

# ارائه مدلی جدید در سیستمهای کنترل تولید و موجودی برای اقلام فاسد شدنی با تقاضای وابسته به قیمت محصول، ارزش زمانی پول و مجاز بودن کمبود

مسعود ربانی\*، رضا توکلی مقدم\* و هاشم وحدانی\*\*

گروه مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۴/۷/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۸/۲۶)

**چکیده** - در این مقاله، رویکردی جدید برای حل مدل موجودی برای اقلام فاسد شدنی با جریان نقدی تنزیل یافته ارائه شده است. اقلام تولیدی با نرخ متغیر با زمان که از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، دچار خرابی می‌شوند. در این مدل موجودی، دو نوع کمبود یعنی تقاضای پس‌افت<sup>۱</sup> و فروش از دست رفته<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده که در این حالت تقاضا برای اقلام تولیدی با نرخ متغیر، که تابعی از زمان است دچار پس‌افت می‌شود. در حالت کلی تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول است. هدف از مدل موجودی ارائه شده، تعیین سیاست بهینه قیمت‌گذاری محصول و طول مدت تولید در یک سیکل کامل است به طوری که ارزش فعلی کل سود حاصله در طی افق برنامه‌ریزی محدود، بیشینه شود. در انتها مثال عددی برای حل مدل موجودی با استفاده از رویکرد ابتکاری پیشنهادی به صورت سه مرحله‌ای ارائه شده است.

واژگان کلیدی: ارزش زمانی پول، تقاضای پس‌افت، فروش از دست رفته، ارزش فعلی سود

## A New Inventory Model for Deteriorating Items with Price-dependent Demand, Time-value of money, and Shortages

M. Rabbani, R. Tavakkoli-Moghaddam, and H. Vahdani

Department of Industrial Engineering, College of Engineering, University of Tehran  
Department of Industrial Engineering, Sharif University of Technology

**Abstract:** This paper presents a discounted cash-flow approach to an inventory model for deteriorating items with the two-parameter Weibull distribution. According to our proposed model, two shortages are considered: back-orders and lost-sales,

\*\* - دانشجوی دکتری

\* - دانشیار

*in which the back-order rate is a varying function of the time when the shortage happens. In general, the demand rate is a linear function of the selling price. The objective of this model is to determine the optimal pricing policy and the optimal throughput time in such a way that the total net present value of profits is maximized in the given planning horizon. Finally, a numerical example is provided to solve the model presented using our proposed three-stage approach.*

**Keywords:** Time-value of money, Back-order demand, Lost-sales, Present value of profits.

## ۱- مقدمه

در مدل‌های سنتی کنترل موجودی، فاکتورهایی از قبیل ارزش زمانی پول، تورم و خرابی محصولات در طول مدت نگهداری و حمل و نقل درون کارخانه‌ای وارد مدل نمی‌شدند. در شرایط واقعی عواملی همچون فرصتهای سرمایه‌گذاری از دست رفته به علت سرمایه درگیر در موجودیها، خرابی و فاسد شدن محصولات به دلایل پیش بینی نشده و یا ساختاری و غیره توجه خاص به این فاکتورها را الزامی می‌کند. به طور خاص می‌توان به محصولاتی از قبیل مواد دارویی و محصولات لبنی و غیره به عنوان محصولاتی که مدل قابل اعمال بر روی آنهاست، اشاره کرد.

از لحاظ پیشینه تاریخی، گر و شرادر [۱] اولین بار مسئله فاسد شدن محصولات را برای مسایل کنترل موجودی ارائه کرده‌اند. بعد از آن ایلون و مالایا [۲] مدل فوق را گسترش داده و تقاضای وابسته به قیمت محصول را مطرح کرده‌اند. کوهن [۳] مدلی برای سیستم موجودی با در نظر گرفتن کمبود برای اقلام فاسد شدنی با نرخ خرابی که از توزیع نمایی پیروی می‌کند، ارائه داده است. کنگ و کیم [۴] مدل کوهن را گسترش داده‌اند و سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و بدون در نظر گرفتن کمبود را مدل کرده‌اند. اگر اوایل و جگی [۵] در مقاله خود به وجود یک نقص در مدل کوهن اشاره کرده و روش ساده‌تری را برای محاسبه قیمت محصول و سیاست تولیدی بهینه ارائه داده‌اند. بعد از آن وی [۶] مدل فوق را برای اقلام فاسد شدنی که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، ارائه داده‌اند. بوزاکات [۷] اولین کسی بود که مفهوم تورم را وارد مدل‌های کنترل موجودی کرد. میزرا [۸] به‌طور همزمان تاثیر تورم و ارزش زمانی پول را در هر دو حالت نرخ تورم داخلی و

خارجی بررسی و تاثیر نرخ بهره و نرخ تورم بر روی استراتژی بهینه تولید را نشان داد. چندرا و بهنار [۹] مدل میزرا را گسترش داده و اثر وجود کمبود در سیستم موجودی را بررسی کرده‌اند. سارکر و پن [۱۰] مدلی جدید برای سیستم تولیدی با نرخ تولید محدود و مجاز بودن کمبود ارائه داده‌اند.

چانگ [۱۱] الگوریتمی جدید را برای حل مدل ارائه شده در سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و افق برنامه‌ریزی نامحدود ارائه داده است. داتا و پال [۱۲] تاثیرات تورم و ارزش زمانی پول در مدل موجودی با نرخ تقاضای خطی وابسته به زمان و مجاز بودن کمبود در سیستم را بررسی کرده‌اند. هاریگا [۱۳] مدل داتا و پال را گسترش داده و تابع نرخ تقاضای نزولی و پربندهای متغیر تولیدی را وارد مدل کرد. تنگ و چنگ [۱۴] مدلی را برای تعیین سیاست بهینه تولید اقلام فاسد شدنی در شرایطی که تقاضا همزمان تابعی از قیمت محصول و سطح موجودی در دست باشد، ارائه کرده‌اند.

جولای و همکاران [۱۵] سیاست بهینه تولید را برای اقلام فاسد شدنی که تابع تقاضای آنها وابسته به سطح موجودی بوده و تابع عمر محصولات از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ارائه داده‌اند. در مدل ایشان میزان تقاضای پس‌افت در دوره کمبود به‌صورت درصد ثابتی از کل تقاضای وارده که طبق فرضیات مدل در طی این دوره نرخ ثابتی نیز دارد، محاسبه شده است. وی و لا [۱۶] مدل موجودی برای سیستمی با نرخ تقاضای وابسته به قیمت محصول برای اقلام فاسد شدنی که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند و کمبود یعنی تقاضای پس‌افت مجاز است، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ارائه داده‌اند. مقالات متعدد دیگری نیز در سالهای اخیر در مجلات معتبر داخلی و خارجی پیرامون

موضوع مورد بحث به چاپ رسیده است که به علت تعدد بسیار آنها به ذکر موارد فوق بسنده کرده و تمرکز بحث را بر روی مدل اصلی تحت بررسی قرار می‌دهیم.

مبنای اصلی این مقاله، مدل ارائه شده توسط وی و لا [۱۶] است. مشخصه اصلی مدل ارائه شده در این مقاله که به وضوح آن را از مدل ایشان و همچنین مدل جولای و همکاران [۱۵] متمایز می‌سازد، در نظر گرفتن همزمان دو نوع کمبود یعنی تقاضای پس افت و فروش از دست رفته با اعمال نرخ موثر تقاضای پس افت است که تابعی متغیر از زمان در نظر گرفته شده و بر تابع تقاضا اثر می‌کند است. ضمن اینکه تعیین سیاست بهینه قیمت‌گذاری نیز این مقاله را از مقالات دیگر متمایز می‌کند.

در این مقاله، از رویکرد جریان نقدی تنزیل یافته<sup>۳</sup> برای اعمال ارزش زمانی پول درمدل ارائه شده برای سیستم تولید و موجودی با مشخصات زیر استفاده شده است:

۱- اقلام تولیدی فاسد شدنی بوده و تابع چگالی عمر محصولات از توزیع ویبول با پارامترهای  $\alpha, \beta$  پیروی می‌کند.

۲- دو نوع کمبود، تقاضای پس افت و فروش از دست رفته، مجاز است. نرخ تقاضای پس افت به صورت تابعی از زمان که بر نرخ تقاضا اثر می‌گذارد، در نظر گرفته شده است.

۳- تقاضا به صورت تابعی نزولی و خطی از قیمت فروش محصول در نظر گرفته شده است.

تابع هدف مسئله به صورت حداکثر کردن ارزش فعلی سود است. تمامی فاکتورهای موثر در تابع سود با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول در تابع هدف وارد شده‌اند.

## ۲- توسعه مدل ریاضی

### ۱-۲- مفروضات مدل

مدل ریاضی ارائه شده در مدل بر اساس مفروضات زیر بنا نهاده شده است:

۱- افق برنامه‌ریزی محدود است.

۲- زمان تا خرابی محصولات از یک توزیع ویبول با پارامترهای  $\alpha, \beta$  پیروی می‌کند.

۳- ارزش زمانی پول درمدل لحاظ شده است.

۴- هر دو نوع کمبود (یعنی تقاضای پس افت و فروش از دست رفته) مجاز است.

۵- هیچ گونه جایگزینی یا دوباره کاری بر روی محصولات خراب و فاسد شده صورت نمی‌گیرد.

۶- مرکب شدن به صورت پیوسته صورت می‌گیرد.

۷- نرخ تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول می‌باشد.

۸- نرخ تولید محدود و ثابت بوده و بزرگتر از نرخ تقاضاست.

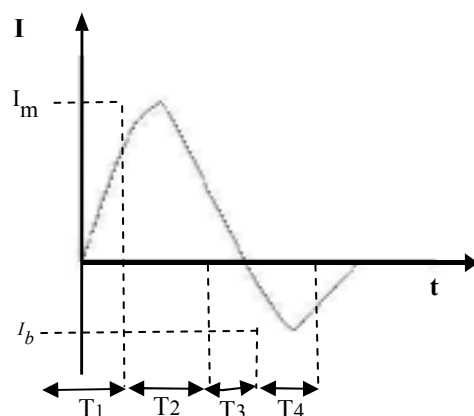
۹- مقدار تولید، سطح موجودی، پیوندهای مختلف زمانی تشکیل دهنده هر سیکل و میزان تقاضا هر یک متغیرهای پیوسته در نظر گرفته شده‌اند و فقط تعداد سیکل‌های تولیدی در افق برنامه‌ریزی عدد صحیح است.

۱۰- مبادله کالا با پول به صورت آنی صورت می‌گیرد.

### ۲-۲- معرفی پارامترهای به کاررفته در مدل

برای سهولت در فهم مطالب، نمای کلی از وضعیت تغییرات سطوح موجودی در یک سیکل تولیدی، در قالب شکل (۱) ارائه شده است:

در پیوند  $T_1$  در هر سیکل، تولید تا رسیدن به حداکثر سطح موجودی صورت می‌گیرد و تقاضا برآورده می‌شود و عامل فاسد شدن نیز بر روی موجودیها تاثیر می‌گذارد. پارامتر زمان در این فاصله با  $t_1$  نشان داده شده است. در فاصله  $T_2$  در هر سیکل، تولید متوقف بوده و سطح موجودیها کاهش یافته (بنا به تقاضا و نرخ خرابی) و این کاهش تا زمان  $T_1+T_2$  در هر سیکل ادامه می‌یابد تا سطح موجودیها به صفر برسد. از این لحظه به بعد یعنی در فاصله زمانی  $T_3$  سطح موجودی منفی شده و دچار کمبود می‌شویم. البته شیب لحظه‌ای نمودار در این قسمت کمتر از نرخ تقاضای رسیده به کارخانه است چرا که



شکل ۱- تغییرات سطح موجودی در یک سیکل کامل تولیدی

$C$ : هزینه هر واحد از محصول تولیدی در زمان  $t = 0$

$S$ : قیمت فروش هر واحد در زمان  $t = 0$

$P$ : نرخ تولید ( $P > d(s)$ )

$I_j(t_j)$ : سطح موجودی در زمان  $t_j$  در پیروی از  $j$  ام

$H$ : افق برنامه‌ریزی

$T$ : سیکل تولیدی

$N$ : تعداد سیکل‌های تولیدی در افق برنامه‌ریزی ( $N = H/T$ )

$T_1 + T_2$ : طول پیروی از هر سیکل که سطح موجودی در آن

مثبت است

$T_3 + T_4$ : طول پیروی از هر سیکل که در آن با کمبود

مواجه‌ایم

$r$ : مقدار ثابتی که نشان دهنده اختلاف بین نرخ تنزیل و نرخ

تورم است

$I_m$ : حداکثر سطح موجودی

$I_b$ : حداقل مقدار کمبود

$C_1$ : هزینه آماده‌سازی در زمان  $t = 0$

$C_2$ : هزینه نگهداری هر واحد محصول در واحد زمان در زمان

$t = 0$

$C_3$ : هزینه هر واحد تقاضای پس‌افت در واحد زمان در زمان

$t = 0$

$C_4$ : هزینه هر واحد تقاضای ازدست‌رفته در زمان  $t = 0$

$z(t)$ : نرخ آبی خرابی

قسمتی از تقاضا در این قسمت بنا به حالت فروش از دست رفته از سیستم حذف می‌شود. مقدار تقاضای پس‌افت با نرخ‌ی که تابعی از زمان است و بر تقاضای محصول اعمال می‌شود، قابل محاسبه است. در لحظه  $T_1+T_2+T_3$  در هر سیکل تولیدی، دوباره آماده‌سازی صورت گرفته و تولید برای مرتفع ساختن تقاضای پس‌افت و تقاضای رسیده صورت می‌گیرد تا در انتهای این پیروی سطح موجودی به صفر می‌رسد و از اینجا به بعد سیکل جدید آغاز می‌شود.

لازم به ذکر است که در پیروی  $T_4$ ، دیگر با فروش از دست رفته مواجه نیستیم چرا که بنا به سیاست اتخاذ شده بر آوردن تقاضا و عدم مطلوبیت کمبود از نوع فروش از دست رفته با توجه به تاثیر منفی آن در موقعیت رقابتی موسسه، ابتدا تقاضاهای جدید برآورده می‌شوند. حال به معرفی پارامترهای به‌کار رفته در مدل می‌پردازیم:

$d(s)$ : نرخ تقاضا که تابعی نزولی از قیمت فروش محصول است:

$$d(s) = g - hs$$

$g, h$ : پارامترهای ثابت و مثبت بوده و بنا به شرایط حاکم بر بازار و به صورت تجربی قابل محاسبه‌اند. همچنین باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$g - hs > 0 \quad \text{یا} \quad s < g/h$$

k: نرخ تقاضای پس افت که به صورت زیر تعریف می شود:

$$k = \frac{1}{1 + \gamma(T_3 - t_3)}$$

$\gamma$  یک مقدار ثابت و مثبت است. بدین ترتیب هر چه در پیروید  $T_3$  جلوتر می رویم، با افزایش  $t_3$  نرخ فوق افزایش می یابد که کاملاً نشان دهنده شرایط حاکم بر دنیای واقعی است، چراکه با نزدیک شدن به پیروید  $T_4$  که بازه تولیدی است، تقاضاهای رسیده، به میزان بیشتری پذیرفته می شوند و بر روی نظر مشتریان نیز در انتخاب شرکت به عنوان تامین کننده تاثیر مثبت دارد.

### ۲-۳- ارائه مدل ریاضی

در ابتدا به محاسبه نرخ آبی خرابی می پردازیم. اگر  $f(t)$  تابع چگالی احتمال عمر محصول باشد که طبق تعریف از توزیع ویبول با پارامترهای  $\alpha, \beta$  برخوردار است، آنگاه نرخ آبی خرابی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

$F(t)$ : تابع توزیع تجمعی عمر محصول

تابع چگالی ویبول به صورت زیر است:

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad \alpha, \beta > 0, t > 0 \quad (2)$$

$\alpha, \beta$  به ترتیب پارامترهای مقیاس و شکل توزیع ویبول هستند. باید توجه داشت که با قرار دادن  $\beta = 1$ ، چگالی توزیع نمایی که کاربرد بسیار زیادی نیز در زمینه تقریب زدن طول عمر محصولات مختلف دارد، به دست می آید. برای چگالی احتمال ویبول داریم:

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^\beta} \quad (3)$$

لذا نرخ آبی خرابی برابر خواهد بود با:

$$Z(t) = \frac{\alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}}{e^{-\alpha t^\beta}} = \alpha \beta t^{\beta-1} \quad (4)$$

حال بعد از معرفی پارامترهای فوق، می توانیم تغییرات سیستم موجودی با گذشت زمان را در قالب معادلات دیفرانسیل مربوطه، نشان دهیم. در لحظه  $t = 0$  اولین آماده سازی صورت می گیرد. در این لحظه موجودی در دست صفر است. در پیروید

$T_1$  سطح موجودی تحت تاثیر نرخهای تولید، تقاضا و خرابی قرار داشته و افزایش می یابد تا به بیشترین حد خود ( $I_m$ ) می رسد. در پیروید زمانی  $T_2$  تولید متوقف و سطح موجودی تحت تاثیر نرخ تقاضا و نرخ خرابی کاهش می یابد تا به زمان  $t = T_1 + T_2$  می رسد که سطح موجودی در آن صفر است. در پیروید زمانی  $T_3$ ، مقادیر کمبود شروع و تقاضای پس افت افزایش می یابد تا به زمان  $t = T_1 + T_2 + T_3$  که مقدار کمبود در بالاترین سطح قرار دارد می رسد. در ابتدای پیروید زمانی  $T_4$  مجدداً آماده سازی صورت گرفته و تولید آغاز می شود و به تقاضای پس افت و تقاضای رسیده، رسیدگی می شود. این مراحل در قالب معادلات دیفرانسیل زیر معرفی شده اند:

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1} = P - [d(s) + \alpha \beta t_1^{\beta-1} I_1(t_1)] \quad 0 \leq t_1 \leq T_1 \quad (5)$$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2} = -[d(s) + \alpha \beta t_2^{\beta-1} I_2(t_2)] \quad 0 \leq t_2 \leq T_2 \quad (6)$$

$$\frac{dI_3(t_3)}{dt_3} = -\left[ \frac{d(s)}{1 + \gamma(T_3 - t_3)} \right] \quad 0 \leq t_3 \leq T_3 \quad (7)$$

$$\frac{dI_4(t_4)}{dt_4} = P - d(s) \quad 0 \leq t_4 \leq T_4 \quad (8)$$

با کمک شرایط مرزی زیر معادلات فوق را می توان حل کرد:

$$I_1(0) = 0$$

$$I_2(0) = I_m$$

$$I_3(0) = 0$$

$$I_4(0) = -I_b$$

بدین ترتیب با در اختیار داشتن معادلات  $I_i(t_i)$  قادر خواهیم بود تمامی فاکتورهای موثر بر تابع سود شامل درآمد حاصل از فروش و هزینه های موجودی را محاسبه کنیم. نتایج زیر از حل معادلات فوق حاصل می شود:

$$I_1(t_1) = \frac{\int_0^{t_1} [P - d(s)] e^{\alpha u^\beta} du}{e^{\alpha t_1^\beta}} \quad 0 \leq t_1 \leq T_1 \quad (9)$$

$$I_2(t_2) = \frac{I_m - d(s) \int_0^{t_2} e^{\alpha u^\beta} du}{e^{\alpha t_2^\beta}} \quad 0 \leq t_2 \leq T_2 \quad (10)$$

$$I_3(t_3) = \frac{d(s)}{\gamma} \text{Ln} \left( \frac{1 + \gamma(T_3 - t_3)}{1 + \gamma T_3} \right) \quad 0 \leq t_3 \leq T_3 \quad (11)$$

$$I_4(t_4) = [P - d(s)] t_4 - I_b \quad 0 \leq t_4 \leq T_4 \quad (12)$$

حال به کمک معادله (۱۰) می توانیم حداکثر سطح موجودی را محاسبه کنیم:

$$R \equiv \frac{S}{2} (2d(s)T_2 - d(s)rT_2^2 - 2Pr T_2 T_4 + 2d(s)T_1 - d(s)rT_1^2 + 2PT_4 - Pr T_4^2 - 2d(s)rT_1 T_2 - 2Pr T_1 T_4 - 2Pr T_3 T_4) \quad (17)$$

### ۲-۳-۲- ارزش فعلی هزینه‌های آماده سازی

در ابتدای سیکل اول، یک آماده سازی با هزینه  $C_1$  صورت می‌گیرد و آماده‌سازی بعدی در زمان  $t = T_1 + T_2 + T_3$  با همان هزینه  $C_1$  رخ می‌دهد. از اینجا به بعد سایر زمانهای آماده‌سازی عبارت‌اند از:

$$t = T_1 + T_2 + T_3 + i \times T, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$X$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = c_1 e^{-r(T_1 + T_2 + T_3)} \quad (18)$$

همانند قسمت قبل با فرض کوچک بودن  $s$  مقدار تقریبی  $x$  برابر خواهد بود با:

$$X \equiv C_1 [1 - r(T_1 + T_2 + T_3)] \quad (19)$$

لذا ارزش فعلی کل هزینه‌های آماده‌سازی برابر است با:

$$C_s = C_1 + \sum_{i=0}^{N-1} X e^{-r(iT)} \quad (20)$$

### ۲-۳-۳- ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری محصولات

در پریودهای  $T_1$  و  $T_2$  که سطح موجودی مثبت است، متحمل هزینه‌های نگهداری می‌شویم که پارامترهای مختلفی از جمله هزینه بیمه، سرمایه درگیر، هزینه‌های انبارداری و غیره را در بر می‌گیرد. ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری برابر است با:

$$C_H = C_2 \left\{ \int_0^{T_1} I_1(t_1) e^{-rt_1} dt_1 + \int_0^{T_2} I_2(t_2) e^{-r(T_1 + t_2)} dt_2 \right\} \\ = C_2 \int_0^{T_1} \left( \frac{\int_0^{t_1} [P - d(s)] e^{\alpha u^\beta} du}{e^{\alpha t_1^\beta}} \right) e^{-rt_1} dt_1 \\ + C_2 \int_0^{T_2} \left( \frac{\int_0^{t_2} d(s) e^{\alpha u^\beta} du - \int_0^{T_1} d(s) e^{\alpha u^\beta} du}{e^{\alpha t_2^\beta}} \right) e^{-r(T_1 + t_2)} dt_2 \quad (21)$$

با فرض کوچک بودن مقادیر  $\alpha$  و  $s$  با صرف نظر کردن از جملات با توانهای ۲ و بزرگتر و همچنین جملاتی که شامل عبارتی بر

$$I_m = d(s) \int_0^{T_2} e^{\alpha u^\beta} du = d(s) \int_0^{T_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n u^{n\beta}}{n!} du \\ = d(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n T_2^{n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \quad (13)$$

با فرض اینکه  $\alpha$  مقدار کوچکی باشد، می‌توان از جملات با توان ۲ و بالاتر شامل  $\alpha$  در معادله فوق صرف نظر کرد. لذا خواهیم داشت:

$$I_m = d(s) \left( T_2 + \frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \quad (14)$$

به همین صورت با استفاده از معادله (۱۱) حداکثر مقدار کمبود برابر خواهد بود با:

$$I_3(t_3) = -I_b = \frac{d(s)}{\gamma} \text{Ln} \left( \frac{1}{1 + \gamma T_3} \right) \\ I_b = \frac{d(s)}{\gamma} \text{Ln} (1 + \gamma T_3) \quad (15)$$

حال به محاسبه تک تک عوامل تشکیل دهنده تابع سود نهایی که همان تابع هدف مسئله است، می‌پردازیم:

### ۲-۳-۱- ارزش فعلی درآمد حاصل از فروش

تولید انجام شده در پریود  $T_1$  به دلیل تقاضا و خرابی در پریود  $T_1$  و  $T_2$  مصرف می‌شود. در پریود  $T_4$  نیز تمام محصولات تولیدی برای برآورده سازی تقاضای رسیده و تقاضای پس افت، مصرف می‌شود. با فرض اینکه درآمدهای حاصل از فروش به صورت آنی قابل حصول باشد، ارزش فعلی درآمد حاصل از فروش برابر است با:

$$R = S \left\{ \int_0^{T_1} d(s) e^{-rt_1} dt_1 + \int_0^{T_2} d(s) e^{-r(T_1 + t_2)} dt_2 + \int_0^{T_4} P e^{-r(T_1 + T_2 + T_3 + t_4)} dt_4 \right\} \\ = \frac{S}{r} \left\{ d(s) - e^{-r(T_1 + T_2)} d(s) - P e^{-r(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)} + P e^{-r(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)} \right\} \quad (16)$$

با فرض اینکه  $r$  مقدار کوچکی باشد، می‌توانیم جواب تقریبی زیر را با صرف نظر کردن از جملاتی که درجه  $r$  در آنها ۲ و بالاتر است، به دست آوریم:

حسب حاصل ضرب  $\alpha$  و  $r$  هستند، عبارت زیر حاصل خواهد شد:

$$C_H = C_2 \left[ P - d(s) \right] \left[ \frac{T_1^2}{2} - \frac{rT_1^3}{3} - \frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)} \right] \quad (22)$$

$$+ C_2 d(s) \left[ \frac{T_2^2(1-rT_1)}{2} - \frac{rT_2^3}{6} + \frac{\alpha\beta T_2^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} \right]$$

### ۲-۳-۴- ارزش فعلی هزینه‌های کمبود

در پریود زمانی  $T_3$  و  $T_4$  سیستم با کمبود مواجه می‌شود. در پریود  $T_3$  هزینه‌های کمبود شامل هزینه‌های ناشی از تقاضای پس‌افت و فروش از دست‌رفته است ولی در پریود  $T_4$  فقط شامل هزینه تقاضای پس‌افت است. نحوه محاسبه این هزینه‌ها به صورت مشروح در زیر ارائه شده است:

### ۲-۳-۴-۱- هزینه تقاضای پس‌افت

$$C_{Sh_1} = C_3 \left\{ \int_0^{T_3} -I_3(t_3) e^{-r(T_1+T_2+t_3)} dt_3 \right. \\ \left. + \int_0^{T_4} -I_4(t_4) e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)} dt_4 \right\}$$

$$= C_3 \left\{ \int_0^{T_3} -\frac{d(s)}{\gamma} \ln \left( \frac{1+\gamma(T_3-t_3)}{1+\gamma T_3} \right) e^{-r(T_1+T_2+t_3)} dt_3 \right. \\ \left. + \int_0^{T_4} -\frac{d(s)}{\gamma} (P-d(s)) (T_4-t_4) e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)} dt_4 \right\} \quad (23)$$

با حل معادلات فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$C_{sh_1} = \frac{-C_3 d(s)}{r\gamma} e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \left( -\ln \left( \frac{1}{1+\gamma T_3} \right) \right. \\ \left. + e^{\frac{-r}{\gamma}} (rT_3 \ln(1+\gamma T_3)) + \frac{r^2}{4\gamma^2} (-\gamma^2 T_3^2 - 2\gamma T_3) \right. \\ \left. + \frac{r^3}{18\gamma^3} (1 - (1+\gamma T_3)^3) \right) + \dots \\ + C_3 (P-d(s)) \left( \frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)}}{r^2} + \frac{T_4}{r} e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \right) \quad (24)$$

### ۲-۳-۴-۲- هزینه فروش از دست‌رفته

$$C_{sh_2} = C_4 \int_0^{T_3} \frac{\gamma(T_3-t_3)d(s)}{1+\gamma(T_3-t_3)} e^{-r(T_1+T_2+t_3)} dt_3$$

$$= C_4 d(s) e^{-r(T_1+T_2+T_3+\frac{1}{\gamma})} \times$$

$$\left[ -\frac{1}{\gamma} - \frac{T_3 r}{\gamma} - \frac{T_3^2 r^2}{2} + \frac{r^2}{12\gamma^3} + \frac{r^3}{72\gamma^4} + \frac{r^4}{480\gamma^5} + \dots \right] \quad (25)$$

$$+ \ln(1+\gamma T_3) \times \left( T_3 - \frac{1+\gamma T_3}{\gamma} \right)$$

$$+ \left( \frac{1+\gamma T_3}{\gamma} \right) (T_3 r + 1) + (1+\gamma T_3)^2 \frac{r^2}{4\gamma^2}$$

$$+ \left( \frac{r}{18\gamma} - \frac{1}{12\gamma} \right) (1+\gamma T_3)^3 \left( \frac{r}{\gamma} \right)^2 + \dots ]$$

### ۲-۳-۵- ارزش فعلی هزینه ارقام تولیدی

ارقام تولیدی در پریودهای  $T_1$  و  $T_4$ ، صرف تقاضای رسیده در پریود  $T_1$  و  $T_2$  و تقاضای پس‌افت و رسیده در پریود  $T_3$  و  $T_4$  می‌شود. از این رو هزینه ارقام شامل ارقام فروش‌رفته و فاسد شده است. بدین ترتیب هزینه ارقام در طی یک سیکل برابر خواهد بود با:

$$C_p = CPT_1 + CPT_4 e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \quad (26)$$

همانند قسمتهای قبل به ازای مقادیر کوچک  $r$  خواهیم داشت:

$$C_p = CPT_1 + CPT_4 [1-r(T_1+T_2+T_3)] \quad (27)$$

### ۳- محاسبه ارزش فعلی سود خالص

افق برنامه‌ریزی مدنظر از  $N$  سیکل تولیدی تشکیل شده است. با توجه به اینکه در ابتدای سیکل اول، موجودی صفر است، یک آماده‌سازی با هزینه  $C_1$  صورت می‌گیرد که هزینه آن را باید از درآمدهای خالص کم کرد. نهایتاً افق برنامه‌ریزی شامل  $N+1$  آماده‌سازی است که به ازای هر کدام از آنها یک دسته تولیدی خواهیم داشت. اندازه دسته تولیدی اول  $PT_1$  و اندازه دسته تولیدی دوم تا  $N$  برابر  $P(T_4+T_1)$  خواهد بود. اندازه دسته تولیدی آخر نیز  $PT_4$  است. حال با در اختیار داشتن مولفه‌هایی که محاسبه کردیم تابع سود نهایی  $(NP_T)$  را به دست آوریم. توضیح اینکه مقادیر فوق را باید به ازای  $N$

$$I_b = [P-d(s)]T_4 = \frac{d(s)}{\gamma} \ln(1 + \gamma T_3) \quad (33)$$

برای حل همزمان معادلات (32) و (33) به منظور حذف متغیرهای  $T_3$  و  $T_4$  از معادلات، با توجه به پیچیدگی معادله (33) از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. جوابهای حاصل در برنامه‌ای که به منظور حل تابع هدف نهایی تدوین شده است، به کاررفته که با توجه به پیچیدگی معادلات از آوردن آنها در این قسمت خودداری می‌کنیم. مقدار متغیر  $T$  نیز از معادله  $T=H/N$  قابل جایگزینی در تابع هدف اصلی است. بدین ترتیب تابع هدف، تابعی از 3 متغیر  $S$ ,  $N$  و  $T_2$  به صورت زیر خواهد بود:

Maximize  $NP_T(S, T_2, N)$

s.t.

$$C < S < g/h$$

$$0 \leq T_2 < T$$

#### 4- بررسی و حل مدل

تابع هدف مسئله به صورت حداکثر سازی تابع 3 متغیره  $NP_T$  است. از آنجایی که پیدا کردن جوابهای بهینه این مسئله به روش تحلیلی و روشهای مرسوم ریاضیاتی، با توجه به پیچیدگی بسیار بالای تابع هدف عملاً ناممکن است، در این مقاله برای رسیدن به حل بهینه این مدل از یک روش ابتکاری به شرحی که در ادامه می‌آید استفاده می‌کنیم. این روش ابتکاری از سه مرحله تشکیل شده است:

1- انتخاب مقدار اختیاری برای  $N$

2- محاسبه مشتقات جزئی  $NP_T$  نسبت به تنها متغیرهای اصلی مسئله یعنی  $T_2$  و  $S$  و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول

حاصل از برابر قرار دادن این مشتقات با صفر

$$\frac{\partial}{\partial T_2} NP_T(S, T_2, N) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} NP_T(S, T_2, N) = 0 \quad (35)$$

3- تکرار قدم 2 برای  $N$ های مختلف و محاسبه مقدار بهینه تابع هدف برای هر یک از جوابهایی که از حل دستگاه بالا به دست می‌آید. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب بهینه که از مقایسه تمامی این مقادیر با هم قابل حصول

پریود وبا در نظر گرفتن ارزش زمانی پول، در تابع هدف وارد کرد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$NP_T = \left( R - X - C_H - C_P - C_{sh1} - C_{sh2} \right) \sum_{i=0}^N e^{i r T} - C_1 \quad (28)$$

$$= \left( R - X - C_H - C_P - C_{sh1} - C_{sh2} \right) \left( \frac{1 - e^{-rNT}}{1 - e^{-rT}} \right) - C_1$$

تابع فوق از متغیرهای  $T_1, T_2, T_3, T_4, N, S$  تشکیل شده است و به وضوح از پیچیدگی بالایی نیز برخوردار است. بی‌شک حل تحلیلی چنین معادله‌ای بر اساس شش متغیر فوق ناممکن است. لذا باید به دنبال آن باشیم که به نحوی تعداد متغیرها را با کمک برخی روابط کمکی کاهش دهیم. در این راستا از روابط حدی که در حل معادلات دیفرانسیل از آنها استفاده کردیم، بهره می‌بریم. با کمک معادلات (9) و (10) و دانستن این مطلب که:

$$I_1(T_1) = I_2(T_2) = I_m$$

داریم:

$$\frac{\int_0^{T_1} [P-d(s)] e^{\alpha u} du}{e^{\alpha T_1^\beta}} = \frac{\int_0^{T_2} d(s) e^{\alpha u} du}{e^{\alpha T_2^\beta}} \quad (29)$$

جواب تقریبی معادله (29) که از حذف جملات درجه 2 و بالاتر بر حسب آلفا به دست می‌آید، برابر خواهد بود با:

$$(P-d(s)) \left( T_1 - \frac{\alpha T_1^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \cong d(s) \left( T_2 + \frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \quad (30)$$

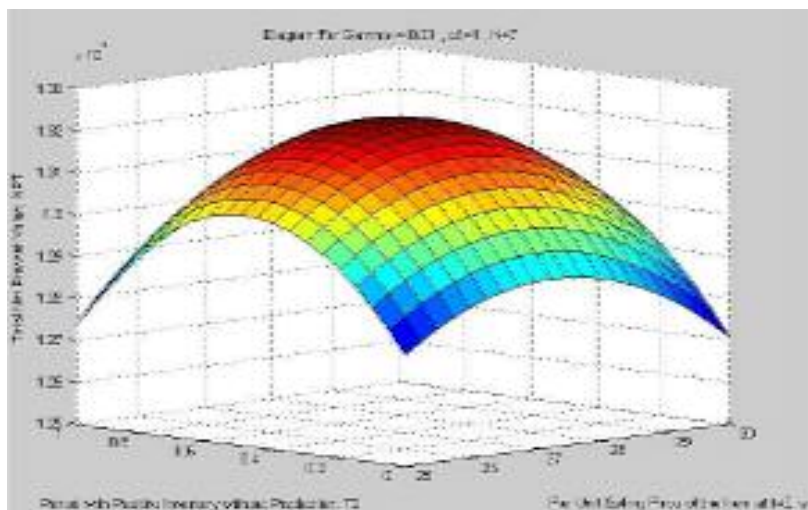
حل معادله (30) به صورت تحلیلی بسیار مشکل است. لذا برای سهولت و امکانپذیری حل مسئله، از جمله  $\frac{\alpha T_1^{\beta+1}}{\beta+1}$  در طرف چپ معادله (30) بالا صرف نظر می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$T_1 \cong \frac{d(s)}{P-d(s)} \left( T_2 + \frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \quad (31)$$

بدین ترتیب متغیر  $T_1$  از معادلات حذف می‌شود. به روش مشابه قادر خواهیم بود متغیرهای  $T_4$  و  $T_4$  را نیز به صورت توابعی از  $T_2$  به دست آوریم. برای این منظور از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$T_3 + T_4 = T - T_1 - T_2 \quad (32)$$





شکل ۲- منحنی تغییرات تابع هدف بر حسب متغیرهای  $T_2$  و  $S$

موجود در مسئله قادر خواهیم بود فضاهای مختلف تولیدی را بررسی کنیم. به عنوان مثال در صورتی که در سیستم مد نظر فروش از دست رفته وجود نداشته باشد، می توان با انتخاب  $\gamma = 0$  و  $C_4=0$  به هدف خود رسید. نکته قابل توجه اینکه در این مسئله با توجه به معادلات مربوط به هزینه های تقاضای پس افت و فروش از دست رفته و اینکه پارامتر  $\gamma$  در مخرج برخی کسرها ظاهر شده است، نمی توان مستقیماً  $\gamma$  را برابر صفر قرار داد و باید تغییرات تابع هدف را در حالت حدی مورد بررسی قرار داد.

### ۵- نتایج محاسباتی

تمامی پارامترها مطابق مثالی که در [۱۶] ارائه شده است، انتخاب شده اند به غیر از  $\gamma$  و  $C_4$  که در آن مدل وجود ندارند. مقادیر هر یک از پارامترها در زیر ارائه شده است.

$C_1=80/\text{set up}$  ,  $C_2=0.6/\text{unit/year}$  ,  $C_3=1.4/\text{unit/year}$  ,  
 $C_4=1/\text{unit}$  ,  $C=5/\text{unit}$  ,  $\alpha = 0.05$  ,  $\beta = 1.5$

$r = 0.08$  ,  $g=200$  ,  $h=4$  ,  $P=400/\text{year}$  ,  $H=10$  (year) ,  
 $\gamma = 0.01$

شکل (۲) تغییرات تابع هدف را به ازای  $N=7$  نشان می دهد. محدب بودن تابع هدف کاملاً مشهود است. در جدول (۱) نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف به ازای مقادیر مختلف  $N$  ارائه شده است.

همان طور که مشاهده می شود، در این سیستم موجودی

است، برسیم. شایان ذکر است شرایط لازم برای اعتبار جواب حاصل از این روش، محدب بودن تابع هدف است، لذا جواب بهینه باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s \partial T_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right) < 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2} < 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s^2} < 0 \quad (\text{ج})$$

شرایط فوق به نوعی تضمینی برای وجود یک نقطه ماکزیمم برای تابع سود هستند. البته در این مدل برای حصول اطمینان از برقراری روابط (الف)، (ب) و (ج) بعد از اینکه مقدار بهینه تابع هدف در هر مرحله بر اساس متد فوق الذکر مشخص شد، به صورت عددی به بررسی صحت و سقم شرایط فوق بسنده می کنیم، چرا که اثبات تحلیلی چنین امری عملاً ناممکن است.

در این مقاله، برای حل مسئله فوق از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. از جمله قابلیت های این نرم افزار رسم منحنی های توابع مختلف با پیچیدگی های بالاست که از این قابلیت در حل این مسئله به بهترین نحو استفاده شده است. با ترسیم منحنی تغییرات تابع  $NP_T$  بر حسب متغیرهای  $T_2$  و  $S$  به راحتی می توان از محدب بودن تابع هدف و در نتیجه برقراری شرایط (الف)، (ب) و (ج) برای جواب بهینه و قابل اتکا بودن آن اطمینان حاصل کرد. با انتخاب مقادیر مختلف برای پارامترهای

جدول ۱- نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف برای مثال ارائه شده

ارزش فعلی سود	T	T <sub>4</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>1</sub>	S	تعداد سیکل تولیدی (N)
۱۲۹۶۰/۰۰	۱/۶۷	۰/۱۰	۰/۳۴	۰/۹۵	۰/۲۸	۲۷/۷۵	۶
۱۳۲۲۲/۰۰	۱/۴۳	۰/۱۶	۰/۵۶	۰/۵۵	۰/۱۶	۲۷/۵۰	۷
۱۳۵۵۲/۰۰	۱/۲۵	۰/۲۲	۰/۷۷	۰/۲۰	۰/۰۶	۲۷/۲۵	۸
۱۳۹۳۵/۰۰	۱/۱۱	۰/۲۶	۰/۸۵	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۷۵	۹
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
۱۵۳۳۸/۰۰	۰/۴۸	۰/۱۱	۰/۳۶	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۱
۱۵۳۳۹/۰۰	۰/۴۵	۰/۱۱	۰/۳۵	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۲(بهینه)
۱۵۳۳۳/۰۰	۰/۴۳	۰/۱۰	۰/۳۳	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۳
۱۵۳۲۱/۰۰	۰/۴۲	۰/۱۰	۰/۳۲	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۴

ترتیب قیمت محصول نیز جزو پارامترهایی که باید مقدار بهینه آنها تعیین شود، قرار می‌گیرد. ارزش زمانی پول در مدل وارد شده و مرکب شدن پول به صورت پیوسته در نظر گرفته شده است. تابع هدف به صورت حداکثر کردن ارزش فعلی سود در یک افق زمانی محدود است. مثالی نیز برای تبیین مدل و نحوه عملکرد مدل ارائه شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که تولید زمانی شروع می‌شود که به حداکثر سطح کمبود مجاز برحسب موجودی در دست رسیده و تولید تا زمانی که به سطح موجودی صفر می‌رسد ادامه می‌یابد. در این صورت سود حاصله از این سیستم موجودی حداکثر می‌شود. به عنوان پیشنهاد برای ادامه مطالعات در این زمینه می‌توان به مواردی از جمله در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی و یا فازی در مدل اشاره کرد.

زمانی سود حاصله حداکثر می‌شود که هیچ گاه موجودی در دست مثبت نشود و عملاً سیستمی خواهیم داشت که در هر سیکل کامل، در بازه زمانی به طول  $T_3$  تولید متوقف و به محض رسیدن به حداکثر سطح کمبود مجاز، تولید شروع و تا زمانی که سطح موجودی به صفر می‌رسد، تولید ادامه خواهد داشت.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه سیستم موجودی برای اقلام فاسد شدنی که نرخ خرابی از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، پرداخته شده است. هر دو نوع کمبود یعنی فروش از دست رفته و تقاضای پس افت در مدل وارد شده است. مقدار تقاضا به صورت تابعی خطی از قیمت محصول در نظر گرفته شده است و بدین

## واژه نامه

1. backorders
2. lost Sales
3. discounted cash flow

## مراجع

1. Ghare, P.M., and Schrader, G.F., "A Model for Exponentially Decaying Inventory," *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 14, pp. 238-43, 1963.
2. Eilon, S., and Mallaya, R.V., "Issuing and Pricing Policy of Semi-Perishables," *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Operational Research*,

- New York: Wiley-Interscience, 1996.
3. Cohen, M.A., "Joint Pricing and Ordering Policy for Exponentially Decaying Inventory With Known Demand, *Naval Research Logistics Quarterly*," Vol. 24, pp. 257-68, 1997.
  4. Kang, S., and Kim, I. "A Study on the Price and Production Level of the Deteriorating Inventory System," *International Journal of Production Research*, Vol. 21, pp. 899-908, 1983.
  5. Aggarwal, S.P., and Jaggi, C.K., "Ordering Policy for Decaying Inventory", *International Journal of Systems Science*, Vol. 20, pp. 151-5, 1989.
  6. Wee, H.M., "A replenishment Policy for Items with a Price-Dependent Demand and Varying Rate of Deterioration," *Production Planning and Control*, Vol. 8, pp. 494-9, 1997.
  7. Buzacott, J.A., "Economic Order Quantities with Inflation," *Operational Research Quarterly*," Vol. 26, 553-8, 1975.
  8. Misra, R.B., "A Note on Optimal Inventory Management Under Inflation," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 26, pp. 161-5, 1979.
  9. Chnadra, M.J., and Bahner, M.L., "The effects of inflation and the time value of money on some inventory systems," *International Journal of Production Research*, Vol. 23, pp. 723-30, 1985.
  10. Sarker, B.R., and Pan, H., "Effects of Inflation and Time Value of Money on Order Quantity and Allowable Shortage," *International Journal of Production Economics*, Vol. 34, pp. 65-72, 1994.
  11. Chung, K.J., "Optimal Ordering Time Interval Taking Account of Time Value," *Production Planning and Control*, Vol. 7, pp. 264-7, 1996.
  12. Datta, T.K., and Pal, A.K., "Effects of Inflation And Time Value Of Money on An Inventory Model with Linear Time-Dependent Demand Rate and Shortages," *European Journal of Operational Research*, Vol. 52, pp. 326-33, 1991.
  13. Hariga, M.A., "Effects Of Inflation And Time Value of Money on an Inventory Model with Time Dependent Demand Rate and Shortages," *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, pp. 512-20, 1995.
  14. Teng, J.-T., and Chang, C.-T., "Economic Production Quantity Models For Deteriorating Items with Price- and Stock-Dependent Demand," *Computers and Operations Research*, Vol. 32, pp. 297-308, 2005.
  15. Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R., Rabbani, M., and Sadoughian, M.R., "An economic production lot size model with deteriorating items, stock-dependent demand, inflation, and partial backlogging," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 181, pp. 380-389, 2006.
  16. Wee, H.M., and Law, S.H., "Economic Production Lot Size for Deteriorating Items Taking Account of Time Value of Money," *Computer and Operations Research*, Vol. 26, pp. 545-58, 1999.