

تحلیل زلزله سازه‌های سه بعدی با پایه لغزشی به کمک تعیین سطح تسلیم

محمد مهدی سعادت پور* و نصرت‌الله فلاح**

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده - در این مقاله تحلیل دینامیکی سازه نامتقارنی بررسی می‌شود که با انتخاب تکیه‌گاه لغزشی برای آن از حرکت‌های تخریبی ناشی از زلزله زمین محافظت می‌شود. برای حل مسئله، نخست سعی شده است رفتار الاستیک - پلاستیک یک پایه مستطیلی واقع بر روی یک سطح لغزشی با ضریب اصطکاک مشخص بررسی شده و تعیین شود تحت چه ترکیبی از نیروی برشی و لنگر پیچشی مؤثر بر مرکز سطح آن در وضعیت لغزش قرار می‌گیرد. برای تحقق این امر فرض‌های ساده‌کننده‌ای به کار گرفته شده است. با مشخص شدن معادله ریاضی منحنی تسلیم، معیاری برای تفکیک فازهای لغزشی و غیر لغزشی به دست می‌آید. با کار برد این معیار در حل معادلات سیستم، نتایج قابل انطباقی با نتایج دقیق مبتنی بر روش اجزای محدود الاستیک - پلاستیک کامل [۹] حاصل شده است.

Earthquake Analysis of 3-D Structures on Sliding Foundation Using Yield Equation of the Contact Surface

M. M. Saadatpour and N. A. Falah

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT - A solution technique for the dynamic analysis of asymmetric base-isolated buildings, subject to earthquake ground motion, is presented. To develop the formulation, a yield surface as a function of both shear force and torsion moment of the sliding surface with rigid perfectly plastic behavior is constituted. To achieve the objective, the yield stress is defined by the friction coefficient through a simple relation. Having introduced the mathematical model of the yield surface, the simple conditions of being at the onset of sliding and non-sliding phases of motion are given. Based on the elaborated model, the earthquake dynamic analysis of a 3-D structure is performed. The results are in good agreement with those obtained by the finite-element modeling of the surface.

۱- مقدمه

مقاومت^{*} است، محافظت ساختمانها در برابر زلزله به کمک روش جلداسازی پایه^{*} نیز ممکن است. در روش تأمین مقاومت، اجزای ساختمان در طول عمر مفیدشان برای استحکام در مقابل نیروی ماکزیم ناشی از وقوع زلزله طراحی شده و شکل پذیری لازم برای

اگرچه روش متداول طراحی سازه‌ها در مقابل زلزله روش^{*} تأمین

* دانشیار ** مربی دانشگاه گیلان

فهرست علائم

V_x, V_y به ترتیب نیروی برشی سطح لغزشی در راستای x و راستای y	m ماتریس جرم پایه	A مساحت سطح لغزشی
W وزن کل بالای سطح لغزشی	m, c, k ماتریسهای خواص سازه	$\gamma\alpha, \gamma\beta$ ابعاد پایه مستطیلی
v_x, v_y, v_g به ترتیب بردار جابه‌جایی سازه، بردار جابه‌جایی پایه و بردار جابه‌جایی زمین	r_G شعاع ژیراسیون سطح لغزشی	F_s بردار نیروی مقاوم سطح لغزشی
K پارامتر کار - سختی	V, T نیروی برشی و گشتاور پیچشی سطح لغزشی	$\frac{k_e}{k_s}, \frac{k_{ep}}{k_s}, \frac{k_c}{k_s}$ ضریب سختی پایه
λ نسبت اضلاع پایه مستطیلی	V_e, T_e نیروی برشی و گشتاور پیچشی حدالاستیک سطح لغزشی	به ترتیب ماتریس سختی الاستیک سطح لغزشی، ماتریس سختی مماس سطح لغزشی و ماتریس تصحیح‌کننده سختی سطح لغزشی
μ ضریب اصطکاک پایه لغزشی	V_p, T_p نیروی برشی و گشتاور پلاستیک کامل سطح لغزشی	

صفر فرض شود. سپس این لایه به تعداد محدودی اجزای تفکیک شود و هر یک از این اجزای سطحی به منزله یک ستون کوچک نسبتاً صلب با سختی جانبی بسیار زیاد (مثلاً از مرتبه 10^2 برابر سختی جانبی سازه اصلی) و با مقاومت برشی محدود در نظر گرفته شود [9]. با این مدل به سادگی می‌توان یک سازه متکی بر این اجزای سطحی را تحلیل کرد [8]. از آنجا که حجم محاسبات در این حالت نسبتاً بالاست، سعی ما در این مقاله تعیین معادله منحنی تسلیم برای کل سطح لغزشی است تا حل ساده مسئله امکانپذیر شود. در این مقاله صرفاً تکیه‌گاه مستطیلی بررسی می‌شود، واضح است که به طریق مشابه می‌توان برای شکلهای دیگر تکیه‌گاهی منحنی تسلیم مناسبی استخراج کرد.

برای دستیابی به راه حل ساده تر استفاده از منحنی تداخل تسلیم در حالت وجود دو مؤلفه نیرو (یک مؤلفه پیچشی و یک مؤلفه برشی) و یا سطح تسلیم در حالت وجود سه مؤلفه نیرو (یک مؤلفه پیچشی و دو مؤلفه برشی) می‌توان به کمک روش اجزای محدود برای یک شکل خاص سطح تماس، منحنی تداخل نیروها و یا منحنی تسلیم را محاسبه کرد. برای تحقیق این موضوع با انتخاب نسبتهای مختلف نیروها و افزایش مقدار ضریب این نیروها تا رسیدن به حالت لغزش (سیلان) در هر دور محاسبه به یکی از نقاط این منحنی دست پیدا می‌کنیم و این کار را تا رسیدن به تعداد کافی نقاط برای ترسیم منحنی ادامه می‌دهیم. خوشبختانه برای تکیه‌گاه لغزشی مستطیلی برای هر دو حالت تسلیم اولیه و تسلیم کامل در صورت مشخص بودن نسبت ابعاد می‌توان به راه حل بسته دست یافت. پس از تعیین سطح تسلیم می‌توان به کمک مبانی نظری

آنها پیش بینی می‌شود. در روش جداسازی پایه، متفاوت با روش قبل، سعی می‌شود که از شدت زلزله اثرکننده به ساختمان کاسته شود. مزیت روش اخیر در رفتار الاستیک ساختمان به هنگام وقوع یک زلزله شدید است، زیرا شدت زلزله قبل از اثرگذاری بر روی سازه ساختمان کاهش می‌یابد.

از مکانیزمهای امکانپذیر برای جداسازی ارتعاشی یک ساختمان از زمین، استفاده از سطح لغزشی بین پایه و پی ساختمان است. پایه لغزشی برای تضعیف شتاب القایی زمین به ساختمان بسیار مؤثر است و تحلیل دینامیکی چنین سیستمی توسط محققان مختلفی انجام شده است [1، 2، 3 و 4]. رفتار پیچشی یک سیستم لغزشی نامتقارن به کمک روش اجزای سطحی توسط این مؤلفان مطالعه شده است [9]؛ اما مشکلی که در این مدل وجود دارد بالا بودن حجم محاسبات به دلیل تعداد اجزای الاستیک - پلاستیک سطحی ناشی از گسسته سازی سطح لغزشی است. با دقت در رفتار یک سیستم متقارن لغزشی روشن می‌شود که کمیت تفکیک‌کننده فازهای غیرلغزشی و لغزشی از یکدیگر تراز نیروی لغزشی سطح تماس پایه و پی است. بنابراین لازم است به این سؤال پاسخ داد که در تحلیل دینامیکی سیستمهای نامتقارن لغزشی که نیروی مؤثر بر سطح لغزشی شامل دو مؤلفه برشی و گشتاور پیچشی است، رابطه بین این دو مؤلفه نیرویی در هنگام لغزش چگونه است؟ بررسیهای انجام شده نشان می‌دهد که به کمک مدل مناسب و فرضهای ساده‌کننده، دسترسی به چنین معادله اثرات متقابل امکانپذیر است [6]. یک روش حل مسئله سازه متکی بر سطح لغزشی این است که سطح مورد نظر به هر شکلی که باشد به صورت لایه ای با ضخامت

می آید.

حرکت زمین در محدوده سطح پی یکنواخت و فاقد مؤلفه پیچشی است.

برای سازه شکل (۱) با درجات آزادی موجود، با جداگانه در نظر گرفتن جرم سازه و جرم پایه، معادلات حرکت دینامیکی چنین خواهند بود:

$$\underline{m}\ddot{\underline{v}}^t + \underline{c}\dot{\underline{v}} + \underline{k}\underline{v} = \underline{0} \quad (۱-الف)$$

$$\underline{m}_b\ddot{\underline{v}}_s^t + \underline{F}_s - \underline{c}\dot{\underline{v}} - \underline{k}\underline{v} = \underline{0} \quad (۱-ب)$$

به طوری که در این معادلات \underline{m} ، \underline{c} و \underline{k} به ترتیب ماتریسهای جرم، میرایی و سختی سازه و \underline{v} بردار جابه جایی نسبی آن است. اندیس t برای کل و اندیس s برای سطح لغزشی به کار رفته است. \underline{F}_s بردار نیروی مقاوم از طرف سطح، \underline{m}_b ماتریس جرم پایه و \underline{v}_s بردار جابه جایی سطح است. روابط زیر برقرار است:

$$\underline{v}^t = \underline{v} + \underline{v}_s^t \quad (۲-الف)$$

$$\underline{v}_s^t = \underline{v}_s + \underline{v}_g \quad (۲-ب)$$

با اعمال معادلات (۲) در معادلات (۱) خواهیم داشت:

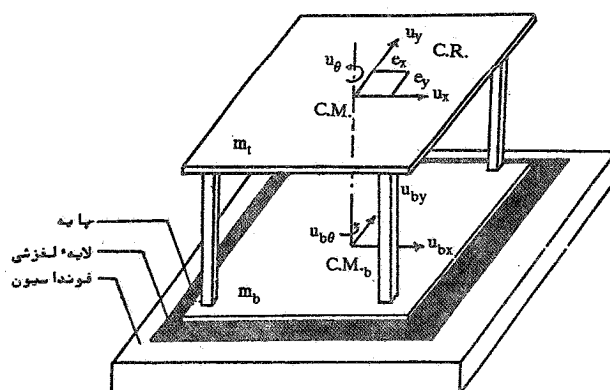
$$\underline{m}\ddot{\underline{v}} + \underline{c}\dot{\underline{v}} + \underline{k}\underline{v} = -\underline{m}\ddot{\underline{v}}_s - \underline{m}\ddot{\underline{v}}_g \quad (۳-الف)$$

$$(\underline{m} + \underline{m}_b)\ddot{\underline{v}}_s + \underline{F}_s = -\underline{m}\ddot{\underline{v}} - (\underline{m} + \underline{m}_b)\ddot{\underline{v}}_g \quad (۳-ب)$$

بردار نیروی بازگرداننده \underline{F}_s یک بردار ناپایستار است. از این رو حل معادلات (۳) جز به روش افزایشی میسر نیست. شکل افزایشی معادلات (۳) چنین است:

$$\underline{m}\Delta\ddot{\underline{v}} + \underline{c}\Delta\dot{\underline{v}} + \underline{k}\Delta\underline{v} = -\underline{m}\Delta\ddot{\underline{v}}_s - \underline{m}\Delta\ddot{\underline{v}}_g \quad (۴-الف)$$

$$(\underline{m} + \underline{m}_b)\Delta\ddot{\underline{v}}_s + \Delta\underline{F}_s = -\underline{m}\Delta\ddot{\underline{v}} - (\underline{m} + \underline{m}_b)\Delta\ddot{\underline{v}}_g \quad (۴-ب)$$



شکل ۱- سازه سه بعدی متکی بر تکیه گاه لغزشی

پلاستیسیته [۱۱] ماتریس سختی دو مؤلفه ای پایه لغزشی را به دست آورد [۱۲]. آن گاه مسئله رفتار دینامیکی سازه اصلی بر روی تکیه گاه لغزشی با ماتریس سختی غیر خطی را حل کرد.

۲- فرمولبندی معادلات سیستم

برای فرمولبندی معادلات دینامیکی یک سیستم سازه ای متکی بر پایه لغزشی با عدم انطباق مراکز سختی و جرم، مدل سازه شکل (۱) را در نظر می گیریم. این مدل یک ساختمان نامتقارن با ۳ درجه آزادی متکی بر یک پایه لغزشی است که در هنگام لغزش پایه، ۳ درجه آزادی اضافی در سیستم پدید می آید. سیستم ساده ساختمان اصلی ممکن است حقیقتاً یک سیستم ۳ درجه آزادی بوده و یا نمایانگر یک سازه چند طبقه با شرایط مشابه طبقات بر روی لایه لغزشی باشد که در مودهای اولیه خود ارتعاش می کند [۵]. چنین کاهش درجات آزادی با توجه به حالت ارتعاشی حاکم بر سازه های ایزوله، که عمدتاً در مودهای اولیه ارتعاشی خود حرکت می کنند، معقول به نظر می رسد. در بیان معادلات حرکت و حل آنها، فرضهای زیر مورد توجه قرار می گیرند:

ضریب اصطکاک استاتیکی و دینامیکی یکسان اند.

رفتار سازه الاستیک خطی است.

پی ساختمان نسبت به زمین هیچ حرکت خطی، دورانی، و یا پیچشی ندارد.

پیچش فقط در اثر عدم تطابق مرکز جرم و مرکز سختی سازه پدید

به طوری که

$$\Delta F_s = k_s \Delta v_s \quad (5)$$

به طوری که

$$k_x^e = k_y^e = \int_A k dA = kA, \quad k_t^e = \int_A r^2 k dA = kAr_G^2 \quad (V)$$

که k سختی واحد سطح لغزشی و r_G شعاع ژیراسیون این سطح است.

پیش از تعریف هر گونه معادله تسلیم لغزشی، نخست به تعریف تسلیم اولیه و تسلیم نهایی می پردازیم.

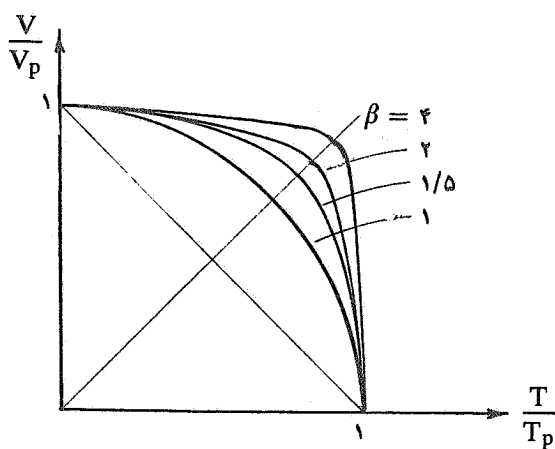
تسلیم اولیه، حالتی است که در اثر اعمال نیروهای پایه، در یک نقطه و یا به طور همزمان در چند نقطه سطح تسلیم صورت می گیرد.

تسلیم نهایی، حالتی است که در اثر اعمال نیروهای پایه، در کلیه نقاط سطح لغزشی تسلیم صورت می گیرد.

معادله تسلیم نهایی: در این حالت استخراج سطح تسلیم از روش اجزای محدود برای شکلهای مختلف سطح لغزشی امکانپذیر است [۹]. مشابه با کارکان و چوپرا [۶]. می توان منحنی تسلیم را چنین پیشنهاد کرد [۱۰].

$$f_{p(V,T)} = \left(\frac{V}{V_p}\right)^{\alpha} + \left(\frac{T}{T_p}\right)^{\beta} - 1 = 0 \quad (8)$$

به طوری که α و β ضرایب ثابتی هستند که مقدار آنها از یک تا هر مقدار بزرگی تغییر می کند. در حالت $\alpha = \beta = 1$ منحنی تسلیم به شکل دایره و به ازای $\alpha = \beta > 1$ این دایره به سوی کنجی که از ترسیم خطوط مماس در نقاط $x = 0$ و $y = 0$ حاصل می شود میل می کند، شکل (۲). در حالت $\alpha \neq \beta$ تقارن نسبت به نیمساز کنج اول از بین می رود.



شکل ۲ - منحنی تداخل V و T برای تسلیم کامل

k_s ماتریس سختی مماس سطح است که بعداً معرفی می شود. c ماتریس میرایی سازه اصلی است که به روش ریلی و یا از نسبتهای معین میرایی ارزیابی می شود. ماتریس میرایی سطح صفر فرض می شود.

برای حل معادلات (۴) روشهای عددی متعددی وجود دارد که در اینجا از الگوی شتاب خطی استفاده شده است [۷].

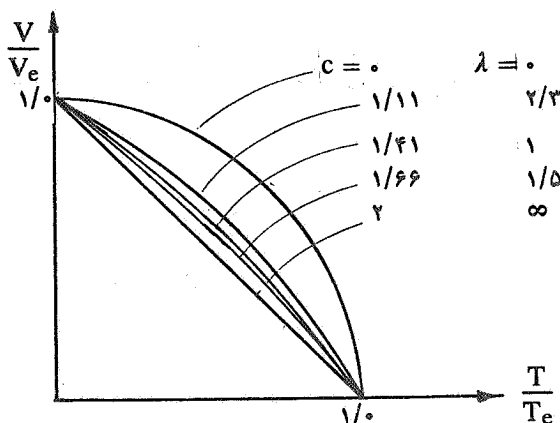
۳- وضعیت تسلیم سطح لغزشی

به منظور تعیین وضعیت تسلیم لغزشی برای تعیین ماتریس سختی پایه باید گفت، که سختی لایه در حالت غیر لغزشی نامحدود و در حالت لغزشی صفر است. تفکیک صریح حرکت دینامیکی سازه متکی بر پایه لغزشی به دو فاز غیر لغزشی و لغزشی ایجاب می کند که برای این دو فاز از دو مجموعه متفاوت معادلات حرکت استفاده شود که تا حدودی مفصل است. از این رو برای سهولت حل، برای سطح لغزشی از یک سختی بسیار بزرگ (مثلاً از مرتبه 10^2 برابر سختی سازه اصلی) استفاده می شود. می توان باور داشت که چنین سختی زیادی در مقایسه با سختی سازه به سادگی می تواند جایگزین سختی نامحدود سطح لغزشی در حالت غیر لغزشی شود. اگر رفتار سطح به صورت الاستیک - پلاستیک فرض شود، با فرارسیدن حد پلاستیک به طور طبیعی سختی بسیار زیاد حالت الاستیک به سختی صفر حالت لغزشی تبدیل می شود.

ماتریس سختی سطح لغزشی در سه حالت متمایز زیر به سادگی محاسبه پذیر است.

حالت پیش از تسلیم اولیه: حالتی که تراز تنش برشی در هیچ نقطه ای از سطح لغزشی به تراز تنش لغزش نرسیده باشد. در این حالت، اگر ماتریس سختی پایه به عنوان ماتریس سختی الاستیک تلقی شده و با k_s^e نشان داده شود، می توان نوشت:

$$k_s^e = \begin{bmatrix} k_x^e & & \\ & k_y^e & \\ & & k_t^e \end{bmatrix} \quad (6)$$



شکل ۳ - منحنی تسلیم اولیه پایه صلب لغزشی بر حسب مقادیر مختلف نسبت ابعاد

محدوده کاربرد اکثر تکیه گاهها نشان می دهد که فرض معادله (۸) برای سطح تسلیم این گونه پایه ها یک فرض مناسب است [۱۰]. برای دسترسی به این معادله، فرضهای زیر در ارائه مدل اجزای محدود مورد توجه بوده است.

وزن سیستم به طور یکنواخت بر روی لایه لغزشی توزیع شده است.

تماس بین لایه لغزشی و سازه همواره برقرار است.

نیروی برشی موجود در مرکز جرم پایه به نسبت وزن تحمیلی

روی سطح هر یک از اجزا بین آنها تقسیم می شود.

پیش از آغاز تسلیم لایه لغزشی، مقدار تنش برشی ناشی از اثر

گشتاور پیچشی بر روی هر المان متناسب با فاصله شعاعی آن المان

از مرکز سطح بوده و راستای آن عمود بر این شعاع است.

با تمرکز مطالعه روی وضعیتی که خروج از مرکزی e_x صفر

است، یعنی سازه نسبت به محور y متقارن باشد، و حرکت زلزله در

راستای x اعمال شود، نیروهای مؤثر بر مرکز سطح برشی دو نیروی

برشی $V_x = V$ و گشتاور پیچشی T خواهد بود (شکل ۴). مقدار

حدی الاستیک این کمیتها به ترتیب با V_e و T_e و مقدار پلاستیک

آنها با V_p و T_p نشان داده می شود. در ضمن، معادلات (۹) و (۸) که

به ترتیب در شکلهای ۳ و ۲ رسم شده اند، برای تعیین وضعیت

تسلیم اولیه و تسلیم نهایی به کار می روند. گفتنی است که در این

معادلات V_p و V_e یکسان هستند و چنین محاسبه می شوند:

$$V_e = V_p = \mu W \quad (10)$$

حالت بین تسلیم اولیه و تسلیم نهایی: معادله تسلیم اولیه را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$f_{e(V,T)} = \left(\frac{V}{V_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 + c\left(\frac{V}{V_e}\right)\left(\frac{T}{T_e}\right) - 1 = 0 \quad (9)$$

به طوری که V_e و T_e به ترتیب برش تسلیم و گشتاور تسلیم c و یک ضریب ثابت است (شکل ۳). بدیهی است که در فاصله تسلیم اولیه و تسلیم نهایی هنوز هم سختی لغزشی وجود خواهد داشت که ممکن است اثر آن را با معرفی یک پارامتر کار سختی K در معادله منحنی $f_{e(V,T)} = 0$ منظور نمود [۱۱]. اما از آنجا که ضریب سختی K در مقایسه با سختی سازه اصلی بسیار زیاد اختیار می شود، می توان گفت که با پلاستیک شدن بخشی از سطح لغزشی تغییر قابل توجهی در سختی آن نسبت به سختی سازه اصلی پدید نمی آید. به عبارتی، وضعیت غیر لغزشی صلب کامل تا فرارسیدن تسلیم نهایی به خوبی جوابگوی این حالت نیز هست. بنابراین، برای سختی این حالت از همان معادله (۶) استفاده می شود. در صورتی که برخورد دقیقتری مورد نظر باشد، با توجه به یکسان بودن نیروی برشی پلاستیک V_p و نیروی برشی تسلیم V_e ، می توان به سادگی به جای استفاده از مقدار T_p در معادله (۸)، که در حقیقت حالت حدی الاستیک - پلاستیک و یا وضعیت پلاستیک کامل را مشخص می کند، تنها تصحیحی در مقدار T_p انجام داد و از این معادله به عنوان معادله تسلیم استفاده کرد. یعنی به جای T_e و T_p و تمایز بین تسلیم اولیه و تسلیم نهایی از یک مقدار کاهش یافته T_p و تعیین یک منحنی تسلیم واقع بین این دو منحنی حقیقی بهره برد. روش تصحیح T_p علاوه بر اینکه ممکن است بستگی به شکل و تراز بار اعمالی به پایه داشته باشد، به شکل پایه نیز وابسته است. برای تعیین دقیق آن می توان به روش اجزای محدود عمل کرد.

۴- محاسبه ماتریس سختی پایه

با معرفی ماتریسهای سختی الاستیک k_s^e و سختی تصحیح کننده k_s^c برای سطح لغزشی سیستم شکل (۱) امکان انجام حل دینامیکی این سیستم میسر می شود. دقت چنین حلی در گروهی انتخاب صحیح سطح تسلیم لغزشی است. مطالعات اجزای محدود انجام گرفته بر روی تکیه گاههای لغزشی با نسبت ابعادی $\frac{b}{a}$ واقع در

به طوری که $\tan \theta = \frac{b}{a}$ است.

رفتار غیر لغزشی خطی پایه: به حالتی اطلاق می شود که پایه در شرایطی باشد که در هیچ نقطه آن تنش تسلیم به مقدار تنش حدی نرسیده باشد. در این حالت سختی پایه ثابت و شرط زیر برقرار است:

$$\left(\frac{V}{V_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 + c\left(\frac{V}{V_e}\right)\left(\frac{T}{T_e}\right) < 1 \quad (15)$$

رفتار غیر لغزشی غیر خطی پایه: به حالتی گفته می شود که در نقطه یا نقاطی از پایه، تنش برشی به مقدار تنش تسلیم τ برسد. در این حالت، سختی پایه تغییر می کند و شرایط زیر برقرار است:

$$\left(\frac{V}{V_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 + c\left(\frac{V}{V_e}\right)\left(\frac{T}{T_e}\right) \geq 1 \quad (16 - الف)$$

$$\left(\frac{V}{V_p}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{T}{T_p}\right)^{2\beta} < 1 \quad (16 - ب)$$

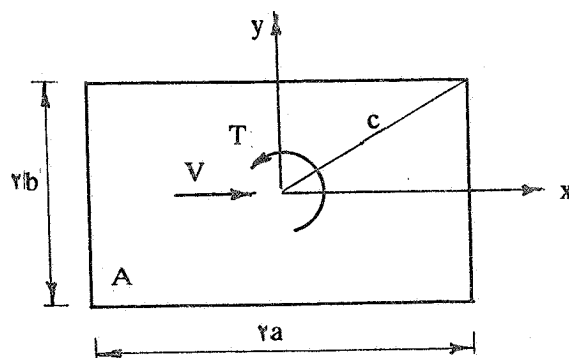
منحنی تداخل V و T در حالت تسلیم اولیه (معادله ۱۶ - الف با علامت تساوی) در شکل (۳) برای یک چهارم مقطع رسم شده است. تقارن نسبت به هر محور برقرار است. در این فاز حرکتی باید گفت که چون مقدار k برای سطح لغزشی بسیار زیاد انتخاب شده است، بنابراین با وجود تسلیم قسمتی از سطح، از آنجا که با شرایط عدم وقوع لغزش مواجه ایم می توان این فاز حرکتی را از دیدگاه تأثیر گذاری بر جوابها با فاز حرکتی قبلی یکسان گرفت و تغییری در سختی پایه منظور نکرد.

می توان نشان داد که پارامتر c کاملاً تابع نسبت b/a است. این وابستگی را به صورت زیر می نویسیم [۱۰]:

$$c = \frac{2b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{2\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (17)$$

در این معادله، $\lambda = b/a$ است.

رفتار لغزشی پایه: هنگامی وجود دارد که مؤلفه های نیروی پایه معادله تسلیم را ارضا کنند. این معادله که در حالت کلی به شکل ترسیمی قابل نمایش است، در حالت سطح لغزشی مستطیلی با توجه به نتایج استخراج شده از روش اجزای محدود به شکل معادله



شکل ۴ - سطح لغزشی تحت اثر نیروی برشی V و گشتاور پیچشی T به طوری که μ ضریب اصطکاک و W وزن کل است. گشتاور پیچشی حدی الاستیک T_e به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T_e = \int_A r \tau dA \quad (11)$$

مشروط بر اینکه تنش برشی ماکزیمم به مقدار تنش حدی τ انتخاب شود. مقدار T_e برای شکل های نامنظم به روش اجزای محدود [۹] و برای شکل های منظم به صورت تحلیلی محاسبه پذیر است. مثلاً برای یک سطح مستطیلی با مشخصات شکل (۴) داریم [۱۰]:

$$T_e = \frac{\tau}{c} \frac{4}{3} a^2 \lambda (1 + \lambda^2) \quad (12)$$

که در آن $\lambda = b/a$ و $\tau c = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}$ قطر مستطیل و λ نسبت اضلاع آن است. همچنین برای محاسبه گشتاور پیچشی پلاستیک می توان چنین عمل کرد:

$$T_p = \int_A r \tau_c dA \quad (13)$$

که در آن τ_c تنش برشی تسلیم است. مقدار T_p برای یک مقطع مستطیلی چنین است:

$$T_p = \frac{2}{3} \tau_c a^3 \left\{ \lambda \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \frac{1 + \tan \theta / \lambda}{1 - \tan \theta / \lambda} \right) + \left(\frac{\sin \theta'}{\cos^2 \theta'} + \ln \frac{1 + \tan \theta' / \lambda}{1 - \tan \theta' / \lambda} \right) \right\} \quad (14)$$

(۱۶- ب) ارائه پذیر است. ضرایب α و β تابعی از نسبت ابعادی $\lambda = \frac{b}{a}$ هستند که به روش کوچکترین مربع خطا از مقایسه معادله (۱۶- ب) و نتایج عددی تعیین می‌شوند.

در حالت لغزشی، ماتریس سختی پایه از اصول پلاستیسیته محاسبه می‌شود. این ماتریس برای دو درجه آزادی حرکت خطی و لغزشی به صورت زیر است:

$$\underline{k}_s^{EP} = \underline{k}_s^c - \underline{k}_s^e \quad (18)$$

که \underline{k}_s^c ماتریس سختی الاستیک (غیرلغزشی) سطح لغزشی و \underline{k}_s^e ماتریس تصحیح کننده سطح لغزشی است. ماتریس \underline{k}_s^e با حذف سطر و ستون دوم ماتریس معادله (۶) و ماتریس \underline{k}_s^e به صورت زیر ارائه می‌شود (به پیوست مراجعه شود):

$$\underline{k}_s^c = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} k_{\gamma}^{\gamma} k_{\gamma}^{\gamma} & k_{\gamma} k_{\gamma} k_{\gamma} \\ k_{\gamma} k_{\gamma} k_{\gamma} & k_{\gamma}^{\gamma} k_{\gamma}^{\gamma} \end{bmatrix} \quad (19)$$

به طوری که

$$D = k_{\gamma}^{\gamma} k_{\gamma} + k_{\gamma} k_{\gamma}^{\gamma} \quad (20)$$

$$k_{\gamma} = \frac{1}{V_p} (\gamma \alpha \frac{V^{\gamma \alpha - 1}}{V_p}) \quad (21)$$

$$k_{\gamma}^{\gamma} = \frac{1}{T_p} (\gamma \beta \frac{T^{\gamma \beta - 1}}{T_p})$$

۵- تعیین وضعیت پایه

با حل معادلات حرکت (۴) در هر فاصله زمانی Δt که منجر به دستیابی به مؤلفه‌های جابجایی می‌شود و محاسبه ΔF_s به کمک معادله (۵)، به سادگی می‌توان به تعیین بردار نیروی مقاوم F_s اقدام کرد. با استفاده از مقادیر لحظه ای V و T که از بردار F_s استخراج می‌شوند و محاسبه تابع تسلیم معادله (۱۸) به ازای این مقادیر محاسبه شده، دو حالت زیر ممکن است تحقق یابد:

$$\underline{f}_{p(V,T)} < 0 \quad \text{فاز غیرلغزشی} \quad (22- الف)$$

$$\underline{f}_{p(V,T)} = 0 \quad \text{فاز لغزشی} \quad (22- ب)$$

بدیهی است وضعیتی که دقیقاً تابع f_p صفر شود به ندرت اتفاق می‌افتد. از این رو فاز لغزشی وقتی در جریان است که در حقیقت مقدار f_p از محاسبه مساوی یا بزرگتر از صفر شود. هرگاه معادله (۲۲- الف) برقرار باشد، محاسبات قدم جدید زمانی به همان روال محاسبات قدم قبلی با ماتریس سختی \underline{k}_s^e ادامه می‌یابد. در صورتی که معادله (۲۲- ب) تحقق یابد، محاسبات قدم جدید زمانی به همان روال محاسبات قدم قبلی، اما با ماتریس سختی \underline{k}_s^{EP} که در معادله (۱۹) ارائه شد، صورت می‌گیرد.

هرگاه سطح لغزشی در آغاز قدم زمانی در حالت لغزشی باشد، با انجام محاسبات و تکمیل قدم زمانی به نحوی که توضیح داده شد وضعیت جدید پایه پس از تعیین نمودار پلاستیک (لغزشی) ΔW^P مشخص می‌شود. نمودار پلاستیک چنین تعریف می‌شود:

$$\Delta W^P = F_s^T \Delta v_s^P \quad (23)$$

به طوری که Δv_s^P نمودار جابجایی پلاستیک است و از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta v_s^P = \Delta v_s - (k_s^e)^{-1} \Delta F_s \quad (24)$$

هرگاه محاسبات انجام شده مقدار ΔW^P را مثبت نشان دهد، رفتار سیستم ادامه همان رفتار لغزشی است. اگر ΔW^P منفی شود، مؤید آن است که سیستم از حالت رفتار لغزشی به رفتار غیر لغزشی تغییر فاز می‌دهد. در این صورت برای اطمینان از اینکه وضعیت جدید یک وضعیت غیر لغزشی است و یا وضعیت لغزشی متضاد با وضعیت قبلی، لازم است تابع پلاستیک f_p محاسبه شود.

۶- ارائه مثال و ارزیابی دقت روش سطح تسلیم

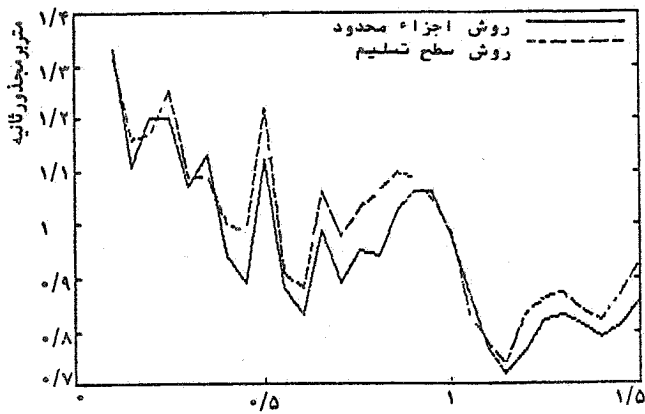
برای نشان دادن دقت روش سطح تسلیم، طیفهای پاسخ یک سازه پیچشی به کمک این روش و با تابع تسلیم f_p به ازای $\alpha = \beta = 1$ در شکل‌های (۵ تا ۹) ارائه شده است. مثال ارائه شده از همان مثال مرجع [۹] و تابع تحریک پایه مؤلفه شمالی - جنوبی شتابنگاشت الاسترو انتخاب شده است. ویژگیهای سیستم انتخاب شده در زیر آمده است:

$$a = 10m, \lambda = \frac{b}{a} = 1, \mu = 0/1, \frac{m_t}{m_b} = 4, \frac{e_y}{r} = 0/2$$

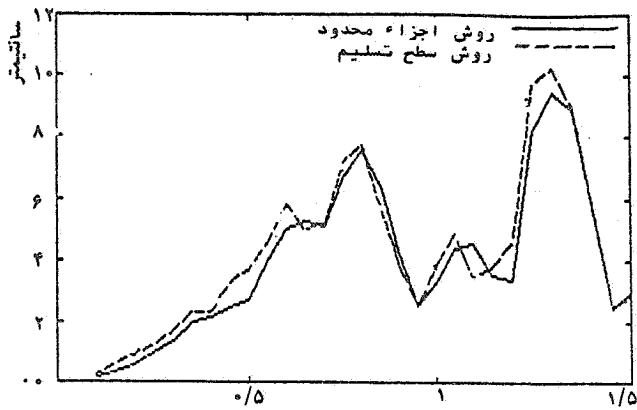
در شکل (۵) شتاب ماکزیمم مطلق جرم فوقانی یا جرم اصلی بر حسب پرپود راستای x سازه متقارن نظیر رسم شده است. روی همین شکل طیف مشابهی نشان داده شده که از روش اجزای محدود محاسبه شده است. همان گونه که می بینید، اختلاف این دو طیف، جز در پرپودهای کوتاه، بسیار ناچیز است. این در حالی است که در روش سطح تسلیم حجم محاسبات کامپیوتری بسیار کمتر از روش اجزای محدود است. در شکل (۶) طیف شتاب ماکزیمم پیچشی به دو روش مذکور رسم شده است. مجدداً مشاهده می شود که اختلاف این دو طیف بسیار ناچیز است. شکل (۷) طیف ماکزیمم جابه جایی لغزشی جانبی و شکل (۸) طیف ماکزیمم جابه جایی لغزشی پیچشی را نشان می دهند که به هر دو روش ترسیم شده اند. در هر دو شکل، به ویژه شکل (۷)، اختلاف بین دو روش محاسبه بسیار کم است.

۷- نتیجه گیری

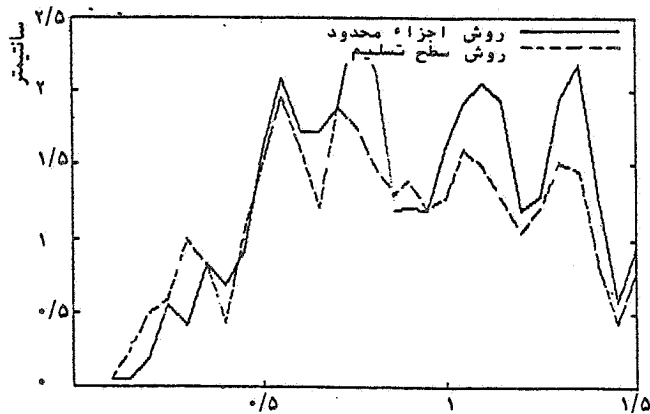
برای تحلیل سریعتر سیستمهای نامتقارن متکی بر تکیه گاه لغزشی، روش سطح تسلیم معرفی شده است. با معرفی منحنیهای



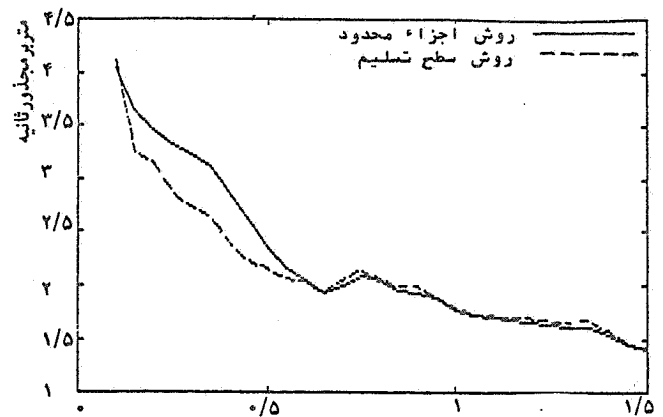
شکل ۶ - شتاب مطلق پیچشی ماکزیمم جرم فوقانی



شکل ۷ - جابه جایی لغزشی جانبی ماکزیمم



شکل ۸ - جابه جایی لغزشی پیچشی ماکزیمم



شکل ۵ - شتاب مطلق جانبی ماکزیمم جرم فوقانی

تسلیم اولیه و نهایی و مطالعه بر روی آنها نتیجه می شود که به طور کلی منحنی تسلیم اولیه برای پایه های مستطیلی به شکل لوزی است و شکل منحنی تسلیم نهایی برای پایه های مستطیلی به نسبت اضلاع پایه بستگی دارد. با بیان تقریبی منحنی تسلیم پایه در حالتی بین تسلیم اولیه و نهایی به کمک یک معادله ریاضی، معیار تسلیم پایه لغزشی معرفی و در تحلیل دینامیکی سیستم از آن استفاده شده است. با تحلیل دینامیکی سیستم لغزشی به کمک معیار فوق، نتایج قابل مقایسه ای با نتایج حاصل از روش اجزای محدود استخراج شده است. برنامه کامپیوتری وزمان محاسباتی لازم برای این مدل در مقایسه با مدلی که قبلاً معرفی شده [۸ و ۹] بسیار ساده تر و اجرای آن سریعتر است.

پیوست تعیین ماتریس سختی تصحیح کننده

ابتدا مؤلفه های جابه جایی سطح لغزشی را به صورت زیر می نویسیم:

$$dv_s = dv_s^e + dv_s^p$$

$$d\theta = d\theta^e + d\theta^p$$

یا

$$\begin{bmatrix} dv_s \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_s^e \\ d\theta^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dv_s^p \\ d\theta^p \end{bmatrix} \quad (1-p)$$

$$dv_s = dv_s^e + dv_s^p$$

که اندیس e برای الاستیک و اندیس p برای پلاستیک است. از طرفی می توان نوشت:

$$dv_s^e = \underline{k}^{e-1} d\bar{F}_s \quad (2-p)$$

$$dv_s^p = d\lambda (\partial f / \partial \bar{F}_s) \quad (3-p)$$

به طوری که f مطابق زیر تعریف می شود و dλ ضریب محاسبه جابه جایی پلاستیک است:

$$f = \left(\frac{V}{V_p}\right)^{\gamma\alpha} + \left(\frac{T}{T_p}\right)^{\gamma\beta} - 1 = 0$$

با جاگذاری معادلات (3-p) و (2-p) در معادله (1-p) نتیجه می شود:

$$d\bar{v} = \underline{k}^{e-1} d\bar{F}_s + d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right) \quad (4-p)$$

همچنین

$$\frac{\partial f^T}{\partial \bar{F}_s} = \left\langle \gamma\alpha \frac{V^{\gamma\alpha-1}}{V_p} \frac{1}{V_p} \quad \gamma\beta \frac{T^{\gamma\beta-1}}{T_p} \frac{1}{T_p} \right\rangle \quad (5-p)$$

با پیش ضرب معادله (4-p) در $\underline{k}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T$ داریم:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e d\bar{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T d\bar{F}_s + d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right) \quad (6-p)$$

همچنین

$$f = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T d\bar{F}_s = 0 \quad (7-p)$$

با جاگذاری معادله (7-p) در معادله (6-p) و حل آن برای dλ نتیجه می گیریم:

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e d\bar{v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)} \quad (8-p)$$

بنابراین اگر از معادله (8-p) در معادله (4-p) استفاده شود، خواهیم داشت:

$$d\bar{v} = \underline{k}^{e-1} d\bar{F}_s + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)} \underline{k}_p d\bar{v}$$

پس

$$d\bar{F}_s = \left\{ \underline{k}^e - \underline{k}^e \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)^T \underline{k}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{F}_s}\right)} \right\} d\bar{v}$$

یا

$$d\bar{F}_s = \underline{k}^e d\bar{v} - \underline{k}^c d\bar{v} \quad (9-p)$$

به طوری که k^c ماتریس تصحیح کننده است و به صورت زیر نوشته می شود:

$$\underline{k}^c = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \left[k \frac{1}{V_p} \gamma \alpha \left(\frac{V}{V_p} \right)^{\gamma \alpha - 1} \right]^2 & k k_t \left[\frac{1}{V_p} \gamma \alpha \left(\frac{V}{V_p} \right)^{\gamma \alpha - 1} \frac{1}{T_p} \gamma \beta \left(\frac{T}{T_p} \right)^{\gamma \beta - 1} \right] \\ k k_t \left[\frac{1}{T_p} \gamma \beta \left(\frac{T}{T_p} \right)^{\gamma \beta - 1} \frac{1}{V_p} \gamma \alpha \left(\frac{V}{V_p} \right)^{\gamma \alpha - 1} \right] & \left[k_t \frac{1}{T_p} \gamma \beta \left(\frac{T}{T_p} \right)^{\gamma \beta} \right]^2 \end{bmatrix} \quad (پ - ۱۰)$$

که در آن:

$$D = k \left[\frac{1}{V_p} \gamma \alpha \left(\frac{V}{V_p} \right)^{\gamma \alpha - 1} \right]^2 + k_t \left[\frac{1}{T_p} \gamma \beta \left(\frac{T}{T_p} \right)^{\gamma \beta - 1} \right]^2$$

مراجع

1. Westermo, B., and Udvadia, F., "Periodic Response of a Sliding Oscillator System to Harmonic Excitation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 135-146, 1983.
2. Mostaghel, N., Hejazi, M., and Tankabuchi, J., "Response of Sliding Structures to harmonic Support Motion," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 355-366, 1983.
3. Mostaghel, N., and Takabuchi, J., "Response of Sliding Structure to Earthquake Support Motion," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 729-248, 1893.
4. Yong, Y-B., Lee, T-Y., and Tsai, I-C., "Response of Multidegree of Freedom Structures with Sliding Supports," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 739-752, 1990.
5. Lee, D. M., "Base Isolation for Torsion Reduction in Asymmetric Structures under Earthquake Loading," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, pp. 349-359, 1980.
6. Kan, C. I., and Chopra, A. K., "Linear and Nonlinear Earthquake Responses of Simple Torsionally Coupled Systems," Report No. UCB/EERC - 79 /03, Earthquake Engineering Research Center, University of California, California, Feb. 1979.
7. Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
۸. سعادت پور، م. م.، فلاح، ن.، "تحلیل دینامیکی سازه های نامتقارن متکی بر تکیه گاه لغزشی"، کنگره بین المللی روشهای محاسباتی در مهندسی، جلد سوم، شیراز ۱۲-۱۶ اردیبهشت ۱۳۷۲.
۹. فلاح، ن.، "تحلیل دینامیکی سازه های نامتقارن متکی بر تکیه گاه لغزشی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۰.
۱۰. سعادت پور، م. م.، بررسی منحنیهای تداخل یک پایه لغزشی، در دست نگارش.
11. Mendelson, A., *Plasticity, Theory and Applications*, Mc Millan Company, New York, 1968.
12. Meek, J. L., *Computer Methods in Structural Analysis*, E & FN SPON, 1991.