنش پلاستیک جهت جانبی(یا طولی) به کرنش پلاستیک در جهت ضخامت است. تنش خمشی الاستیک مربوط به کرنش طولی $\varepsilon_{z,b}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\sigma_{z,b} = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{z,b} \qquad (۳\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,b} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{z,b} \qquad (۳\text{- ب})$$

$$\varepsilon_{z,b} = k_b y \qquad (۳\text{- ج})$$

برای کم کردن حجم معادلات می‌توان نسبتهای زیر را تعریف کرد

$$R' = \frac{2R}{1+R} \qquad (۴)$$

$$\omega_b = \frac{\sigma_{x,b}}{\sigma_{z,b}} \qquad (۵)$$

با جاگذاری معادله (۳) در معادله (۲) و با توجه به معادله (۴)، میزان کرنش طولی در نقطه تسلیم به‌دست می‌آید

$$\varepsilon_{z,bY} = \pm\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}\frac{Y}{\sqrt{\nu^2 - \nu\left(R'\right)+1}} \qquad (۶)$$

که در آن اگر $y > 0$ در نتیجه $\varepsilon_{z,bY} > 0$. اگر انحنای خمش را k_b در نظر بگیریم، هسته مرکزی مقطع ورق الاستیک باقی می‌ماند و اندازه آن دو برابر مقداری است که معادله زیر می‌دهد

$$y_{bY} = \frac{\varepsilon_{z,bY}}{k_b} = \frac{Y\left(1-\nu^2\right)}{Ek_b\sqrt{\nu^2 - \nu\left(R'\right)+1}} \qquad (۷)$$

در نتیجه معادله (۳)، تنش را برای $|y| \le y_{bY}$ بیان می‌کند. نقاط واقع در $|y| > y_{bY}$ وارد فاز پلاستیک شده‌اند و از معیار تسلیم هیل تبعیت می‌کنند، با ترکیب معادله (۵) با معادله (۲)، تنش در هر نقطه در ناحیه پلاستیک حاصل خواهد شد

$$\sigma_{z,b} = \pm\frac{Y}{\sqrt{1 - R'\omega_b + \omega_b{}^2}} \qquad (۸\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,b} = \pm\frac{\omega_b Y}{\sqrt{1 - R'\omega_b + \omega_b{}^2}} \qquad (۸\text{- ب})$$

که در آن $\sigma_{x,b} \ge 0$ و $\sigma_{z,b} \ge 0$ وقتی $y \ge 0$. از آنجا که مشخص کردن تنش در هر مقدار y برای انحنای k_b خاص مورد نظر است، بایستی نسبت تنش ω_b را به صورت تابعی از y به‌دست آوریم که در ادامه خواهد آمد. با توجه به قانون جریان همراه خواهیم داشت

$$d\varepsilon_{z,b}^{p} = \left(2\sigma_{z,b} - R'\sigma_{x,b}\right)d\lambda \qquad (۹\text{-الف})$$

$$d\varepsilon_{x,b}^{p} = \left(2\sigma_{x,b} - R'\sigma_{z,b}\right)d\lambda \qquad (۹\text{- ب})$$

که $d\varepsilon_{x,b}^{p}$ و $d\varepsilon_{z,b}^{p}$ نمو کرنش پلاستیک در دو جهت طولی و عرضی‌اند و $d\lambda$ ثابت آنی تناسب در قانون جریان است.

با ترکیب معادلات (۹-الف) و(۹- ب) معادله زیر حاصل خواهد شد

$$\frac{d\varepsilon_{z,b}{}^{p}}{d\varepsilon_{x,b}{}^{p}} = \frac{2\sigma_{z,b} - R'\sigma_{x,b}}{2\sigma_{x,b} - R'\sigma_{z,b}} \qquad (۱۰)$$

با ترکیب معادلات (۵) و (۱۰) خواهیم داشت

$$\frac{d\varepsilon_{z,b}{}^{p}}{d\varepsilon_{x,b}{}^{p}} = \frac{2 - R'\omega_b}{2\omega_b - R'} \qquad (۱۱)$$

نمو کرنش طولی شامل نمو کرنش الاستیک و نمو کرنش پلاستیک است، بنابراین خواهیم داشت

$$d\varepsilon_{z,b} = d\varepsilon_{z,b}{}^{e} + d\varepsilon_{z,b}{}^{p} \qquad (۱۲)$$

به دلیل وجود شرایط کرنش صفحه‌ای، کرنش در جهت عرضی صفر است، در نتیجه

$$d\varepsilon_{x,b} = d\varepsilon_{x,b}{}^{e} + d\varepsilon_{x,b}{}^{p} = 0 \qquad (۱۳)$$

با کمک معادلات (۱۱) و(۱۳) وهمچنین معادله (۱۲) معادله زیر حاصل خواهد شد

$$d\varepsilon_{z,b} = d\varepsilon_{z,b}{}^{e} - \frac{2 - R'\omega_b}{2\omega_b - R'}d\varepsilon_{x,b}{}^{e} \qquad (۱۴)$$

نمو کرنش الاستیک با توجه به قانون هوک به صورت زیر است

$$d\varepsilon_{z,b}{}^{e} = \frac{d\sigma_{z,b} - \nu d\sigma_{x,b}}{E} \qquad (۱۵\text{-الف})$$

$$d\varepsilon_{x,b}{}^{e} = \frac{d\sigma_{x,b} - \nu d\sigma_{z,b}}{E} \qquad (۱۵\text{- ب})$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]

از طرف دیگر با مشتق‌گیری از روابط (۸-الف) و (۵) به ترتیب خواهیم داشت

$$d\sigma_{z,b} = \pm \frac{Y(R' - 2\omega_b)}{2\left(1 - R'\omega_b + {\omega_b}^2\right)^{3/2}} d\omega_b \qquad (۱۶)$$

$$d\sigma_{x,b} = \omega_b d\sigma_{z,b} + \sigma_{z,b} d\omega_b \qquad (۱۷)$$

جاگذاری معادلات (۸) و (۱۶) در معادله (۱۷) معادله زیر را نتیجه می‌دهد

$$d\sigma_{x,b} = \pm \frac{Y(2 - R'\omega_b)}{2\left(1 - R'\omega_b + {\omega_b}^2\right)^{3/2}} d\omega_b \qquad (۱۸)$$

حال می‌توان معادلات (۱۵)، (۱۶) و(۱۸) را در معادله (۱۴) قرار داد و معادله زیر را بدست آورد

$$d\varepsilon_{z,b} = \pm \frac{Y}{2E\left(1 - \omega_b R' + {\omega_b}^2\right)^{3/2}} \times \left[(R' - 2\omega_b) - 2\nu(2 - \omega_b R') - \frac{(2 - \omega_b R')^2}{2\omega_b - R'} \right] d\omega_b \qquad (۱۹)$$

با انتگرال‌گیری در سمت چپ معادله (۱۹) از کرنش تسلیم $\varepsilon_{z,bY}$ به عنوان نقطه شروع انتگرال تا کرنش دلخواه $\varepsilon_{z,b}$ و همچنین انتگرال‌گیری در سمت راست رابطه مذکور از نسبت تنشی برابر ضریب پواسون ν (مرتبط با نقطه تسلیم) تا نسبت تنش ω_b (مرتبط با کرنش دلخواه $\varepsilon_{z,b}$) خواهیم داشت

$$\varepsilon_{z,b} = \varepsilon_{z,bY} \pm \frac{Y}{E}\left[\frac{\omega_b (R' - 2\nu)}{\sqrt{1 - R'\omega_b + {\omega_b}^2}} + \frac{\sqrt{4 - {R'}^2}}{2} \coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\left(1 - R'\omega_b - {\omega_b}^2\right)}{4 - {R'}^2}} \right) \right]_{\nu}^{\omega_b} \qquad (۲۰)$$

با قرار دادن معادلات (۳-ج) و(۶) در معادله اخیر می‌توان به معادله زیر رسید

$$|y| = \frac{Y\left(1 - \nu^2\right)}{E k_b \sqrt{1 - R'\nu + \nu^2}} + \frac{Y}{E k_b}\left[\frac{\omega_b (R' - 2\nu)}{\sqrt{1 - R'\omega_b + {\omega_b}^2}} + \frac{\sqrt{4 - {R'}^2}}{2} \coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\left(1 - R'\omega_b - {\omega_b}^2\right)}{4 - {R'}^2}} \right) \right]_{\nu}^{\omega_b} \qquad (۲۱)$$

حال می‌توان با دانستن انحنای معلوم k_b با توجه به معادله (۲۱) نسبت تنش ω_b را در هر نقطه $|y| \geq y_{bY}$ به‌دست آورد و سپس تنش خمشی پلاستیک مربوطه را با کمک معادله (۸) مشخص کرد. در ضمن یک مقدار حدی k_{bY} وجود دارد که در آن سطوح ورق شروع به وارد شدن به ناحیه پلاستیک می‌کنند. این مقدار با جاگذاری معادله (۳-الف) و (۳- ب) در معادله (۲) و با نظر به اینکه $\varepsilon_{z,b} = k_{bY} t/2$ به‌دست می‌آید

$$k_{bY} = \frac{2Y\left(1 - \nu^2\right)}{Et\sqrt{1 - R'\nu + \nu^2}} \qquad (۲۲)$$

همان‌طور که دیده می‌شود مقدار k_{bY} تنها به خواص ماده بستگی دارد. زمانی که $|k_b| \geq k_{bY}$، خم کردن بیشتر منجر به رشد تنش پسماند در انتهای کل فرایند خمش- واخمش می‌شود.

۲-۳- واخمش

فرض می‌شود همترازسازی در اثر واخمش قبل از هرگونه تغییر شکل اضافی و توسط همان انحنای مرحله خمش اما در جهت عکس انجام می‌شود. در نتیجه

$$k_u = -k_b \qquad (۲۳)$$

بعد از مرحله واخمش، تنش نهایی با جمع کردن تنش مرحله خمش و وا خمش به‌دست می‌آید[۹]

$$\sigma_{z,r} = \sigma_{z,b} + \sigma_{z,u} \qquad (۲۴\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,r} = \sigma_{x,b} + \sigma_{x,u} \qquad (۲۴\text{- ب})$$

تا زمانی که انحنای معکوس به حد بحرانی برسد و این بار موجب تسلیم ماده اینبار در جهت عکس شود، تنش مرحله واخمش (بار برداری) الاستیک بوده و از روابط زیر حاصل خواهد شد

$$\sigma_{z,u} = \frac{E}{1 - \nu^2} k_u y \qquad (۲۵\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,u} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} k_u y \qquad (۲۵\text{- ب})$$

برای مشخص کردن شروع تسلیم معکوس می‌توان حد انحنای k_{uY} را تعریف کرد که بعد از آن تنش مرحله واخمش به حد تسلیم می‌رسد. اگر تسلیم در اثر واخمش رخ دهد، تنش کلی از

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]

معادله هیل پیروی می‌کند که به صورت زیر خواهد بود

$$\sigma_{x,r}{}^2 - \left(\frac{2R}{1+R}\right)\sigma_{x,r}\sigma_{z,r} + \sigma_{z,r}{}^2 = Y^2 \qquad (۲۶)$$

k_{uY} را می‌توان با جاگذاری معادلات (۴)، (۵)، (۸-الف)، (۲۴) و(۲۵) در معادله (۲۶) مشخص کرد

$$k_{uY} = -\frac{Y\left(1-\nu^2\right)\left[2-\nu R' + \omega_b\left(2\nu - R'\right)\right]}{E|y|\left(1-\nu R' + \nu^2\right)\sqrt{1-R'\omega_b + \omega_b{}^2}} \qquad (۲۷)$$

کرنش کلی درجهت طولی در هر نقطه و در شروع تسلیم به شکل زیر خواهد بود

$$\varepsilon_{z,uY} = \left(k_b + k_{uY}\right)y \qquad (۲۸)$$

و تنشهای مربوط به آن نیز مشخص می‌شود

$$\sigma_{z,uY} = \frac{E}{1-\nu^2}k_{uY}y \qquad (۲۹\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,uY} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}k_{uY}y \qquad (۲۹\text{- ب})$$

و به همین ترتیب می‌توان نسبت تنش مربوطه را تعریف کرد

$$\omega_{uY} = \frac{\sigma_{x,b} + \sigma_{x,uY}}{\sigma_{z,b} + \sigma_{z,uY}} \qquad (۳۰)$$

با به‌کار بردن معادلات (۸) و (۲۷) و (۲۹)، می‌توان معادله (۳۰) را به صورت زیر نوشت

$$\omega_{uY} = \frac{\left(1-\nu^2\right)\omega_b - \nu\left(2-R'\nu\right)}{\left(R'-2\nu\right)\omega_b - \left(1-\nu^2\right)} \qquad (۳۱)$$

در نتیجه برای $k \le |k_{uY}|$

$$\sigma_{z,u} = -\frac{E}{1-\nu^2}k_b y \qquad (۳۲\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,u} = \frac{-\nu E}{1-\nu^2}k_b y \qquad (۳۲\text{- ب})$$

و وقتی $k_b > |k_{uY}|$، تسلیم در جهت عکس رخ می‌دهد. تنشهای نهایی بعد از اتمام واخمش به‌دست می‌آیند

$$\sigma_{z,r} = \mp\frac{Y}{\sqrt{1-R'\omega_u + \omega_u{}^2}} \qquad (۳۳\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,r} = \mp\frac{\omega_u Y}{\sqrt{1-R'\omega_u + \omega_u{}^2}} \qquad (۳۳\text{- ب})$$

و

$$\omega_u = \frac{\sigma_{x,r}}{\sigma_{z,r}} = \frac{\sigma_{x,b} + \sigma_{x,u}}{\sigma_{z,b} + \sigma_{z,u}} \qquad (۳۳\text{- ج})$$

که در آن $\sigma_{x,r} \le 0$ و $\sigma_{z,r} \le 0$ وقتی $y \ge 0$.همچنین با توجه به معادلات (۸)، (۲۴) و (۳۳) تنشهای مرحله واخمش محاسبه می‌شوند

$$\sigma_{z,u} = \mp\left(\frac{Y}{\sqrt{1-R'\omega_u + \omega_u{}^2}} + \frac{Y}{\sqrt{1-R'\omega_b + \omega_b{}^2}}\right) \qquad (۳۴\text{-الف})$$

$$\sigma_{x,u} = \mp\left(\frac{\omega_u Y}{\sqrt{1-R'\omega_u + \omega_u{}^2}} + \frac{\omega_b Y}{\sqrt{1-R'\omega_b + \omega_b{}^2}}\right) \qquad (۳۴\text{-ب})$$

که $\sigma_{z,u} \le 0$ و $\sigma_{x,u} \le 0$ وقتی $y \ge 0$.

با به‌کار بردن روش مشابه در ترکیب معادلات (۹) تا (۱۹)، می‌توان ω_u را به صورت تابعی از y به‌دست آورد و برای نمو کرنش در جهت طولی در مرحله واخمش خواهیم داشت

$$d\varepsilon_{z,u} = \mp\frac{Y}{2E\left(1-\omega_u R' + \omega_u{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(R'-2\omega_u\right)\right.$$
$$\left.-2\nu\left(2-\omega_u R'\right) - \frac{\left(2-\omega_u R'\right)^2}{2\omega_u - R'}\right]d\omega_u \qquad (۳۵)$$

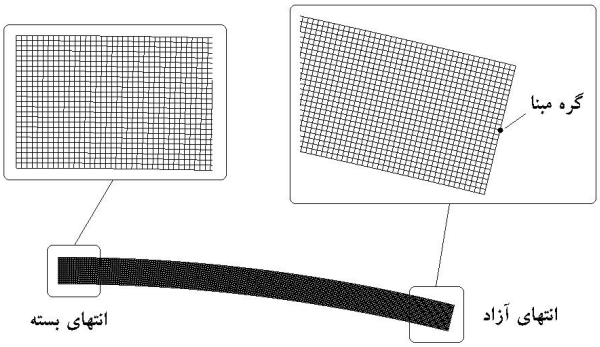
معادله (۳۵) مانند معادله (۱۹) است، با این تفاوت که به دلیل آنکه ماده در مرحله واخمش است اندیس حروف تغییر کرده است.

با انتگرال‌گیری در سمت چپ معادله (۳۵) از کرنش تسلیم $\varepsilon_{z,uY}$ به عنوان نقطه شروع انتگرال تا کرنش نهایی $\varepsilon_{z,r}$ و همچنین انتگرال‌گیری در سمت راست معادله مذکور از نسبت تنش ω_{uY} (در شروع تسلیم) تا نسبت تنش ω_u (مرتبط با کرنش نهایی $\varepsilon_{z,r}$)خواهیم داشت

$$\varepsilon_{z,r} - \varepsilon_{z,uY} = \mp\frac{Y}{E}\left[\frac{\omega_u\left(R'-2\nu\right)}{\sqrt{1-R'\omega_u + \omega_u{}^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{4-R'^2}}{2}\coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\left(1-R'\omega_u + \omega_u{}^2\right)}{4-R'^2}}\right)\right]_{\omega_{uY}}^{\omega_u} \qquad (۳۶)$$

از آنجا که مرحله همتراز سازی منجر به کرنش صفر $\varepsilon_{z,r} = 0$ در انتهای فرایند خواهد شد، با جاگذاری معادله (۲۸) در معادله (۳۶)

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]



شکل ۲- نحوه المان ریزی و شرایط مرزی

معادله زیر به‌دست می‌آید

$$|y| = \frac{Y}{E\left(k_b + k_{uY}\right)}\left[\frac{\omega_u\left(R' - 2\nu\right)}{\sqrt{1 - R'\omega_u + {\omega_u}^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{4 - {R'}^2}}{2}\coth^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\left(1 - R'\omega_u + {\omega_u}^2\right)}{4 - {R'}^2}}\right)\right]_{\omega_{uY}}^{\omega_u} \qquad (۳۷)$$

که مقادیر k_{uY} و ω_{uY} به ترتیب از معادلات (۲۷) و(۳۱) به‌دست می‌آیند. با استفاده از معادله (۳۷) نسبت تنش ω_u در هر نقطه برای حالت $k_b > |k_{uY}|$ به‌دست می‌آید ودر نهایت می‌توان تنش مرحله واخمش و تنش پسماند نهایی را به ترتیب از معادلات (۳۴) و (۲۴) محاسبه کرد. لازم به ذکر است که حل معادلات نهایی با استفاده از نرم‌افزار Matlab [۱۱] و به کمک حل سیمبولیک آن استخراج شده است.

۳- مدلسازی اجزای محدود

به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی، خمش و واخمش ورق فولادی توسط نرم افزار اجزای محدود **ABAQUS [۱۲]** مدلسازی شد. مدل ساخته شده به صورت یک ورق فولادی به طول ۳۰ میلیمتر است، شکل (۲). ضخامت ورق ۲ میلیمتر و جنس ورق به صورت الاستیک کاملا پلاستیک با تنش تسلیم ۳۰۰ مگاپاسکال، مدول یانگ ۲۰۰ گیگا پاسکال و ضریب پواسون ۰/۳ در نظر گرفته شد.

برای بررسی تغییرات تنش در جهت ضخامت، از ۲۶ لایه المان نوع CPE4R که دو بعدی و ۴ گره‌ای با خاصیت کرنش صفحه‌ای‌اند استفاده شد. همچنین انتگرال‌گیری کاهش یافته وکنترل ساعت شنی به‌کاربرده شد. دو مرحله برای مدل کردن کل فرایند نیاز بود: مرحله خمش به صورت خمش خالص ورق منشوری با شعاع انحنای ۱۲۵ میلیمتر و مرحله واخمش شامل همترازسازی که به صورت عکس مرحله قبل تا بازگشت به شرایط اولیه انجام شد.

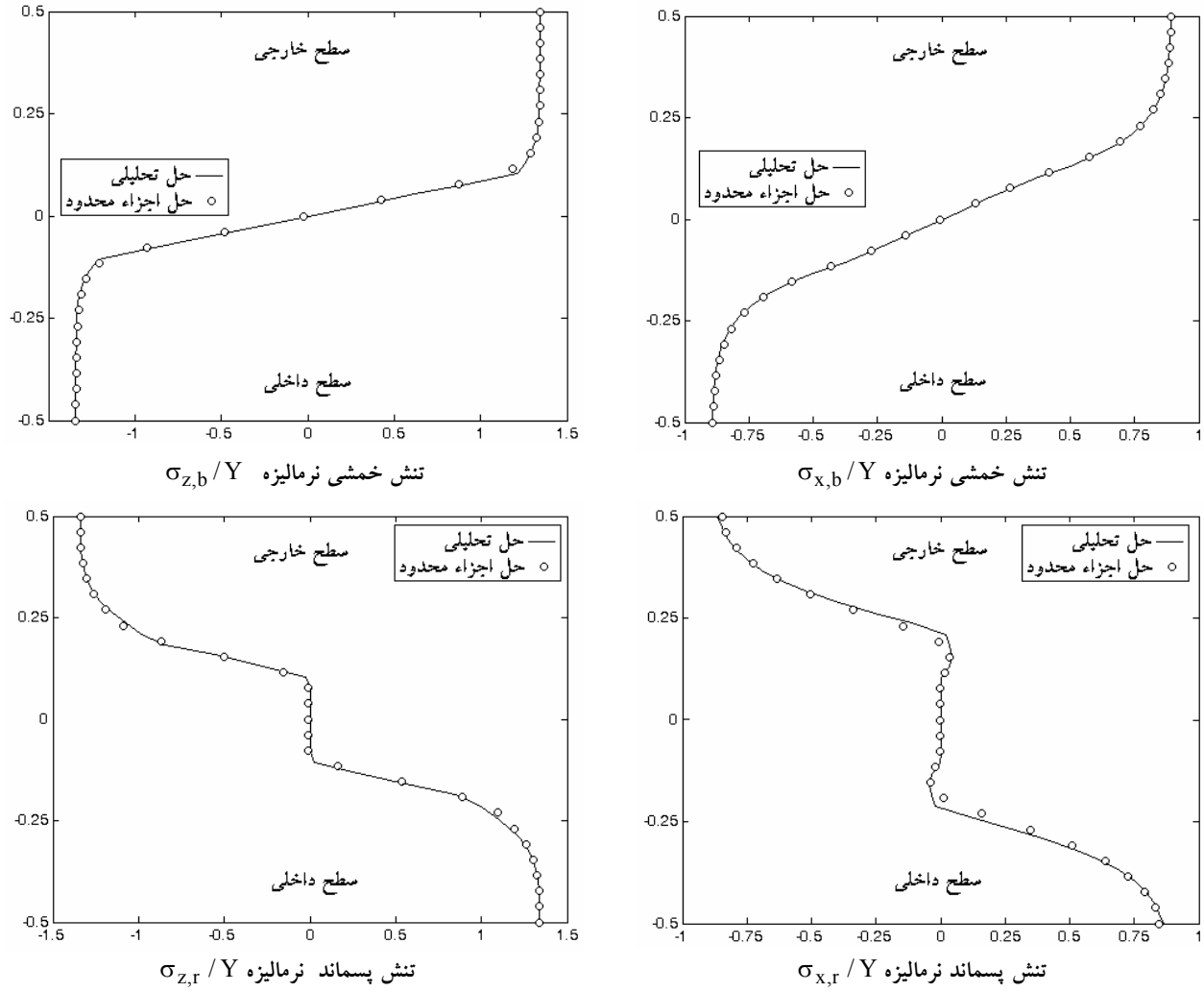
برای اطمینان از صفحه‌ای ماندن مقطع ورق در انتهای آزاد و در هنگام بارگذاری، تمام گره‌ها به حرکت گره مرکزی(گره مبنا) انتهای آزاد مقید شده است. هر دو مرحله خمش و واخمش توسط میزان کافی از جابه‌جایی و چرخش گره مبنا برای رسیدن به انحنای کافی و سپس انحنای صفر مدلسازی می‌شود.

در این مدلسازی شرایط غیرخطی هم برای هندسه و هم ماده در نظرگرفته شده است. مدل ABAQUS با خواص مکانیکی ذکر شده و شرایط الاستیک کاملا پلاستیک که از معیار هیل و قانون جریان همراه برای مواد ناهمسانگرد تبعیت می‌کند، تعریف شده است. مدل اجزای محدود توزیع تنش پسماند را نشان می‌دهد که البته شکل توزیع آن در مقاطع عمود بر طول یکسان است و به همین دلیل تنها توزیع تنش در مقطع انتهایی به عنوان مرجع بررسی شده است.

۴- بررسی نتایج

نتایج حاصل از مدلسازی اجزای محدود با نتایج حل تحلیلی برای $R = 2$ در شکل (۳) مقایسه شده‌اند. در این شکل خطوط ممتد حل تحلیلی و نقاط، حل به کمک روش اجزای محدود را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع تنش پسماند طولی و عرضی که توسط هر دو روش پیش بینی می‌شود با هم انطباق خوبی دارند. نتایج در شکل (۳) همچنین نشان دهنده توزیع غیر خطی تنش پسماند در جهت ضخامت است، بنابراین فرض توزیع خطی که توسط مطالعات پیشین مطلوب بود نمی‌تواند چندان صحیح باشد. مقدار تنش در این مطالعات تنها در سطح ورق به صورت تجربی اندازه‌گیری شده

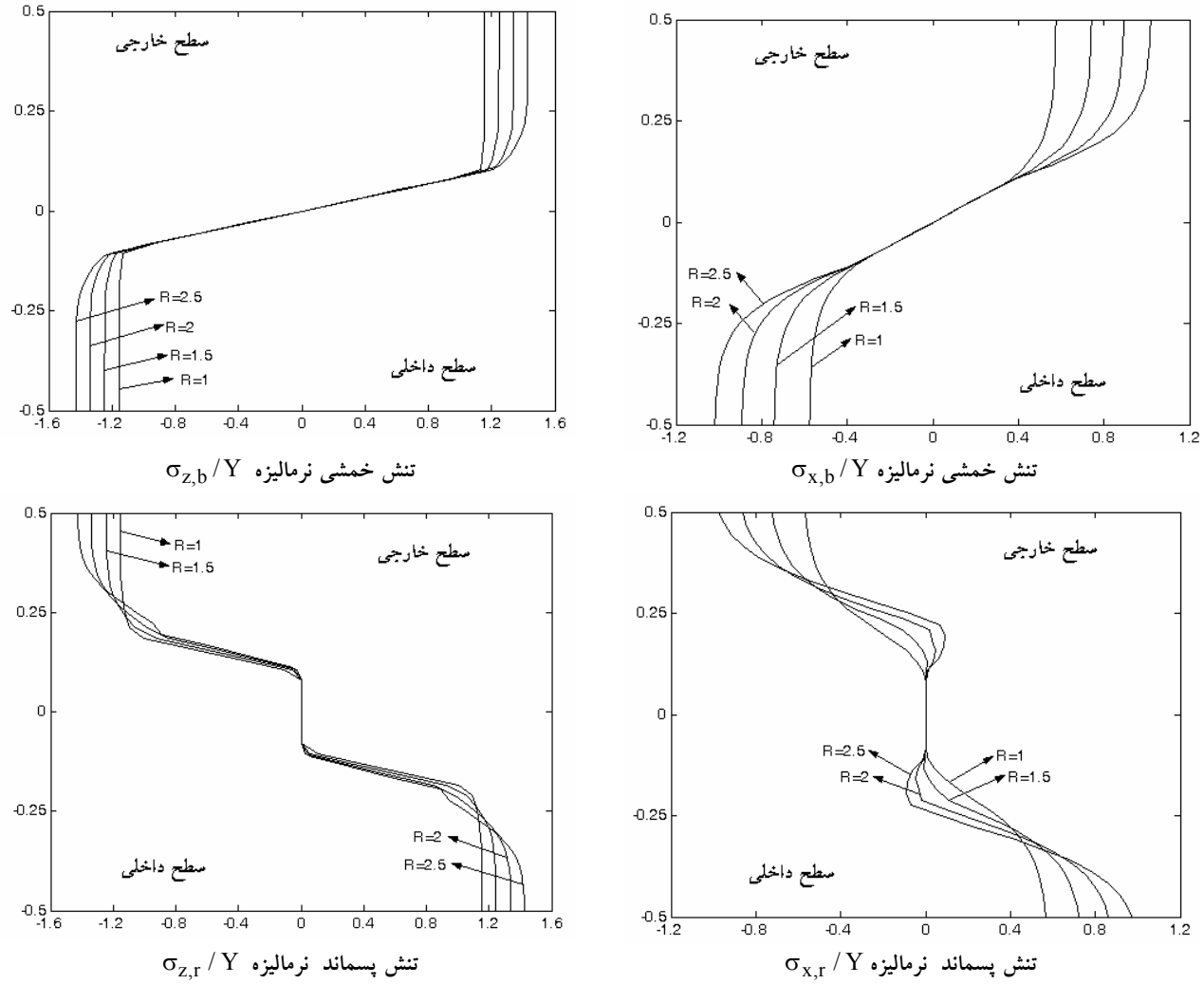
[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]



شکل ۳- مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی و روش اجزای محدود در حالت $R = 2$

و سپس با داشتن این مقدار، توزیع تنش در ضخامت به صورت خطی فرض شده است[۲]. همان‌طور که در دو تصویر بالایی شکل (۳) دیده می‌شود تنش خمشی در جهت طولی و عرضی از دو بخش الاستیک و پلاستیک تشکیل شده است. در بخش الاستیک که ضخامتی برابر $2y_{bY}$ دارد، تغییرات تنش بر حسب فاصله از محور خنثی به صورت خطی است. تنش پلاستیک با دور شدن از محور خنثی به صورت هموار افزایش می‌یابد تا نهایتا با رسیدن بردار تنش روی سطح تسلیم و حرکت آن روی این سطح و بالاخره ثابت شدن آن، تنش ثابت می‌شود. دو تصویر پایینی شکل (۳) تنش پسماند را بعد از اتمام واخمش نشان می‌دهد. تنش مرحله واخمش نیز نظیر تنش خمشی از دو بخش الاستیک و پلاستیک تشکیل شده است، اما به دلیل اینکه قبل از واخمش تنش اولیه در اثر مرحله خمش وجود داشته، ماده در نقطه بالاتری از محور خنثی به تسلیم می‌رسد. در نتیجه هسته مرکزی مقطع که در مرحله خمش الاستیک مانده، پس از واخمش تنش خود را به طور کامل رها می‌کند. تنش مرحله واخمش که به تنش پلاستیک مرحله خمش افزوده می‌شود (البته در جهت عکس) خود به دو بخش تقسیم می‌شود که نهایتاً نمودار توزیع تنش پسماند دارای سه بخش متمایز است: بخش درونی (خمش الاستیک + واخمش الاستیک)، بخش میانی (خمش پلاستیک + واخمش الاستیک) و بخش بیرونی (خمش پلاستیک + واخمش پلاستیک).

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]



شکل ۴- بررسی اثر مقدار R بر توزیع تنش

شکل (۴) تاثیر مقدار R را بر روی توزیع تنش نشان می‌دهد. با افزایش مقدار R ضخامت هسته مرکزی و همچنین مقدار تنش طولی و عرضی به طور محسوسی افزایش می‌یابد. به عنوان مثال با افزایش مقدار R از ۱ به ۲ بیشینه تنش طولی حدود ۱۵٪ افزایش می‌یابد. اساسا علت این رخداد این است که ماده ناهمسانگرد است و سطح تسلیم در ناحیه‌ای که $\sigma_x.\sigma_z > 0$، دچار انبساط می‌شود. همچنین تسلیم در جهت عکس در فاصله بیشتری از محور خنثی و با مقدار بیشتر تنش طولی و عرضی رخ می‌دهد که خود منجر به افزایش مقدار تنش پسماند می‌شود. نتایج در شکل (۴) نشان دهنده توزیع غیرخطی تنش پسماند در در همه مقادیر R است.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق حل تحلیلی برای پیش‌بینی توزیع تنش پسماند پس از فرایند خمش- واخمش ارائه شد که تمامی مراحل خمش و واخمش در شرایط کرنش صفحه‌ای و با خمش الاستو پلاستیک برای ماده ناهمسانگرد با تقارن محوری انجام شد. مدل اجزای محدود برای همین مسئله نیز ارائه شد. نتایجی که توسط هر دو روش پیش بینی می‌شود با هم انطباق خوبی دارند. نتایج هر دو روش نشان دهنده توزیع غیر خطی تنش پسماند در جهت ضخامت است. تاثیرات مقدار R بر روی توزیع تنش بررسی و مشاهده شد که با افزایش مقدار R ضخامت هسته مرکزی و مقدارتنش طولی و عرضی به طور محسوسی افزایش می‌یابد.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]

همچنین تسلیم در جهت عکس در فاصله بزرگتری از محور خنثی و با مقدار بیشتر تنش طولی و عرضی رخ می‌دهد که خود منجر به افزایش مقدار تنش پسماند می‌شود.

حل تحلیلی، توزیع تنش پسماند را به دقت پیش‌بینی می‌کند که از آن می‌توان به عنوان تنش اولیه در مدلسازی اجزای محدود فرایندهای شکل دهی نظیر کشش عمیق استفاده کرد. همچنین از این روش می‌توان برای بررسی دقیق فرایندهایی که خمش–واخمش متوالی ورق در آنها رخ می‌دهد، نظیر باز و بسته کردن ورق حول کویل پیچ، صاف کردن ورق و همتراز سازی کششی– خمشی استفاده کرد.

مراجع

1. Gerdeen, J. C., and Ducan, J. L., "Springback in Sheet Metal Forming," AISI Report, pp. 465-1201, 1986.
2. Abdel-Rahman, N., Sivakumaran, K., "Material Properties Models for Analysis of Cold-Formed Steel Members," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 9, pp. 1135–1143, 1997.
3. Huang, M., and Gerdeen, J. C., "Springback of Doubly Curved Developable Sheet Metal Surface an Overview," SAE Technical Paper, No. 940938, 1994.
4. Ingvarsson, L., "Cold-forming Residual Stresses Effect on Buckling," *Proceedings of the Third International Specialty Conference On Cold-formed Steel Structures* ,University of Missouri-Rolla, USA, pp. 85–119, November 1975.
5. Kato, B., and Aoki, H., "Residual Stresses in Cold Formed Tubes," *Journal of Strain analysis*, Vol. 4, No. 13, pp. 193–204, 1978.
6. Rondal, J., "Residual Stresses in Cold-Rolled Profiles," Construction and Building Materials, Vol. 3, No. 1, pp. 150-164, 1987.
7. Tan, Z., Li, W. B., and Persson, B., "On Analysis and Measurement of Residual Stresses in the Bending of Sheet Metals," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 5, No. 36, pp. 483-491, 1994.
8. Schilling, R., "Sheet Bending and Determination of Residual Stresses by Means of FEM," Steel Research, Vol. 64, No. 5, pp. 255-261, 1993.
9. Quach, W. M., Teng, J.G., and Chung, K.F., "Residual Stresses in Steel Sheets due to Coiling and Uncoiling: a Closed-Form Analytical Solution," Journal of Structural Engineering, Vol. 26, Issue 9, pp. 1249-1259, 2004.
10. Hosford, W. F., and Caddle, R. M., *Metal Forming Mechanics and Metallurgy*, p. 276, Prentice Hall Englewood Cliffs, N. J. 07632, 1993.
11. Matlab, Version 6.5, the Matlab Works Inc, 2002.
12. ABAQUS Standard User's Manual, Version 6.4, ABAQUS Inc, 2003.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1386.26.2.12.1]