

تحلیل اجزای مرزی هدایت گرمای غیر خطی شامل منابع تولید گرمای نقطه‌ای، خطی و گسترده با انتگرالگیری تحلیلی

قدرت ... کرمی* و محمد رحیم همتیان**

بخش مهندس مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۷۷/۸/۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۸/۷/۲۳)

چکیده - این مقاله به تحلیل اجزای مرزی مسائل دو بعدی و سه بعدی هدایت گرمای دائمی و غیر خطی می‌پردازد. اعمال اثر منابع تولید گرمای نقطه‌ای، خطی و گسترده یکنواخت به طور دقیق و بدون احتیاج به انتگرالگیری در دامنه انجام می‌گیرد. کلیه انتگرالهای مرزی در مسئله دو بعدی با در نظر گرفتن المان خطی به صورت کاملاً تحلیلی ارزیابی می‌شود و احتیاجی به استفاده از روشهای انتگرالگیری عددی نخواهد بود. این عمل باعث افزایش قابل ملاحظه دقت نتایج می‌شود. این بهبودی در نتایج وقتی چشمگیر است که شکل دامنه پیچیده بوده و دارای نواحی نازک باشد و یا اینکه جواب در دامنه و در نزدیکی مرز خواسته شده باشد. هنگامی که ضریب هدایت گرما وابسته به دما باشد رفتار غیر خطی در مسئله ظاهر می‌شود. در اینجا با استفاده از تبدیل کیرشف^۱ مسئله به شکل خطی در آمده است تا احتیاجی به تقسیمبندی دامنه نباشد. نهایتاً با ارائه چند مثال کارایی و دقت روشهای ارائه شده نشان داده شده است.

Boundary Element Analysis of Nonlinear Heat Conduction Problem with Point, Line and Distributed Heat Sources Employing Analytical Integrations

G. Karami and M. R. Hematiyan

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University

ABSTRACT- *This paper is concerned with the implementation of boundary element analysis of two and three dimensional problems of nonlinear heat conduction. Point, line and uniform distributed heat sources within the domain are exactly implemented with no need of domain discretization. The boundary integrals developed are evaluated analytically, thus no numerical integration would be required. This will enhance the accuracy of the solutions especially when the geometric boundary of the domain is complex or the body is thin*

*** - دانشجوی دکترا

** - استاد

or in cases where solution in the vicinity of the boundary is required. For the problems with thermal conductivity temperature dependent a nonlinear behavior is expected which would be dealt with kirchhoff transformation. The efficiency and accuracy of the methods are explored through several examples.

۱- مقدمه

روش اجزای مرزی (BEM) به عنوان یک الگوریتم محاسباتی نسبتاً دقیق کاربردهای فراوانی در حل مسائل مختلف پیدا کرده است. مسئله هدایت گرما و مسائل شبیه آن با استفاده از روش اجزای مرزی توسط محققانی در این زمینه [۱-۶] مدل سازی شده است.

در تحقیقات قبلی برای محاسبه انتگرالهای مرزی از روشهای عددی استفاده شده است. در این مقاله انتگرالهای مرزی برای دامنه دوبعدی و المان مرزی خطی به صورت تحلیلی محاسبه می شوند تا دقت تحلیل دو چندان شود. البته برای حل مسائل الاستیسیته دوبعدی خطی روشی با عنوان کانطور مرزی ارائه شده است که در آن انتگرالها به صورت تحلیلی محاسبه می شوند [۷]. اثر منبع تولید گرمای گسترده در فرمولبندی اجزای مرزی به صورت یک انتگرال روی دامنه ظاهر می شود [۱]. در این مقاله در حالتی که منبع تولید گرمای گسترده، دارای شدت یکنواخت است، راهی برای تبدیل آن انتگرال از دامنه به مرز بیان شده است برای این منظور در مسئله دوبعدی از فرمول گرین^۲ و در مسئله سه بعدی از قضیه گرین - گوس^۳ استفاده شده است. انتگرال مرزی مزبور در مسئله دوبعدی به صورت تحلیلی و در مسئله سه بعدی به صورت عددی ارزیابی می شود. در هر حال برای اعمال کردن اثر منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت احتیاج به تقسیم بندی دامنه نیست. انواع دیگر منابع تولید گرما، منابع نقطه ای و خطی اند که در آنها تولید گرما در یک نقطه و یا در یک پاره خط متمرکز است. بررسی این منابع تولید گرما دارای کاربردهای عملی است که برای نمونه می توان به طراحی گرمایی قطعات الکترونیکی اشاره کرد.

در این مقاله نحوه اعمال کردن دقیق اثر منابع تولید گرمای نقطه ای و خطی در هر دو حالت دو بعدی و سه بعدی ارائه می شود. منبع تولید گرمای خطی به صورتی در نظر گرفته می شود که دارای شدت یکنواخت یا متغیر در طول منبع باشد.

هنگامی که ضریب گرما به دما وابستگی دارد مسئله هدایت گرما به صورت غیر خطی در می آید. با استفاده از تبدیل کیرشف می توان

رفتار غیر خطی را از معادله حاکم به شرایط مرزی منتقل کرد. هنگامی که در شرایط مرزی رفتار غیر خطی وجود دارد با استفاده از روشهای تکرار ساده^۴ یا نیوتن^۵ می توان دستگاه معادله های حاصل را حل کرد [۸]. بنابراین حتی در حالتی که مسئله هدایت گرما غیر خطی است احتیاجی به تقسیم بندی دامنه نیست. تقسیم بندی دامنه خصوصاً در مسائل سه بعدی زحماتی را برای کاربر به همراه دارد.

۲- فرمول بندی اجزای مرزی

معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله هدایت گرمای دائمی به صورت زیر بیان می شود:

$$\nabla \cdot (k(T)\nabla T) + g = 0 \quad (1)$$

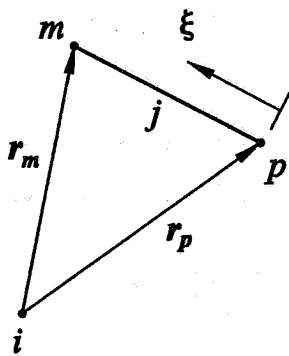
در این معادله T معرف دماست و g شدت منبع تولید گرما را در نقاط مختلف دامنه بیان می کند. $k(T)$ ضریب هدایت گرماست که با در نظر گرفتن وابستگی آن به دما مسئله به صورت غیر خطی در می آید. این مسئله ممکن است تحت شرایط مرزی دیریشله^۶ $T = \hat{T}$ ، نیومن^۷ $\hat{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$ یا جابجایی $k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{cv})$ فرارگیرد. همچنین شرط مرزی غیرخطی تشعشع $k \frac{\partial T}{\partial n} = S(T^4 - T_{rad}^4)$ نیز برای این مسئله قابل تعریف است معادله تغییر خطی هدایت گرما را با تبدیل کیرشف می توان به صورت خطی در آورد [۹]. برای این منظور ابتدا یک متغیر جدید U به صورت زیر تعریف می شود.

$$U(T) = \int_0^T \frac{k(T')}{k_0} dT' \quad (2)$$

که در آن k_0 مقدار ضریب هدایت گرما در دمای صفر است. با استفاده از این تبدیل، معادله (۱) به شکل زیر در می آید

$$k_0 \nabla^2 U + g = 0 \quad (3)$$

معادله (۳) با توجه به ثابت بودن k_0 خطی است. البته باید توجه



شکل ۱- یک المان مرزی

مقدار آن با T_i مشخص شده است و n معرف بردار واحد عمود بر مرز است.

اکنون طریقه محاسبه تحلیلی انتگرالهای معادله (۶) در حالت دو بعدی و همچنین تبدیل انتگرال مربوط به منبع گرما از دامنه به مرز را در هر یک از حالات دو بعدی و سه بعدی بررسی می‌کنیم.

۳- مسئله دو بعدی

در نظر بگیریم که مرز مسئله به تعدادی المان مرزی خطی تبدیل شده باشد. در این صورت برای محاسبه انتگرالها باید حاصل آنها را روی هر یک از المانها به دست آورده و با یکدیگر جمع کنیم. شکل (۱) یک المان مرزی به شماره j و گره‌های انتهایی m و p را نشان می‌دهد. طول این المان نمونه را l فرض می‌کنیم و ξ را به عنوان مختصه محلی در نظر می‌گیریم که در r_p (شروع المان) مقدار آن صفر و در r_m (انتهای المان) مقدار آن یک است. r_m و r_p بردارهای مکان نسبت به نقطه دید i هستند.

اکنون چگونگی ارزیابی تحلیلی انتگرالهای موجود در معادله (۶) را بیان می‌کنیم.

۳-۱- محاسبه $\int_{\Gamma} T \frac{\partial T_i^*}{\partial n} d\Gamma$ در مسئله دو بعدی

اگر مقدار انتگرال مزبور را روی یک المان مرزی v بنامیم داریم

$$v = \int_{\Gamma_j} T \frac{\partial T_i^*}{\partial n} d\Gamma \quad (9)$$

و یا اینکه

داشت که در مورد شرایط مرزی نیز باید تبدیل (۲) انجام شود. برای ارضای شرط مرزی نیومن معادله زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{k(T)}{k} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (4)$$

نظر به اینکه معادله غیر خطی هدایت گرمای دائمی را با تبدیل کیرشف می‌توان به صورت خطی در آورد لذا بدون از دست دادن عمومیت، فرمولبندی مسئله را فقط برای حالتی که ضریب هدایت گرما ثابت است بررسی می‌کنیم یعنی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla^2 T + \frac{g}{k} = 0 \quad (5)$$

با به کارگیری روش مستقیم اجزای مرزی، معادله انتگرالی نظیر معادله (۵) به صورت زیر به دست می‌آید [۱]

$$C_i T_i + \int_{\Gamma} T \frac{\partial T_i^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} T_i^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{k} \int_{\Omega} g T_i^* d\Omega \quad (6)$$

در معادله (۶) Γ و Ω به ترتیب مرز و دامنه مسئله را بیان می‌کنند. n جهت عمود بر مرز و i معرف نقطه‌ای از مرز یا دامنه است. C_i ضریب هندسی نقطه i است که برای نقاط داخل دامنه ۱ و برای نقاط مرزی با توجه به شکل هندسی محاسبه می‌شود T_i^* جواب اساسی و $(\partial T_i^*)/\partial n$ مشتق نرمال آن است که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} T_i^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) & \text{(الف)} \\ \frac{\partial T_i^*}{\partial n} = \frac{-1}{\sqrt{\pi} r_i^2} r_i \cdot n & \text{(ب)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} T_i^* = \frac{1}{\sqrt{\pi} r_i} & \text{(الف)} \\ \frac{\partial T_i^*}{\partial n} = \frac{-1}{\sqrt{\pi} r_i^2} r_i \cdot n & \text{(ب)} \end{cases} \quad (8)$$

در معادله‌های (۷) و (۸) بردار فاصله هر نقطه تا نقطه دید i با r_i و

و اگر $e^{\gamma} - \gamma df = 0$ داریم

$$I_1(a, b, c, d, e, f, g, h) = \left\{ \frac{a}{d} \xi + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d^{\gamma}} \right) \left[\ln \left(\xi + \frac{e}{\gamma d} \right) - \left(\frac{cd - af}{bd - ae} - \frac{e}{\gamma d} \right) \frac{1}{\xi + \frac{e}{\gamma d}} \right] \right\}_{\xi=g}^{\xi=h} \quad (19)$$

در حالتی که نقطه i روی یکی از دو گره المان قرار داشته باشد h_{ip} و h_{im} هر دو صفر می شوند.

۲-۳- محاسبه $\int_{\Gamma} T_i^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma$ در مسئله دو بعدی

اگر مقدار انتگرال بالا را بر روی یک المان مرزی مطابق شکل (۱) برابر با v' در نظر بگیریم، داریم

$$v = 1 \left\{ \int_{\Gamma} [N_p \ N_m] T_i^* d\xi \right\} \begin{Bmatrix} q_p \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (20)$$

در معادله (۲۰)، $q_p = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p$ و $q_m = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_m$ مشتقات نرمال دما در گره‌های مرزی p و m هستند. با قرار دادن معادله (۷-الف) در تساوی (۲۰) داریم

$$v' = [g_{ip} \ g_{im}] \begin{Bmatrix} q_p \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$g_{ip} = \frac{-1}{\gamma\pi} \int_{\Gamma} N_p \ln r_i d\xi \quad (22)$$

$$g_{im} = \frac{-1}{\gamma\pi} \int_{\Gamma} N_m \ln r_i d\xi \quad (23)$$

حاصل انتگرالهای (۲۲) و (۲۳) از معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$g_{ip} = \frac{-1}{\gamma\pi} I_2(\gamma, -\gamma, c, d, e, \gamma, \gamma) \quad (24)$$

$$g_{im} = \frac{-1}{\gamma\pi} I_2(\gamma, \gamma, c, d, e, \gamma, \gamma) \quad (25)$$

$$c = 1^{\gamma}, \quad d = r_m^{\gamma} - r_p^{\gamma} - 1^{\gamma}, \quad e = r_i^{\gamma} \quad (26)$$

$$v = 1 \left\{ \int_{\Gamma} [N_p \ N_m] \frac{\partial T_i^*}{\partial n} d\xi \right\} \begin{Bmatrix} T_p \\ T_m \end{Bmatrix} \quad (10)$$

در معادله (۱۰)، $N_m = \xi$ و $N_p = 1 - \xi$ ، برای المان ایزوپارامتریک هستند. با قرار دادن معادله (۷-ب) در معادله (۱۰) داریم

$$v = [h_{ip} \ h_{im}] \begin{Bmatrix} T_p \\ T_m \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که در آن

$$h_{ip} = \frac{-1}{\gamma\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^{\gamma}} N_p d\xi \quad (12)$$

$$h_{im} = \frac{-1}{\gamma\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^{\gamma}} N_m d\xi \quad (13)$$

حاصل انتگرالهای (۱۲) و (۱۳) از معادله‌های تحلیلی زیر به دست می‌آیند

$$h_{ip} = \frac{-1}{\gamma\pi} I_1(a, b, c, d, e, f, \gamma, \gamma) \quad (14)$$

$$h_{im} = \frac{-1}{\gamma\pi} I_1(a', b', c', d, e, f, \gamma, \gamma) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_m) & b &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_m - \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p & c &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p \\ a' &= -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_m) & b' &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p & c' &= 0 \\ d &= 1^{\gamma} & e &= r_m^{\gamma} - r_p^{\gamma} - 1^{\gamma} & f &= r_p^{\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

$$I_1(a, b, c, d, e, f, g, h) = \int_g^h \frac{a\xi^{\gamma} + b\xi + c}{d\xi^{\gamma} + e\xi + f} d\xi \quad (17)$$

برای وقتی که $e^{\gamma} - \gamma df \neq 0$ داریم

$$I_1(a, b, c, d, e, f, g, h) = \left\{ \frac{a}{d} \xi + \frac{(b - \frac{ae}{d})}{\gamma d} \ln \left(\xi + \frac{e}{d} \xi + \frac{f}{d} \right) + \frac{1}{d^{\gamma}} \left(cd - af - \frac{eb}{\gamma} + \frac{ae^{\gamma}}{\gamma d} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{f}{d} - \frac{e^{\gamma}}{\gamma d^{\gamma}}}} \tan^{-1} \frac{\xi + \frac{e}{\gamma d}}{\sqrt{\frac{f}{d} - \frac{e^{\gamma}}{\gamma d^{\gamma}}}} \right\}_{\xi=g}^{\xi=h} \quad (18)$$

$$D = \frac{G}{k} \int_{\Omega} T_i^* d\Omega = \frac{G}{k} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}\left(\frac{1}{r_i}\right) d\Omega \quad (30)$$

با به کارگیری فرمول گرین داریم

$$D = \frac{-G}{\sqrt{k\pi}} \int_{\Gamma} [(x-x_i) \text{Ln} r_i + (y-y_i) \tan^{-1}\left(\frac{x-x_i}{y-y_i}\right) - (x-x_i)] dy \quad (31)$$

در تساوی (۳۱)، مختصات نقطه دید و (x, y) یک نقطه از مرز است. این انتگرال مرزی را برای یک المان خطی می توان به طور تحلیلی به دست آورد، شکل (۱). در این مورد خواهیم داشت

$$d = \frac{-G}{\sqrt{k\pi}} \int_{\Gamma_i} [(x-x_i) \text{Ln} r_i + (y-y_i) \tan^{-1}\left(\frac{x-x_i}{y-y_i}\right) - (x-x_i)] dy \quad (32)$$

$$d = \frac{-G(y_m - y_p)}{\sqrt{k\pi}} \left\{ I_{\gamma}(x_p - x_i, x_m - x_p, c_1, d_1, e_1, \infty, \infty) + x_i - \frac{1}{\gamma}(x_m + x_p) - (cf - ed) I_1\left(\frac{a}{\gamma}, b, \infty, e^{\gamma} + c^{\gamma}, \gamma ef + \gamma cd, f^{\gamma} + d^{\gamma}, \infty, \infty\right) + \left(\frac{a}{\gamma} + b\right) \tan^{-1}\left(\frac{c+d}{e+f}\right) + h \right\} \quad (33)$$

$$h = \begin{cases} -\left(\frac{a\xi^{\gamma}}{\gamma} + b\xi\right) \tan^{-1}\left(\frac{c\xi + d}{e\xi + f}\right) \Big|_{\xi=-\frac{f}{e}}^{\xi=-\frac{f^+}{e}} & \text{وقتی } 0 < \frac{-f}{e} < 1 \\ 0 & \end{cases} \quad (34)$$

بقیه موارد

ثابت‌های موجود در معادله (۳۳) به صورت زیر به دست می آیند

$$\begin{aligned} c_1 &= l^{\gamma}, & d_1 &= r_m^{\gamma} - l^{\gamma} - r_p^{\gamma}, & e_1 &= r_p^{\gamma} \\ a &= y_m - y_p, & b &= y_p - y_i, & c &= x_m - x_p \\ d &= x_p - x_i, & e &= y_m - y_p, & f &= y_p - y_i \end{aligned} \quad (35)$$

همچنین در حالتی که i بر p منطبق باشد داریم

$$d = \frac{G(y_p - y_m)}{\sqrt{k\pi}} \left\{ \frac{(x_m - x_p)}{\lambda} \left(\text{Ln} l - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}(y_m - y_p) \tan^{-1}\left(\frac{x_m - x_p}{y_m - y_p}\right) - \frac{1}{\gamma}(x_m - x_p) \right\} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_{\gamma}(a, b, c, d, e, g, h) &= \int_g^h (a + b\xi) \text{Ln} \sqrt{c\xi^{\gamma} + d\xi + ed\xi} \\ &= \left\{ a \left[\xi \text{Ln} \sqrt{c\xi^{\gamma} + d\xi + ed\xi} + e - \frac{1}{\gamma} I_1(\gamma c, d, \infty, c, d, e, \infty, \xi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{\gamma} \left[\frac{d}{c} \xi - \xi^{\gamma} + \gamma \xi^{\gamma} \text{Ln} \sqrt{c\xi^{\gamma} + d\xi + ed\xi} \right] \right. \\ &\quad \left. - I_1\left(\infty, \frac{d}{c}, \frac{d}{c}, \gamma e, \frac{de}{c}, c, d, e, \infty, \xi\right) \right\}_{\xi=g}^{\xi=h} \quad (27) \end{aligned}$$

وقتی که $r_p = 0$ است داریم

$$\begin{cases} g_{ip} = \frac{\gamma l}{\lambda \sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} l \\ g_{im} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} l \end{cases} \quad (28)$$

و در حالتی که $r_m = 0$ است داریم

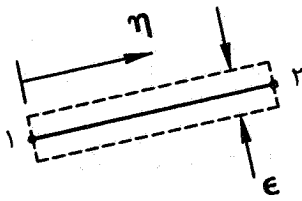
$$\begin{cases} g_{ip} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} l \\ g_{im} = \frac{\gamma l}{\lambda \sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} l \end{cases} \quad (29)$$

۳-۳- محاسبه $\int_{\Omega} g T_i^* d\Omega$ در مسئله دو بعدی

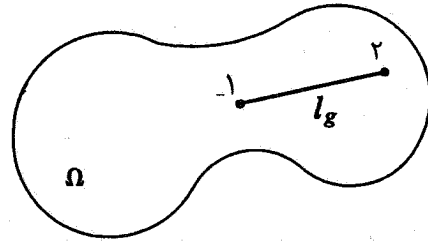
این انتگرال را که به منابع تولید گرما مربوط می شود در سه حالت مختلف مورد بررسی قرار می دهیم در وهله اول حالتی را در نظر می گیریم که منبع تولید گرما به صورت گسترده یکنواخت باشد و در حالت‌های بعدی، منابع تولید گرمای نقطه‌ای و خطی را مورد بحث قرار می دهیم.

۳-۳-۱- اثر منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت در مسئله دو بعدی

در این قسمت چگونگی تبدیل انتگرال مربوطه از دامنه به مرز بیان می شود. لازم به ذکر است که قبلاً محققانی راه‌حلهایی را برای تبدیل انتگرال‌های بر روی دامنه به مرز ارائه کرده اند [۱۰-۱۴] ولی در تمام آنها لازم است که ابتدا محاسبات مقدماتی انجام شود. راهی که در اینجا ارائه می شود اگرچه فقط به منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت منحصر می شود ولی این امتیاز را دارد که انتگرال روی دامنه با یک تبدیل ساده به مرز منتقل می شود و انتگرال مرزی حاصل شده به صورت تحلیلی ارزیابی می شود. با در نظر گرفتن مقدار ثابت G برای تابع g ، انتگرال مورد نظر به صورت زیر در



شکل ۳- مختصه محلی برای منبع خطی در مسئله دو بعدی



شکل ۲- منبع تولید گرمای خطی

و در حالتی که i بر m منطبق باشد داریم

$$d = \frac{-G(y_p - y_m)}{2k\pi} \left\{ \frac{(x_m - x_p)}{\lambda} \left(L \ln l - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} (y_m - y_p) \tan^{-1} \left(\frac{x_m - x_p}{y_m - y_p} \right) - \frac{1}{\lambda} (x_m - x_p) \right\} \quad (37)$$

۳-۲-۳- اثر منبع تولید گرمای نقطه‌ای در مسئله دو بعدی

منظور از منبع تولید گرمای نقطه‌ای منبعی است که سطح آن به صفر میل می‌کند و دارای شدت G_M است یعنی

$$g = G_M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \quad (38)$$

لازم به ذکر است که در مسائل دو بعدی، با در نظر گرفتن بعد سوم برای منبع نقطه‌ای می‌توان آن را به صورت یک منبع خطی در نظر گرفت. در معادله (۳۸) موقعیت منبع که در نقطه M قرار دارد با \mathbf{r}_M نشان داده شده است و δ بیان کننده تابع دلتای دیراک است. انتگرال مربوط به منبع تولید گرمای نقطه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود

$$D = \frac{-1}{2k\pi} \int_{\Omega} G_M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \ln r_i d\Omega \quad (39)$$

حاصل این انتگرال به طور دقیق برابر است با

$$D = \frac{-G_M}{2k\pi} \ln(r_i) \Big|_{\text{point } M} \quad (40)$$

۳-۳-۳- اثر منبع تولید گرمای خطی در مسئله دو بعدی

شکل (۲) دامنه Ω را نشان می‌دهد که در آن یک منبع تولید

گرمای خطی به طول l_g قرار داده شده است. شدت منبع در نقاط ۱ و ۲ به ترتیب g_1 و g_2 است و در حد فاصل دو نقطه ۱ و ۲ تغییرات خطی برای شدت منبع در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مقادیر g_1 و g_2 در واحد طول در نظر گرفته می‌شوند. لازم به ذکر است که در مسائل دو بعدی، با در نظر گرفتن بعد سوم برای منبع خطی می‌توان آن را به صورت یک منبع سطح دار در نظر گرفت.

شکل (۳) مختصه جدید η را روی منبع خطی نشان می‌دهد. همچنین در این شکل سطحی با پهنای بینهایت کوچک ε در اطراف منبع در نظر گرفته شده است که آن را Ω_ε می‌نامیم. برای محاسبه انتگرال مربوط به این منبع داریم

$$D = \frac{1}{k} \int_{\Omega} g T_i^* d\Omega \quad (41)$$

$$D = \frac{1}{k} \int_{\Omega_\varepsilon} g T_i^* d\Omega \quad (42)$$

$$D = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{(1-\eta)g_1 + \eta g_2}{\varepsilon} T_i^* \varepsilon l_g d\eta \quad (43)$$

حاصل نهایی این انتگرال به صورت زیر به دست می‌آید

$$D = \frac{-l_g}{2k\pi} I_\gamma(a, b, c, d, e, \infty, \infty, \infty) \quad (44)$$

$$a = g_1, \quad b = g_2 - g_1 \quad (45)$$

$$c = l_g^2, \quad d = r_{i2}^2 - l_g^2 - r_{i1}^2, \quad e = r_{i1}^2 \quad (46)$$

با استفاده از معادله‌های (۵۰) و (۵۱) به سادگی می‌توان به معادله‌های زیر رسید

$$\vec{\nabla}\alpha = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad (52)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = \frac{1}{r_i^3} \quad (53)$$

با قرار دادن تساویهای (۵۲) و (۵۳) در (۴۹) داریم

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r_i} d\Omega = \int_{\Gamma} r_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (54)$$

و یا اینکه

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r_i} d\Omega = \frac{1}{r_i} \int_{\Gamma} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (55)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۵۵) انتگرال (۴۸) به یک انتگرال مرزی به صورت زیر در می‌آید.

$$D = \frac{G}{4\pi k} \int_{\Gamma} \frac{1}{r_i} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (56)$$

۴-۲- اثر منبع تولید گرمای نقطه‌ای در مسئله سه بعدی

مشابه با آنچه که در قسمت دو بعدی تشریح شد، با در نظر گرفتن یک منبع نقطه‌ای با شدت G_M در نقطه M داریم

$$g = G_M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \quad (57)$$

و بنابراین انتگرال مربوط به منبع تولید گرما به صورت زیر نوشته می‌شود

$$D = \frac{1}{4\pi k} \int_{\Gamma} G_M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \frac{1}{r_i} d\Gamma \quad (58)$$

حاصل این انتگرال با توجه به خواص تابع دلتای دیراک به طور

دقیق برابر است با

$$D = \frac{G_M}{4\pi k} \frac{1}{r_i} \Big|_{\text{point } M} \quad (59)$$

در معادله‌های اخیر r_{i1} و r_{i2} بیان کننده فاصله نقطه دید i تا دو انتهای منبع خطی اند. ملاحظه می‌شود که اثر منبع تولید گرمای خطی را می‌توان به صورت دقیق اعمال کرد. همچنین با تقسیمبندی یک مسیر به تعدادی پاره خط می‌توان اثر منبع تولید گرما بر روی یک مسیر را نیز به راحتی اعمال کرد.

۴- مسئله سه بعدی

برای مدل کردن یک مسئله سه بعدی ابتدا مرز آن توسط المانهای دو بعدی تقسیمبندی می‌شود سپس انتگرالهای مرزی محاسبه می‌شود. در اینجا طریقه تبدیل دقیق انتگرال مربوط به منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت از دامنه به مرز و همچنین نحوه اعمال کردن اثر منابع نقطه‌ای و خطی به طور دقیق بیان می‌شود.

۴-۱- اثر منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت در مسئله سه بعدی
با در نظر گرفتن مقدار ثابت G برای شدت منبع تولید گرما انتگرال مربوط به تولید گرما به صورت زیر در خواهد آمد

$$D = \frac{G}{k} \int_{\Omega} T_i^* d\Omega \quad (47)$$

که با استفاده از معادله (۸-الف) خواهیم داشت

$$D = \frac{G}{k} \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi r_i} d\Omega \quad (48)$$

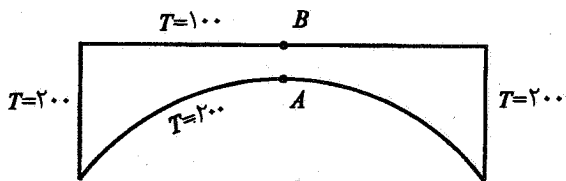
برای تبدیل انتگرال (۴۸) از دامنه به مرز از قضیه گرین گوس استفاده می‌کنیم. این قضیه که نتیجه قضیه واگرایی^۸ است به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} \alpha \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \alpha \cdot \mathbf{P} d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (49)$$

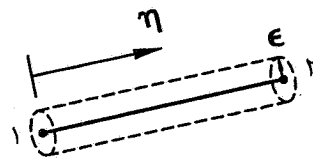
که در آن \mathbf{P} یک بردار دلخواه و α یک تابع اسکالر است. اکنون α و \mathbf{P} را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\alpha = r_i \quad (50)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (51)$$



شکل ۵- دامنه مسئله با ناحیه باریک AB



شکل ۴- مختصه محلی برای منبع خطی در مسئله سه بعدی

۵- مثالها

برای بررسی درستی، دقت و کارایی روابط عنوان شده، شش مثال در نظر گرفته شده است. چهار مثال اول به مسئله دو بعدی و دو مثال آخر به مسئله سه بعدی مربوط می شود. کلیه مثالها با جواب دقیق و یا با جواب به دست آمده از روش اجزای محدود (FEM) مقایسه شده است. در تمام موارد نتایج حاصل شده کاملاً رضایتبخش است.

۱-۵- مقایسه دقت انتگرالگیری تحلیلی با انتگرالگیری عددی

هنگامی که نقطه دید^۱ و نقطه میدان^{۱۰} به یکدیگر نزدیک باشند، در انتگرالها عبارتها تقریباً منقرض^{۱۱} ظاهر می شوند. به وجود آمدن این عبارتها تقریباً منقرض به شکل جواب اساسی و مشتق نرمال آن مربوط می شود، معادله (۷) را ببینید. هنگامی که دامنه مسئله دارای قسمت باریکی است و یا در حالتی که قرار است مجهولات در نقاط داخل دامنه و نزدیک مرز محاسبه شوند وضعیت تقریباً منقرض به وجود می آید زیرا در این موارد نقطه دید و نقطه میدان به یکدیگر نزدیک خواهند شد. همچنین وقتی که اختلاف اندازه دو المان مجاور زیاد است این حالت اتفاق می افتد.

شکل (۵) دامنه یک مسئله دو بعدی با شرایط مرزی دیریشله را نشان می دهد. این مسئله با در نظر گرفتن ۱۱ المان مرزی و با انتگرالگیری تحلیلی و انتگرالگیری عددی ۳، ۵، ۸ و ۱۱ نقطه ای گوس حل شده است. برای مقایسه نتایج، دما در طول AB در تمام حالتها محاسبه شده است و نتیجه آن در شکل (۶) نمایش داده شده است. فاصله AB در مسئله مزبور ۰/۲۵ است و مقدار ضریب هدایت گرما برابر با $k = 1 \frac{W}{m^{\circ}C}$ در نظر گرفته شده است. همان طور که ملاحظه می شود با بالا بردن مرتبه انتگرالگیری، نتایج به مقادیر حاصل از انتگرالگیری تحلیلی نزدیک شده است ولی حتی با انتگرالگیری ۱۱ نقطه ای گوس و خصوصاً در نزدیکی نقطه B بازمهم خطای انتگرالگیری عددی قابل توجه است.

۳-۴- اثر منبع تولید گرمای خطی در مسئله سه بعدی

مانند آنچه که در حالت دو بعدی تعریف شد یک منبع تولید گرمای خطی به طول l_g را در نظر می گیریم که شدت منبع در نقاط ۱ و ۲ از آن به ترتیب g_1 و g_2 باشد. در شکل (۴) منبع تولید گرمای خطی و مختصه جدید η روی آن مشخص شده است همچنین یک حجم بینهایت کوچک به شکل استوانه به شعاع ϵ پیرامون منبع در نظر گرفته شده است. این حجم کوچک را Ω_ϵ می نامیم.

برای محاسبه انتگرال مربوط به این منبع داریم

$$D = \frac{1}{k} \int_{\Omega} g T_i^* d\Omega \quad (60)$$

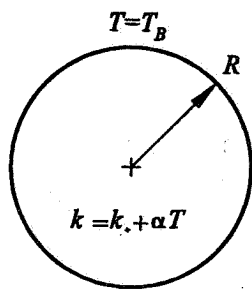
$$D = \frac{1}{k} \int_{\Omega_\epsilon} g T_i^* d\Omega \quad (61)$$

$$D = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{(1-\eta)g_1 + \eta g_2}{\pi \epsilon^2} \frac{1}{2\pi l_g} \pi \epsilon^2 l_g d\eta \quad (62)$$

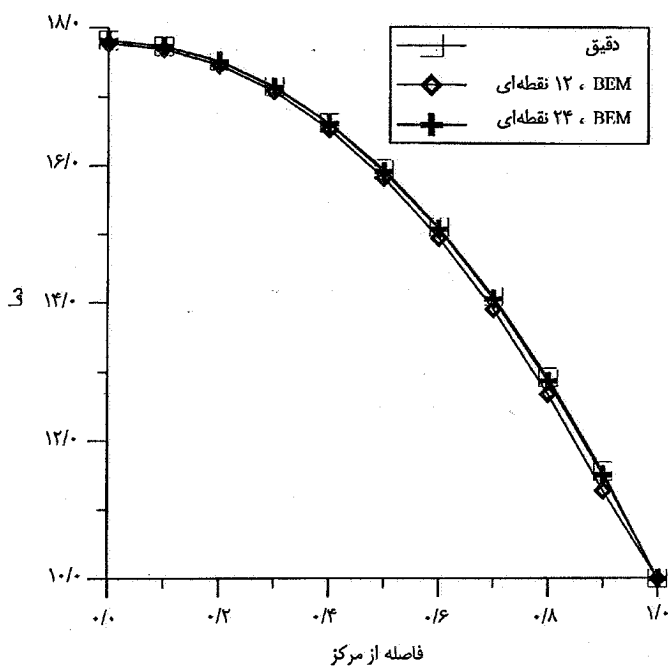
حاصل نهایی این انتگرال به صورت زیر به دست می آید

$$D = \frac{g_2 - g_1}{8k\pi} \left\{ \frac{2(r_{i2} - r_{i1})}{l_g} + \left[\frac{2g_1}{(g_2 - g_1)} - \frac{(r_{i2}^2 - l_g^2 - r_{i1}^2)}{l_g^2} \right] \ln \left[\frac{(l_g + r_{i2})^2 - r_{i1}^2}{r_{i2}^2 - (l_g - r_{i1})^2} \right] \right\}$$

در معادله (۶۳) r_{i2} و r_{i1} معرف فاصله نقطه دید i تا دو انتهای منبع خطی اند. همان طور که ملاحظه می شود در مسئله سه بعدی نیز مانند مسئله دو بعدی می توان اثر منبع تولید گرمای خطی را به طور دقیق اعمال کرد.



شکل ۷- مسئله غیر خطی با منبع تولید گرمای گسترده

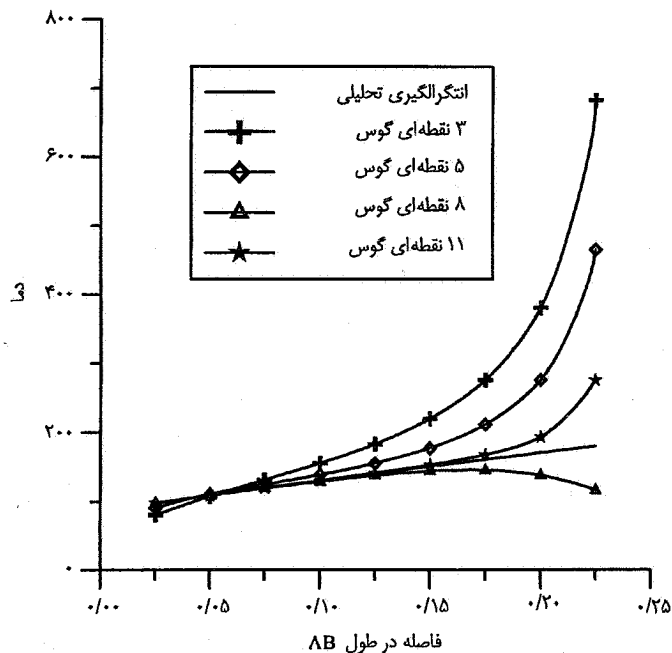


شکل ۸- نتایج BEM و روش دقیق در حل مسئله غیر خطی

نظر گرفتن ۲۴ المان مرزی حل شده است. نتایج روش اجزای مرزی با روش دقیق در شکل (۸) مقایسه شده است. با توجه به غیر خطی بودن مسئله و حضور منبع تولید گرما دیده می شود که دقت نتایج در سطح عالی است.

۳-۵- منبع تولید گرمای نقطه‌ای در مسئله دو بعدی

در مثالی که در شکل (۹) نشان داده شده است مرز دایره‌ای به شعاع R تحت شرط مرزی دیریشله $(T = T_B)$ قرار گرفته است. در مرکز دایره یک منبع تولید گرمای نقطه‌ای به شدت G وجود دارد و ضریب هدایت گرما به صورت ثابت و برابر با k در نظر



شکل ۶- مقایسه جوابها با انتگرالگیری تحلیلی و انتگرالگیری عددی
نقطه‌ای گوس ۳، ۵، ۸ و ۱۱

۲-۵- مسئله غیر خطی با منبع تولید گرمای گسترده

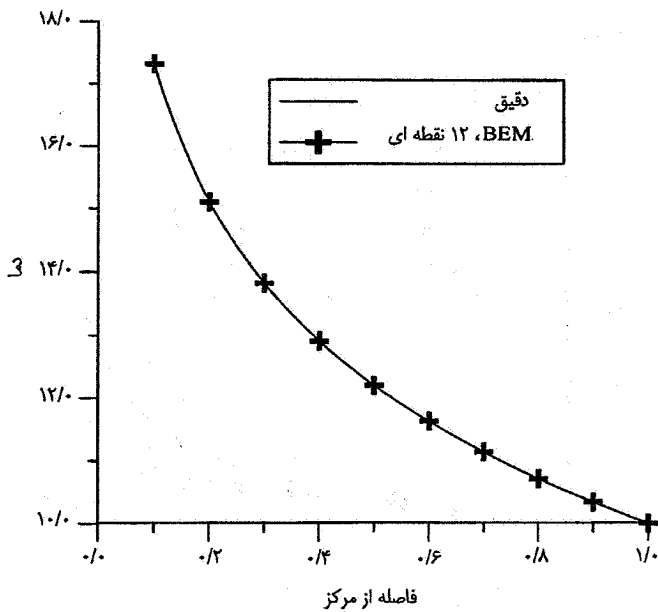
مطابق با شکل (۷) یک دامنه دایره‌ای به شعاع R و با شرط مرزی دیریشله $(T = T_B)$ در کل مرز در نظر می‌گیریم. مقدار ضریب هدایت گرما را وابسته به دما و به صورت ثابت‌اند. همچنین فرض می‌کنیم که یک منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت با شدت G در کل دامنه وجود دارد. معادله حاکم بر این مسئله به صورت زیر است

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[k(T) \frac{dT}{dr} \right] + G = 0 \quad (64)$$

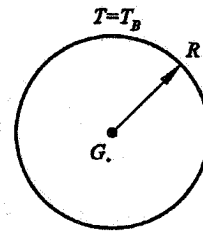
حل دقیق این مسئله به صورت زیر است

$$T = \frac{1}{\alpha} \left[-k_0 + \sqrt{(k_0 + \alpha T_B)^2 + \frac{\alpha G}{\gamma} (R^2 - r^2)} \right] \quad (65)$$

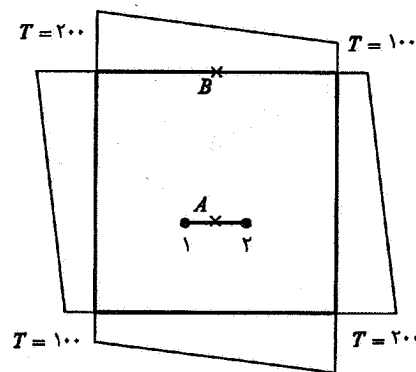
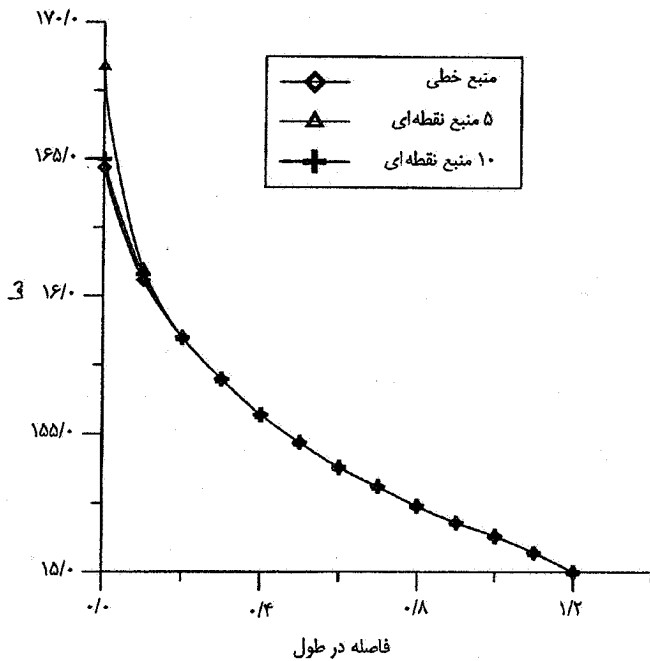
این مسئله با مقادیر $T_B = 10^\circ\text{C}$ ، $k_0 = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$ ، $\alpha = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}^2}$ ، $R = 1 \text{m}$ و $G = 2000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ اجزای مرزی یکبار با در نظر گرفتن ۱۲ المان مرزی و بار دیگر با در



شکل ۹- مسئله دو بعدی با منبع تولید گرمای نقطه‌ای



شکل ۱۰- نتایج BEM و روش دقیق در حل مسئله با منبع نقطه‌ای



شکل ۱۱- مسئله دو بعدی با منبع تولید گرمای خطی

گرفته می‌شود.

جواب دقیق این مسئله عبارت است از

$$T = \frac{G_0}{2k\pi} [\ln R - \ln r] + T_B \quad (66)$$

این مسئله با مقادیر $T_B = 10^\circ\text{C}$, $k = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$, $G_0 = 20 \text{ W}$ و $R = 1 \text{ m}$ با روش دقیق و همچنین با روش اجزای مرزی و تنها با ۱۲ المان مرزی حل شده است. نتایج به دست آمده در شکل (۱۰) نشان داده شده است. دقت نتایج بسیار عالی است و خطای روش اجزای مرزی نسبت به روش دقیق از ۰/۰۰۰۱٪ بیشتر نیست.

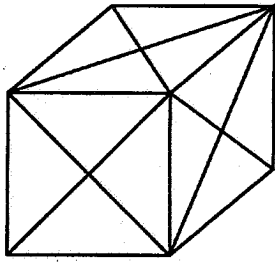
شکل ۱۲- مقایسه حل مسئله منبع خطی با دو مسئله معادل شده توسط منابع نقطه‌ای

در نقطه ۱ و ۲ به ترتیب $50 \frac{\text{W}}{\text{m}}$ و $100 \frac{\text{W}}{\text{m}}$ است و ضریب هدایت گرما برابر با $k = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$ در نظر گرفته شده است.

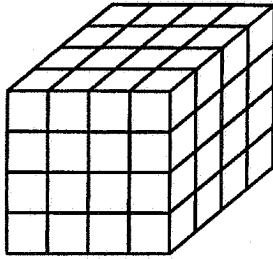
این مسئله توسط روش اجزای مرزی حل شده است و برای بررسی نتایج حاصله دو مسئله دیگر نیز تعریف و حل شده است. در مسئله اول به جای منبع تولید گرمای خطی پنج منبع نقطه‌ای با

۴-۵- منبع تولید گرمای خطی در مسئله دو بعدی

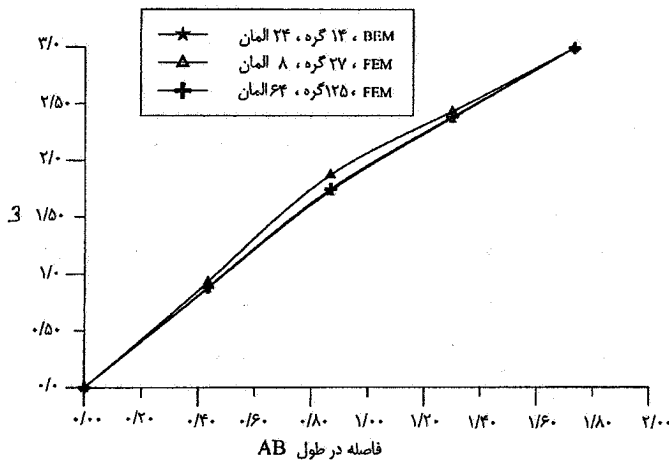
در شکل (۱۱) دامنه و شرایط مرزی برای یک مسئله دو بعدی با منبع تولید گرمای خطی نشان داده شده است. شرایط مرزی از نوع دیریشله بوده و در طول مرز دارای تغییرات خطی است. طول هر ضلع از دامنه ۲ متر و طول منبع خطی ۰/۵ متر است. شدت منبع



شکل ۱۴- تقسیمبندی اجزای مرزی، ۱۴ گره



شکل ۱۶- تقسیمبندی ریز اجزای محدود، ۱۲۵ گره

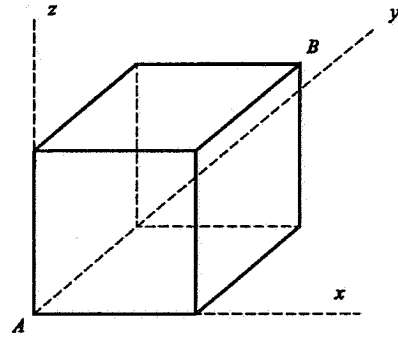


شکل ۱۷- مقایسه نتایج اجزای مرزی و اجزای محدود برای مسئله سه بعدی

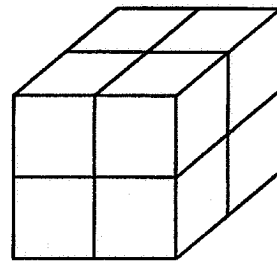
برای بررسی نتایج، دما در طول قطر بزرگ مکعب (AB) در سه حالت مختلف با یکدیگر مقایسه شده اند. شکل (۱۷) اندازه دما را روی AB برای این سه حالت نشان می دهد. ملاحظه می شود که نتیجه روش اجزای مرزی به نتیجه روش اجزای محدود با دانه بندی ریز بسیار نزدیک است.

۵-۶- منبع تولید گرمای خطی در مسئله سه بعدی

شکل (۱۸) یک مکعب به طول ضلع ۱ متر را نشان می دهد که



شکل ۱۳- مسئله سه بعدی با منبع تولید گرمای گسترده



شکل ۱۵- تقسیمبندی درشت اجزای محدود، ۲۷ گره

شدت معادل و در مسئله دوم ۱۰ منبع نقطه‌ای با شدت معادل منبع خطی در نظر گرفته شده است. نتایج حل این دو مسئله و مسئله اصلی در مقایسه با یکدیگر در شکل (۱۲) نشان داده شده است. در نمودارهای نشان داده شده، دما در طول خط AB به دست آمده است. نقطه A اندکی بالاتر از منبع تولید گرمای خطی قرار دارد. با بررسی نتایج ملاحظه می شود که مسئله معادل شده با ۵ منبع نقطه‌ای در مقایسه با مسئله اصلی، نتایج نزدیک و مسئله معادل شده با ۱۰ منبع نقطه‌ای نتایج نزدیکتر را نشان می دهد.

۵-۵- مسئله سه بعدی با منبع تولید گرمای گسترده

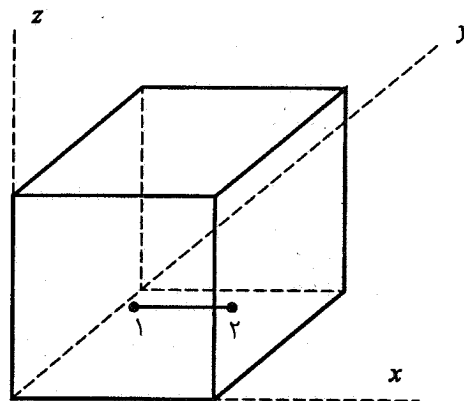
مثال نشان داده شده در شکل (۱۳) یک مکعب به طول ضلع ۱ متر است که تحت شرط مرزی $T = x + y + z$ قرار دارد. ضریب هدایت گرما $1 \frac{W}{m^{\circ}C}$ و شدت منبع تولید گرمای گسترده به صورت یکنواخت و برابر با $4 \frac{W}{m^3}$ در نظر گرفته شده است.

این مسئله توسط روشهای اجزای مرزی (۱۴ گره)، اجزای محدود با دانه بندی درشت (۲۷ گره) و اجزای محدود با دانه بندی ریز (۱۲۵ گره) حل شده است. شکل‌های (۱۴) تا (۱۶) چگونگی تقسیمبندی در سه حالت مختلف را نشان می دهد.

شد. دیده می‌شود که نتیجه به دست آمده از مسئله معادل به اندازه کلفی به نتیجه مسئله اصلی نزدیک است و در مورد دوم که از منابع نقطه‌ای بیشتری استفاده شده است اختلاف با مسئله اصلی کمتر است.

۶- نتیجه‌گیری

چگونگی اعمال کردن دقیق اثر منابع تولید گرمای نقطه‌ای و خطی در مسائل دو بعدی و سه بعدی بیان شد همچنین تبدیل دقیق انتگرال مربوط به منبع تولید گرمای گسترده یکنواخت از دامنه به مرز در هر یک از مسائل دو بعدی و سه بعدی انجام شد. در مسئله دو بعدی کلیه انتگرالها به صورت دقیق محاسبه شد و دستیابی به حداکثر دقت میسر شد. با بهره‌گیری از چند مثال دیده شد که دقت روابط عنوان شده حتی در مسائل غیر خطی بسیار عالی است. بنابراین آن دسته از مسائلی را که دارای شرایط خاص اند می‌توان با دقت عالی با روش اجزای مرزی تحلیل کرد. از مهمترین وضعیتهای خاص می‌توان به یکنواخت نبودن اندازه المانها و نازک بودن دامنه اشاره نمود. همچنین وقتی که جوابهای مسئله در دامنه و در نزدیک مرز خواسته شده باشد، حتی با وجود المانهای مرزی بزرگ می‌توان نتایج کم خطایی را به دست آورد.



شکل ۱۸- مسئله سه بعدی با منبع تولید گرمای خطی

تحت شرط مرزی $T = x + y + z$ قرار دارد (مانند مثال قبل) ضریب هدایت گرما $1 \frac{W}{m^{\circ}C}$ در نظر گرفته شده است. شدت منبع تولید گرمای خطی در نقطه ۱ و ۲ به ترتیب $10 \frac{W}{m}$ و $20 \frac{W}{m}$ و طول آن $0.5m$ است و در $z = 0.25$ قرار دارد.

این مسئله با در نظر گرفتن ۱۴ گره مرزی مطابق با شکل (۱۴) حل شده است و مقدار دمای به دست آمده در مرکز مکعب $T_c = 2/560$ بوده است. برای بررسی نتیجه به دست آمده دو مسئله دیگر نیز تعریف و حل شده است تا با مسئله اصلی مقایسه شوند. در مسئله اول به جای منبع تولید گرمای خطی پنج منبع نقطه‌ای با شدت معادل منبع خطی قرار داده شد و نتیجه $T_c = 2/565$ به دست آمد. در مسئله دیگر برای معادلسازی منبع خطی از ۱۰ منبع نقطه‌ای استفاده شد و نتیجه $T_c = 2/561$ حاصل

واژه نامه

- | | | |
|------------------------|---------------|---------------------|
| 1. Kirchhoff | 5. Newton | 9. source point |
| 2. Green's lemma | 6. Dirichlet | 10. field point |
| 3. Green-Gauss theorem | 7. Neumann | 11. nearly singular |
| 4. simple iteration | 8. divergence | |

مراجع

- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, and Tokyo, 1984.
- Khadar, M.S., and Henna, M.C., "An Iterative Boundary Numerical Solution for General Steady Heat Conduction Problems," *Trans. ASME J. Heat. Transfer*, Vol. 103, pp. 26-31, 1981.
- Azevedo, J.P.S., "Analysis of Nonlinear Heat Conduction Problems by the Boundary Element Method," M.Sc. Thesis (in Portuguese), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1985.
- Wrobel, L.C., and Azevedo, J.P.S., "A Boundary Element Analysis of Nonlinear Heat Conduction," in R.W. Lewis and K. Morgan (Eds.), *Proc. Fourth Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal*

- Problems*, Pineridge Press, Swansea, 1985.
5. Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Non-Linear Diffusion Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 65, pp. 147-164, 1987.
 6. Wearing, J.L., and Sheikh, M., "A Regular Indirect Boundary Element Method for Thermal Analysis," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 25, pp. 495-515, 1988.
 7. Nagarajan, A., and Mukherjee, E., "Novel Boundary Element Method for Linear Elasticity with no Numerical Integration for Two-Dimensional and Line Integrals for Three Dimensional Problems.," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 61, No. 2, pp. 264-269, 1994.
 ۸. همتیان، م.ر.، کرمی، ق.، روشی برای اعمال شرط مرزی تشعشع در حل مسئله هدایت گرما با روشهای اجزای محدود، اجزای مرزی و روش کوپل، پنجمین کنفرانس سالیانه مهندسی مکانیک انجمن مهندسان مکانیک ایران، دانشگاه تبریز، ۱۳۷۶.
 9. Ozisik, M.N., *Heat Conduction*, Wiley Interscience, New York, 1985.
 10. Azevedo, J.P.S., and Brebbia, C.A., "An Efficient Technique for Reducing Domain Integrals to the Boundary," *In Boundary Element X , Vol. 1, Mathematical and Computaional Aspects*, Editor: Brebbia, C.A., 1988.
 11. Brebbia, C.A., "On Two Different Method for Transforming Domain Integrals to the Boundary," *In Advances in Boundary Elements*, Vol. 1, Computations and Fundamentals, Editors: Brebbia, C.A. and Connor, J.J., 1989.
 12. Fariweather, G., Rizzo, F.J., Shippy, D.J., and Wu, Y.S., "On the Numerical Solution of Two-Dimensional Potential Problems by an Improved Boundary Integral Equation Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 31, pp. 96-112, 1979.
 13. Tang, W., Brebbia, C.A., and Telles, J.C.F., "A Generalized Approach to Transfer the Domain Integrals into Boundary Ones for Potential Problems in B.E.M.," *Proceedings of the IX int. Conf. on BEM in Engng.*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston, 1987.
 14. Tang, W., "A Generalized Approach for Transforming Domain Integrals into Boundary Integrals in Boundary Element Method," Ph.D. Thesis of Computational Mechanics Institute, Southampton, 1988.