

## کاربرد روش المان مرزی در حل دوبعدی مسائل دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع

امیررضاخویی\* - امیر مسعود کی نیا\*\*

### چکیده

در چند دهه اخیر مطالعاتی در زمینه پدیده های شبه استاتیکی در محیطهای متخلخل اشباع از آب نظیر تحکیم در خاکها صورت گرفته است. اما کاربرد آنالیز محیطهای متخلخل اشباع تحت انتشار امواج در بررسی رفتار سدهای خاکی، طراحی پی های ماشین، پدیده های روانگونی و مسائل مربوط به اثر متقابل خاک - سازه، اهمیت تحقیق و بررسی مسئله در حالت دینامیکی را ایجاب می کند. رفتار چنین محیطهایی به علت وجود دو فاز جامد و مایع، از اثرات اینرسی ناشی از شتاب توده جرم خاک و شتاب جرم مایع که دارای مؤلفه های جابجایی مستقل از یکدیگرند، تأثیر می پذیرد. مطالعات اولیه به تحلیل مسئله در حالت شبه استاتیکی و صرف نظر از اثرات اینرسی معطوف بوده است. ولی با توجه به اهمیت مسئله، تحقیقات دامنه داری در این زمینه انجام شده و نهایتاً بیوتوانست با استفاده از معادلات بنیادی،

\* مربی دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

\*\* دانشیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف

داری، ممتوم و پیوستگی معادلات دیفرانسیل ممزوج محیطهای متخلخل اشباع را تعیین کند. حل این معادلات ممزوج به روش انتگرالهای مرزی و سپس کاربرد روش المان مرزی برای حل مسائل مختلف از جمله اهداف این مقاله است.

### مقدمه

تحلیل دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع از مایع کاربردهای متعددی در شاخه های مختلف علوم و مهندسی نظیر ژئوفیزیک، زلزله شناسی، مهندسی ساختمان و مکانیک دارد. جریان آب در مکانیک خاک، رفتار سدهای خاکی واقع بر بستر سنگی یا رفتار محیط خاکی اشباع در برابر خطوط جریان آب در داخل سد، اثر متقابل خاک - پی در مطالعه عکس العمل دینامیکی پی های صلب واقع بر محیط متخلخل اشباع در طراحی پی های ماشین تحت پدیده های گذرا نظیر زلزله، بارهای ارتعاشی و ... تماماً مبین اهمیت تحلیل و بررسی دقیق دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع است. در سال ۱۹۴۱، بیو<sup>۱</sup> معادلات مربوط به اثر توام محیط جامد و مایع برای پدیده های شبه استاتیکی را ارائه داد [۱]. حالت شبه استاتیکی مسئله که در مکانیک خاک با عنوان تحکیم<sup>۲</sup> شناخته شده، طی سالیان متمادی موضوع مورد بررسی بوده است. در این حالت تنها پدیده نفوذ<sup>۳</sup> صرف نظرات اثرات اینرسی، مورد توجه قرار می گیرد. لیکن اهمیت اثرات اینرسی در هر دو فاز جامد و مایع و کاربردهای ذکر شده، حل مسئله را به صورت دینامیکی ضروری می نمود. بعدها بیو تئوری انتشار سه بعدی موج در محیط اشباع را ارائه داد [۲ و ۳]. وی با فرض یک انرژی پتانسیل برای محیط متخلخل اشباع و استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل ممزوج حاکم بر حرکت های فازهای جامد و مایع محیط را بدست آورد (مدل  $u-w$ )، بر طبق این تئوری، تحت یک اغتشاش دینامیکی، دو موج طولی و یک موج برشی در محیط به وجود می آیند. موج طولی اول که با  $P1$  نمایش داده

1. Biot

2. Consolidation

3. Diffusive

می‌شود با استهلاک کم و موج طولی دوم ( $P_2$ ) با استهلاک زیاد انتشار می‌یابند. بدین ترتیب تحقیقات برای تعیین حل اساسی<sup>۱</sup> این معادلات دیفرانسیل همبسته آغاز شد. دسته‌ای از حل‌ها با حفظ شکل کلی معادلات دیفرانسیل بیو، براساس فرمول بندی  $u-w$  صورت گرفت. عده‌ای از محققین نیز برای تعیین حل معادلات از فرم  $u-p$  که در آن متغیرهای اساسی تغییر مکان فاز جامد و فشار آب منفذی است، استفاده کردند. (سیمون، زینکوویچ و پل [۴]). در مقاله حاضر به علت بکارگیری روش انتگرال مرزی استفاده از فرم اخیر مناسبتر است.

حلهای اساسی برای حالت شبه استاتیکی راکلری [۵] و مراحل اصلاحی آن را رودنیک [۶] ارائه داد. در حالت دینامیکی مسئله، برای شرایطی که نیرو بر روی محیط نیم فضا<sup>۲</sup> اعمال می‌شود، پل [۷] و همچنین هالپرن و کریستیان [۸] به حلهایی دست یافتند. در هر صورت این طور به نظر می‌رسد که بوریچ و وارگاس [۹] اولین گام را در تعیین حل اساسی برای یک محیط متخلخل الاستیک نامحدود (تمام فضا<sup>۳</sup>) با استفاده از روش نقطه زینی<sup>۴</sup> برداشتند و براساس آن جابجایی‌های فواصل دور در اثر اعمال بار در نقطه‌ای از توده جامد را قابل محاسبه کردند. نهایتاً کی نیا [۱۰] با استفاده از تبدیل لاپلاس و فرمول بندی معادلات بیو در فرم  $u-p$  به حلهای اساسی برای تعیین جابجایی میدان محیط اشباع، هنگامی که بارهای نقطه‌ای در فاز جامد و مایع اثر می‌کند، دست یافت.

کاربرد آنالیزهای عددی در حل معادلات دیفرانسیل محیطهای متخلخل اشباع، برای اولین بار با استفاده از روش المان‌های محدود توسط محققینی نظیر زینکوویچ و شیومی [۴ و ۱۱] صورت گرفته است. در مقاله حاضر برای حل این معادلات، از روش انتگرال مرزی جهت فرمول بندی معادلات انتگرال مرزی و از روش المان مرزی برای حل عددی مسئله استفاده می‌شود. اهمیت روش المان مرزی نسبت به روش المان محدود در بررسی محیطهای نامحدود و یا نیمه محدود

- 
1. Fundamental Solution
  2. Half Space
  3. Full Space
  4. Saddle Point

بدلیل امکان استفاده از تعداد المان های معدودتری بوده که باعث کاهش ابعاد مسئله می گردد. اخیراً، بسکوز و همکاران [۱۲] با استفاده از روش المان مرزی مسئله محیطهای متخلخل اشباع را بر پایه فرضیاتی به صورت عددی مورد بررسی قرار داده اند. در حالیکه روش ارائه شده در این مقاله مبتنی بر اصول ریاضی با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی<sup>۱</sup> بر معادلات دیفرانسیل بیو و استفاده از توابع گرین در حل معادلات انتگرال مرزی است.

### معادلات حاکم بر محیطهای متخلخل اشباع

در این جا معادلات محیطهای متخلخل که ابتدا توسط بیو [۲ و ۳] برای توده جامد الاستیک خطی و همگن اشباع شده توسط مایع و سپس توسط زینکوویچ [۱۱] برای محیطهای با فاز جامد غیر خطی به دست آمده است، ارائه می شود. هرچند مسئله فقط برای مواد خطی تحت تغییر شکل های کوچک فرموله شده، این تئوری قابل گسترش به مسائل غیر خطی نیز هست.

اگر جابجایی کل میدان توسط جابجایی توده جامد  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  و جابجایی متوسط مایع نسبت به جامد  $w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$  تعریف شود و فشار مایع حفره ای با  $p$  نمایش داده شود، معادلات اساسی حاکم بر محیط عبارتند از:

(الف) معادله بنیادی

$$\sigma = D e - \alpha p I_1 \quad (۱)$$

که در آن  $\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$  بردار تنش کل<sup>۲</sup>،  $e = [e_{11} \ e_{22} \ e_{33} \ 2e_{12} \ 2e_{23} \ 2e_{31}]^T$  بردار تغییر شکل نسبی فاز جامد،  $D$  ماتریس  $6 \times 6$  سختی مواد در حالت زهکشی شده،

1. Weighted Residual Technique

2. Total Stress

$I_1 = [111000]^T$  و  $\alpha$  از پارامترهای مواد بیو هستند.

(ب) معادلات حرکت مربوط به مخلوط جامد - مایع (معادله ممتوم):

$$L^T \sigma + f \delta(x) = \rho \ddot{u} + \rho_f \ddot{w} \quad (2)$$

که در آن

$$L = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & D_2 \\ D_3 & 0 & D_1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} D_i &= \partial / \partial x_i \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

تانسور اپراتورهای دیفرانسیلی تبدیل جابجایی به تغییر شکل نسبی بوده و جمله  $f \delta(x)$  معرف یک نیروی متمرکز در مبدأ مختصات و عبارات  $\ddot{u}$  و  $\ddot{w}$  به ترتیب معرف شتاب توده جامد و شتاب نسبی مایع است. در معادلات بالا  $\rho$  چگالی مخلوط جامد و مایع بوده و رابطه آن با چگالی مایع  $\rho_f$  و چگالی توده جامد  $\rho_s$  به صورت  $\rho = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \rho_s + n \rho_f$  و در آن  $n$  معرف تخرخل محیط است.

(ج) معادله عمومی داری

$$\nabla p = -\frac{\gamma}{k} \dot{w} - \rho_f \cdot \ddot{u} - m \cdot \ddot{w} \quad (3)$$

که در آن  $k$  ضریب نفوذ پذیری محیط،  $\gamma$  وزن حجمی مخلوط جامد و مایع و  $m$  پارامتر جرم بوده و معادل  $\frac{\rho_f}{n}$  است.

(د) معادله پیوستگی

$$\nabla \cdot \dot{w} = -\alpha \nabla \cdot \dot{u} - \frac{1}{Q} \dot{p} + q \cdot \delta(x) \quad (4)$$

جمله اول در طرف دوم معادله فوق معرف اثر انبساط توده جامد است. در جمله دوم  $Q$  معرف اثر فشار پذیری مرکب دانه های جامد و مایع بوده و جمله سوم نیز معرف تزریق مایع در واحد حجم با سرعت تزریق  $q$  به داخل سیستم است. پارامترهای  $\alpha$  و  $Q$  عبارتند از:

$$\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s} \quad \text{و} \quad \frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \quad (5)$$

که در آن  $K_f$  و  $K_s$  به ترتیب عبارتند از مدول حجمی مایع و دانه جامد و  $K_d$  مدول حجمی توده جامد (مدول حجمی زهکشی شده) است.

معادلات بالا در محیطهای اشباع معتبر بوده و برای هر دو پدیده رفتار استاتیکی و دینامیکی قابل کاربرد است. به منظور تعیین سیستم معادلاتی که فقط بر حسب مؤلفه های جابجایی  $u_i$  و فشار حفره ای  $p$  باشد (مدل  $u-p$ )، می توان از تبدیل لاپلاس فوق استفاده کرده و  $w_i$  را بین آنها حذف کرد. با نمایش تبدیل یافته جابجایی و فشار حفره ای به ترتیب با  $\bar{u}_i$  و  $\bar{p}$  که بصورت

$$\bar{u}_i(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot u_i(x,t) \cdot dt \quad \text{و} \quad \bar{p}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot p(x,t) \cdot dt \quad (6)$$

تعریف می شوند، معادلات دیفرانسیل ممزوج سیستم به صورت زیر به دست می آیند:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \mu \cdot \nabla^2 \bar{u} - \alpha_1 \cdot \nabla \bar{p} - s^2 \rho_1 \cdot \bar{u} = -\bar{f} \quad (7)$$

$$\xi \cdot \nabla^2 \bar{p} - \frac{s}{Q} \bar{p} - \alpha_1 s \nabla \cdot \bar{u} = -\bar{q} \quad (8)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت های زهکشی شده لامه بوده و ضرایب  $\xi$ ،  $\alpha_1$  و  $\rho_1$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\xi = \left(\frac{\gamma}{k} + m \cdot s\right)^{-1} \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \alpha - \rho_f \cdot s \cdot \xi \quad \rho_1 = \rho - \rho_f^2 \cdot s \cdot \xi$$

جالب توجه است که این معادلات فرم کلی مشابه معادلات ممزوج ترموالاستیسیته را دارند [۱۳ تا ۱۵].

### روش انتگرالهای مرزی

کاربرد روش معادلات انتگرال مرزی در مسائل مهندسی از دهه ۱۹۶۰ شروع شده و این در حالی است که حل معادلات انتگرال مرزی، تاکنون به روشهای مختلفی که شباهتی با روشهای عددی نظیر تفاوتهای محدود یا المان های محدود نداشته، صورت می گرفته است.

از جمله روشهای ناحیه ای که اخیراً، و در این مقاله نیز، مورد استفاده قرار گرفته روش مستقیم<sup>۱</sup> در حل معادلات انتگرال مرزی است. در این روش که بر مبنای توابع گرین<sup>۲</sup> بنا نهاده شده، معادلات انتگرالی بر حسب حل منفرد (یا منبع<sup>۳</sup>) ی که معادله دیفرانسیل حاکم را ارضاء می کند، بیان می شوند.

معادلات دیفرانسیل ممزوج محیطهای متخلخل اشباع (۷) و (۸)، در فرم ماتریسی به صورت زیر است:

$$L_{ij} \bar{U}_j = \bar{B}_i \quad (10)$$

که در آن ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی ( $L_{ij}$ ) و بردارهای  $\{\bar{U}_j\}$  و  $\{\bar{B}_i\}$  بدین صورت تعریف می شوند:

1. Direct Method

2. Green Function

3. Source

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_1^2 - \rho_1 s^2 & (\lambda + \mu) \cdot D_1 D_2 & -\alpha_1 D_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot D_2 D_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_2^2 - \rho_1 s^2 & -\alpha_1 D_2 \\ -\alpha_1 s \cdot D_1 & -\alpha_1 s \cdot D_2 & \xi\Delta - \frac{s}{Q} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\{\bar{U}_j\} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{p}\}^T \quad \{\bar{B}_j\} = \{-\bar{f}_1 \quad -\bar{f}_2 \quad -q\}^T \quad (12)$$

در عبارت فوق  $D_i = \partial/\partial x_i$  و  $\Delta$  معرف لاپلاسین است.

برای هر معادله دیفرانسیلی همواره می‌توان فرم انتگرالی (تغییراتی) نوشت. در این جا با استفاده از تکنیک باقیمانده وزنی معادله دیفرانسیل (۱۰) به یک معادله انتگرالی تبدیل می‌شود. بدین ترتیب که با معرفی تانسور وزنی  $V_{ik}^*$ ، عبارت باقیمانده وزنی در میدان  $v$  برای معادله (۱۰) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\int_v (L_{ij} \cdot \bar{U}_j - \bar{B}_i) \cdot V_{ik}^* \cdot dv = 0 \quad (13)$$

با جاگذاری  $L_{ij}$  در معادله انتگرالی (۱۳) و سپس با دوبار انتگرال گیری جزء به جزء روی میدان  $v$  از آن نتیجه زیر به دست می‌آید [۱۶]:

$$\int_v (\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^*) \cdot \bar{U}_i \cdot dv + \int_s (\bar{\tau}_\alpha \cdot V_{\alpha j}^* - \bar{u}_\alpha \cdot \Sigma_{\alpha j}^*) \cdot ds \quad (14)$$

$$+ \int_s \left( \xi \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \cdot V_{3j}^* - \xi \cdot \bar{p} \cdot \frac{\partial V_{3j}^*}{\partial n} \right) \cdot ds - \int_v \bar{B}_i \cdot V_{ij}^* \cdot dv = 0$$

که در آن اندیس های  $i, j$  و  $k$  مقادیر ۱، ۲ و ۳، و اندیس  $\alpha$  مقادیر ۱ و ۲ را اختیار می‌کنند، به طوری که  $\bar{U}_3 = \bar{p}$  و  $\bar{U}_\alpha = \bar{u}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) بوده، همچنین  $s$  در عبارت انتگرالی بالا به معنای انتگرال گیری بر روی مرز سیستم است. در معادله (۱۴) ماتریس دیفرانسیلی  $\mathcal{L}_{ij}$  به صورت زیر تعریف شده:



$$(\mathcal{L}_{ij}) = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_1^2 - \rho_1 s^2 & (\lambda + \mu) \cdot D_1 D_2 & \alpha_1 s \cdot D_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot D_2 D_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_2^2 - \rho_1 s^2 & \alpha_1 s \cdot D_2 \\ \alpha_1 \cdot D_1 & \alpha_1 \cdot D_2 & \xi\Delta - \frac{s}{Q} \end{bmatrix} \quad (15)$$

و مؤلفه های بردار تبدیل تنش  $\bar{\tau}_\alpha$  و کمیت نظیر آن  $\Sigma_{\alpha j}^*$  به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\alpha &= \bar{\tau}_{\alpha\beta} \cdot n_\beta \\ &= \left\{ \left( \lambda \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} - \alpha_1 \cdot \bar{p} \right) \cdot \delta_{\alpha\beta} + \mu \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right\} \cdot n_\beta \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Sigma_{\alpha j}^* = \left\{ \left( \lambda \cdot \frac{\partial V_{mj}^*}{\partial x_m} + \alpha_1 s \cdot V_{3j}^* \right) \cdot \delta_{\alpha\beta} + \mu \cdot \left( \frac{\partial V_{\alpha j}^*}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\beta j}^*}{\partial x_\alpha} \right) \right\} \cdot n_\beta \quad (17)$$

حال لازم است  $V_{jk}^*$  چنان تعیین شود که با جاگذاری در عبارت  $\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^*$  [معادله (۱۴)] منجر به حذف اولین جمله انتگرالی گردیده و معادله انتگرالی که فقط در مرز سیستم فرموله شده به دست آید. لذا با فرض منبعی در نقطه  $c$  که در داخل ناحیه  $v$  متمرکز شده باشد، می توان نوشت:

$$\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^* + \delta_{ik} \cdot \Delta_{(x)}^c = 0 \quad (18)$$

که  $\Delta_{(x)}^c$  تابع دلتای دیراک<sup>۱</sup> است و برای آن می توان نوشت:

$$\int_v (\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^* + \delta_{ik} \cdot \Delta_{(x)}^c) \cdot \bar{U}_i \cdot dv = \int_v (\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^*) \cdot \bar{U}_i \cdot dv + \bar{U}_k^c \quad (19)$$

### 1. Dirac Delta Function

اگر معادله (۱۸) توسط  $V_{jk}^*$  ارضاء شود، می توان نوشت:

$$\int_v (\mathcal{L}_{ij} \cdot V_{jk}^*) \bar{U}_i \cdot dv = -\bar{U}_k \quad (20)$$

که با جاگذاری معادله (۲۰) در معادله (۱۴)، معادله انتگرالی حاصل فقط شامل مرز سیستم است. با توجه به آنکه معادله حاصل برای نقاط داخل ناحیه  $v$  معتبر بوده، و در فرموله کردن مسائلی که با تکنیک های مرزی حل می شود باید معادله برای حالتی که نقطه در مرز است، تعیین شود، می توان ثابت کرد که معادله حاصل برای نقاط واقع بر مرز سیستم به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} C_{kj} \cdot \bar{U}_k + \int_s \bar{u}_\alpha \cdot \Sigma_{\alpha j}^* \cdot ds + \int_s \xi \cdot \bar{p} \cdot \frac{\partial V_{3j}^*}{\partial n} \cdot ds + \int_v \bar{B}_i \cdot V_{ij}^* \cdot dv \\ = \int_s \bar{\tau}_\alpha \cdot V_{\alpha j}^* \cdot ds + \int_s \xi \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \cdot V_{3j}^* \cdot ds \end{aligned} \quad (21)$$

که  $C_{kj}$  تانسور ضریب شکل بوده و برای سطوح هموار برابر است با  $\delta_{kj}/2$ . معادله (۲۱) را می توان به فرم ساده زیر بیان کرد:

$$C_i \cdot \bar{U}_i + \int_s P^* \cdot \bar{U} \cdot ds = \int_s \bar{U}^* \cdot \bar{P} \cdot ds \quad (22)$$

که در آن اثرات نیروهای بدنه در نظر گرفته نشده است. ماتریس های  $U^*$  و  $P^*$  و بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  در معادله (۲۱) عبارتند از:

$$U^* = \begin{bmatrix} V_{11}^* & V_{21}^* & \xi \cdot V_{31}^* \\ V_{12}^* & V_{22}^* & \xi \cdot V_{32}^* \\ V_{13}^* & V_{23}^* & \xi \cdot V_{33}^* \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^* & \Sigma_{21}^* & \xi \cdot \partial V_{31}^* / \partial n \\ \Sigma_{12}^* & \Sigma_{22}^* & \xi \cdot \partial V_{32}^* / \partial n \\ \Sigma_{13}^* & \Sigma_{23}^* & \xi \cdot \partial V_{33}^* / \partial n \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\bar{U} = \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{p} \}^T, \quad \bar{P} = \left\{ \bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \right\}^T$$

لازم بذکر است که در معادله انتگرال مرزی (۲۲) ماتریس های  $U^*$  و  $P^*$  با محاسبه توابع  $V_{ij}^*$  و  $\Sigma_{ij}^*$  تشکیل می شود. برای تعیین مقادیر مجهول جابجایی ها و فشار حفره ای در بردار  $\bar{U}$ ، و بردارهای تنش و دبی خروجی در بردار  $\bar{P}$ ، چون حل معادله انتگرالی (۲۲) به صورت تحلیلی غیر ممکن است، لذا آن را به روش عددی با اختیار المان هایی بر روی مرز سیستم حل می کنیم.

### حل اساسی

برای تعیین حل اساسی (توابع گرین)  $V_{ij}^*$ ، که با استفاده از آن بتوان ماتریس های  $U^*$  و  $P^*$  را تشکیل داده و معادله انتگرالی (۲۲) را حل نمود، می توان از معادله (۱۸) که توابع  $V_{ij}^*$  آن را ارضاء می کند، استفاده کرد. معادله (۱۸) در فرم برداری به صورت زیر نوشته می شود:

$$[ \mathcal{L} ] \cdot V^* + I \cdot \Delta_{(x)} = 0 \quad (24)$$

با پیش ضرب معادله (۲۴) در ماتریس معکوس اپراتورهای دیفرانسیلی  $[ \mathcal{L} ]$ ، یعنی  $[ \mathcal{L} ]^{-1}$ ، ماتریس توابع گرین به صورت زیر به دست می آیند [۱۰]:

$$V_{\alpha\beta}^* = \sum_{L=1}^3 \left\{ \Psi_{L(r)} \cdot \delta_{\alpha\beta} - \chi_{L(r)} \cdot r, \alpha \cdot r, \beta \right\}$$

$$V_{\alpha 3}^* = \sum_{L=1}^3 s \cdot r, \alpha \cdot \zeta_{L(r)} \quad (25)$$

$$V_{3\beta}^* = \sum_{L=1}^3 r, \beta \cdot \zeta_{L(r)}$$

$$V_{33}^* = \sum_{L=1}^3 \phi_{L(r)}$$

که در آن  $r$  فاصله بین نقطه اثر بار (یادبی تزریقی) تا محل اندازه گیری تغییر مکانها (یافشار حفره ای)

و  $\Gamma_{,\alpha} = \partial r / \partial x_\alpha$  است. توابع  $\Psi(r)$ ،  $\chi(r)$ ،  $\xi(r)$  و  $\phi(r)$  در معادله (۲۵) عبارتند از:

$$\begin{aligned}\Psi_{L(r)} &= \frac{\delta_{3L}}{2\pi \cdot \mu} K_{0(\lambda_L r)} - \eta_L \cdot \lambda_L \frac{1}{\Gamma} K_{1(\lambda_L r)} \\ \chi_{L(r)} &= -\eta_L \cdot \lambda_L^2 \cdot K_{2(\lambda_L r)} \\ \xi_{L(r)} &= \beta_L \cdot \lambda_L \cdot K_{1(\lambda_L r)}\end{aligned}\quad (26)$$

$$\phi_{L(r)} = \gamma_L \cdot K_{0(\lambda_L r)}$$

در عبارات فوق  $K_0$ ،  $K_1$  و  $K_2$  توابع اصلاح شده بسل<sup>۱</sup> از نوع دوم هستند. همچنین در معادلات (۲۶)،  $\lambda_3^2 = \frac{\rho_1}{\mu} s^2$ ،  $\lambda_1^2$  و  $\lambda_2^2$  ریشه های معادلات زیر هستند:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_1^2 + \frac{s}{\xi} \left( \frac{1}{Q} + \frac{\alpha_1^2}{\lambda + 2\mu} \right) \quad (27)$$

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{s}{Q \cdot \xi} k_1^2$$

که در آن  $k_1^2 = \frac{\rho_1}{\lambda + 2\mu} s^2$  است. همچنین پارامترهای  $\eta_L$ ،  $\beta_L$  و  $\gamma_L$  در معادلات (۲۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned}\eta_L &= \frac{(-1)^L (1 - \frac{s}{Q \cdot \xi} \lambda_L^{-2}) (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{2\pi \cdot (\lambda + 2\mu) (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{3L}}{2\pi \cdot \rho_1 s^2}, & \sum_{L=1}^3 \eta_L &= 0 \\ \beta_L &= \alpha_1 \frac{(-1)^L (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{2\pi \xi \cdot (\lambda + 2\mu) (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, & \sum_{L=1}^3 \beta_L &= 0 \\ \gamma_L &= \frac{(-1)^L}{2\pi \cdot \xi} \cdot \frac{(\lambda_L^2 - k_1^2) \cdot (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\end{aligned}\quad (28)$$

### 1. Modified Bessel Functions

پس از تعیین توابع گرین از معادله (۲۵)، و جاگذاری در معادله (۱۷) توابع تنش  $\Sigma_{ij}^*$  به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^* = \sum_{L=1}^3 \left\{ \lambda \cdot r_{,\beta} \cdot n_{\alpha} \cdot \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right) + \alpha_1 \cdot s \cdot r_{,\beta} \cdot n_{\alpha} \cdot \xi + \mu \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} \cdot n_{\beta} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right) - 2\mu \cdot r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \chi}{\partial r} - 2\mu \cdot (r_{,\beta} \cdot n_{\alpha} - 2r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \frac{\partial r}{\partial n}) \frac{1}{r} \chi \right\}$$

$$\Sigma_{\alpha 3}^* = \sum_{L=1}^3 \left\{ \lambda \cdot s \cdot n_{\alpha} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \xi \right) + 2\mu \cdot s \cdot n_{\alpha} \cdot \frac{1}{r} \xi \right. \quad (29)$$

$$\left. + \alpha_1 \cdot s \cdot n_{\alpha} \cdot \phi + 2\mu \cdot s \cdot r_{,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r} \xi \right) \right\}$$

$$\Sigma_{3\beta}^* = \sum_{L=1}^3 \left\{ n_{\beta} \frac{1}{r} \xi + r_{,\beta} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r} \xi \right) \right\}$$

$$\Sigma_{33}^* = \sum_{L=1}^3 \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\}$$

که در آن  $\partial r / \partial n = (\partial r / \partial x_i)(\partial x_i / \partial n) = (x_i / r) \cdot n_i = r_{,i} \cdot n_i$  است.

### روش المان های مرزی

در سالهای اخیر روش المان مرزی به صورت یکی از روشهای عددی مقتدر در حل مسائل مکانیک محیطهای پیوسته ظاهر شده است. خصوصاً کاربرد آن در آنالیزهای استاتیکی یا مسائل دینامیکی در الاستیسیته خطی بسیار رضایت بخش بوده است. در این قسمت روش المان مرزی برای حل معادلات انتگرال مرزی در مسائل الاستیک متخلخل اشباع فرموله می‌شود. در این روش همانگونه که از اسم آن مشخص است فقط نیاز به مدل کردن مرزهای ناحیه مورد نظر بوده که باعث کاهش ابعاد مسئله می‌شود. بعلاوه، نمایش معادلات انتگرال مرزی، یک فرمول

بندی دقیق مسئله است و تقریبات فقط در طی حل عددی معادلات انتگرالی وارد می‌شود. این روش به خصوص در حل مسائل محیطهای نامحدود و یانیمه محدود حائز اهمیت است، زیرا توابع گرین مورد استفاده در فرمولاسیون روش المان مرزی به صورت اتوماتیک شرایط تشعشعی نواحی دور (بی نهایت) را ارضاء می‌کنند.

در تحلیل محیطهای متخلخل اشباع، مقادیر مرزی شامل یک دسته تغییر مکانها و فشار حفره ای و دسته دیگر بردارهای تنش و دبی خروجی بوده که همواره یک دسته تعریف شده و دسته دیگر مجهول است.

حل معادله انتگرال مرزی (۲۲) به روش تحلیلی غیر ممکن بوده و به آنالیز عددی نیازمند است. برای این منظور مرز به المان های مجزا تقسیم می‌شود. چون مطالعه در محیط دو بعدی صورت می‌گیرد مطابق شکل (۱) مرز به یک سری "قطعه"<sup>۱</sup> یا "المان" تقسیم شده و نقاطی که دارای مقادیر مجهول اند "گره"<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. المان های ثابت با گره وسط (شکل ۱ - الف)، المان های خطی با دو گره انتهایی (شکل ۱ - ب) و المان های منحنی (که نمونه ای از آن در شکل ۱ - ج نشان داده شده) با اضافه شدن گره ها در طول المان تعریف می‌شوند.

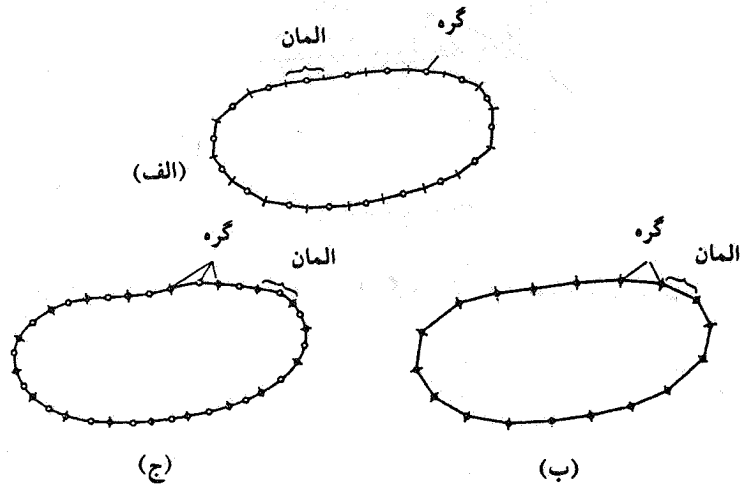
با تقسیم مرز به  $n$  المان، معادله انتگرال مرزی (۲۲) به صورت مجموع انتگرالهای المان مرزی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$C_i \cdot \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} P^* \cdot \bar{U} \cdot ds = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} U^* \cdot \bar{P} \cdot ds \quad (30)$$

که  $s_j$  طول المان  $j$ ام است. مفهوم معادله فوق این است که هر بار با قرار گرفتن بر روی یک گره مرزی (گره  $i$ ) و حرکت بر روی کلیه المان ها، معادله (۳۰) تشکیل می‌شود. در این صورت برای کلیه گره ها  $n$  دسته از این معادلات به دست می‌آیند. بمنظور بررسی مسئله در این مقاله، معادله (۳۰) در شرایط المان ثابت بررسی می‌شود. برای المان های ثابت با سطوح هموار ضریب  $C_i$  برابر  $\frac{1}{p}$  بوده

1. Segment

2. Node



شکل ۱ - المان های مرزی (الف) ثابت، (ب) خطی، و (ج) درجه دوم

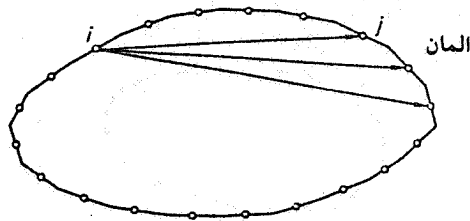
و مقادیر بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  در طول هر المان ثابت است. بنابراین از معادله (۳۰) می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \left( \int_{s_j} P^* \cdot ds \right) \cdot \bar{U}_j = \sum_{j=1}^n \left( \int_{s_j} U^* \cdot ds \right) \cdot \bar{P}_j \quad (31)$$

معادله (۳۱) نمایشی از فرم مجزا شده در روی مرز است و ارتباط بین گره  $i$  که توابع گرین (حل اساسی) در آن بکار برده شده، با تمام المانهای  $j$  (شامل  $i=j$ ) را در روی مرز برقرار می کند (شکل ۲). عبارات  $\int_{s_j} U^* \cdot ds$  و  $\int_{s_j} P^* \cdot ds$  ارتباط گره  $i$  را با المان  $j$  توسط عمل انتگرال گیری نشان می دهد، که آنها را به ترتیب  $\hat{H}_{ij}$  و  $G_{ij}$  می نامیم. بنابراین از معادله (۳۱) می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} \cdot \bar{U}_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} \cdot \bar{P}_j \quad (32)$$

بنابراین با قرار گرفتن در هر گره  $i$  و حرکت بر روی المان های  $j$ ، معادله (۳۲) تشکیل شده، نهایتاً  $3n$  معادله بدست می آید. تمام معادلات برای  $n$  گره مرزی در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود:



شکل ۲ - ارتباط بین حل اساسی در گره مرزی  $i$  و المان های مرزی

$$H \cdot \bar{U} = G \cdot \bar{P} \quad (33)$$

در معادله (۳۳) بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  متشکل از شرایط مرزی در گره ها بوده، که برای برخی از آنها مقادیر جابجایی ها و فشار حفزه ای مجهول و برای دسته ای دیگر از گره ها مقادیر بردارهای تنش و دبی خروجی مجهول است. لذا با جابه جا کردن کلیه مجهولات به سمت چپ معادله (۳۳)، می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$A \cdot X = F \quad (34)$$

که در آن  $X$  بردار مجهولات شامل  $\bar{u}_\alpha$  و  $\bar{p}$  و  $\bar{\tau}_\alpha$  و  $\partial \bar{p} / \partial n$  است، سرانجام با حل دستگاه معادلات (۳۴) به یکی از روشهای متداول نظیر روش گوس، مجهولات هر گره به دست می آید.

#### رفتار انتگرالهای منفرد<sup>۱</sup>

برای تشکیل دستگاه معادلاتی نظیر (۳۴) که با استفاده از آن مجهولات گره های مرزی به دست آیند، نیاز به محاسبه انتگرالهای  $\int_{S_j} P^* \cdot ds$  و  $\int_{S_j} U^* \cdot ds$  است. که در آنها از توابع  $\Sigma_{ij}^*$  و  $V_{ij}^*$  استفاده می شود. هنگامی که در گره مرزی  $i$  قرار داشته و بر روی المان مرزی  $j$  انتگرال گیری می کنیم

#### 1. Singular Integrals



(شکل ۳- الف)، برای حالت  $i \neq j$  از روش های انتگرال گیری عددی استاندارد نظیر روش گوس<sup>۱</sup> می توان استفاده کرد. در این صورت این انتگرالها به فرم عددی زیر محاسبه می شوند:

$$\int_{s_j} \Sigma_{ij}^*(r) \cdot ds = \int_{(1)}^{(2)} \Sigma_{ij}^*(r) \cdot ds = \int_{-1}^{+1} \Sigma_{ij}^*(\xi) \cdot \ell/2 \cdot d\xi \approx \sum_{m=1}^k \omega_i \cdot \Sigma_{ij}^*(\xi_m) \cdot \ell/2 \quad (35)$$

بطور مشابه برای انتگرالهای  $\int_{s_j} V_{ij}^*(r) \cdot ds$  نیز به همین ترتیب عمل می شود. در حالت  $i=j$ ، یعنی وقتی گره  $i$  المان  $j$  را در بر می گیرد، انتگرال دارای رفتار خاصی بوده زیرا حل های اساسی شامل نقاط منفرد است. نقاط منفرد حلهای اساسی انتگرالهای ذکر شده از بسط سری های توابع اصلاح شده بسط  $K_0$ ،  $K_1$  و  $K_2$  به دست می آید. رفتار جملات حلهای اساسی در نقاط منفرد به صورت زیر هستند [۱۳]:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}^* &\propto \text{Ln}(r) & V_{3\beta}^* &= \text{غیرمنفرد} \\ V_{\alpha3}^* &= \text{غیرمنفرد} & V_{33}^* &\propto \text{Ln}(r) \end{aligned} \quad (36)$$

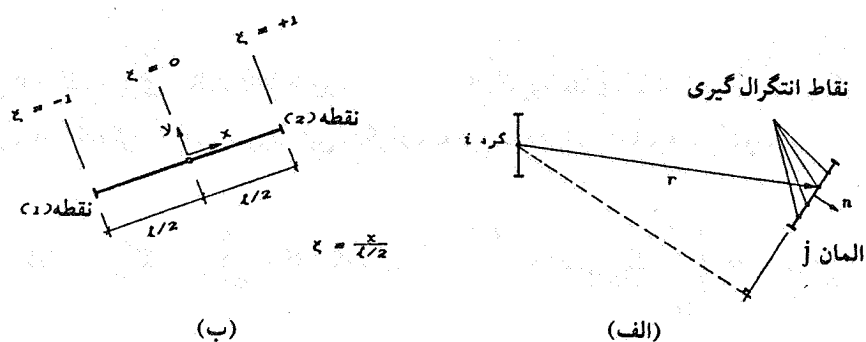
$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^* &\propto 1/r & \Sigma_{3\beta}^* &= \text{غیرمنفرد} \\ \Sigma_{\alpha3}^* &\propto \text{Ln}(r) & \Sigma_{33}^* &\propto 1/r \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned}$$

همان طور که دیده می شود عبارات  $V_{\alpha3}^*$  و  $V_{3\beta}^*$  از ماتریس  $V_{ij}^*$  غیر منفرد بوده و نوع نقاط منفرد  $V_{\alpha\beta}^*$  و  $\Sigma_{\alpha\beta}^*$  از نوع نقاط منفرد الاستو - استاتیک و در مورد  $V_{33}^*$  و  $\Sigma_{33}^*$  از نوع مسئله نفوذ هستند.

محاسبه انتگرالهای منفرد فوق در این مقاله، به روش انتگرال گیری عددی که توسط لاجات<sup>۲</sup> و

1. Gaussian Quadrature

2. Lachat



شکل ۳ - (الف) تعریف هندسی، (ب) المان ثابت

واتسون<sup>۱</sup> (۱۹۷۶)، جون<sup>۲</sup> (۱۹۸۵) و هیامی<sup>۳</sup> و بری بیا<sup>۴</sup> (۱۹۸۸) ارائه شد، صورت گرفته است.

### کاربردها

برای نشان دادن کارایی فرمول بندی فوق، از آن برای تحلیل محیطهای متخلخل اشباع تحت اثر انتشار امواج ناشی از بارهای دینامیکی یا زلزله استفاده می شود. از آن جاکه معادلات انتگرال مرزی محیطهای متخلخل اشباع با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس فرموله شده، لازم است پس از تعیین مجهولات گره های مرزی در روش المان مرزی، با تبدیل معکوس لاپلاس مجهولات حقیقی مسئله تعیین شوند، لکن در بسیاری از کاربردهای عملی رفتار دینامیکی یک جسم یا سازه تحت ارتعاشات هارمونیکی حائز اهمیت است. در این حالت عکس العمل تابعی از فرکانس بوده و می توان با عمل تبدیل فوریه در معادلات حاکم بر سیستم آن را به فرم ریاضی نمایش داد. بنابراین با جایگزینی  $s$  با  $i\omega$ ، مسئله را به صورت تابعی از فرکانس حل

1. Watson
2. Jun
3. Hayami
4. Brebbia

نموده و در صورت لزوم برای تعیین جابجایی و فشار حفره ای در حوزه زمان از تبدیل معکوس عددی فوریه استفاده می شود.

#### الف - بررسی رفتار دینامیکی بستر سنگی در تغییر مکان تاج سد

بعنوان کاربردی از روش المان مرزی در مسائل محیطهای لایه ای، رفتار یک سد خاکی که بر روی لایه ای به عمق ۱۲ متر قرار داشته، تحت حرکت دینامیکی بستر سنگی واقع در زیر لایه خاکی بررسی می شود. مشخصات خواص محیط لایه ای خاک و سد خاکی واقع بر آن عبارتند از:

$$E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2, \quad \lambda = 0.834 \times 10^7 \text{ N/m}^2, \quad \mu = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

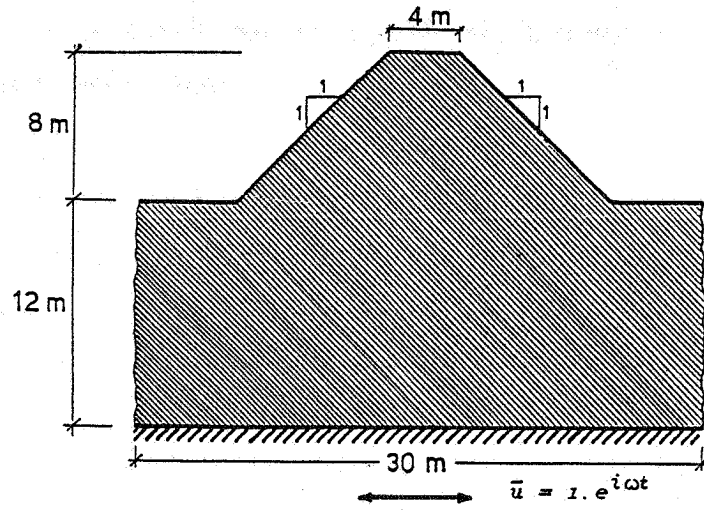
$$\rho = 3060 \text{ Kg/m}^3, \quad \rho_t/\rho = 0.973$$

$$n = 0.333, \quad \nu = 0.2, \quad \alpha = 0.997$$

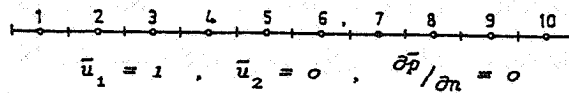
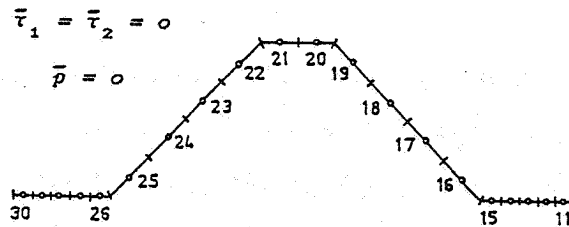
$$K_s = 5 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad K_f = 61.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

هندسره مسئله در شکل (۴ - الف) نمایش داده شده، مرزهای سیستم مطابق شکل (۴ - ب) به ۳۰ المان که شامل ۱۰ المان در ناحیه بستر سنگی و ۲۰ المان در سطح آزاد سد و سطح زمین مجاور است، تقسیم بندی می شود. شرایط مرزی شامل دبی خروجی صفر، تغییر مکان صفر در راستای قائم و همچنین تغییر مکان واحد در راستای افقی برای گره های مرزی مربوط به بستر سنگی بوده و برای گره های مرزی سطح آزاد سد شامل فشار حفره ای صفر و بردارهای تنش صفر در دوراستای افقی و قائم است.

براین اساس قدر مطلق تغییر مکان تاج سد (گره های ۲۰ و ۲۱) در حالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۵) تغییر مکان تاج سد برای دو حالت، محیط متخلخل اشباع با نفوذ پذیری بالا و محیط الاستو - دینامیک مقایسه شده، مطابق این نمودارها دو منحنی دارای روند تغییراتی یکسان هستند. در شکل (۶) منحنی های تغییر مکان تاج سد برای مقادیر مختلف نفوذ

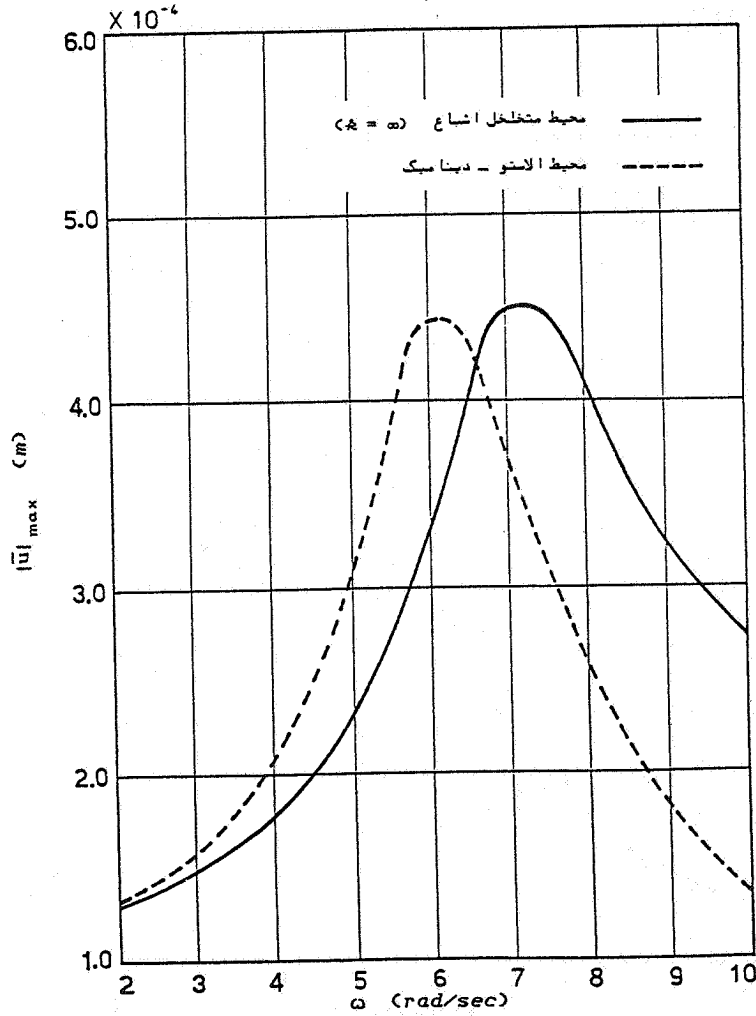
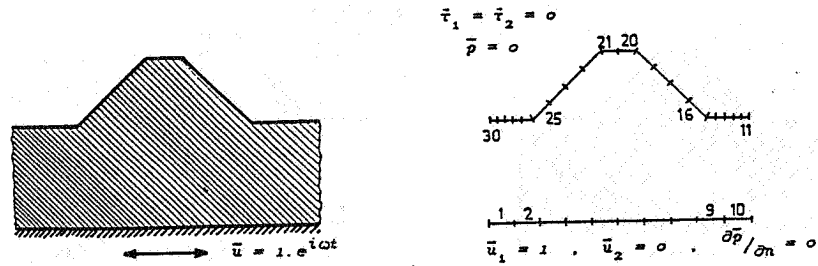


(الف)

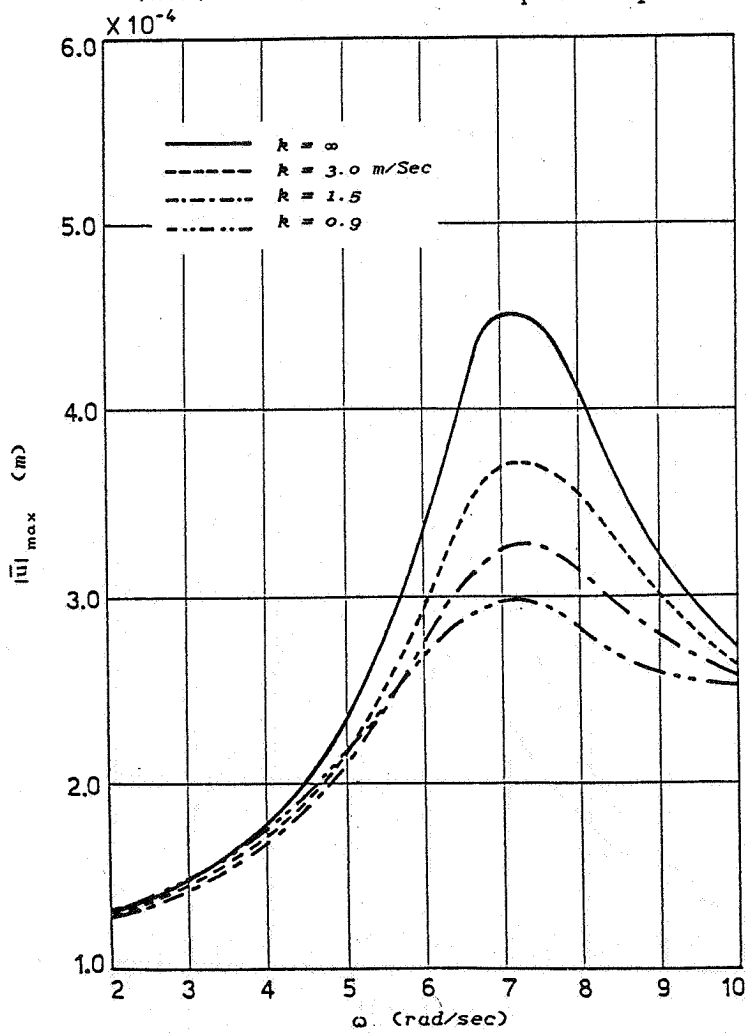
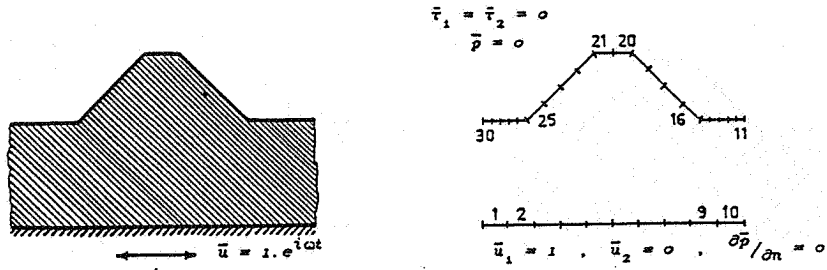


(ب)

شکل ۴ - (الف) حرکت دینامیکی بستر سنگی سد خاکی، (ب) سیستم مدل شده به روش المان مرزی



شکل ۵ - مقایسه محیط متخلخل اشباع ( $k = \infty$ ) با یک محیط الاستو دینامیک در تغییر مکان تاج سد



شکل ۶ - تأثیر نفوذ پذیری در تغییر مکان تاج سد

پذیری  $k = 0.9$ ،  $1.5$ ،  $3.0$  (m/sec) و بینهایت رسم شده است. همانگونه که دیده می‌شود با کاهش نفوذ پذیری محیط، تغییر مکان تاج سد کاهش می‌یابد. مقایسه این منحنی‌ها با منحنی‌های ضریب تقویت دینامیکی<sup>۱</sup> بر حسب نسبت فرکانس که در دینامیک سازه‌ها با آن آشنا هستیم، از آن جهت که اثر افزایش استهلاک سیستم دینامیکی همسو با اثر کاهش نفوذ پذیری محیط متخلخل اشباع است، حائز اهمیت است.

#### ب - تعیین سختی دینامیکی پی صلب

در تحلیل مسائل اثر متقابل خاک - سازه به روش مدل نمودن خاک به صورت یک محیط نیمه محدود الاستیک خطی که در آن سختی و استهلاک تابعی از فرکانس است، نیاز به ارزیابی سختی دینامیکی پی صلب است. بدین منظور از روش المان مرزی برای تعیین سختی دینامیکی پی صلب شکل (۷-الف) استفاده نموده، بار مورد نیاز جهت جابجایی دینامیکی واحد دیسک صفحه‌ای صلب بدون جرم که بر روی محیط نیمه محدود الاستیک واقع شده را در درجه آزادی قائم آن به صورت تابعی از فرکانس به دست می‌آوریم. (به طور مشابه سختی‌های دینامیکی افقی و چرخشی پی صلب نیز تعیین می‌شوند). مشخصات خواص محیط خاکی متخلخل اشباع واقع در زیر پی سطحی عبارتند از [۱۰]:

$$E = 1.357 \times 10^7 \text{ KN/m}^2, \quad \lambda = 0.274 \times 10^7 \text{ KN/m}^2, \quad \mu = 0.585 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$$

$$\rho = 2273 \text{ Kg/m}^3, \quad \rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$n = 0.195, \quad \nu = 0.16, \quad \alpha = 0.83$$

$$K_s = 3.913 \times 10^7 \text{ KN/m}^2, \quad K_f = 0.232 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$$

المان بندی در محل تماس خاک - پی و میدان - آزاد سطح زمین مجاور پی مطابق شکل (۷-ب)

#### 1. Dynamic Magnification Factor

صورت می‌گیرد. محدوده المان بندی مورد نیاز بر اساس مطالعات همگرایی که صورت گرفته، بیش از 6B در طرفین پی اختیار می‌شود (شکل ۷-ب)، که در آن B نصف پهنای پی نواری است. شرایط مرزی شامل فشار حفره ای صفر، جابجایی صفر در درجه آزادی افقی و جابجایی دینامیکی واحد در درجه آزادی قائم برای المان های محل تماس خاک - پی و فشار حفره ای صفر و بردارهای تنش صفر در دو راستا برای المان های میدان - آزاد است. در شکل ۸ توزیع قدر مطلق بردار تنش اعمالی بر روی پی و همچنین تغییر مکان میدان - آزاد را تحت اثر جابجایی هارمونیک پی صلب برای درجه آزادی قائم در یک فرکانس مشخص نمایش می‌دهد.

برای تعیین سختی دینامیکی پی صلب، با تعریف سختی متشکل از دو جزء حقیقی و موهومی به صورت زیر:

$$K_{zz} = \text{Re}(K_{zz}) + i \cdot \text{Im}(K_{zz}) \quad (37)$$

و تقسیم عبارت فوق بر مدول برشی خاک  $\mu$  و پهنای پی ( $d=2B$ ) آن را به صورت بی‌بعد  $K_{zz} / \mu \cdot d$  نمایش داده و به ازاء مقادیر مختلف فرکانس به دست می‌آوریم.

با تعریف فرکانس بدون بعد  $a_0$  به صورت:

$$a_0 = \frac{\omega \cdot d}{V_s} \quad (38)$$

که در آن  $V_s$  سرعت موج برشی و برابر  $\sqrt{\mu/\rho}$  است، سختی دینامیکی  $K_{zz} / \mu \cdot d$  به صورت تابعی از  $a_0$  به دست آورده می‌شود.

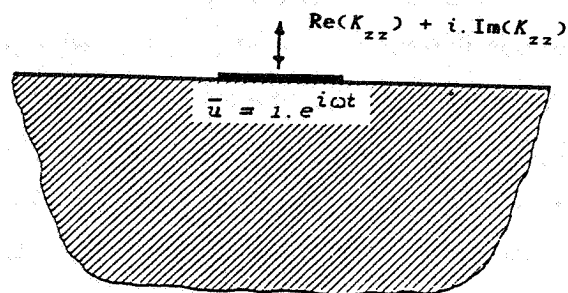
در شکل ۹ سختی قائم دینامیکی پی صلب را برای محیط متخلخل اشباع با نفوذ پذیری بالا (محیط زهکشی شده) و محیط خشک الاستو-دینامیک تک فاز مقایسه نموده، مطابق این نمودارها روند تغییرات در منحنی های جزء حقیقی و موهومی به صورت یکسان هستند. در شکل ۱۰ منحنی های جزء حقیقی و موهومی سختی قائم دینامیکی پی صلب برای نفوذ پذیری های  $k=0.2$ ,  $2$ ,  $20$  (cm/sec) رسم شده، بر طبق این منحنی ها با کاهش نفوذ پذیری محیط، جزء



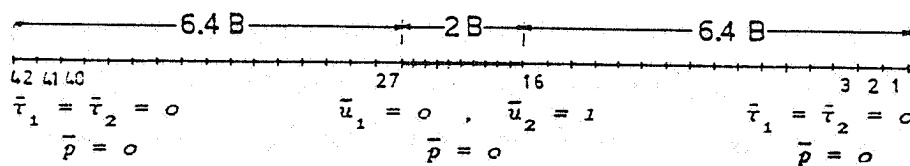
حقیقی سختی قائم دینامیکی افزایش و جزء موهومی آن کاهش می‌یابد. برای تعیین سختی دینامیکی افقی پی صلب در این مرحله بار مورد نیاز جهت جابجایی دینامیکی واحد دیسک صفحه ای صلب را در درجه آزادی افقی آن به دست آورده و بر اساس مقادیر مختلف فرکانس، منحنی های جزء حقیقی و موهومی سختی افقی دینامیکی ( $k_{xx}/\mu.d$ ) بر حسب  $\omega$  رسم می‌شوند. در شکل های ۱۱ و ۱۲ سختی دینامیکی افقی جهت مقایسه دو محیط اشباع (با نفوذ پذیری بالا) و خشک (تک فاز)، و همچنین اثر نفوذ پذیری بر سختی دینامیکی افقی رسم شده، نتایج حاصل از این نمودارها مشابه با حالت سختی دینامیکی قائم پی صلب است. نهایتاً برای تعیین سختی دینامیکی چرخشی پی صلب، بار مورد نیاز جهت چرخش واحد دیسک صفحه ای صلب بر حسب مقادیر مختلف فرکانس به دست می‌آیند. در شکل ۱۳ منحنی های جزء حقیقی و موهومی سختی چرخشی دینامیکی  $K_{\theta\theta} / \mu.d^2$  بر حسب  $\omega$  برای دو محیط اشباع با نفوذ پذیری بالا و محیط خشک تک فاز مقایسه شده که حاکی از روند تغییرات یکسان در دو محیط هستند. همچنین اثر نفوذ پذیری های مختلف در سختی دینامیکی چرخشی پی در شکل ۱۴ نمایش داده شده، که نظیر حالات قبل با کاهش نفوذ پذیری محیط، جزء حقیقی سختی چرخشی پی افزایش و جزء موهومی آن کاهش می‌یابد.

### نتیجه گیری

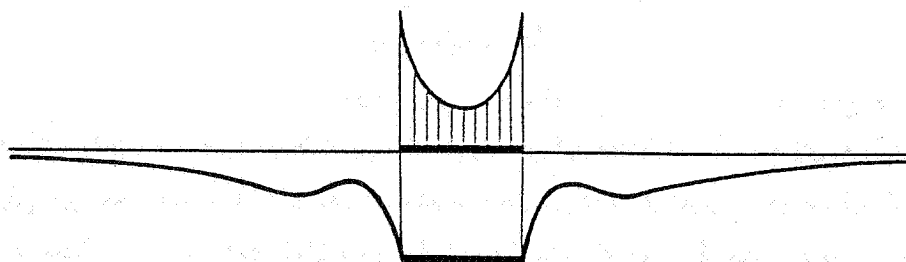
تحلیل دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع، بر اساس فرمول بندی مستقیم انتگرال مرزی برای محیطهای ۲- بعدی ارائه شد. در این روش معادلات انتگرال مرزی، با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی بر معادلات دیفرانسیل همبسته بیو و سپس انتگرال گیری جزء به جزء و تعیین توابع گرین حذف کننده اجزاء مربوط به میدان تعیین شد. چون حل این معادلات انتگرال مرزی به روش تحلیلی غیر ممکن است، با المان بندی سیستم در محلهایی که دارای تغییرات خواص فیزیکی است، معادلات به روش عددی المان مرزی حل شده و کمیت های مورد نظر شامل جابجایی ها، فشار حفره ای، تنش ها و دبی خروجی برای هر نقطه از محیط به دست آمد.



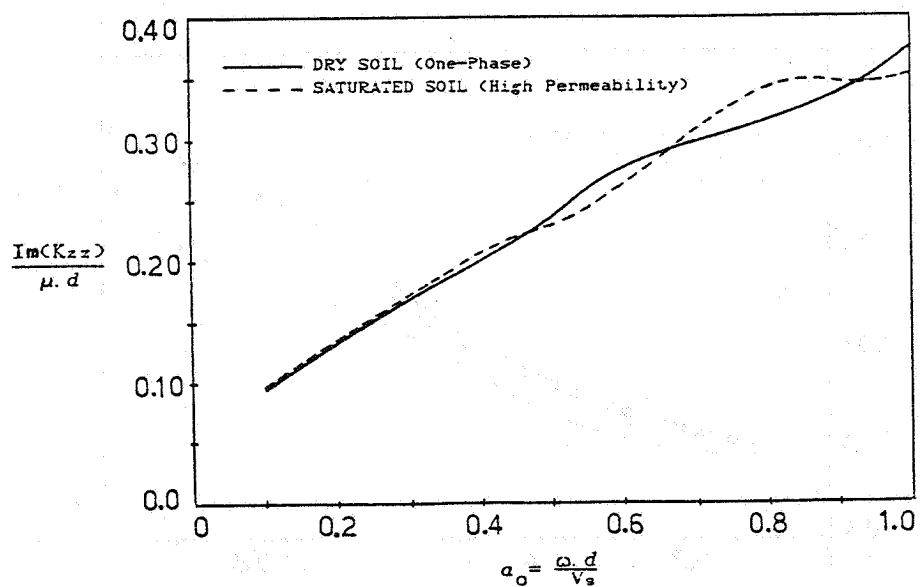
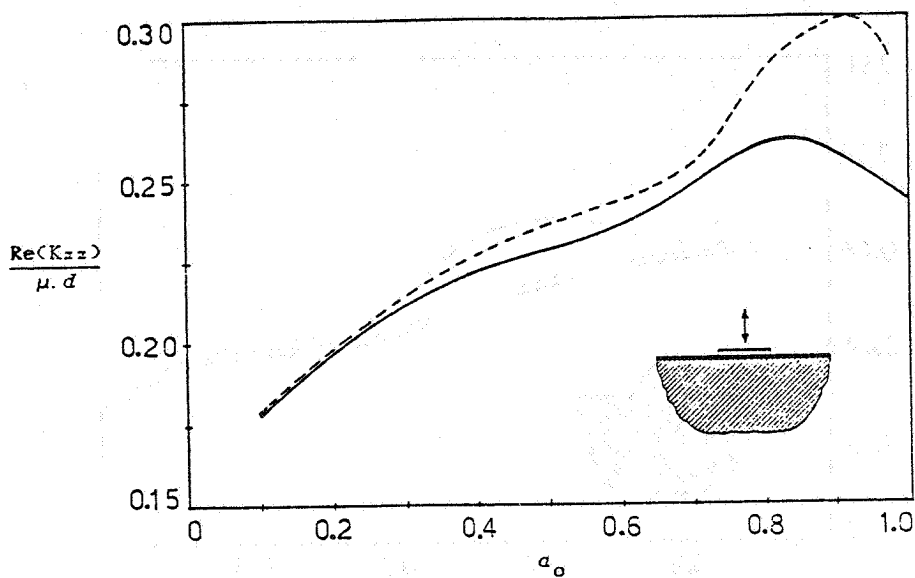
(الف)



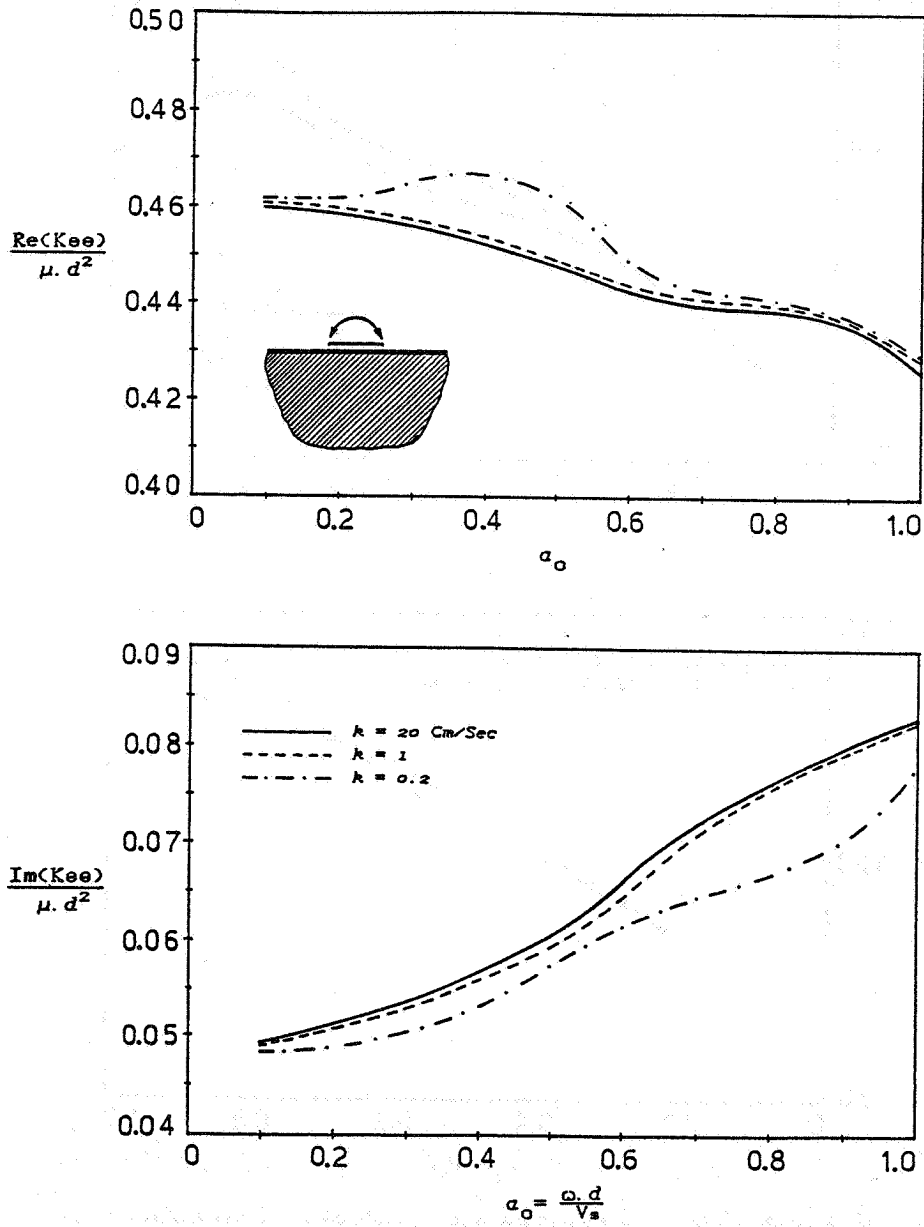
شکل ۷ - (الف) سختی دینامیکی پی صلب، (ب) سیستم مدل شده به روش المان مرزی



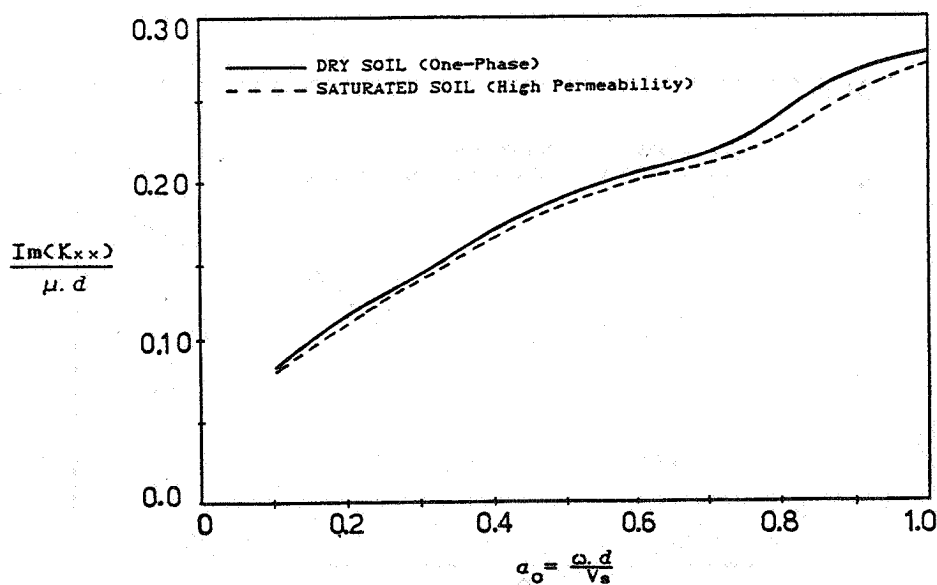
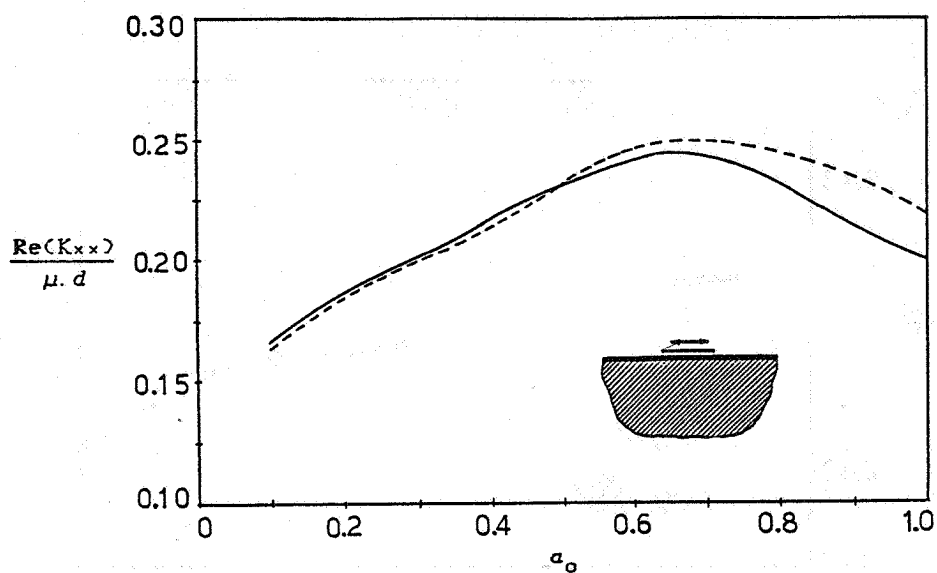
شکل ۸ - توزیع قدر مطلق بردار تنش روی پی و تغییر مکان زمین مجاورناشی از جابجایی هارمونیک در درجه آزادی قائم برای یک فرکانس مشخص



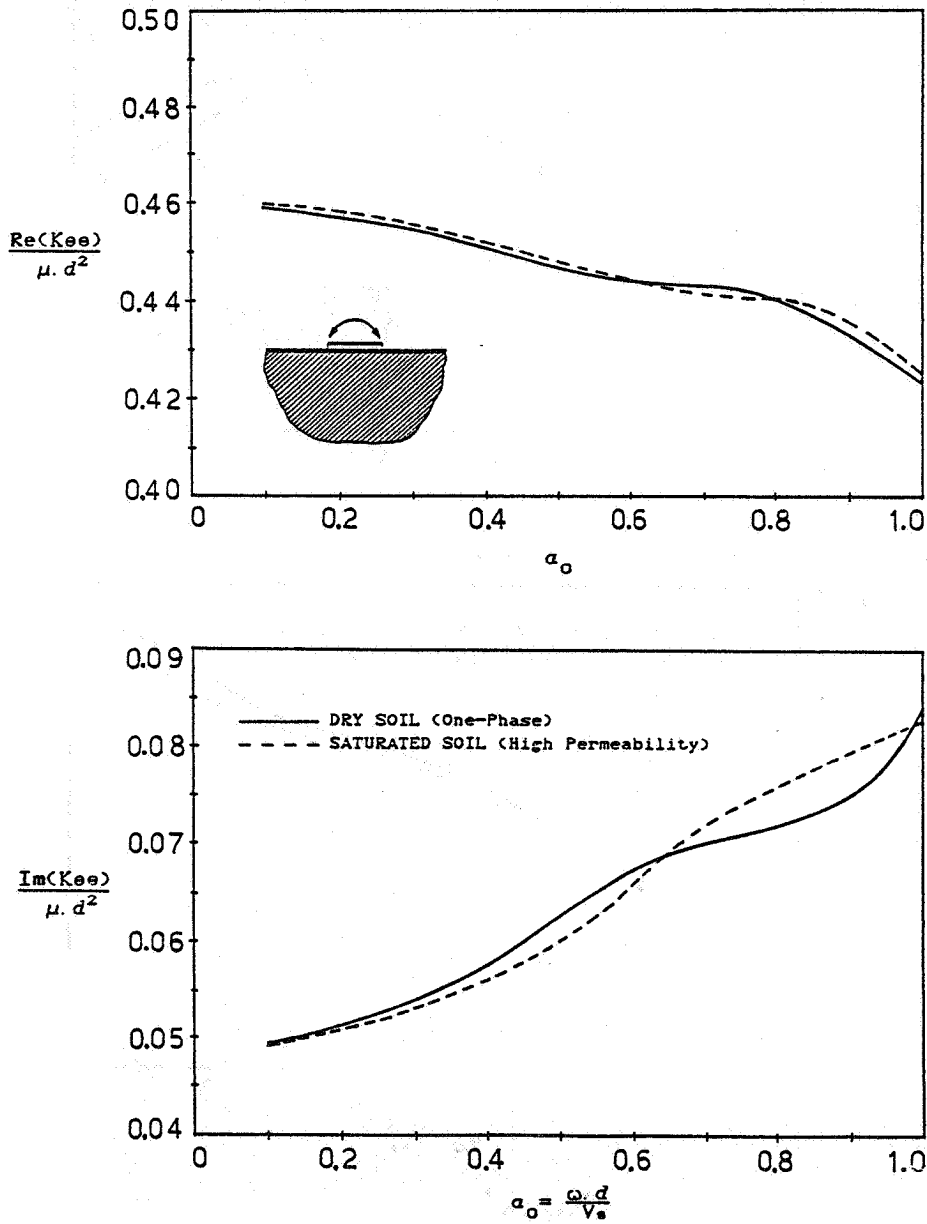
شکل ۹ - مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذ پذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی دینامیکی قائم پی صلب



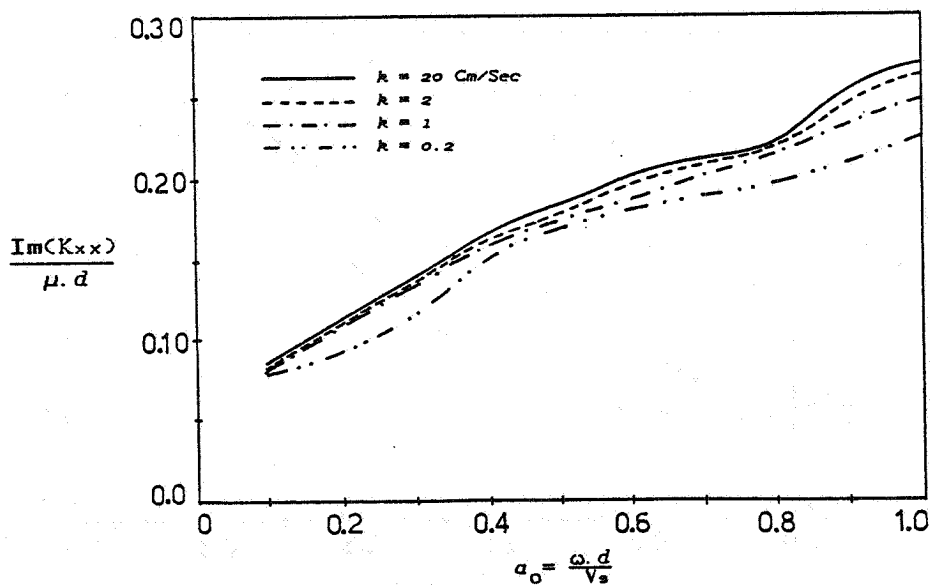
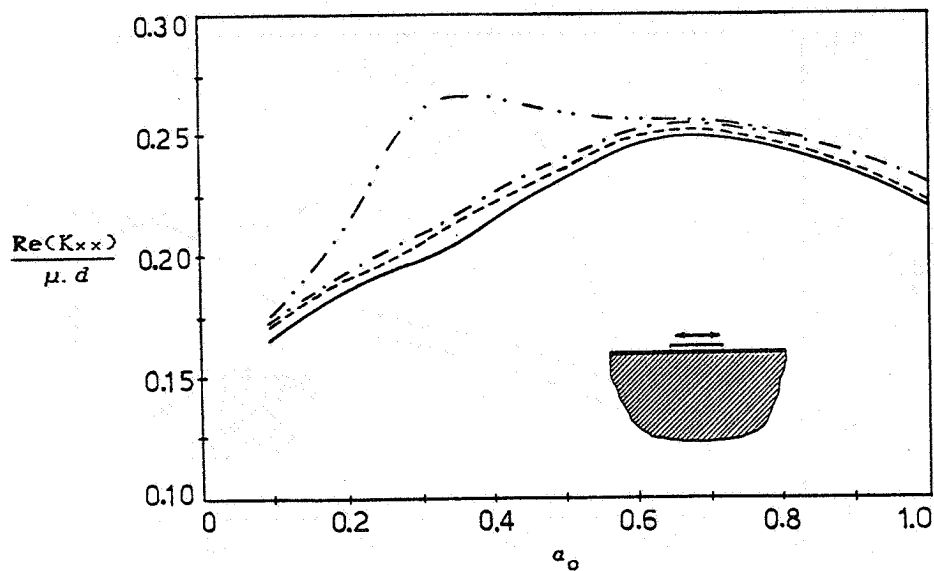
شکل ۱۰ - تأثیر نفوذ پذیری بر سختی دینامیکی قائم پی صلب



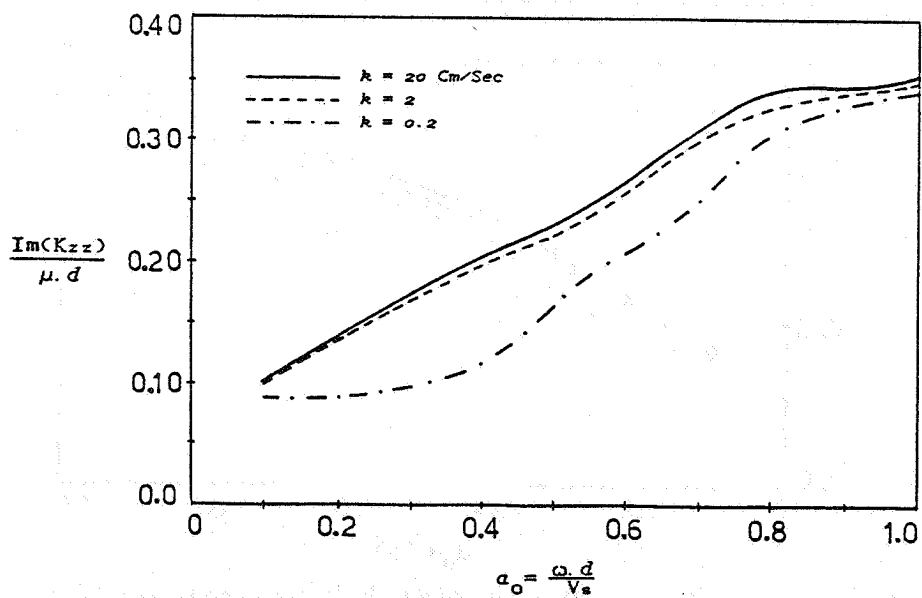
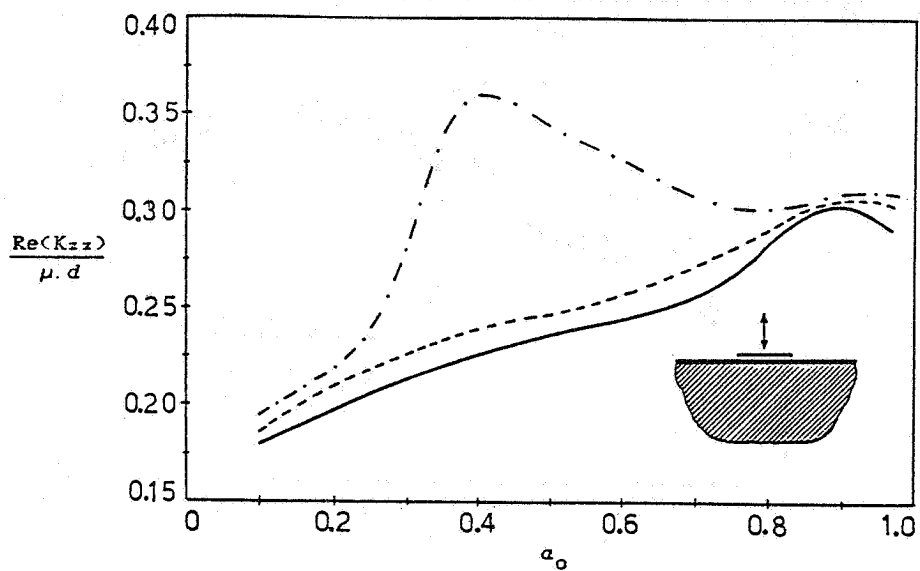
شکل ۱۱ - مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذ پذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی دینامیکی افقی پی صلب



شکل ۱۲ - تأثیر نفوذ پذیری بر سختی دینامیکی افقی پی صلب



شکل ۱۳ - مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذ پذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی چرخشی دینامیکی پی صلب



شکل ۱۴ - تأثیر نفوذ پذیری بر سختی چرخشی دینامیکی پی صلب



به منظور کاربرد روش ارائه شده و چگونگی استفاده از روش المان مرزی در حل مسائل مختلف محیطهای متخلخل اشباع، دو مثال از محیطهای لایه ای و نیمه محدود مورد بررسی قرار گرفت. لازم به ذکر است که در حل مسائل محیطهای نیمه محدود یا لایه ای متخلخل اشباع به روش المان مرزی، نیاز به مطالعات همگرایی برای تعیین اندازه المان ها و همچنین انتخاب بهینه محدود المان بندی است. بویژه در فرکانس های بالا با کاهش طول موج نیاز به کوچکتر کردن اندازه المان ها بروز می کند.

از نتایج به دست آمده مشاهده می شود، رفتار دو محیط متخلخل اشباع زهکشی شده با نفوذ پذیری بالا و محیط الاستودینامیک تک فاز دارای روند تغییرات مشابه بوده، به طوری که در فرکانس های ارتعاشی پایین نتایج حاصل از این دو محیط یکسان است. همچنین دیده شد، اثر نفوذ پذیری بر محیط متخلخل اشباع با اثر استهلاك در یک سیستم دینامیکی متناظر است. به طوری که روند افزایش استهلاك در یک سیستم دینامیکی همسو با کاهش اثر نفوذ پذیری در یک محیط متخلخل اشباع است.

## مراجع

1. Biot, M. A., "General Theory of Three Dimensional Consolidation", *J. Appl. Phys.*, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
2. Biot, M.A., "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid - Saturated Porous Solid", *J. of the Acous. Soc. of America*, Vol. 28, No. 2, pp. 168-191, 1956.
3. Biot, M.A., "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media", *J. Appl. Phys.*, Vol 33, No. 4, pp. 1482-1498, 1962.
4. Simon, B.R., Wu, J.S.S., Zienkiewicz, O.C and Paul, D.K., "Evaluation of u - w and u- $\pi$  Finite Element Methods for The Dynamic Response of Saturated Porous Media Using One - Dimensional Model ", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 10, pp. 461-482, 1986.
5. Cleary, M.P., "Fundamental Solutions for a Fluid-Saturated Porous Solid ", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 785-806, 1977.
6. Rudnicki, J.W., "On Fundamental Solutions for a Fluid-Saturated Porous Solid, by M.P. Cleary", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 17, pp. 855-857, 1981.
7. Paul, S., "On Disturbance Produced in a Semi-Infinite Poroelastic Medium by a Surface Load", *Pure App. Geophys.*, Vol. 14, pp. 615-627. 1976.
8. Halpern, M. and Christiano, P., "Response of Poroelastic Halfspace to Steady-State Harmonic Surface Traction", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, Vol. 10, pp. 609-632, 1986.
9. Burridge, R. and Vargas, C.A., "The Fundamental Solution in Dynamic Poro-

- lasticity", *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, Vol. 58, pp. 61-90, 1979.
10. Keynia, A.M., "Green's Functions of Fluid-Saturated Porous Media", *Proceedings of the Second World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart, Germany, pp. 575-580, 1990.
  11. Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T., "Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media ; The Generalized Biot Formulation and Its Numerical Solution", *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geo.* , Vol. 8, pp. 71-96, 1984.
  12. Cheng, A.H.D., Badmus, T. and Beskos, D.E., "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain With BEM Solution", *J.of Eng.Mechanics* Vol. 117, No. 5, pp. 1136-1157, 1991.
  13. Suh, I.G. and Tosaka, N., " Boundary Element Analysis of Linear Coupled Thermoelasticity Problems by Using Laplace Transformation", *Boundary Element Methods in Applied Mechanics* ( Eds. Tanaka, M. and Cruse, T.A. ), Pergamon Press, pp. 535-544. 1988.
  14. Tosaka, N., "Boundary Integral Equation Formulations for Linear Coupled Thermoelasticity", *Proc. 3rd Jap. Symp. on B.E.M., JASCOME*, pp. 207-212, 1986.
  15. Tosaka, N. and Suh, I.G., "Boundary Integral Equation Formulation for the Generalized Theory of Dynamic Thermoelasticity ", *Proc. 4th Jap. Symp. on B.E.M., JASCOME*, pp. 111-116, 1987.
  ۱۶. خویی، ا.م.، مطالعه دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع به روش انتگرالهای مرزی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۰.
  - 17 Banerjee, P.K. and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
  18. Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press,

London, 1978.

19. Brebbia, C.A. and Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworth, London, 1980.
20. Brèbbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. , *Boundary Element Techniques (theory and applications in engineering)*, Springer - Verlag, Berlin, New York, 1984.