روش اصلاح شده المان محدود شبکه ثابت در تحلیل مسائل دو بعدی ارتجاعی خطی

فرهنگ دانشمند*، مهرداد فرید* و محمدجواد کاظم‌زاده پارسی**
بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۲/۲۵- دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۶/۵)

چکیده – در این مقاله شکل جدیدی از روش المان محدود شبکه ثابت ارائه وکاربرد آن در حل مسائل دو بعدی ارتجاعی خطی بررسی شده است. در این روش از یک شبکه غیر منطبق بر مرز برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی استفاده می‌شود و عدم تطبیق شبکه بر مرز باعث تقاطع مرز با المانها شده که به نوبه خود نیازمند تکنیکهای ویژه‌ای برای اعمال شرایط مرزی است. در این مقاله، روش جدیدی برای محاسبه ماتریس سختی المانهای مرزی که قسمتی از آنها در داخل و قسمتی دیگر در خارج از ناحیه جسم قرار دارد پیشنهاد و شرایط مرزی نیز با دقت بیشتری نسبت به روش المان محدود شبکه ثابت اعمال شده است. به منظور مقایسه تواناییهای روش پیشنهادی تعدادی مثال عددی با آن حل و نتایج حاصل با مقادیر تحلیلی و نتایج حاصل از روش المانهای محدود استاندارد و روش المان محدود شبکه ثابت مقایسه شده و دقت و همگرایی روش مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی : روش المان محدود شبکه ثابت، روش المان محدود، شبکه‌های غیر منطبق بر مرز، تحلیل ارتجاعی خطی

Modified Fixed Grid Finite Element Method in the Analysis of 2D Linear Elastic Problems

F. Daneshmand, M. Farid, and M.J. Kazemzadeh-Parsi
Mechanical Engineering Department, School of Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract: ***In this paper, a modification on the fixed grid finite element method is presented and used in the solution of 2D linear elastic problems. This method uses non-boundary-fitted meshes for the numerical solution of partial differential equations. Special techniques are required to apply boundary conditions on the intersection of domain boundaries and non-boundary-fitted elements. Hence, a new method is also presented for the computation of stiffness matrix of boundary intersecting elements and boundary conditions of higher accuracy are applied. In order to examine the applicability of the proposed method, some***

*. – استادیار ** – دانشجوی دکتری

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

numerical examples are solved and the results are compared with those obtaioned from both fixed grid finite element and standard finite element methods.

Keywords: *Fixed grid finite element method, Non-boundary-fitted meshes, Linear elastic analysis..*

۱- مقدمه

از میان روشهای گوناگونی که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی ارائه شده است، روش المانهای محدود به دلیل قابلیتهای فراوان آن بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. روش المانهای محدود علاوه بر تواناییهای چشمگیر، دارای نقاط ضعفی نیز هست که کاربرد آن را در بعضی مسائل با مشکلاتی روبرو می‌کند. یکی از محدودیتهای روش المانهای محدود وابستگی آن به شبکه المانی است. این وابستگی هنگامی موجب محدودیت است که مسئله در دست حل دارای هندسه‌ای پیچیده و یا متغیر باشد. در این‌گونه مسائل شبکه محاسباتی بایستی در هر مرحله تکرار تغییرات مرز را دنبال کرده تا تطابق آن بر مرز همواره حفظ شود. هرچند که امروزه روشهای متعددی برای تولید خودکار شبکه برروی نواحی دلخواه موجود است، اما تولید شبکه همچنان یکی از مراحل پیچیده و وقتگیر در هر حل عددی به شمار می‌رود.

در طی سالهای اخیر روشهای محاسباتی دیگری ارائه شده است که اصطلاحاً به روشهای بی المان مشهورند. در این روشها ناحیه مسئله تنها با تعدادی گره مجزا پوشیده شده و سعی می‌شود که توابع تقریب به نحوی برحسب موقعیت گره‌ها در دستگاه مختصات عمومی بیان شوند. بنابراین در این روشها برای ساخت توابع شکل به تشکیل المان نیازی نیست و توابع شکل بدون استفاده از مفهوم المان ساخته شده و از این روست که به روشهای بدون المان یا بدون شبکه معروف شده اند. از نمونه‌این روشها می‌توان به روش گالرکین بدون المان اشاره کرد [۱]. در این روش گسسته سازی معادله دیفرانسیل به کمک شکل تضعیف شده معادله حاکمه و روش گالرکین انجام شده و از تقریب کمترین مربعات متحرک برای ساختن توابع شکل استفاده شده است. روشهای بی المان تاکنون برای حل مسائل بسیاری به کار برده شده و قابلیتهای آن مورد بررسی قرار گرفته است. علی‌رغم برخی ویژگیهای قابل توجه، این روشها دارای نقاط ضعفی نیز هستند. از جمله این نقاط ضعف می‌توان به پیچیدگی اعمال شرایط مرزی و حجم محاسباتی زیاد آنها اشاره کرد که استفاده عملی از این گونه روشها را در حل مسائل مهندسی محدود کرده است.

استراتژی دیگری که می‌تواند درجهت اجتناب از پیچیدگیهای تولید شبکه در پیش گرفته شود طراحی روشهایی است که به جای حذف کامل شبکه، تولید شبکه را برای مسئله مورد نظر ساده کنند. روشن است که تولید شبکه هنگامی پیچیده و زمان بر است که مسئله دارای مرز هندسی پیچیده‌ای باشد. به عبارت دیگر پیچیدگی تولید شبکه از آن جهت است که شبکه‌های مرسوم مورد استفاده در روش المانهای محدود بایستی بر مرز مسئله منطبق باشند و این انطباق بر مرز است که در مسائل دارای هندسه متغیر نیز بروز کرده و نیاز به تغییر شبکه در هر گام را ایجاد می‌کند. بنابراین رهیافت دیگری که بر این اساس پیشنهاد شده است استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز است و دسته‌ای از روشها براساس این استراتژی گسترش یافته‌اند. یکی از این روشها روش المان محدود تعمیم یافته است[۲]. در این روش با معرفی درجات آزادی اضافی در برخی گره‌ها امکان درج توابع دیگری علاوه بر چند جمله‌ایها به مجموعه توابع پایه فراهم می‌شود. یکی از توابعی که می‌توان به این صورت به توابع پایه اضافه کرد تابع پله است که امکان درج ناپیوستگی در میدان تابع مجهول را فراهم می‌کند. بنابراین دراین صورت می‌توان مرز جسم را توسط یک تابع پله مدل کرده و از این طریق از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز در تحلیل المان محدود استفاده کرد. از جمله مسائلی که تاکنون توسط این روش مورد

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

بررسی قرار گرفته است می‌توان بـه مـسائل گـسترش تـرک [۳]، مسائل شامل جریانهای چند فازی [۴] اشاره کرد.

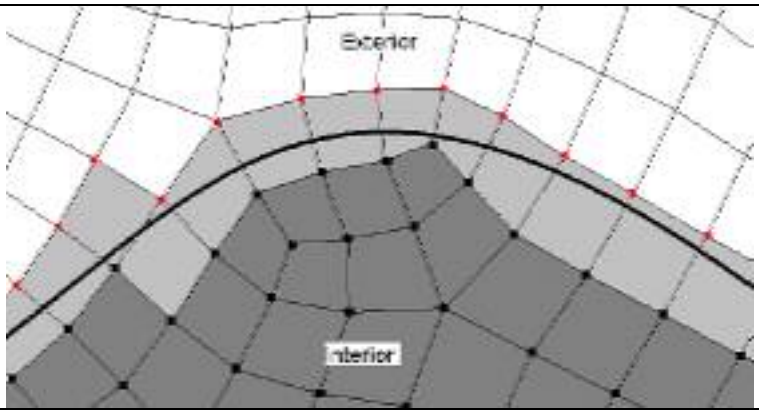
روش دیگری که از شبکه‌های غیر منطبق بـر مـرز بـرای حل مسئله استفاده می‌کند روش المان محـدود شـبکه ثابـت است [۵]. در این روش المانها با توجه به موقعیتشان نـسبت به مرز مسئله به سه دسته المانهای درونی، المانهای بیرونی و المانهای مرزی که با مرز مسئله تقاطع دارند تقسیم شده و از تکنیک همگن سازی [۶] برای فرمولبنـدی المانهـای مـرزی استفاده می‌شود. در این روش برخلاف روش المـان محـدود تعمـیم یافتـه درجـات آزادی اضـافی تعریـف نـشده و از مشکلاتی که به دلیل اضافه کردن این درجات آزادی ممکـن است به وجود آید اجتنـاب مـی‌شـود. روش المـان محـدود شبکه ثابت نیز تاکنون در حل مسائل متنـوعی اسـتفاده شـده است که به عنوان نمونه می‌توان به تحلیل مـسائل ارتجـاعی خطی [۷-۹] و یا مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها [۱۰-۱۳] اشـاره کرد.

در مقاله حاضر روش اصلاح شده المان محدود شبکه ثابت، به عنوان روش جدیدی در حل مسائل دو بعدی ارتجاعی خطی پیشنهاد شده اسـت. ایـن روش بـر مبنـای اعمـال تغییراتـی در فرمولبندی المانهای مرزی و نحوه اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی در روش المان محدود شبکه ثابـت اسـتوار شـده اسـت. براین اساس ابتدا در بخش دوم این مقاله چگـونگی اسـتفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز توضیح داده می‌شود. سپس اصـول روش پیشنهادی در بخش سوم به تفصیل ارائه خواهـد شـد. در این بخش اصلاحات پیشنهادی مورد نظر به همراه مقایسه روش حاضر با روش المان محدود شبکه ثابت، نحوه ارضـای شـرایط مرزی مسئله و چگونگی انجـام انتگـرال‌گیـری عـددی تـشریح خواهد شد. پس از آن در بخش چهار با حل چند مثـال عـددی مختلف در مسائل ارتجاعی خطی دو بعدی و مقایـسه نتـایج بـا جوابهای تحلیلی و جوابهای روش المان محدود شـبکه ثابـت و روش المان محدود استاندارد، دقت و همگرایـی روش بررسـی شده است.

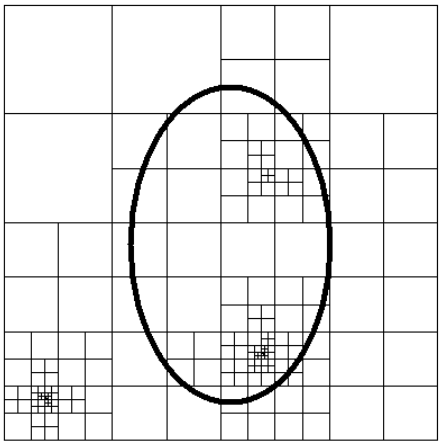
۲ – شبکه‌های غیر منطبق بر مرز

همان طور که قـبلا گفتـه شـد در روش المانهـای محـدود، ناحیه مسئله به شـبکه‌ای شـامل تعـدادی زیـر ناحیـه یـا المـان گسسته شده و از این شبکه المانی برای سـاخت توابـع تقریـب استفاده می‌شود. اولین شرطی که این شبکه المانی بایستی داشته باشد تطابق شبکه بر مرز ناحیه است. در ایـن شـبکه‌هـا وجـوه المانها بر مرز منطبق بوده و گره‌های مرزی دقیقاً روی مرز قـرار گرفته و تکیه‌گاهها و نیروهای خارجی بـر روی گـره‌هـا اعمـال می‌شوند. برخلاف شبکه‌های منطبـق بـر مـرز دسـته دیگـری از شـبکه‌هـای محاسـباتی را مـی‌تـوان برشـمرد کـه دارای چنـین ویژگیهایی نباشند. در این تحقیق به شبکه‌هـایی کـه در آن مـرز ناحیه بر وجوه المانها منطبق نیست اصـطلاحاً شـبکه‌هـای غیـر منطبق بر مرز گفته می‌شود. به عبـارت دیگـر در ایـن شـبکه‌هـا گره‌ها و المانهای شبکه مستقل از مرز قرار گرفته و مـرز ناحیـه می‌تواند وجوه المانها را قطع کـرده و از درون آنهـا عبـور کنـد. نمونه‌ای از چنین شبکه‌ای در شکل (۱) نشان داده شـده اسـت. در این شکل مرز جسم با خط پررنگ نشان داده شـده و همـان طور که دیده می‌شود از درون المانها عبور کـرده اسـت. چنـین قابلیتی این امکان را فراهم می‌کند کـه مدلـسازی مـسائل دارای هندسه پیچیده به راحتی ممکن شود. همین‌طور با استفاده از این قابلیت سازگاری شبکه در مسائل دارای هندسه متغیـر بـر مـرز دیگر نیاز نبوده وبا یک شبکه ثابـت امکـان حـل مـسائل دارای هندسه متغیر فراهم می‌شود. کـاربرد دیگـر چنـین قـابلیتی حـل تطبیقی مسائل است. در یک حل تطبیقی ابتدا مسئله توسط یک شبکه اولیه حل شده و پس از انجام تحلیل خطا، شبکه در نقاط دارای خطای بیشتر متمرکز شده و فرایند ادامه می‌یابـد. اسـتفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز در حـل ایـن گونـه مـسائل نیـز می‌تواند موجـب سـادگی حـل شـود. زیـرا در ایـن صـورت از الگوریتمهای ساده‌ای ماننـد درخـت چهارتـایی مـی‌تـوان بـرای ریزکردن و یا درشت کـردن شـبکه در نقـاط مـورد نظـر بـدون درنظر گرفتن سازگاری شبکه بر مرز اسـتفاده کـرد. نمونـه‌ای از یک چنین شبکه‌ای در شکل (۲) نشان داده شده است.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۱- یک شبکه غیر منطبق بر مرز، در این شکل خط پررنگ بیانگر قسمتی از مرز است



شکل۲- نمونه‌ای از یک شبکه غیر منطبق بر مرز ساخته شده توسط درخت چهارتایی

عبور مرز در شبکه‌های غیر منطبق بر مرز از درون المانها باعث می‌شود که گره‌ها و المانهای شبکه برحسب اینکه نسبت به مرز جسم دارای چه موقعیتی باشند به سه دسته مجزا تقسیم شوند. بر این اساس دسته اول از المانها که تماماً در درون ناحیه قرار دارند المانهای درونی نامگذاری می‌شوند. دسته دوم المانهای بیرونی‌اند که تماماً در بیرون از مرز قرار گرفته و دسته سوم المانهایی‌اند که قسمتی از مساحت آنها در درون و قسمتی دیگر در بیرون از ناحیه مسئله قرار گرفته است. چنین المانهایی، المانهای مرزی نامگذاری می‌شوند. به همین صورت گره‌ها نیز به سه دسته قابل تقسیم هستند. گره‌های درونی، گره‌های بیرونی و گره‌های خارجی قرار گرفته بر روی المانهای مرزی.

۳ - روش اصلاح شده المانهای محدود شبکه ثابت

همان‌طور که گفته شد در روش المانهای محدود شبکه ثابت از یک شبکه غیر منطبق بر مرز برای حل مسئله استفاده می‌شود. در این روش پس از دسته بندی المانها به سه دسته ذکر شده فرض می‌شود که ناحیه مسئله شامل تمامی المانهای درونی، مرزی و بیرونی باشد، با این فرض که المانهای بیرونی از ماده‌ای با جنس بسیار نرمتر در مقایسه با المانهای درونی تشکیل شده باشند. به عبارت دیگر اگر $E_i = E$ مدول ارتجاعی المانهای درونی باشد در این صورت $E_e = \lambda E$ که در آن $\lambda << 1$ است، مدول ارتجاعی المانهای بیرونی در نظر گرفته می‌شود. دراین صورت المانهای مرزی که قسمتی از آنها در درون و قسمت دیگری از آنها در بیرون از ناحیه قرار دارد از دو جنس متفاوت تشکیل شده‌اند. در روش المان محدود شبکه

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

ثابت از همگن سازی المانهای مرزی استفاده می‌شود. در روش همگن سازی فرض می‌شود المانهای مرزی که از دو جنس متفاوت تشکیل شده اند، همگن شده و مشخصات مکانیکی آنها توسط معیاری برحسب مشخصات مکانیکی اجزای تشکیل دهنده بیان می‌شود. برای این منظور از نسبت مساحت قسمت داخلی المان به مساحت کل آن به عنوان معیاری برای محاسبه مشخصات مکانیکی المانهای مرزی استفاده می‌شود [۶]. بنابراین اگر E_b مدول ارتجاعی المانهای مرزی باشد در این صورت خواهیم داشت

$$E_b = rE_i + (1-r)E_e \qquad (۱)$$

$$r = \frac{A_i}{A} \qquad (۲)$$

که در معادلات فوق A_i و A به ترتیب مساحت قسمت داخلی المان و مساحت کل المان مرزی می‌باشد.

در روش پیشنهادی حاضر، پس از دسته‌بندی المانها و گره‌ها، تمامی درجات آزادی گره‌های بیرونی از سیستم معادلات حذف می‌شوند و تنها درجات آزادی مربوط به گره‌های دسته اول و دوم به عنوان درجات آزادی مجهول باقی می‌مانند. در شکل (۱) که نمونه‌ای از یک شبکه غیر منطبق بر مرز نشان داده شده است گره‌های دسته اول و دوم با نقاط پررنگ نشان داده شده است. به این ترتیب در روش بیان شده در این مقاله برخلاف روش المان محدود شبکه ثابت از همگن سازی المانهای مرزی استفاده نشده و این المانها به صورت المانهای قیچی شده‌ای که تنها قسمتی از آنها در داخل ناحیه قرار گرفته است در نظر گرفته می‌شوند.

انرژی پتانسیل کلی برای یک جسم الاستیک خطی تحت نیروهای پایستار عبارت است از انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم منهای کار نیروهای وارد شده بر آن. طرح شماتیکی از یک مسئله ارتجاعی در شکل (۳) رسم شده است. مطابق این شکل، ناحیه مسئله Ω و مرز جسم Γ نامیده شده است. در این صورت اگر بردار تنش سطحی $\bar{t}$ روی قسمتی از مرز که با Γ_t نامگذاری شده وارد شود و نیروهای متمرکز F_i نیز در نقاط x_i بر این جسم وارد شود، انرژی پتانسیل کلی برای این جسم به صورت زیر قابل بیان است:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} u^T \bar{t} d\Gamma - \sum_{i=1}^{m} u^T(x_i) F_i \qquad (۳)$$

در این معادله u بیانگر بردار جابه‌جایی و b نیز بردار نیروهای حجمی است. بردارهای σ و ε به ترتیب بردارهای تنش و کرنش بوده که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \qquad (۴)$$

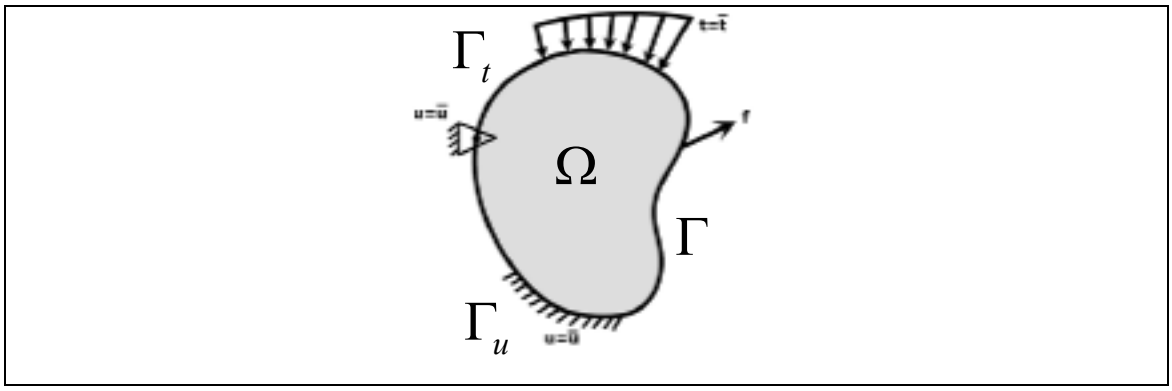
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \qquad (۵)$$

شرایط مرزی مسئله عبارت‌اند از شرایط مرزی طبیعی و شرایط مرزی اساسی. دسته اول، شرایط مرزی طبیعی‌اند که شامل تنشهای سطحی، نیروهای متمرکز و نیروهای حجمی‌اند. این دسته از شرایط به طور خودکار در تابع انرژی پتانسیل کلی ظاهر گشته و از این طریق اعمال می‌شوند. در ادامه این مقاله به اعمال چنین شرایطی بیشتر پرداخته خواهد شد. دسته دوم شرایط مرزی اساسی است. برای اعمال شرایط مرزی اساسی در مقاله حاضر از روش تابع جریمه استفاده شده است [۱۴]. برای این منظور تابع انرژی پتانسیل کلی به صورت زیر باز نویسی می‌شود

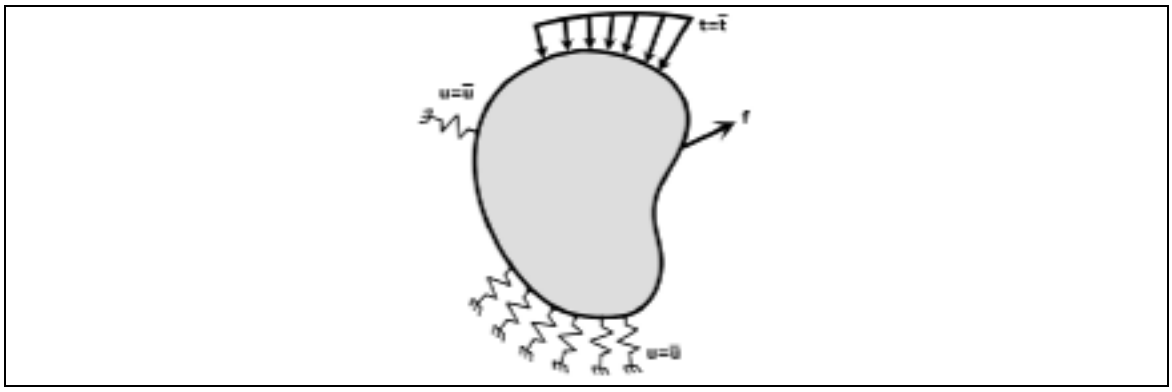
$$\Pi^{\alpha} = \Pi + \frac{1}{2}\alpha_1 \int_{\Gamma_u} (u-\bar{u})^T (u-\bar{u}) d\Gamma + \frac{1}{2}\alpha_2 \sum_{i=1}^{m} \left(u(x_i)-\bar{u}_i\right)^T \left(u(x_i)-\bar{u}_i\right) \qquad (۶)$$

در این معادله α_1 و α_2 پارامترهای جریمه نامیده می‌شود. مفهوم فیزیکی معادله فوق را علاوه بر مطالب مطرح شده در بالا به طریق دیگری نیز می‌توان توضیح داد. فرض شود که تکیه‌گاه‌های جسم کاملا صلب نبوده بلکه با داشتن سختی معینی قابلیت تغییر شکل و جابه‌جایی داشته باشند. در این صورت می‌توان تکیه گاه‌های مسئله را به صورت مجموعه‌ای از فنرها که جسم را به محیط متصل کرده اند نمایش داد. به عبارت دیگر تکیه‌گاههای جسم با تکیه گاه‌های انعطاف پذیر تعویض خواهد شد. دراین صورت مسئله شکل جدیدی خواهد یافت. در شکل(۴)، شکل جدید مسئله رسم شده است. در این شکل نواحی گسترده‌ای که شرایط مرزی اساسی

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۳ - شکل کلی نیروهای وارد شده بر یک جسم و تکیه گاه‌های آن



شکل۴ - جایگزینی تکیه‌گاههای صلب با تکیه‌گاههای انعطاف پذیر

بر روی آن اعمال شده است روی یک بستر الاستیک گذاشته شده و تکیه‌گاههای نقطه‌ای تیز توسط یک فنر مجزا به محیط متصل شده‌اند. در این صورت با افزایش سختی تکیه‌گاهها، تغییر شکل آنها نیز کمتر شده و جواب این مسئله به جواب مسئله اصلی نزدیکتر می‌شود. بنابراین در این روش با بزرگ انتخاب کردن سختی تکیه‌گاهها می‌توان به جواب قابل قبولی برای مسئله مورد نظر دست یافت. در این صورت α_1 و α_2 که قبلا پارامترهای جریمه نامیده شند را می‌توان به عنوان سختی تکیه‌گاهها نیز تفسیر کرد.

بردار جابه‌جایی $u=[u \quad v]^T$ برای هر نقطه در ناحیه مسئله به صورت زیر توسط روش ریلی- ریتز برحسب توابع شکل المانهای درونی و یا المانهای مرزی نوشته می‌شود.

$$u = NU \tag{۷}$$

$$U=[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_n \quad v_n]^T \tag{۸}$$

$$N=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix} \tag{۹}$$

در این معادلات n تعداد کل گره‌های درونی و یا گره‌های بیرونی واقع شده برروی المانهای مرزی است. به عبارت دیگر n تعداد کل گره‌های فعال است. N ماتریس توابع شکل و U بردار جابه‌جاییهای کلی است. با معرفی اپراتور مشتقی B می‌توان بردار کرنشها را به صورت زیر برحسب بردار جابه‌جایی نوشت.

$$\varepsilon = Bu \tag{۱۰}$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \tag{۱۱}$$

که اگر معادله (۷) در معادله (۱۰) جاگذاری شود بردار کرنش به صورت زیر برحسب بردار U بیان خواهد شد.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

$$\varepsilon = (BN)U \qquad (۱۲)$$

معادله تنش-کرنش در یک جسم الاستیک خطی بدون وجود تنش یا کرنشهای اولیه از قانون هوک پیروی می‌کند که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma = D\varepsilon \qquad (۱۳)$$

در این معادله ماتریس D ماتریس ارتجاعی است که برای مواد ایزوتروپیک ماتریسی متقارن است. در این صورت اگر معادلات (۷)، (۱۲) و (۱۳) در معادله (۶) جاگذاری شوند انرژی پتانسیل کلی به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{aligned}\Pi^{\alpha} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} U^T (BN)^T D(BN) U d\Omega \\ &- \int_{\Omega} U^T N^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} U^T N^T \bar{t} d\Gamma - \sum_{i=1}^{m} U^T N_i^T F_i \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_1 \int_{\Gamma_u} (NU - \bar{u})^T (NU - \bar{u}) d\Gamma \\ &+ \frac{1}{2}\alpha_2 \sum_{i=1}^{m} (N_i U - \bar{u}_i)^T (N_i U - \bar{u}_i)\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آن N_i ماتریس توابع شکل برای نقطه x_i خواهد بود. مطابق اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل کلی برای دستیابی به موقعیت تعادل یک سیستم مکانیکی، با مشتق‌گیری از معادله فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Pi^{\alpha}}{\partial U} = 0 \\ &\Rightarrow \left[\int_{\Omega} (BN)^T D(BN) d\Omega + \alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma + \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} N_i^T N_i\right] U \\ &= \left[\int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma t} N^T \bar{t} d\Gamma + \sum_{i=1}^{m} N_i^T F_i + \alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T \bar{u} d\Gamma + \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} N_i^T \bar{u}\right]\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

معادله فوق بیانگر یک دستگاه معادلات خطی است که با حل آن بردار جابه‌جایی کلی U حاصل می‌شود. معادله فوق را می‌توان به صورت خلاصه زیر نوشت.

$$(K + K_{\alpha})U = (R + R_{\alpha}) \qquad (۱۶)$$

$$K = \int_{\Omega} (BN)^T D(BN) d\Omega \qquad (۱۷)$$

$$K_{\alpha} = \alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma + \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} N_i^T N_i \qquad (۱۸)$$

$$R = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma t} N^T \bar{t} d\Gamma + \sum_{i=1}^{m} N_i^T F_i \qquad (۱۹)$$

$$R_{\alpha} = \alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T \bar{u} d\Gamma + \alpha_2 \sum_{i=1}^{m} N_i^T \bar{u} \qquad (۲۰)$$

۴- انتگرال‌گیری عددی

برای محاسبه ماتریس ضرایب و یا بردار بار بایستی از روابط بیان شده، روی ناحیه و یا روی مرزهای مسئله انتگرال‌گیری شود. این انتگرال‌گیری به صورت عددی انجام خواهد شد. ناحیه مسئله توسط تعدادی المان درونی و قسمت درونی المانهای مرزی پوشیده شده است. بنابراین انتگرال‌گیری روی ناحیه مسئله را می‌توان به انتگرال‌گیری روی سطح المانهای درونی و قسمت درونی سطح المانهای مرزی تفکیک کرد. در این صورت ماتریس K در معادله (۱۷) به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}K &= \int_{\Omega} (BN)^T D(BN) d\Omega \\ &= \sum_{e \in S_i} \int_{\Omega_e} (BN)^T D(BN) d\Omega_e \\ &+ \sum_{e \in S_b} \int_{\omega_e} (BN)^T D(BN) d\omega_e\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

به عبارت دیگر در معادله فوق انتگرال روی کل ناحیه مسئله یا Ω به صورت مجموع انتگرال روی زیر ناحیه‌ها شکسته شده است. این زیر ناحیه‌ها به دو دسته قابل تقسیم‌اند، یکی مجموعه المانهای درونی است که در معادله فوق با مجموعه S_i نمایش داده شده است و دیگری مجموعه المانهای مرزی، که با مجموعه S_b نشان داده شده است. در المانهای داخلی انتگرال‌گیری روی کل ناحیه المان انجام می‌شود که با Ω_e نشان داده شده است اما در المانهای مرزی، انتگرال‌گیری تنها روی بخش داخلی این المانها انجام می‌شود که با ω_e نشان داده شده است.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

انتگرال‌گیری روی المانهای درونی توسط روش انتگرال‌گیری گوس قابل محاسبه است. برخلاف این، انتگرال‌گیری روی المانهای مرزی نیاز به اقدامات دیگری دارد. در این المانها به دلیل قیچی شدن المان توسط مرز، شکل هندسی ناحیه داخلی آن یا ω_e، شکل مشخصی نیست و نمی‌توان مستقیما از روش فوق برای انتگرال‌گیری روی این زیر ناحیه‌ها استفاده کرد. برای حل این مسئله به دو راه می‌توان اشاره کرد. روش اول این است که عبارت زیر انتگرال در یک تابع پله ضرب شده و همانند قبل از روش گوس برای انتگرال‌گیری روی کل المان استفاده شود. تابع پله بایستی به نحوی انتخاب شود که مقدار آن به ازای نقاط داخل دامنه برابر یک و برای نقاط خارجی برابر صفر باشد. به عبارت دیگر داریم

$$\int_{\omega_e} (BN)^T D(BN)\, d\omega_e = \int_{\Omega_e} (BN)^T D(BN)\, s(x,y)\, d\Omega_e \qquad (۲۲)$$

که در آن تابع پله به صورت زیر بیان می‌شود

$$s(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \\ 0 & \text{if } (x,y) \end{cases} \qquad (۲۳)$$

اگر نقطه (x,y) در درون ناحیه باشد

اگر نقطه (x,y) در خارج ناحیه باشد

در معادلات فوق $s(x,y)$ تابع پله و ω_e بخش درونی المان مورد نظر است. در این روش ناپیوستگی ای که توسط تابع پله به مسئله وارد می‌شود باعث می‌شود که انتگرال گیری عددی گوس شامل خطای بیشتری شود که باید با استفاده از تعداد بیشتری نقطه انتگرال‌گیری این خطا را کاهش داد.

روش دیگر این است که المانهای مرزی به چند زیرناحیه کوچکتر تقسیم شده به طوری که وجوه این زیرناحیه‌ها بر مرز جسم انطباق داشته باشد. دراین صورت انتگرال گیری تنها روی زیر ناحیه‌های درونی انجام خواهد شد. به عبارت دیگر داریم

$$\int_{\omega_e} (BN)^T D(BN)\, d\omega_e = \sum_{i=1}^{1} \int_{\omega_e^i} (BN)^T D(BN)\, d\omega_e^i \qquad (۲۴)$$

که در آن ω_e^i زیر ناحیه‌های انتگرال‌گیری است که در داخل جسم واقع شده‌اند. شکل زیر ناحیه‌ها بایستی طوری باشد که بتوان از انتگرال‌گیری گوس روی آنها استفاده کرد بنابراین اشکال مثلث و یا چهارگوش برای چنین منظوری مناسب‌اند، شکل (۵). استفاده از این روش باعث می‌شود که انتگرال گیری با دقت بالایی انجام شود اما از طرف دیگر نیازمند ساخت زیر ناحیه‌های انتگرال‌گیری روی المانهای مرزی است. در شکل(۵) نمونه‌ای از زیر ناحیه‌های ساخته شده برای المانهای مرزی نشان داده شده است.

از روش بیان شده در بالا می‌توان برای انتگرال‌گیری از توابع دیگری برروی ناحیه مسئله نیز استفاده کرد. به عبارت دیگر محاسبه نیروهای حجمی که در معادله (۱۹) ظاهر شده است نیز به همین صورت ممکن است.

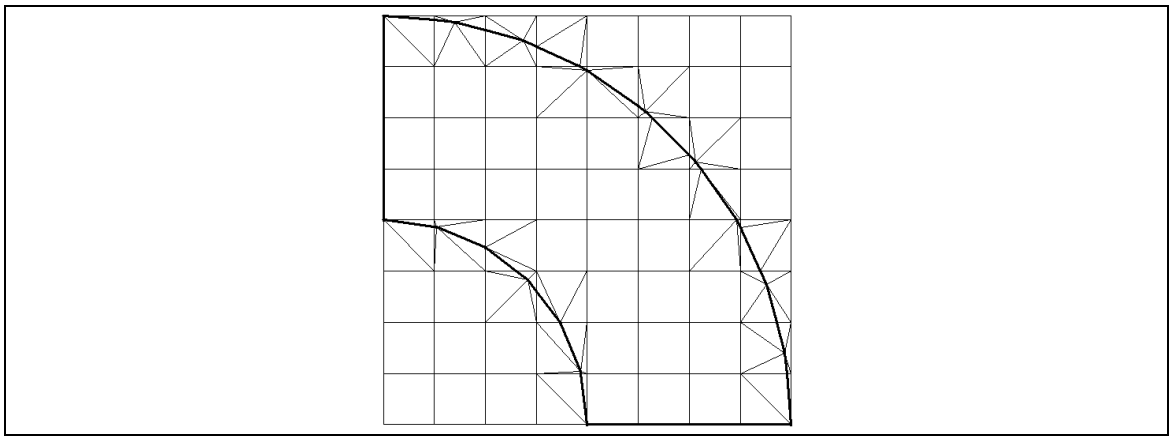
علاوه بر انتگرال روی ناحیه مسئله، انتگرالهای دیگری نیز بایستی روی مرزهای جسم محاسبه شوند. از آنجا که در روش بیان شده در این مقاله مرزهای جسم از درون شبکه المانی عبور کرده، محاسبه این انتگرالها نیاز به اقدامات خاصی دارد. در این بخش نحوه محاسبه انتگرالهای روی مرز برای اعمال شرایط مرزی طبیعی و اساسی که در معادلات (۱۸) تا (۲۰) ظاهر شده است پرداخته می‌شود. برای این منظور فرض می‌شود که عبور مرز از درون المانها باعث می‌شود که مرز جسم به تعدادی ناحیه کوچکتر تقسیم شود که هر تکه از آن درون یکی از المانها واقع شده است. بنابراین انتگرال روی مرز به حاصل جمع انتگرال روی این پاره خطها قابل تفکیک است. در شکل (۶) نمونه‌ای از یک المان مرزی که قسمتی از مرز درون آن واقع شده است دیده می‌شود. مختصات محلی نقاط تقاطع مرز با وجوه المان به صورت $(\xi_1 \quad \eta_1)$ و $(\xi_2 \quad \eta_2)$ بیان شده است. دراین صورت با معرفی محور مختصات محلی مرزی γ در امتداد قطعه مرزی واقع شده درون هر المان، می‌توان مختصات محلی نقاط مرزی را به صورت زیر نوشت

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\xi_1 + \xi_2 + \gamma(\xi_2 - \xi_1)\right] \qquad (۲۵)$$

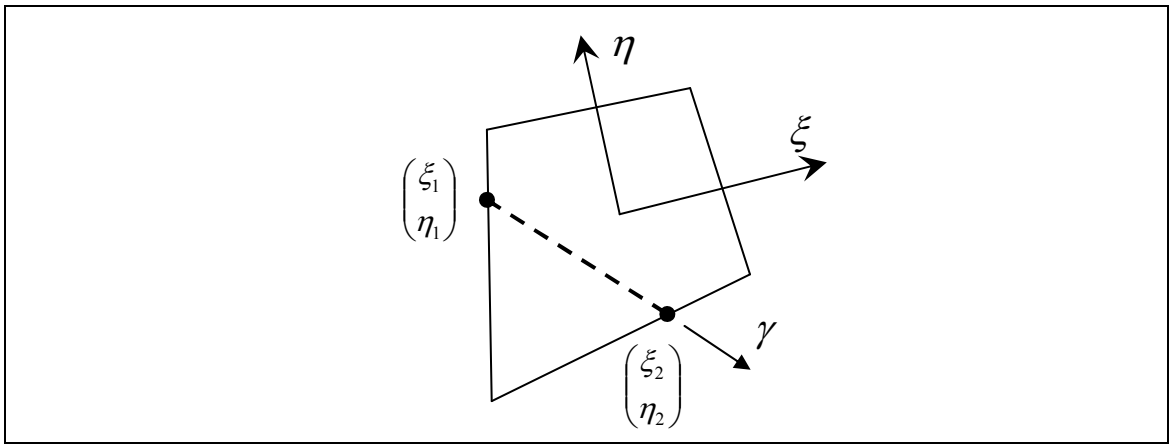
$$\eta = \frac{1}{2}\left[\eta_1 + \eta_2 + \gamma(\eta_2 - \eta_1)\right] \qquad (۲۶)$$

در این صورت انتگرال مرزی بیان شده در معادله (۱۸)

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۵ - نمونه‌ای از زیرناحیه‌های انتگرال‌گیری ساخته شده روی المانهای مرزی



شکل۶ - قسمتی از مرز جسم که در یک المان مرزی قرار گرفته است به همراه دستگاههای مختصات محلی

به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Gamma_u^i} N^T N d\Gamma = \sum_{i=1}^{l} \int_{-1}^{1} N^T N J_i d\gamma \qquad (۲۷)$$

در معادله فوق Γ_u^i بیانگر قسمتی از مرز اساسی است که درون یک المان قرار گرفته است و J_i بیانگر نسبت طول در محور مختصات محلی مرزی قطعه i ام و دستگاه مختصات عمومی است که به صورت زیر قابل محاسبه است. توجه شود محاسباتی که در ادامه خواهد آمد همگی مربوط به قطعه مرزی i ام است و برای سادگی از نوشتن زیرنویس i در تمام این معادلات خود داری شده است.

$$J_i = \frac{d\Gamma}{d\gamma} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\gamma} \qquad (۲۸)$$

در معادله فوق dx و dy به صورت زیر برحسب توابع شکل و مختصات نقاط گرهی المان قابل محاسبه است

$$dx = \sum \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k d\xi + \sum \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k d\eta \qquad (۲۹)$$

$$dy = \sum \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k d\xi + \sum \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k d\eta \qquad (۳۰)$$

اگر معادلات (۲۹) و (۳۰) در معادله (۲۸) جاگذاری شود، در این صورت با استفاده از معادلات $d\xi = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1) d\gamma$ و $d\eta = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) d\gamma$ خواهیم داشت.

$$J_i = \frac{1}{2}\left\{\left[(\xi_2 - \xi_1)\sum \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k + (\eta_2 - \eta_1)\sum \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k\right]^2 + \left[(\xi_2 - \xi_1)\sum \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k + (\eta_2 - \eta_1)\sum \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۱)$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

بنابراین با جاگذاری معادلـه فـوق در معادلـه(۲۷) و اسـتفاده از روش انتگرال گیری گوس می‌توان انتگرالهـای روی مـرز را بـه صورت زیر بیان کرد.

$$\int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma = \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{NIP} N^T N J_i w_j \qquad (۳۲)$$

که در آن NIP تعداد کل نقاط انتگرال‌گیـری بـوده و w_j نیـز پارامتر وزن مربوط به نقطه انتگرال‌گیری j ام است. بـه همـین ترتیب می‌توان دیگر انتگرالهای روی مرز را نیز حساب کرد.

۵- مثالهای عددی

به منظور بررسی ویژگیهای روش پیشنهادی، در ایـن بخـش چند مثال عددی حل شده و نتایج حاصل، با پاسخهای تحلیلـی و نتایج حاصل از روش المان محـدود اسـتاندارد [۱۵] و روش المان محدود شبکه ثابت اصلاح شده مقایسه شده است. در حل این مثالها از المان چهارگوش چهـار گرهـی، (Q4)، بـرای حـل مسئله استفاده شده است [۱۵] و در هر مسئله نیز بـرای بررسـی همگرایی روش از سه حالت درشتی المانها استفاده شده است.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، پارامترهای جریمه بـرای اعمـال شرایط مرزی اساسی باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شوند تـا شرایط مرزی با دقت مناسـبی اعمـال شـود. از طـرف دیگـر در صورتی که این ضرایب بیش از حد بزرگ انتخاب شوند باعـث می‌شود که (نسبت بزرگترین مقدار ویژه بـه کـوچکترین مقـدار ویژه) ماتریس ضرایب حاصل بسیار بزرگ شده و حـل عـددی دستگاه معادلات با خطای زیادی همراه شود. واضـح اسـت کـه برای انتخاب دقیق و بهینه پارامترهای جریمه الگوی مشخص و از پیش تعیین شده‌ای وجود ندارد و این انتخاب معمولا با سعی و خطا همراه است. البته در منابع معمولاً معیارهـایی بـرای ایـن منظور پیشنهاد می‌شود. به عنوان مثـال معیـاری کـه معمـولاً در مسائل الاستیسیته پیشنهاد مـی‌شـود ایـن اسـت کـه پارامترهـای جریمه به‌صـورت ضـریبی از مـدول یانـگ مـسئله مـورد نظـر انتخاب شوند [۱۵]. در تحقیق حاضر نیز از ایـن الگـو اسـتفاده شده است به ایـن صـورت کـه مـسائل بـرای مقـادیر متفـاوت پارامترهای جریمه حل و نتایج با جواب‌های دقیق مقایسه شـد. سپس با توجه به تجربیات به‌دست آمده، پارامترهای جریمه α_1 و α_2 مشترکاً از نظر عددی معادل ده برابر مدول یانـگ مـسئله انتخاب شد. از این الگو برای حل تمام مثـال‌هـایی کـه در ایـن مقاله ارائه شده استفاده شده است.

پس از ساخته شدن ماتریس ضرایب کلـی و بـردار نیروهـا، دستگاه معـادلات خطـی حاصـل بایـستی بـرای یـافتن مقـادیر جابه‌جاییها در نقاط گرهی سیستم حل شـود. معمـولاً مـاتریس ضرایب یک ماتریس متقـارن و بانـد شـده اسـت کـه روشـهای مناسبی برای حل آن وجود دارد. در روش ارائـه شـده در مقالـه حاضر ممکن است المانهای مرزی طوری قرار گیرند که درصـد بسیار کوچکی از مساحت آنها در داخل ناحیه قرار گیرد. در این مواقع بسته به شرایط ممکن است که ضرایب معـادلات در یـک و یا چند درجه آزادی سیستم بسیار کوچک و نزدیک بـه صـفر شود. در این صورت ممکن است خطای زیادی در حل عـددی دستگاه معادلات حاصل شود و برای حل این مشکل بایستی که دستگاه معادلات با استفاده از پاشنه کـردن[1] حـل شـود. در ایـن صورت خطاهای ناشی از گـرد کـردن بـه حـداقل مقـدار خـود خواهند رسید.

در این مقاله برای بررسی دقت و همگرایی روش پیشنهادی و مقایسه نتایج حاصل با نتایج حاصل از روشهای دیگر، از نـرم خطای نسبی در جابه‌جایی و انـرژی کرنـشی بـه عنـوان معیـار استفاده شده اسـت. نـرم خطـای نـسبی در انـرژی کرنـشی بـه صورت زیر

$$e = \left(\frac{\int_{\Omega} (\varepsilon^e - \varepsilon^n)^T D (\varepsilon^e - \varepsilon^n) d\Omega}{\int_{\Omega} \varepsilon^{eT} D \varepsilon^e d\Omega} \right)^{0.5} \qquad (۳۳)$$

و نرم خطای نسبی در مقادیر جابه‌جایی به صورت زیر محاسـبه می‌شود.

$$d = \left(\frac{\int_{\Omega} (u^e - u^n)^T (u^e - u^n) d\Omega}{\int_{\Omega} u^{eT} u^e d\Omega} \right)^{0.5} \qquad (۳۴)$$

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

در این معادلات عبارات دارای اندیس e بیانگر مقدار تحلیلی کمیت مورد نظر و عبارات دارای اندیس n بیانگر مقدار محاسبه شده برای این کمیت توسط یکی از روشهای عددی است.

مثالهای حل شده در این قسمت همگی در حالت کرنش صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته اند که در این صورت ماتریس ارتجاعی D به صورت زیر برحسب مدول ارتجاعی E و نسبت پواسون ν بیان می‌شود.

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

مثال اول، تیر یک سر درگیر با نیروی انتهایی

به عنوان اولین مثال یک تیر یک سر درگیر که یک نیروی گسترده با توزیع سهموی در انتهای آن وارد شده است مورد بررسی قرار گرفته است. دلیل انتخاب این مثال، وجود جواب تحلیلی برای آن است که امکان مقایسه نتایج روش حاضر با جوابهای دقیق را فراهم می‌کند. در شکل (۷) هندسه و بارگذاری این مسئله نشان داده شده است. در این مثال $D = 1m$ و $L = 3m$ انتخاب شده است. جواب تحلیلی این مسئله با استفاده از نظریه الاستیسیته به صورت زیر است [۱۶].

$$u = \frac{P}{6EI}\left(3x^2y - 6Lxy + \frac{2+\nu}{4}D^2y - (2+\nu)y^3\right) \quad (۳۶)$$

$$v = \frac{P}{6EI}\left(-x^3 + 3Lx^2 + \frac{4+5\nu}{4}D^2x - 3\nu xy^2 + 3L\nu y^2\right) \quad (۳۷)$$

مؤلفه‌های تنش نیز به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{I}(-xy + Ly) \quad (۳۸)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (۳۹)$$

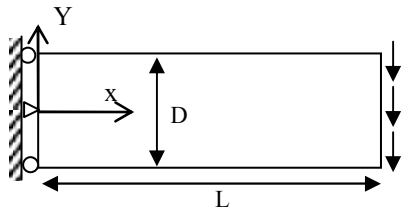
$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \quad (۴۰)$$

در این معادلات I ممان اینرسی سطح مقطع است که برای یک مقطع مستطیلی به صورت $I = D^3/12$ است. مشخصات ماده در نظر گرفته شده عبارت است از $E = 200Gpa$ و $\nu = 0.26$. شرایط مرزی نیرویی در سمت راست تیر عبارت است از توزیع سهموی شکل نیروی برشی که مطابق معادله (۴۰) از حل دقیق مسئله اعمال شده است. شرایط مرزی اساسی در سمت چپ تیر نیز دقیقاً طبق حل تحلیلی از معادلات (۳۶) و (۳۷) اعمال شده است.

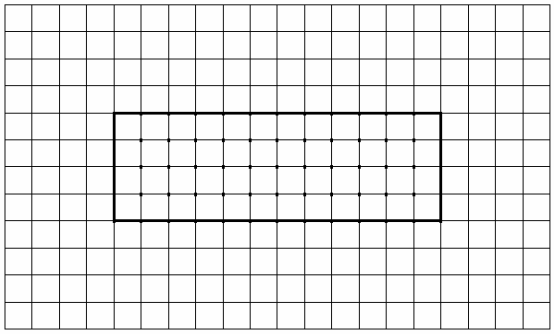
این مثال به سه روش المانهای محدود استاندارد، روش المان محدود شبکه ثابت و روش پیشنهادی در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. ناحیه هندسی این مثال یک ناحیه مستطیلی شکل است و ساخت یک شبکه منطبق بر مرز برای آن به سادگی ممکن است. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی بر روی شبکه‌های غیر منطبق بر مرز از دو دسته شبکه غیر منطبق بر مرز استفاده شده است که دسته اول از جابه‌جاکردن و دسته دوم از چرخاندن همان شبکه منطبق بر مرز بیان شده حاصل شده است. در شکل (۸) نمونه‌ای از شبکه‌های منطبق بر مرز و غیر منطبق بر مرز برای این مثال دیده می‌شود.

برای بررسی همگرایی روش، در هر یک از دسته‌های فوق از سه درشتی متفاوت برای شبکه‌ها استفاده شده است. انتگرال‌گیری عددی بر روی المانهای مرزی در این مثال، توسط ساخت سلولهای مثلثی روی ناحیه داخلی المان انجام شده است. در شکل (۹) نمودار نرم خطای نسبی در انرژی کرنشی و در شکل (۱۰) نرم خطای نسبی در جابه‌جایی برای روشهای متفاوت رسم شده است. به‌طور کلی در این مثال و در تمامی مثالهایی که در ادامه خواهد آمد، محور افقی در نمودارهای نرم خطا عبارت است از h/h_0 که h فاصله میانگین بین گره‌ها و h_0 فاصله بین گرهی در درشت‌ترین شبکه استفاده شده است. به عبارت دیگر محور افقی بیانگر درشتی شبکه است که نسبت به درشت‌ترین شبکه بدون بعد شده است. در این نمودارها و دیگر نمودارهای ارائه شده، منحنیهایی که با برچسب Present متمایز شده‌اند بیانگر مقادیری هستند که با روش پیشنهادی در این مقاله محاسبه شده‌اند و نمودارهایی که با برچسبهای FEM و FGFEM مشخص شده‌اند به ترتیب بیانگر مقادیر به دست آمده

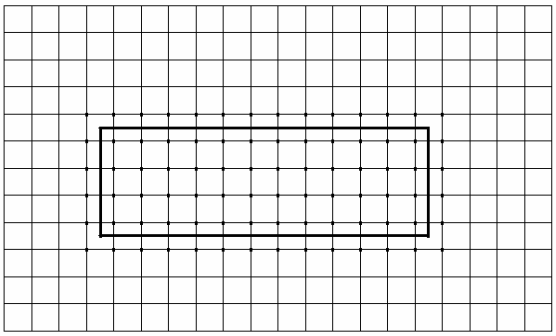
[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



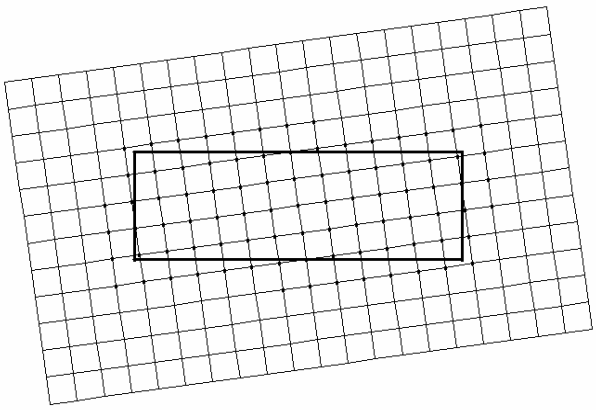
شکل۷- هندسه و بار گذاری مربوط به مثال دوم



الف- شبکه منطبق بر مرز



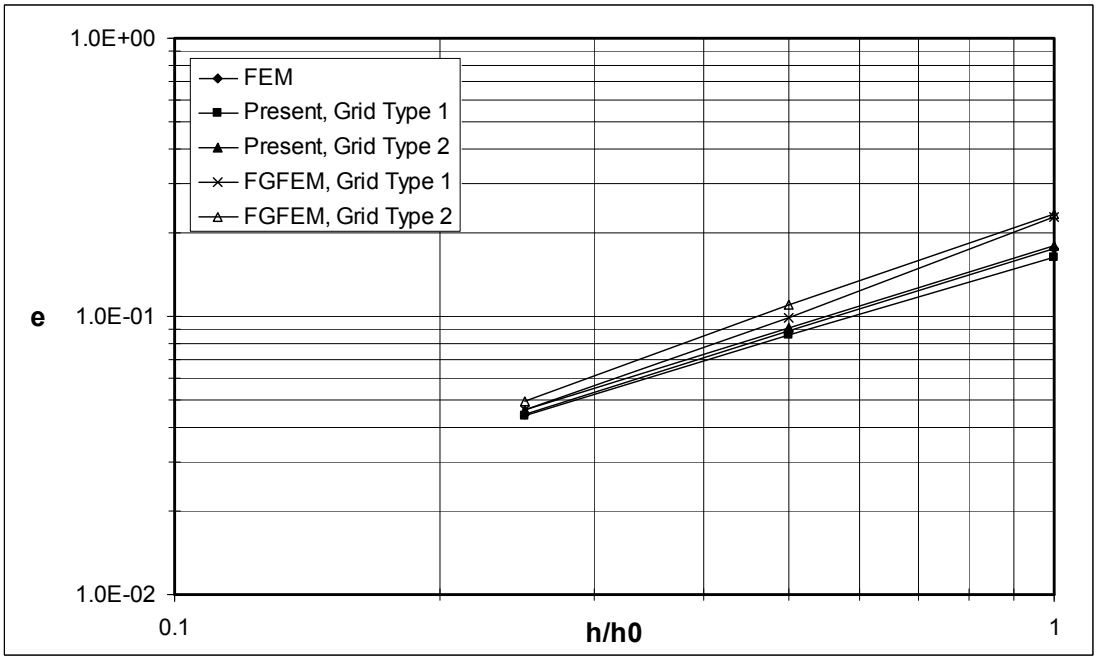
ب- شبکه غیر منطبق بر مرز نوع اول



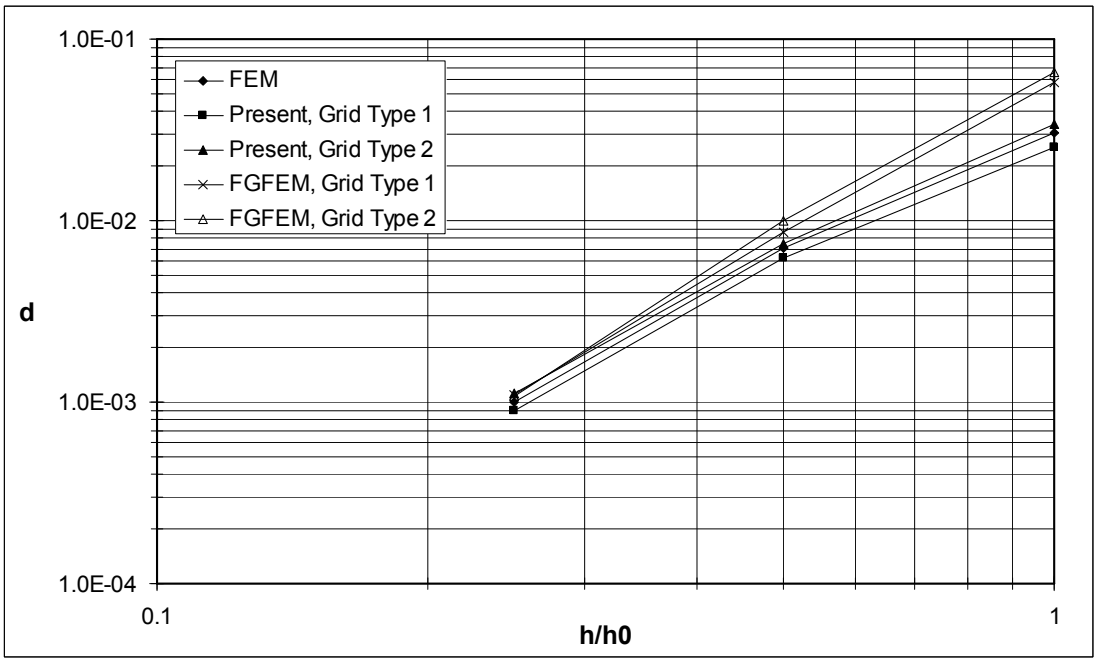
ج- شبکه غیر منطبق بر مرز نوع دوم

شکل۸ - نمونه‌ای از شبکه‌های استفاده شده برای مثال اول

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۹ – نمودار خطای نسبی در نرم انرژی کرنشی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال اول



شکل۱۰ – نمودار خطای نسبی در نرم جابجایی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال اول

از روشهای المان محدود و روش المان محدود شبکه ثابت‌اند. همان‌طور که از نمودارهای رسم شده در شکلهای (۹) و (۱۰) دیده می‌شود، نتایج حاصل از روش پیشنهادی در این مقاله از دقت بیشتری نسبت به روشهای دیگر برخوردار است.

مثال دوم، استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی

در این مثال یک استوانه جدار ضخیم با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که تحت فشار داخلی p است، مورد بررسی قرار گرفته است. جواب تحلیلی این مسئله به صورت زیر بیان

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

می‌شود [۱۶]

$$u = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}\frac{1+\nu}{E}\left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right)\cos\theta \qquad (۴۱)$$

$$v = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}\frac{1+\nu}{E}\left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right)\sin\theta \qquad (۴۲)$$

مؤلفه‌های تنش نیز به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\sigma_{xx} = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \qquad (۴۳)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \qquad (۴۴)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Pa^2 b^2}{2\left(b^2 - a^2\right)r^2}\sin 2\theta \qquad (۴۵)$$

که در این معادلات (r,θ) مختصات نقطه مورد نظر در دستگاه مختصات قطبی است. در حل این مثال به دلیل تقارنی که در مسئله وجود دارد تنها یک چهارم از دامنه مسئله مدل شده است. در شکل (۱۱) شکل هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاههای مسئله نشان داده شده است. بر خلاف مثال قبل، مرز جسم در این مسئله شامل خطوط منحنی است. در مثال قبل برای ساخت شبکه‌های غیر منطبق بر مرز از جابه‌جا کردن و یا چرخاندن یک شبکه منظم استفاده شد اما در این مثال به دلیل وجود مرزهای منحنی شکل، از یک شبکه منظم کارتزین به عنوان شبکه غیر منطبق بر مرز استفاده شده و مسئله براساس آن حل شده است. اما از طرف دیگر در این مسئله ساخت شبکه منطبق بر مرز کمی متفاوت است. از آن جهت که به منظور مقایسه بین روشهای متفاوت بایستی که از شبکه‌هایی با اندازه تقریبا یکسان استفاده شود در حل این مثال از یک شبکه بی سازمان برای حل مسئله به روش المان محدود استاندارد استفاده شده است. در این صورت می‌توان اندازه تقریبی المانها را در سراسر ناحیه یکسان نگه داشت. در شکل (۱۲) نمونه‌ای از شبکه‌های استفاده شده برای این مسئله آمده است.

این مسئله با استفاده از شبکه‌هایی که در بالا به آنها اشاره شد توسط سه روش استفاده شده در مثال قبل مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسئله نیز برای بررسی همگرایی، از سه درشتی متفاوت برای شبکه‌ها استفاده شده است. نمودارهای نرم خطای نسبی در انرژی کرنشی و جابه‌جایی به ترتیب در شکلهای (۱۳) و (۱۴) بر حسب درشتی بدون بعد شده المانها برای این مسئله رسم شده است. همان‌طور که در این شکلها دیده می‌شود در این مثال نیز نتایج حاصل از روش پیشنهادی از دقت خوبی نسبت به دیگر روشها برخوردار است.

مثال سوم، ورق با یک سوراخ مدور در مرکز آن

مسئله‌ای که در این مثال به آن پرداخته شده است عبارت است از یک ورق با ابعاد بی‌نهایت که در مرکز آن یک سوراخ دایره‌ای شکل به شعاع a قرار گرفته است به‌طوری که $x^2 + y^2 \le a^2$ قرار دارد. ورق در بی نهایت تحت کشش σ در امتداد محور x قرار گرفته است. در شکل (۱۵) شکل هندسی و شرایط مرزی این مسئله نشان داده شده است. در این صورت میدان جابه‌جایی در ناحیه این مسئله براساس نظریه الاستیسیته به صورت زیر بیان می‌شود [۱۶].

$$u = \frac{1+\bar{\nu}}{\bar{E}}\sigma \left(\frac{1}{1+\bar{\nu}}r\cos\theta + \frac{2}{1+\bar{\nu}}\frac{a^2}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{a^2}{r}\cos 3\theta - \frac{1}{2}\frac{a^4}{r^3}\cos 3\theta\right) \qquad (۴۶)$$

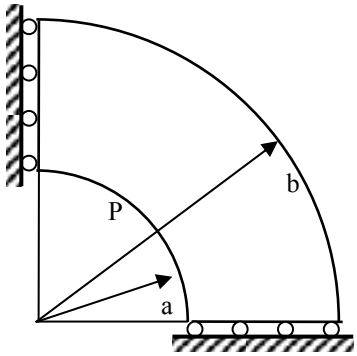
$$v = \frac{1+\bar{\nu}}{\bar{E}}\sigma \left(\frac{-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}r\sin\theta - \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}\frac{a^2}{r}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{a^2}{r}\sin 3\theta - \frac{1}{2}\frac{a^4}{r^3}\sin 3\theta\right) \qquad (۴۷)$$

در این معادلات در حالت تنش صفحه‌ای $\bar{\nu} = \nu$ و $\bar{E} = E$ است و برای حالت کرنش صفحه‌ای خواهیم داشت $\bar{\nu} = \nu/(1-\nu)$ و $\bar{E} = E/\left(1-\nu^2\right)$. میدان تنش نیز در این مسئله به صورت زیر بیان می‌شود.

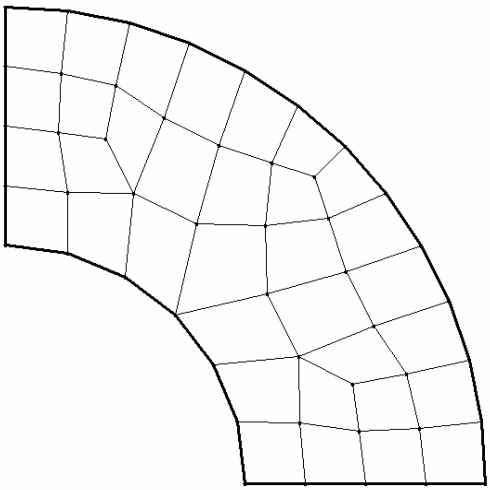
$$\sigma_{xx} = \sigma\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta\right] \qquad (۴۸)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma\left[-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta\right] \qquad (۴۹)$$

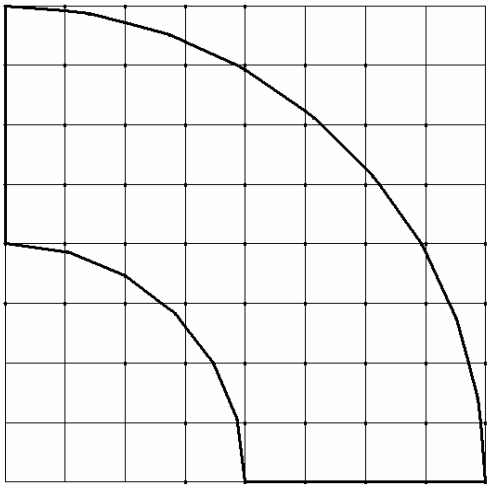
[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۱۱- هندسه و بار گذاری مربوط به مثال دوم



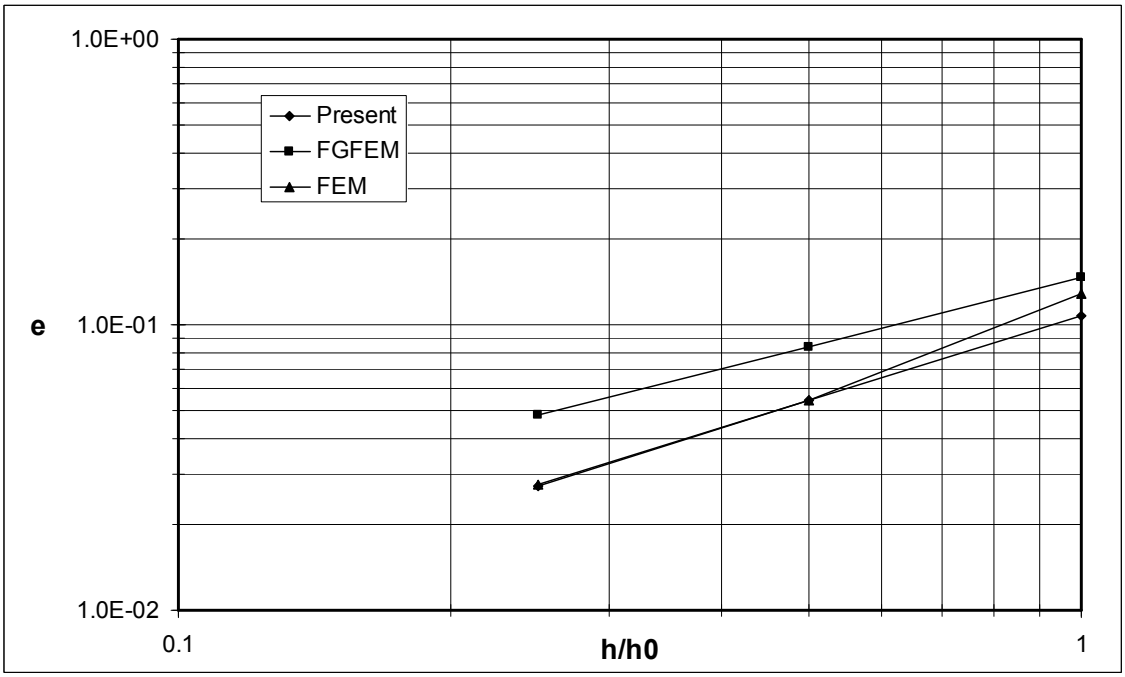
الف- شبکه بی سازمان منطبق بر مرز



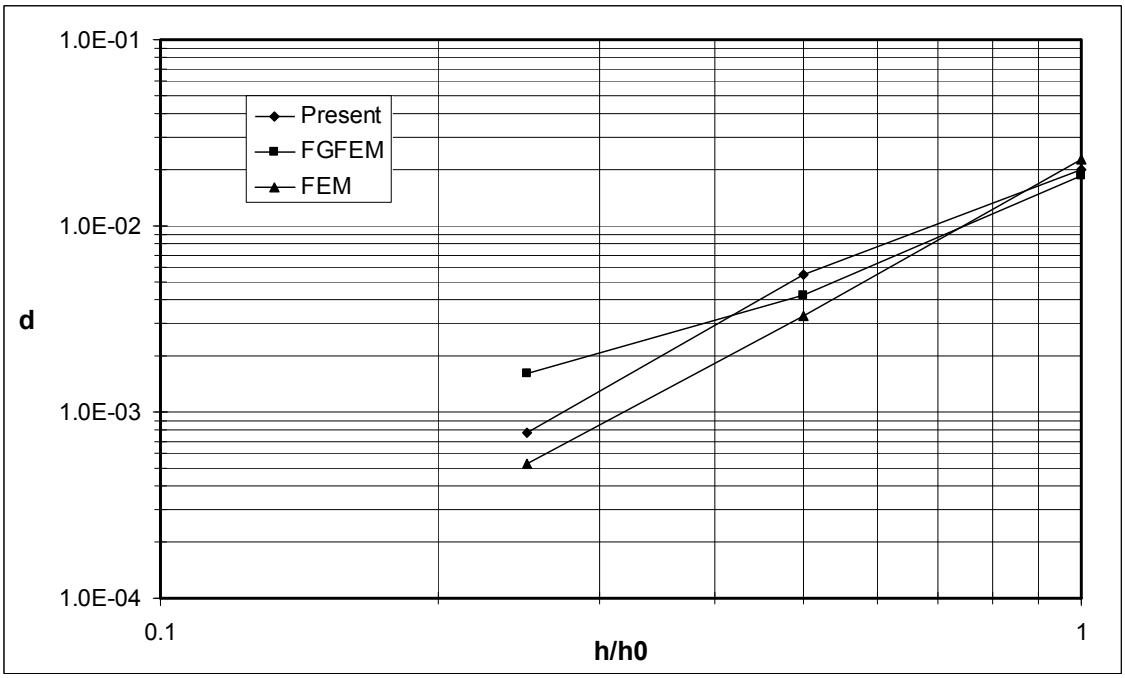
ب- شبکه غیر منطبق بر مرز

شکل۱۲ - نمونه‌ای از شبکه‌های استفاده شده در مثال دوم

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

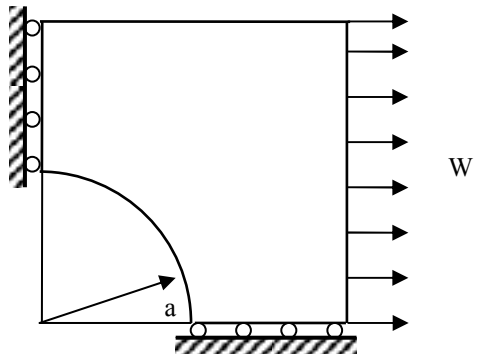


شکل۱۳ - نمودار خطای نسبی در نرم انرژی کرنشی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال دوم

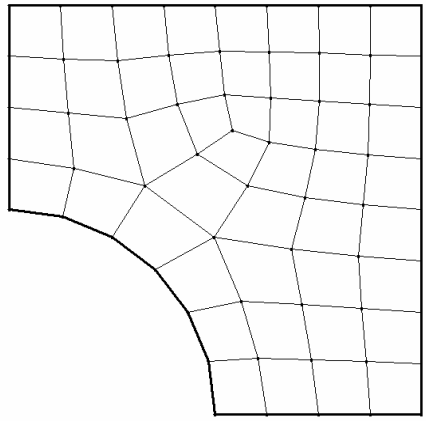


شکل۱۴ - نمودار خطای نسبی در نرم جابه‌جایی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال دوم

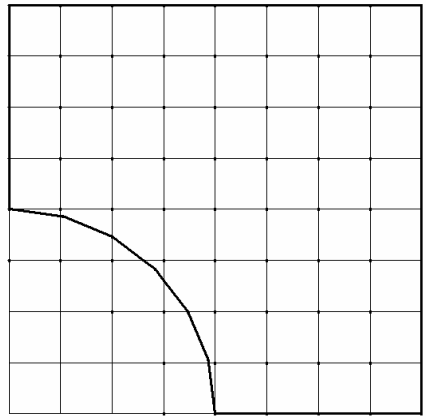
[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۱۵ - هندسه و بار گذاری مربوط به مثال پنجم



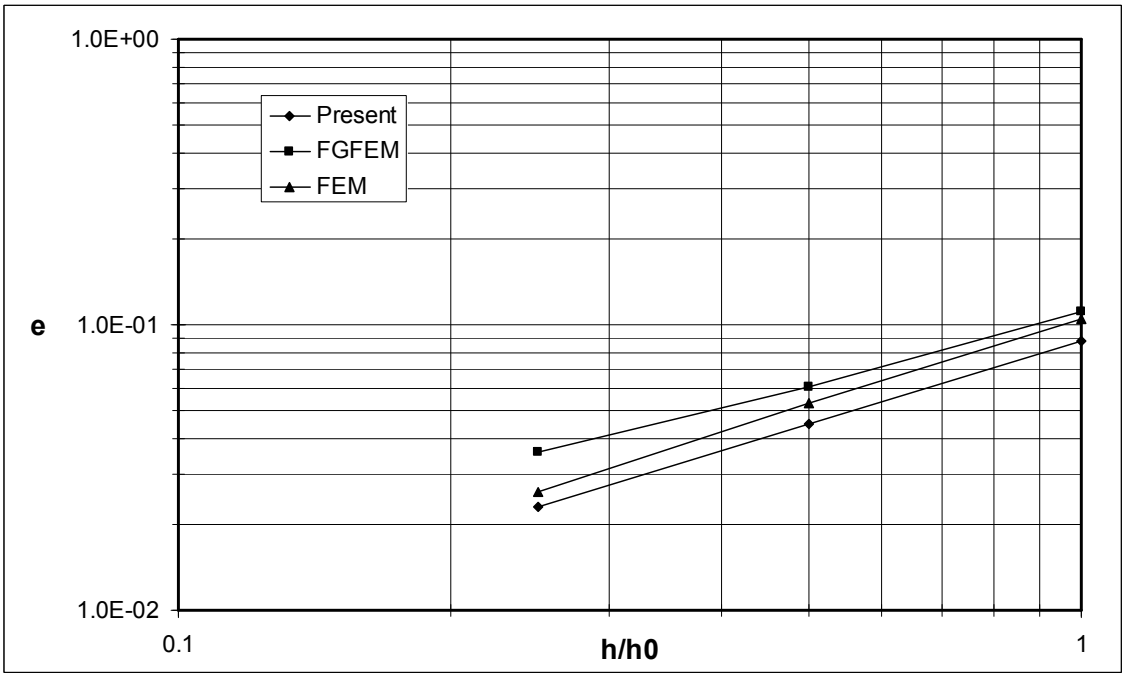
الف- شبکه بی سازمان منطبق بر مرز



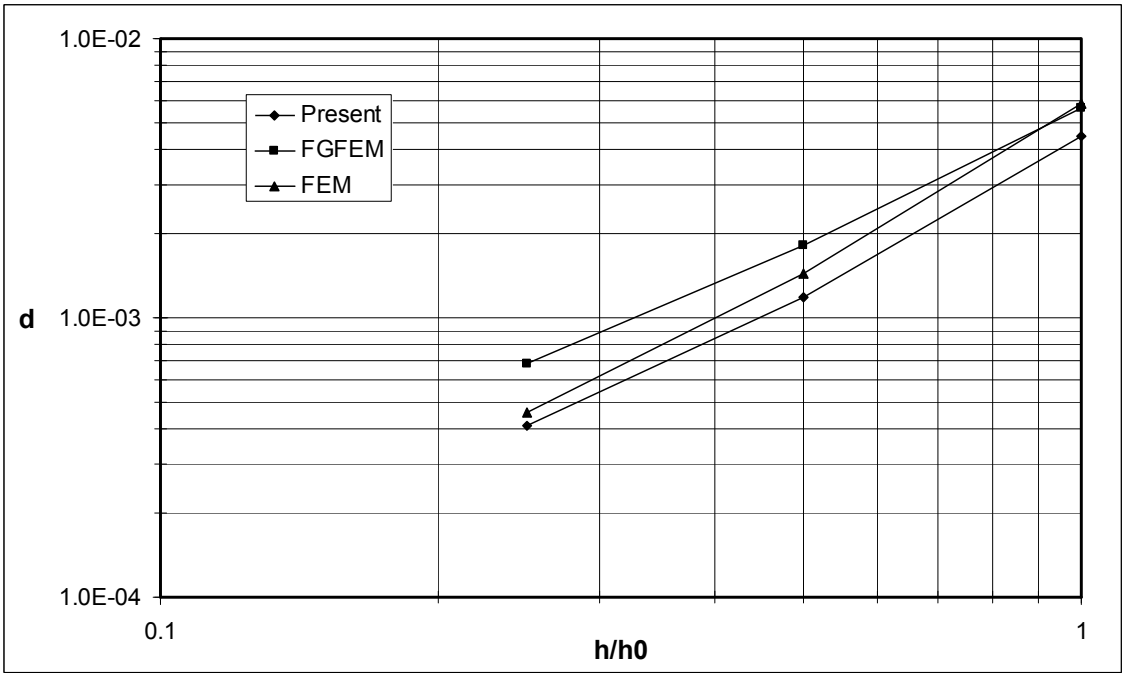
ب- شبکه غیر منطبق بر مرز

شکل۱۶- نمونه‌ای از شبکه‌های استفاده شده در مثال سوم

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]



شکل۱۷ - نمودار خطای نسبی در نرم انرژی کرنشی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال سوم



شکل۱۸ - نمودار خطای نسبی در نرم جابه‌جایی، برحسب درشتی بدون بعد شده شبکه برای مثال سوم

$$\sigma_{xy} = \sigma\left[-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta\right] \qquad (۵۰)$$

در معادلات فوق (r,θ) مختصات نقطه مورد نظر در دستگاه مختصات قطبی است.

همانند مثال قبل به دلیل وجود تقارن موجود در میدان جابه‌جایی، تنها یک چهارم از کل ورق در این مثال مدل شده است. مدلسازی ورق تا بی نهایت امکان ندارد. لذا قطعه

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

محدودی از آن که در اطراف سوراخ واقع شده در مدلسازی وارد شده است. بنابراین برای شبیه سازی قسمت دور انداخته شده، تنشهای سطحی از حل تحلیلی مسئله مطابق معادلات (۴۸) تا (۵۰) بر روی مرزهای برش خورده اعمال شده است. این مثال نیز توسط دو شبکه منطبق و غیر منطبق بر مرز با روشهای ذکر شده مورد بررسی قرار گرفت و نمونه‌ای از شبکه‌های استفاده شده در شکل (۱۶) نشان داده شده است. نمودارهای نرم خطای نسبی در انرژی کرنشی و جابه‌جایی به ترتیب در شکلهای (۱۷) و (۱۸) برای این مسئله رسم شده است. همان‌طور که در این اشکال دیده می‌شود در این مثال نیز نتایج حاصل از روش پیشنهادی از دقت خوبی نسبت به دیگر روشها برخوردار است.

۶- نتیجه‌گیری

وابستگی به شبکه‌های محاسباتی منطبق برمرز یکی از محدودیتهای اکثر روشهای عددی به شمار می‌رود. این وابستگی باعث می‌شود که تحلیل مسائل دارای هندسه پیچیده، مسائل دارای هندسه متغیر و یا حل تطبیقی مسائل با مشکلاتی روبرو شود. به طور کلی استفاده سودمند از چنین روشهایی منوط به توانایی فراهم کردن شبکه مناسب است. در این مقاله برای برطرف کردن این وابستگی، کاربرد شبکه‌های غیر منطبق برمرز در تحلیل المان محدود بررسی شده و روش جدید المان محدود شبکه ثابت اصلاح شده معرفی شده است. در این روش از یک شبکه غیر منطبق برمرز برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده می‌شود. ویژگی یک شبکه غیر منطبق برمرز سادگی تولید آن است. این ویژگی فرایند پیچیده تولید شبکه برای مسائل دارای هندسه پیچیده و یا تطبیق شبکه برمرز را در حل مسائل دارای هندسه متغیر به‌کلی منتفی می‌سازد. در این مقاله با معرفی روش اصلاح شده المان محدود شبکه ثابت، از آن برای حل مسائل ارتجاعی خطی دو بعدی استفاده شده است. مطلب دیگری که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است، نحوه اعمال شرایط مرزی است. در روش پیشنهادی مرزهایی که شرایط مرزی برروی آنها اعمال می‌شود می‌توانند از درون المانها عبور کرده و شرایط مرزی به طور مناسب برروی آنها اعمال می‌شود.

در این مقاله پس از بیان روش و نحوه اعمال شرایط مرزی چند مثال عددی برای بررسی دقت و همگرایی روش پیشنهادی حل شده است. نتایج حاصل از این روش با حل تحلیلی مسئله و نتایج حاصل از روش المان محدود استاندارد و روش المان محدود شبکه ثابت مقایسه شده است. نتایج حاصل نشان داد که به کمک روش پیشنهادی می‌توان از شبکه‌های غیر منطبق برمرز به طور موثری در حل مسائل ارتجاعی خطی استفاده کرد.

واژه نامه

1. Pivoting

مراجع

1. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P., "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments," Comp. *Meth. Appl.* Mech. Eng., Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
2. Belytschko, T., Parimi, C., Moes, N., Sukomar N., and Usui, S., "Structured Extended Finite Element Methods for Solids Defined by Implicit Surfaces," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 56, pp. 609-635, 2003.
3. Moes, N., Dolbow, J., and Belytschko, T., "A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 46, no. 5, pp. 131-150, 1999.
4. Chessa, J., and Belytschko, T., "An Extended Finite Element Method for two Phase Fluids," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 1, pp. 10-17, 2003.
5. Garcia, M.J., "Fixed Grid Finite Element Analysis in Structural Design and Optimization," PhD Thesis, *Aeronautical Engineering, University of Sydney, Sydney*, Australia, 1999.
6. Bensoe, M., and Kikuchi, N., "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]

Homogenization Method," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*., Vol. 71, 197-224, 1988.

۷. دانشمند، ف.، کاظم زاده پارسی، م.ج.، فرید، م.، "استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز در آنالیزهای المان محدود"، چاپ شده در مجموعه مقالات دوازدهمین کنفرانس مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ۱۳۸۳.

۸. کاظم زاده پارسی، م.ج.، دانشمند، ف. فرید، م.، "اصلاح روش المان محدود شبکه ثابت و کاربرد آن در حل مسائل سه بعدی ارتجاعی خطی"، چاپ شده در مجموعه مقالات سیزدهمین کنفرانس مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۴.

9. Garcia, M.J., and Steven, G.P., "Fixed Grid Finite Elements in Elasticity Problems," *Engineering Computations*, Vol. 16, no. 2, pp. 145-164, 1999.
10. Garcia, M.J., and Steven, G.P., "Fixed Grid Finite Elements Analysis in Structural Design and Optimization," Second ISSMO/AIAA *Internet Conference on Approximation and Fast Reanalysis in Engineering Optimization*, Delft, May 25- June 2, 2000.
11. Garcia, M.J., and Gonzalez, C.A., "Shape Ooptimization of Continuum Structures Via Evolution Strategies and Fixed grid Finite Element Analysis," *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, No. 1-2, pp. 92-98, 2004
12. Kim, H., Garcia, M.J., Querin, O.M., Steven, G.P., and Xie, Y. M., "Fixed Grid Finite Element Analysis in Evolutionary Structural Optimization," *Engineering Computations*, Vol. 17, No. 4, pp. 427-439, 2000.
13. Woon, S.Y., Querin, O.M., and Steven, G.P., "Application of the Fixed Grid FEA Method to Step-Wise GA Shape Optimization," *Proceedings of Second ASMO-UK/ISSMO Conference*, Swansea, UK, pp. 265-272, 2000.
14. Clark, B.W., and Anderson, D.C., "The penalty boundary method," *Finite Element in Analysis and Design*, Nol. 39, pp. 378-401, 2003.
15. Reddy, J.N., "*An Introduction to the Finite Element Method*," 2nd ed., McGraw-Hill, 1993.
16. Timoshinko, S.P., and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity*", 3rd ed , *McGraw-Hill*, New York, 1970.

[DOR: 20.1001.1.2251600.1387.27.2.7.3]