تحلیل جریان ایده‌آل تراکم پذیر در صفحهٔ نصف النهاری یک کمپرسور محوری

احمدرضا عظیمیان*
دانشکدهٔ مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۱۲/۱۵ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۵/۳/۱۶)

چکیده - در این مقاله سعی شده‌است که رفتار جریان سیال غیرلزج را در صفحهٔ نصف‌النهاری یک کمپرسور محوری مطالعه کنیم. برای این منظور معادلات اویلر سه بعدی غیردائم درمختصات استوانه‌ای را برای سیال ایده‌ال نوشته وسپس این معادلات را در جهت مماسی (جهت دوران) متوسط گیری می‌کنیم که درنتیجه معادلات ازحالت سه‌بعدی به حالت دوبعدی ساده می شوند. این معادلات دوبعدی رابادرنظرگرفتن اثرنیروی پره‌هاکه ازمتوسط‌گیری معادلهٔ ممنتوم در جهت شعاعی به‌دست می‌آیدحل کرده ومشخصات کامل میدان جریان سیال را در صفحهٔ نصف‌النهاری (r-z) به‌دست می‌آوریم. برای حل معادلات اویلرساده شده از روش زمان‌پیمایشی با استفاده ازشیوهٔ رانگ کوتا[1] مرتبهٔ چهارم استفاده کرده وپیشروی درزمان راتارسیدن به حالت دائم که جواب نهایی است ادامه می دهیم. نتایج مفیدی ازاین مطالعه به‌دست آمده‌که توان بالای برنامه را درحل جریان سیال در صفحهٔ نصف‌النهاری باحداقل زمان ممکن نشان می‌دهد.

Inviscid Compressible Flow in Meridional Plane of an Axial Flow Compressor

A. R. Azimian
Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT- *In this paper it is attempted to investigate the behavior of an inviscid flow in the meridional plane of an axial flow compressor. For this purpose the 3-D unsteady Euler equations in cylindrical coordinate are averaged in tangential direction. Therefore, the equations are reduced to a 2-D system. By averaging the tangential component of momentum equation, a blade force will result. Axial and radial components of the calculated blade force are added to the right hand side of the axial and radial momentum equations. By application of a 4th order Runge-Kutta time marching technique to the resulting 2-D Euler equations, the flow field is solved. Some interesting results are obtained which show the program capability in solving flow in the meridional plane of a compressor at the shortest possible time.*

---

* استادیار

فهرست علائم

a	سرعت صوت (معادلهٔ ۳۸)
a	پارامترثابت (معادلهٔ ۲۹)
A	سطح مقطع (معادلهٔ ۳۳)
b	پارامترضخامت (معادلهٔ ۳)
C	شارجملات‌جابجائی (معادلهٔ ۳۵)
CFL	ضریب‌کورانت (معادلهٔ ۳۷)
D_A	شارجملات استهلاک مصنوعی (معادلهٔ ۳۵)
dA	دیفرانسیل‌سطح(معادلهٔ۳۳)
dt	دیفرانسیل‌زمان(معادلهٔ ۳۳)
$d\forall$	دیفرانسیل‌حجم(معادلهٔ۳۳)
e	انرژی‌مخصوص (معادلهٔ۲۳)
f_r ، f_z ، f_θ	مؤلفه‌های شعاعی محوری ومماسی افت (معادلهٔ ۱۴)
F	پارامترکلی (معادلهٔ ۳۰)
$F_{b\theta}$	نیروی پره (معادلهٔ ۲۲)
F_{br}	مؤلفهٔ شعاعی نیروی پره (معادلهٔ ۲۰)
F_{bz}	مؤلفهٔ محوری نیروی پره (معادلهٔ ۲۱)
G	پارامترکلی (معادلهٔ ۳۰)
J	ژاکوبین (معادلهٔ ۳۱)
P	فشار (معادلهٔ ۲۰)
Q	پارامترکلی (معادلهٔ ۳۰)
r	شعاع - جهت شعاعی (معادلهٔ ۱۹)
S	چشمه - منبع (معادلهٔ ۳۰)
t	زمان (معادلهٔ ۱۹)
u	مؤلفهٔ x سرعت(معادلهٔ ۳۱)
U	مؤلفهٔ سرعت درمختصات عمومی (معادلهٔ ۳۲)
v	مؤلفهٔ y سرعت(معادلهٔ ۳۱)
V	مؤلفهٔ سرعت درمختصات عمومی (معادلهٔ ۳۲)
V_r	مؤلفهٔ شعاعی سرعت (معادلهٔ ۱۹)
V_z	مؤلفهٔ محوری سرعت (معادلهٔ ۱۹)
V_θ	مؤلفهٔ مماسی سرعت (معادلهٔ ۲۰)
Z	جهت محوری (معادلهٔ ۱۰)
β	زاویه‌داخلی‌پره‌ها (معادلهٔ۲۸)
Δt	گام زمانی (معادلهٔ ۳۴)
θ	جهت مماسی (معادلهٔ ۱)
η	زاویه پره‌هادر جهت شعاعی (معادلهٔ ۲۶)
ϕ	زاویه پره‌هادر جهت محوری (معادلهٔ ۲۶)
Ω	سرعت دوران (معادلهٔ ۱۴)
$\forall$	حجم (معادلهٔ ۳۳)

کلیه پارامترهای به کار رفته در معادلات فوق به طریق مناسبی بدون بعد شده‌اند.

۱- مقدمه

درطراحی دقیق توربوماشینهامعمولاً حل معادلات سه بعدی ناویر- استوکس [۲] ضروری است که البته برای چنین حلهایی نیازبه کامپیوترهای بزرگ وزمان محاسباتی بالاست تابتوان یک جواب نهایی قابل قبول برای میدان جریان سیال به‌دست آورد. به‌عنوان مثال می توان به کارانجام شده‌توسط آرنونه [۱] ویادیگرکارهای مشابه که درمقالات مختلف وجوددارد، اشاره کرد. خلاصه کردن معادلات جریان ازسه بعدی به دوبعدی به میزان قابل توجهی باعث ساده‌ترشدن محاسبات وکمترشدن زمان محاسبه وهزینه‌های مربوطه می‌شود. البته درساده‌سازی یک مسئلهٔ سه‌بعدی به دوبعدی معمولاً ازفرضهایی استفاده می‌شودکه باعث دورشدن ازفیزیک مسئله می‌شود. یکی ازروشهایی که می توان مسئله راساده‌کرد ودرعین حال، فیزیک مسئله نیزتاحدممکن حفظ شود، روش متوسط گیری درجهت مماسی است که توسط هرش [۲] معرفی شده‌است. در این روش بامتوسط‌گیری معادلات سه‌بعدی غیردائم درامتدادمماسی معادلاتی که بایدحل شوندبه دوبعدکاهش یافته واثربعدسوم به صورت نیروی پره‌هاظاهرمی‌شود. محققان بسیاری ازاین روش استفاده کرده ونتایج جالبی نیزارائه داده‌اندکه می‌توان به نتایج یائو [۳] برای یک کمپرسورمحوری، نتایج بثور [۴] برای یک کمپرسورمحوری، نتایج مارتلی ومیکلاسی [۵] برای یک پمپ گریزازمرکز، نتایج بالداساره ومیکلاسی [۶] برای یک پمپ گریزازمرکزوهمچنین نتایج پترویک [۷] وکام [۸] اشاره کرد. البته درروشهای پترویک [۷] وکام [۸] از روش انحنای خطوط جریان وتوابع جریان استفاده‌شده‌است که به مقدارزیادی باروش موردنظردراین مقاله تفاوت دارد. درروش به‌کاررفته توسط یائو [۳]ازیک برنامهٔ سه‌بعدی برای حل مسئله استفاده‌شده‌وضمن فرض تقارن محوری، ازنتایج حل یکی ازبعدهاصرف نظرمی‌شود. درروش مارتلی ومیکلاسی [۵] ازدوبرنامهٔ جداگانه استفاده‌شده‌که دریکی ازبرنامه‌هابرای پیداکردن نیروی پره‌ها، جریان سیال بین دورردیف پره در صفحه $(z\text{-}\theta)$حل شده وسپس ازنتایج این حل در صفحهٔ نصف‌النهاری $(r\text{-}z)$ استفاده می‌شود. این روش حل بسیارطولانی وخسته کننده‌است ولی درمقایسه بایک حل سه بعدی بازهم زمان کمتری می برد. درروشهای به‌کاررفته توسط بالداساره ومیکلاسی [۶] وبثور[۴] روش محاسبهٔ نیروی پره‌هابه صورت ساده‌تری بوده و بااندک تفاوتهایی مشابه روش استفاده شده در این مقاله است. این تفاوتهارابه صورت خیلی خلاصه بدین صورت می‌توان بیان کرد. درمحاسبات بالداساره، چون بررسی وی بر روی یک پمپ متمرکزشده، بنابراین سیال موردمطالعه درمقالهٔ وی تراکم‌ناپذیر

ولزج است، درحالی که درمقالهٔ حاضرسیال تراکم‌پذیرو ایده‌آل است. درمقالهٔ بثور[۴]، بررسی برروی کمپرسور محوری‌است وبنابراین سیال تراکم پذیروایده‌ال است، در فرمولبندی وی، محاسبهٔ نیروی مربوط به افت دردل‌نیروی پره‌گنجانده‌شده‌است که درفرمولبندی این نویسنده، این دورا ازهم جدا می‌کنیم.

۲- متوسط گیری مماسی

روشهای متوسط‌گیری مختلفی برای ساده‌کردن معادلات اویلر وجوددارد. به عنوان مثال متوسط‌گیری رینولدز، متوسط‌گیری زمانی و... . در این مقاله از روش متوسط‌گیری دیگری به‌نام روش متوسط‌گیری نسبت به جهت مماسی استفاده‌می‌شودکه این روش منسوب به هرش [۲] است وآن رابه صورت زیرنشان می‌دهیم

$$\overline{A} = \frac{1}{\theta_{ss} - \theta_{ps}} \int_{ps}^{ss} A d\theta \qquad (1)$$

که درآن $\overline{A}$ مقدارمتوسط کمیت عمومی A است و ss و ps به ترتیب سطوح مکش وفشارپره‌اند.

$$\theta_{ss} - \theta_{ps} = \frac{2\pi}{Nb} \qquad (2)$$

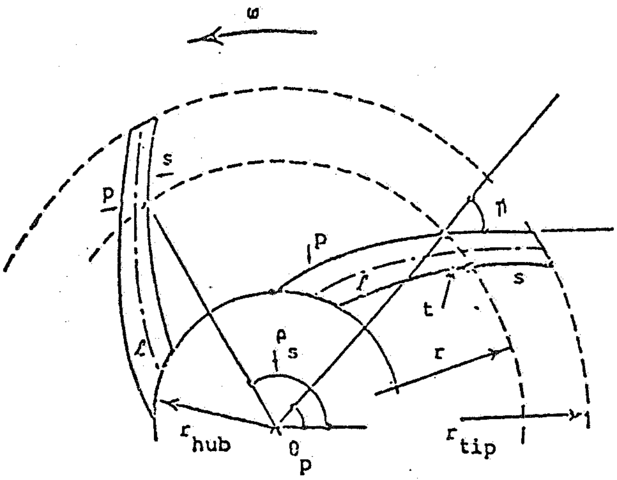
که N تعدادپره‌هاست و b پارامتری است که به‌صورت زیربیان می‌شود

$$b = 1 - s/g \qquad (3)$$

که درآن s ضخامت پره‌هاو g گام پره‌هاست، زاویه θ هم موقعیت سطوح فشارومکش پره‌هارا درصفحهٔ $(r-\theta)$ مشخص می‌کند (به شکل (۱) مراجعه شود). حرکت پره‌های متحرک، یک میدان جریان نوسانی ایجادمی‌کند و در نتیجه کمیت عمومی A شامل مقدارمتوسط $\overline{A}$ ومقدارنوسانی A' است یعنی که

$$A = \overline{A} + A' \qquad (4)$$

درصورتی‌که حاصل ضرب دوکمیت مختلف A و B



شکل ۱ - مقطع یک توربوماشین

موجودباشندروش متوسط گیری به صورت زیراست

$$\overline{AB} = \overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A'\,.\,B'} \qquad (5)$$

همچنین می‌توان نشان داد [۲]که

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial R} = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial R}\left(b\overline{A}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi b}{N}}\left[A_{ss}\frac{\partial \theta_{ss}}{\partial R} - A_{ps}\frac{\partial \theta_{ps}}{\partial R}\right] \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial \theta} = \frac{1}{\frac{2\pi b}{N}}\left[A_{ss} - A_{ps}\right] \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial z} = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b\overline{A}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi b}{N}}\left[A_{ss}\frac{\partial \theta_{ss}}{\partial z} - A_{ps}\frac{\partial \theta_{ps}}{\partial z}\right] \qquad (8)$$

به علت تقارن محوری

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = 0 \qquad (9)$$

۳- معادلات حاکم

دستگاه معادلاتی راکه دریک توربوماشین حل می‌کنیم شامل

معادلات بقای جرم، بقای ممنتوم وبقای انرژی، درمختصات استوانه‌ای وبه صورت غیردائم وسه بعدی است که چون در این بررسی جریان ایده‌ال فرض می‌شود معادلات به صورت زیر خلاصه می‌شوند (معادلات اویلر):

۱ـ بقای جرم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0 \qquad (10)$$

۲ـ ممنتوم شعاعی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_r V_z) - \frac{\rho V_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = F_r \qquad (11)$$

۳ـ ممنتوم محوری

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r V_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z^2) + \frac{\partial P}{\partial z} = F_z \qquad (12)$$

۴ـ ممنتوم مماسی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r V_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_\theta V_z) + \frac{\rho V_r V_\theta}{r} + \rho \Omega V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = F_\theta \qquad (13)$$

۵ـ انرژی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) - \frac{1}{rs}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho e V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho e V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho e V_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r P V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(P V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(P V_z) = \rho f_r V_r + \rho f_z V_z + \rho f_\theta V_\theta + \Omega F_b + \text{source} \qquad (14)$$

بااعمال معادلات (۵) تا (۹) برای معادلهٔ بقای جرم، معادلهٔ زیربه‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{br}\frac{\partial}{\partial r}\left(b r \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_r\right) + \frac{1}{br}\frac{\partial}{\partial r}\left(b r \overline{\rho' V'_r}\right) + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_z\right) + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b \overline{\rho'\,.\,V'_z}\right) - \frac{1}{\frac{2\pi b}{N}}\left\{ (\rho V_r)_{ss}\frac{\partial \theta_{ss}}{\partial r} - (\rho V_r)_{ps}\frac{\partial \theta_{ps}}{\partial r} - \left[\frac{(\rho V_\theta)_{ss}}{r} - \frac{(\rho V_\theta)_{ps}}{r}\right] + (\rho V_z)_{ss}\frac{\partial \theta_{ss}}{\partial z} - (\rho V_z)_{ps}\frac{\partial \theta_{ps}}{\partial z}\right\} = 0 \qquad (15)$$

در جریان لزج مقدار عبارت داخل کروشه به‌علت صفربودن سرعتهابر روی سطوح پره‌ها، صفر است. اسمیت [۹] نشان داد که این مقداردر جریان ایده‌ال نیزصفراست. بنابراین معادلهٔ فوق به صورت زیر می‌شود

$$\frac{1}{br}\frac{\partial}{\partial r}\left(b r \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_r\right) + \frac{1}{br}\frac{\partial}{\partial r}\left(b r \overline{\rho' V'r}\right) + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_z\right) + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b \overline{\rho'\,.\,V'_z}\right) = 0 \qquad (16)$$

در این معادله عبارتهای $\bar{\rho}.\bar{V}_r$ و $\bar{\rho}.\bar{V}_z$ مقادیرمتوسط بوده و $\overline{\rho' V'_r}$ و $\overline{\rho' V'_z}$ مقادیرنوسانی هستندکه ازآنهادرمقابل مقادیرمتوسط می‌توان صرف‌نظرکردوبنابراین حذف آنهاتقریب خوبی است، پس نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(b r \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(b \bar{\rho}\,.\,\bar{V}_z\right) = 0 \qquad (17)$$

ونهایتاً برای ساده کردن معادلات ازعلامت متوسط گیری (-) دربالای متغیرهانیزصرف‌نظرکرده وبه صورت سادهٔ زیرمی‌نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial r}(b r \rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(b \rho V_z) = 0 \qquad (18)$$

پس ازمتوسط‌گیری وساده‌کردن کل معادلات درحالت غیردائم،

دستگاه زیربه‌دست می‌آید:

۱- بقای جرم :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho b r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho b r V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho b r V_z) = 0 \qquad (۱۹)$$

۲- ممنتوم شعاعی :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho b r V_r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho b r V_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho b r V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial r}(b r P) = \rho b V_\theta^2 + \rho b r f_r + P\frac{\partial}{\partial r}(b r) + F_{br} \qquad (۲۰)$$

۳- ممنتوم محوری :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho b r V_z) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho b r V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho b r V_z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(b r P) = \rho b r f_z + P\frac{\partial}{\partial z}(b r) + F_{bz} \qquad (۲۱)$$

۴- ممنتوم مماسی :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho b r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho b r V_r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho b r V_z V_\theta) = -\rho b V_r V_\theta + \rho b r f_\theta + F_{b\theta} \qquad (۲۲)$$

۵- معادلهٔ انرژی :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho b r e) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho b r V_r (e+\frac{P}{\rho})\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho b r V_z (e+\frac{P}{\rho})\right) = r\Omega(\rho b r f_\theta - F_{b\theta}) \qquad (۲۳)$$

در ایـن بـررسی ازاثـرات ضـخامت پره‌هاصرف‌نظرشده‌وبنابرایـن پـارامـتر(b=1) است. نـیروی f کـه درمـعادلات مـمنتوم وانـرژی ظاهرمی‌شود مربوط به افتهاست وازطریق نتایج مربوط به مدلهای افت موجود، ارزیابی وتعیین می‌شود.

معادلهٔ (۲۲) را از دستگاه معادلات فوق خارج می‌کنیم و از آنجا که نیروی پره در حالت دائم مـحاسبه مـی‌شود مـعادلهٔ (۲۲) بـه صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r V_z V_\theta) = -\rho V_r V_\theta + F_{b\theta} \qquad (۲۲ - الف)$$

حال با معلوم بودن شرایط اولیه یعنی مقادیر V_r و V_θ و V_z و ρ مقدار $F_{b\theta}$ قابل محاسبه خواهد بود. پس از محاسبه F_{br} و F_{bz} از مـعادلات (۲۴) و (۲۵) و قـراردادن مـقادیر F_{br} وF_{bz} و $F_{b\theta}$ در معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۳)، دستگاه معادلات (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) را حل می‌کنیم و مقادیر جدید V_r و V_z و ρ و e وV_θ را مجدداً حساب کرده و این مقادیر جدید را در معادلهٔ (۲۲ - الف) قرار داده و $F_{b\theta}$ را دوباره محاسبه می‌کنیم. این کار را تاهمگرا شدن حل ادامه می‌دهیم. برای تکمیل دستگاه معادلات برای محاسبهٔ P و T ازمعادلات $P = \rho RT$ مـعادلهٔ گـازکامل و($e=C_V T$) مـعادلهٔ انرژی داخلی نیزاستفاده می‌شود که C_V گرمای ویژه دردمای ثابت است. نیروی $F_{b\theta}$ که از مـعادلهٔ (۲۲-الف) بـه صـورت جـداگـانه حسـاب مـی‌شود، درفـضای بـین پره‌هامقدارداشـته ودرخـارج پره‌هامقدارآن صفراست. مؤلفه‌های این نیرو در دو امتداد شعاعی و مـحوری بـه صـورت زیـردرمعادلات مـمنتوم شـعاعی ومـمنتوم محوری ظاهرمی‌شوند

$$F_{br} = \begin{cases} 0 \\ F_{b\theta} \cdot \tan\eta \end{cases} \qquad (۲۴)$$

$$F_{bz} = \begin{cases} 0 \\ F_{b\theta} \cdot \tan\eta \end{cases} \qquad (۲۵)$$

η وϕ زوایـای مـربوط بـه هـندسهٔ پره‌هاهستندکه بـه صـورت زیرمحاسبه می‌شوند(شکل ۱)

$$\tan\eta = -r\frac{\partial\theta}{\partial r}$$
$$\tan\phi = +r\frac{\partial\theta}{\partial z} \qquad (۲۶)$$

هــمان طــورکه گــفته‌شد مـعادلهٔ (۲۲- الف) نـیروی $F_{b\theta}$ را درفـضای داخـلی پـره‌هاحساب مـی‌کندکه درآن V_θ بـایدمعلوم بــــاشد. دربــالا دست اولیـــن ردیــف پــره‌هامقدارV_θ صفربوده ودرپـایین دست پـره‌هاV_θ ازرابـطهٔ چـرخش آزادمـحاسبه می‌شود.

$$r \,.\, V_\theta = \text{Const} \qquad (۲۷)$$

مؤلفهٔ چرخشی سرعت V_θ دربین پره‌هانیزازمعادلهٔ زیرمحاسبه می‌شود:

$$V_\theta = V_z \tan \beta(z) \qquad (۲۸)$$

که درآن $\beta(z)$نیزازمعادلهٔ زیربه‌دست می‌آید [۳]:

$$\beta(z) = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)^a \qquad (۲۹)$$

که β_1 وβ_2به ترتیب زوایای ورودی به وخروجی ازپره‌هاهستند وz مشخص کنندهٔ موقعیت نقطهٔ موردنظرازلبهٔ جلویی پره‌است. a ضریبی است بین ۰/۷۳ تا ۰/۹۳ که در این بررسی a=۰/۹ انتخاب شده‌است. اگرمقدار a = ۱ باشدتوزیع زاویه به صورت خطی خواهدبود.

۴- مدل کامپیوتری معادلات

همان طورکه گفته شد دستگاه معادلات (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) بایدباهم حل شوند تاسرعتهای V_r وV_z محاسبه شوند. در این مرحله برای ساده‌ترشدن دستگاه معادلات، مشتقهای نسبت به r رااعمال کرده و باجابه‌جاکردن بعضی ازجملات به سمت راست وهمچنین تغییرنام V_rبه v وV_z به u دستگاه معادلات شبیه به یک دستگاه معادلات دوبعدی (X-Y)می‌شوندکه شامل جملات منبع اضافی درسمت راست معادلات‌اند. حال این دستگاه دوبعدی رابی‌بعدکرده وسپس ازدستگاه دکارتی (X-Y) به دستگاه کلی $(\xi\text{-}\eta)$ منتقل می‌کنیم. پس ازمرتب کردن جملات دستگاه کلی معادلات در شکل بقایی آن به صورت زیردرمی‌آیند:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = S \qquad (۳۰)$$

که درآن

$$Q = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad , \quad F = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x P \\ \rho v U + \xi_y P \\ (\rho e + P)\, U \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u V + \eta_x P \\ \rho v V + \eta_y P \\ (\rho e + P)\, V \end{pmatrix} \quad ,$$

$$S = \frac{-1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\rho v}{r} \\ \frac{\rho v u}{r} + F_{bx} \\ \frac{\rho v^2}{r} + \frac{\rho_{v\theta}^2}{r} + F_{by} \\ \frac{\rho e v}{r} + \frac{\rho v}{r} - r\Omega F_{b\theta} \end{pmatrix} \qquad (۳۱)$$

که درآن

$$\begin{aligned} U &= \xi_x\, u + \xi_y\, v \\ V &= \eta_x\, u + \eta_y\, v \\ J &= \xi_x\, \eta_y - \xi_y\, \eta_x \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

که درآنها ξ_xو ξ_y و η_xو η_y متریکهای انتقال‌اند و به صورت عددی محاسبه می‌شوند و J ژاکوبین است. باتوجه به اینکه از روش حجم معیاربرای حل معادلات استفاده شده است ازمعادلات فوق بر روی یک حجم معیاردیفرانسیلی انتگرال گیری کرده وپس ازاعمال فرضیه گرین[۳] برای تبدیل انتگرالهای حجمی به انتگرالهای سطحی معادلهٔ کلی زیراخواهیم داشت

$$\int_{\forall}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) d\forall + \int_A (F, G)\, n.dA = \int_{\forall} S d\forall \qquad (۳۳)$$

که $\forall$ و A به ترتیب نشان دهندهٔ حجم وسطح یک حجم معیارند. پس ازانتگرال‌گیری بین دومرحلهٔ زمانی n و n+۱ خواهیم داشت

$$Q^{n+1} = Q^n - \frac{\Delta T}{\Delta \forall} \,.\, \sum \text{Fluxes} + S.\, \Delta T \quad (۳۴)$$

که درآن $\sum$ Fluxes مربوط به شارجملات جابه‌جایی ازمرزهای کلیه حجم معیارهای موجوددرشبکه است ویادرحالت کلی

$$\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n = -R_k \,.\, \Delta T \left(C - D_A - S\right) \quad (۳۵)$$

که درآن ΔT مربوط به گام زمانی است، R_k ثابتی است که به حجم

وضرایب چهارگانه روش رانگ - کوتامربوط می‌شود.

C - شارجملات جابه‌جایی است.

D_A- شارجملات استهلاک مصنوعی است که درادامه تشریح خواهدشد.

S - جمله منبع است.

۵- استهلاک مصنوعی

درمحاسبات سیال لزج معمولاً بەعلت وجودجملات مربوط به انتشار، خاصیت استهلاک طبیعی مخصوصاً درنواحی لزج وجودداردکه باعث جلوگیری ازنوسانها می‌شود. درمحاسبات سیال غیرلزج این خاصیت وجود ندارد و برای جلوگیری ازآثار نوسانها درنزدیکی امواج ضربه‌ای ونقاط سکون وهمچنین جلوگیری ازنوسانهای ناشی ازعدم تداخل فشار[۴] وسرعت، ازاستهلاک مصنوعی استفاده‌می‌شود. در این مقاله ازمدل پیشنهادی پولیام [۱۰] استفاده شده است. در این مدل ازجملات رسته دوم برای امواج ضربه‌ای وجملات مرتبهٔ چهارم برای افزایش تداخل فشار[۵] وسرعت، استفاده می‌شود که در شکل کلی به صورت زیر است:

$$D_A(Q) = \left(D_\xi^2 - D_\xi^4 + D_\eta^2 - D_\eta^4\right) Q \qquad (۳۶)$$

که D_ξ وD_η معرف مشتقهای دوم وچهارم متغیرQ درجهات ξ , η هستندوازمرجع [۱۰] اقتباس شده‌است. برای جزییات بیشترخواننده به مقاله پولیام [۱۰] ویاسوانسون-ترکل [۱۱] ارجاع داده‌می‌شود.

۶- گام زمانی

دستگاه معادلات حاصل رابا استفاده از روش زمان پیمایشی [۶] حل می‌کنیم وپیشروی درزمان راتارسیدن به حالت دائم که جواب نهایی است ادامه می‌دهیم که در این حالت ΔQ بایدبه صفریامقداربسیارکمی برسد. درمحاسبات جریان دائم با استفاده از یک روش زمان پیمایشی، درصورتی که از یک قدم زمانی موضعی (به جای قدم زمانی کلی) استفاده‌شود، سرعت همگرایی بالاخواهدرفت. باتوجه‌به این نکته، باثابت نگاه‌داشتن ضریب CFL درواقع بیشترین مقدارΔT رامحاسبه کرده ودرمحاسبات اعمال می‌کنیم.

$$\Delta t = \frac{CFL}{dt_\xi + dt_\eta} \qquad (۳۷)$$

که درآن

$$dt_\xi = |\xi_x u + \xi_y v| + \frac{a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{\Omega}$$

$$dt_\eta = |\eta_x u + \eta_y v| + \frac{a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}{\Omega} \qquad (۳۸)$$

که درآن a سرعت صوت وΩ حجم هرالمان است.

۷- برنامهٔ کامپیوتری وآزمون آن

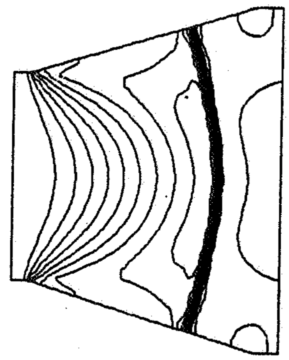
همان طورکه قبلاً اشاره‌شده، باتوجه به دستگاه معادلات وروش زمان‌پیمایشی که برای دستگاههای صریح به‌کاربرده‌می‌شود، برنامهٔ کامپیوتری به صورت برداری[۷] تهیه شد که از روش رانگ-کوتامرتبه چهارمی استفاده کرده و چهار معادلهٔ کوپله شده را حل می‌کند. ضرایب مربوط به چهارمرحلهٔ رانگ-کوتا عبارت‌اند از:

(۰/۲۵، ۰/۳۳، ۰/۵۰، ۱/۰)

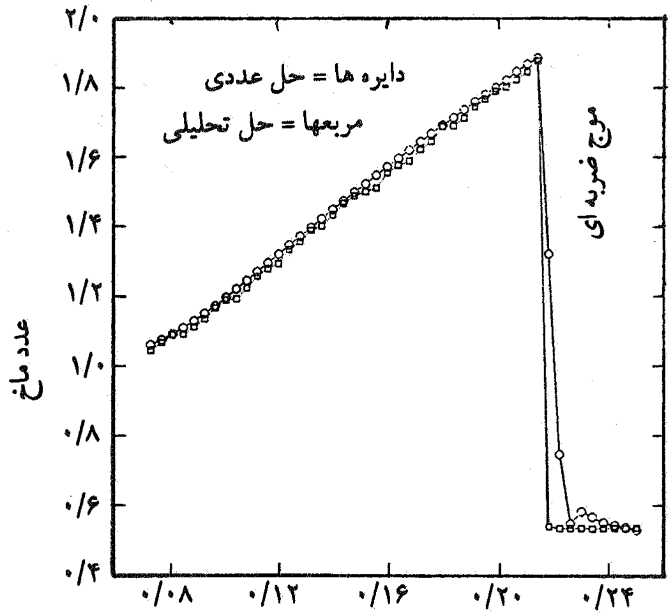
برای‌آزمون برنامهٔ فوق، ابتداجریان را درداخل یک مجرای واگرا حل کرده وبه ازای فشارهای خروجی مختلف جریانهای ایجادشده‌راارزیابی کردیم که باحلهای تحلیلی مطابقت دارد . به‌عنوان نمونه به ازای فشارخروجی Pexit = ۰/۶۵ کانتورهای عددماخ درشکل (۲)نشان داده‌شده‌است ومحل موج ضربه‌ای ایجادشده نیزبه روشنی مشخص است. همچنین تغییرات عدد ماخ از ورودی تا خروجی که به کمک این روش عددی پیش‌بینی شده، باتغییرات به دست آمده در حل تحلیلی [۱۲] مقایسه شده‌اندکه تطابق خوبی رانشان می‌دهند، شکل (۳) راببینید.

۹- شرایط مرزی

- درورودی، فشارودمای سکون وهمچنین زاویه ورودی جریان داده‌می‌شودومؤلفه‌های سرعت رانیزبادرونیابی به‌دست می‌آوریم.
- درخروجی، مقدار فشار استاتیک در پای پره‌ها رامشخص کرده



شکل ۲ - کانتورهای عدد ماخ در یک دیفیوزر



شکل ۳ - تغییرات عدد ماخ در یک دیفیوزر

و مـقدار فشـار در شعاعهای دیگـر ازطـریق تـعادل شـعاعی بـه دست‌خـواهـد آمـد. مـؤلفه‌های سـرعت جـریان و هـمچنین دماهای‌استاتیک و سکون سیال با درونیابی به دست می‌آیند.

- درمرزهای بالایی وپـایینی، ازشـرط آدیـاباتیک بـودن سـطح، صـفربودن گـرادیـان فشـارودرونیابی‌مؤلفه‌های سـرعت اسـتفاده می‌شود.

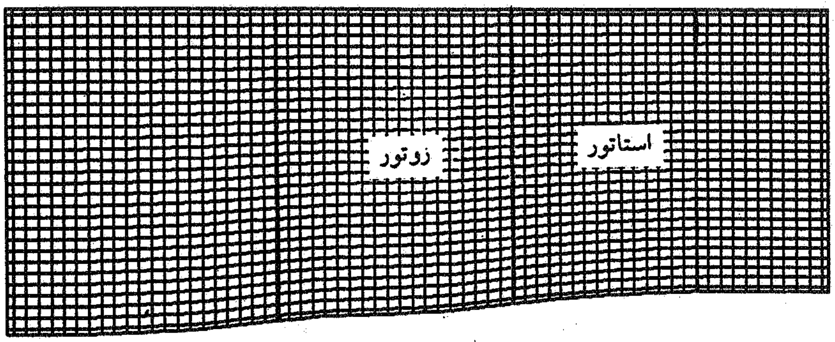
۱۰- تولیدشبکه

درایجادشبکه می‌توان ازروشهای جبری ویامعادلات دیفرانسیل اسـتفاده‌کـردکه بـه‌علت سـریع بـودن روش جـبری ازایـن شـیوه درایجادشبکه استفاده‌شده‌است. خطوط شبکهٔ فـیزیکی ایـجادشده درامتداد ξ دارای انحنا(منطبق بـربدنهٔ کـمپرسور)بـوده ودرامـتداد η به‌صورت عمودی هستندتابتوانـندبرلبه‌های پره‌هامنطبق شـوند. درهرحالَ ازآنـجاکـه بـرنامهٔ‌کـامپیوتری بـرای حـل مـیدان جـریان درمـختصات کـلی نـوشته شـده است‌درصـورتی کـه ازیک شـبکه باخطوط η غیرقائم‌نیزاستفاده‌شود، برنامه قابلیت اجرادارد.

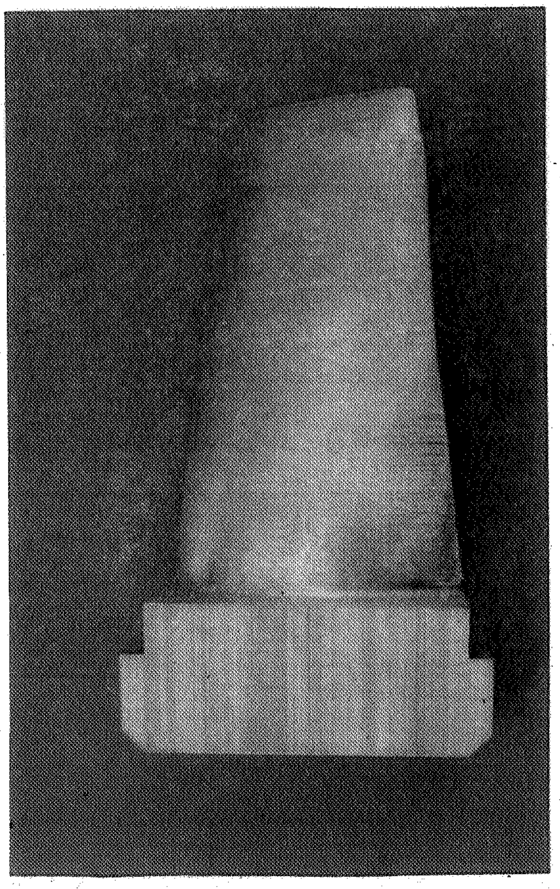
نمونه‌ای ازشبکهٔ تولیدشده درشکل (۴)نشان داده‌شده‌است کـه شامل ۳۰×۶۷ گـره بـوده کـه ایـن تـعدادگـرهٔ انـتخابی درنـزدیکی مرزظرفیت حافظهٔ کامپیوترمورداستفاده‌است. درهرحال قبل ازایـن انتخاب، مطالعهٔ تعدادنقاط شبکه انجام شده که نتایج آن درجدول (۱) نشان داده‌شـده اسـت. هـمان طـورکه ازاطـلاعات جـدول بـالا مشاهده‌می‌شودبازیادترشدن تعداد نقاط شبکه ازمقدارخطای دبی جرم کاسته می‌شود ودرصد خطااز حوالی ۳۰×۵۰ به بـالا، نـاچیز مـی‌شود. لازم بـه تـذکراست کـه مـطالعهٔ شـبکه بـرروی شـبکهٔ دیـفیوزرانـجام شـده وبـررسی بـعدی نشـان دادکـه درمـوردشبکهٔ کمپرسورنیزصادق است.

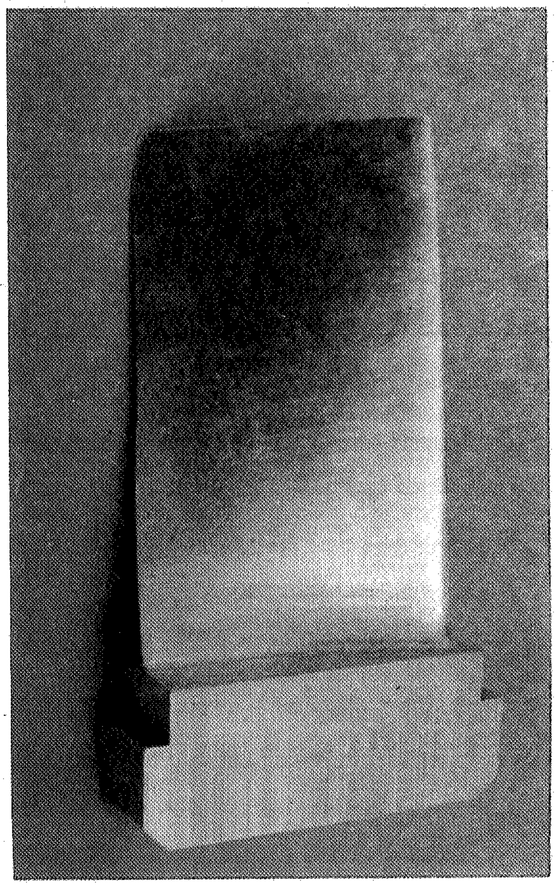
۱۱- نتایج

برنامهٔ فوق‌الذکرکه به زبان فـورترن ۷۷ نـوشته‌شده‌است بـرای کمپرسوری مـطابق شکـل (۴) اجـراشـدکه درآن پـره‌های مـتحرک وپره‌های ساکن به ترتیب مشخص شده‌اند. نکته‌ای که در این جالازم به تـذکراست، مـربوط بـه پـروفیل پـره‌های مـورداسـتفاده در ایـن محاسبات می‌شود. ازآنجاکه اطلاعات مربوط به یک سری پره‌های خاص، به‌عنوان مثال پره‌های (NASA - Rotor - ۶۷) مورداشاره درمرجع [۴] ویاپروفیلهای دیگردراختیارنبود، ازاطلاعات مربوط به کمپرسورمحوری که توسط این نویسنده طراحی شـده ونـمونه‌ای ازپـره‌های آن نـیزساخته‌شده (شکـل ۵) اسـتفاده‌شده‌است. در ایـن کمپرسور زوایـای ورودی و خـروجی پـره‌های مـتحرک درنـاحیه پاوسرپره‌ها که درشکل (۶) نشـان داده‌شـده هـمگی ازطـرح فـوق استخراج شده‌اند، تغییرات شعاعی زوایای پره‌های ثابت نیزدرشکل (۶) مـلاحظه مـی‌شود. تـغییرات زوایـادرفضای داخـلی پـره‌ها همان‌طورکه قبلاً ذکرشدازمعادلهٔ (۲۹) تبعیت می‌کند.



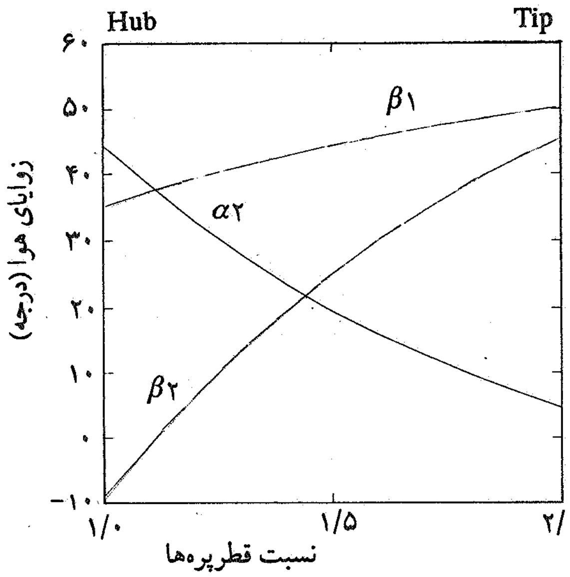
شکل ۴ - شبکه ۳۰×۶۷ برای یک کمپرسور



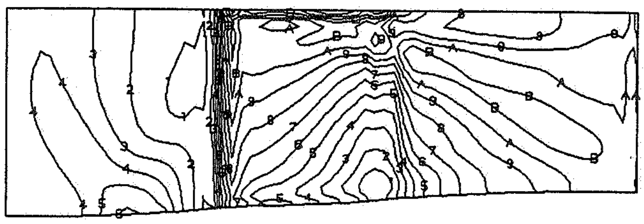


شکل ۵ - نمونه یک پره متحرک

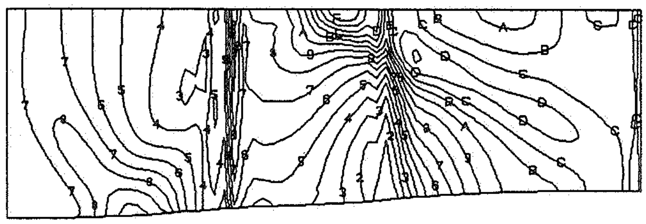
برای این محاسبات، فشاربدون بعدخروجی درقسمت پای پره‌ها ۰/۹ انتخاب شده‌تا عدد ماخ محوری همواره مادون صوت باشد. شکلهای (۷)، (۸) و (۹) به ترتیب نشان دهندهٔ کانتورهای مربوط به چگالی - فشاراستاتیک وعددماخ جریان است. همان طورکه‌ملاحظه‌می‌شودباعبورجریان ازداخل‌کمپرسور، فشار و چگالی افزایش یافته وعددماخ پس ازپره‌هاکاهش می‌یابدکه با فیزیک‌مسئله‌نیزتطابق‌داردونتایج‌مراجع [۳ و ۴] نیز روند مشابهی رابا‌پره‌های‌باهندسهٔ‌متفاوت‌نشان‌می‌دهند.نکتهٔ‌مهم‌وقابل‌توجه‌این



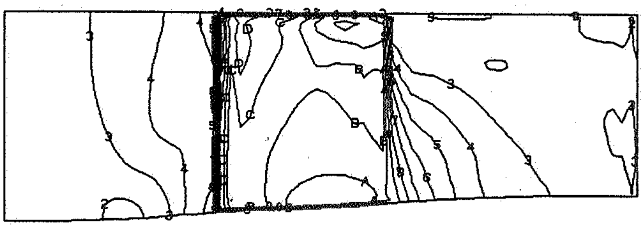
شکل ۶ - تغییرات زاویه هوا با ارتفاع



شکل ۷ - کانتورهای جرم مخصوص



شکل ۸ - کانتورهای فشار استاتیک



شکل ۹ - کانتورهای عدد ماخ

است که باداشتن توزیع پارامترهای مختلف جریان درهرمقطع ودرطول ماشین می‌توان تجزیه وتحلیل کلی ازوضعیت جریان داشت وبه سادگی بر روی اثرات افزایش سرعت دوران، تغییرفشارخروجی، شکل پروفیل پره‌هاودیگرپارامترهای موثربررسیهای لازم راانجام داد. سرعت بالای انجام محاسبات وارائهٔ ارزیابی نسبتاً دقیقی ازوضعیت جریان درهرنقطهٔ ماشین، مشخصهٔ بارزوقابل توجه این برنامه است وبه‌راحتی می‌توان تعدادردیف پره‌های متحرک وثابت رازیادیاکم کردکه درمقایسه بایک برنامهٔ سه بعدی زمان وهزینهٔ کمترمحاسبات قابل توجه است. نظری گذرا به جدول (۱) مرتبهٔ زمان محاسبات را توسط این برنامه نشان می‌دهد که حدود یک ساعت باکامپیوتر ۴۸۶-DX۲ است. در صورتی که زمان محاسبه برای برنامه های سه بعدی با یک مینی کامپیوتر از مرتبه ۱۰ ساعت است [۱۳]. بنابراین در این برنامه سرعت کار بسیار بالاست و باتوجه به درنظر گرفتن نیروی اعمال شده توسط پره‌ها دقت کار هم بالا خواهد بود.

در این مطالعه ازاثرات افتهاصرف‌نظرشده که خودمقوله‌ای جداگانه است ودرادامهٔ مطالعات بعدی منظور خواهدشد. همچنین تغییررژیم جریان ازایده‌ال به لزج وواردکردن مدل اغتشاش مناسب نیزازاهداف آتی است. به هرحال برای ارزیابی عملکردبرنامهٔ حاصل نتایج پیش‌بینی شده دبی جرمی توسط این برنامه بانتایج مربوط به کمپرسورطراحی شده توسط این نویسنده باهم مقایسه شدند. که اختلاف حاصل حدود ۲/۸ درصداست که نشان دهندهٔ دقت نسبتاً بالای محاسبات وپیش‌بینی انجام شده توسط برنامه است.

۱۲ - نتیجه گیری

در این مقاله، جریان سیال غیرلزج در صفحهٔ نصف‌النهاری یک کمپرسورجریان محوری مورد بررسی قرارگرفت. برای این منظور معادلات اویلرسه بعدی در جهت مماسی متوسط گیری شده و با استفاده از روش زمان پیمایشی معادلات حاصل به روش عددی حل شد. نتایج به‌دست آمده عملکرد کمپرسور رابه نحوخوبی باکمترین زمان لازم پیش‌بینی کرد. دقت عمل برنامه وسرعت بالای آن، برنامه را برای انجام مطالعات لازم برای جریان سیال درتوربوماشینهاجذاب می‌کند.

قدردانی

لازم است ازمرکزفیزیک نظری تریست[۸] که برای مدتی این

امکان را دردانشگاه فلورانس ایتالیاداختیارانیجانب قراردادتابخشی ازاین کاررا درآنجاانجام دهم تشکرکنم، همچنین ازپرفسورمارتلی دردانشگاه فلورانس به خاطر راهنماییهای لازم ایشان وازمهندس میلیووینی درکمکهای برنامه‌نویسی قدردانی و تشکر می‌کنم.

جدول (۱)

تعدادنقاط شبکه	تعداد تکرار	زمان محاسبات (دقیقه)	دبی محاسبه شده (بدون بعد)	درصد خطا
۱۴×۷	۱۰۰۰	۰/۸۳	۰/۱۳۷۶۰	٪۲۲/۲
۱۹×۱۰	۱۰۰۰	۱/۱۴	۰/۱۲۲۴۰	٪۸/۷۵
۳۱×۲۰	۱۰۰۰	۴/۵۲	۰/۱۱۷۰۰	٪۳/۹۲
۵۹×۳۰	۱۰۰۰	۱۲/۹۶	۰/۱۱۲۹۱	٪۰/۲۷
۵۹×۳۰	۴۰۰۰	۵۹/۸۴	۰/۱۱۲۶۰۵	٪۰

واژه نامه

1. Runge-Kutta
2. Navier-Stoke
3. Green's theorem
4. decoupling
5. coupling
6. time-marching
7. vectorized
8. Trieste

مراجع

1. Arnone, A., " Viscous Analysis of 3-D Rotor Flow Using a Multigrid Method, " *Transactions of ASME, Journal of Turbomachinary*, Vol. 116, No. 3, pp. 435-445, 1994.
2. Hirsch, C., "Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines," Finite Element Calculations of Turbomachine Flows, Von Karman Institute LS, 1979 -7.
3. Yao, Z., and Hirsch, Ch., "Throughflow Model Using 3-D Euler or Navier-Stokes Solver," *VDI Berichte* NR. 1185, pp. 51-61, 1995.
4. Boure, G., and Gillant, Ph., (Plaisir/F), "Aerodynamic Modeling of a Transonic Radial Equilibrium of a Multistage Compressor," *VDI Berichte*, NR. 1185, pp. 143-155 , 1995.
5. Martelli, F., and Michelassi, V., "Using Viscous Calculations in Pump Design," *Transactions of the ASME*, Vol. 112, pp. 272-280, Sept. 1990.
6. Baldassarre, L., and Michelassi, V., "Centrifugal Pump Design by Meridional Flow Simulation," *2nd. International Conference on Pumps and Fans,* Beijing, 1995.
7. Petrovic, M., and Ric B. W., " Through-Flow Calculation in Axial Flow Turbines at Part Load and Low Load, " *VDI Berichte*, NR. 1185 , pp. 309-317 , 1995.
8. Came, P.M., "Streamline Curvature through Flow Analysis of Axial-Flow Turbines," *VDI Berichte*, NR. 1185 , pp. 291-307, 1995.
9. Smith, L.H., "The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery," *Trans ASME, Ser. A, Journal of Engineering for Power*, Vol. 88, pp. 1-12, Jan. 1966.
10. Pulliam, T.H., "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," *AIAA Journal*, pp. 1931-1940, Sept. 1986.
11. Swanson, R.C.; and Turkel, Eli., "Artificial Dissipation and Central Difference Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations," *Proceedings of the AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference AIAA*, pp. 55-69, New

York, 1987.

12. Shapiro, H. Ascher, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, John Wiley & Sons , New York, 1953.

13. Vu, T.C., and Shyy, W., "Performance Prediction by Viscous Flow Analysis for Francis Turbine Runner, " *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol. 116, pp. 116-120, March 1994.