بهینه سازی شبکه‌ها با تابع هزینهٔ مقعر

سعیده کتابی *

گروه مدیریت، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۲/۱٦ – دریافت نسخهٔ نهایی ۸۰/٤/۱٦)

چکیده – *در این مقاله مسئله یافتن یک شبکهٔ ارتباطی[1] با حداقل هزینه در نظر گرفته می‌شود که در آن اولاً شبکه چندکالایی[2] و بدون جهت[3] و ثانیاً هزینه کمانها توابعی خطی قطعه‌بندی شده و مقعر[4] از جریانها هستند. چند روش برای حل مسئله بررسی می‌شوند: روش جستجوی تصادفی ترمودینامیکی، یک روش ابداعی بر پایه روش ارائه شده توسط مینوکس و یک روش ساده سازی لاگرانژی برای به دست آوردن حد پایینی همچنین نتایج محاسباتی سه روش بالا ارائه می‌شوند.*

واژگان کلیدی: *جریان در شبکه، تابع خطی قطعه‌بندی شدهٔ مقعر، مدل یال – مسیر، روشهای جستجوی تصادفی، روش ساده‌سازی لاگرانژی، روش زیرگرادیان.*

Network Optimization with Concave Costs

S. Ketabi

Department of Management, Isfahan University, Isfahan, Iran

ABSTRACT- *In this paper the problem of minimum cost communication network design is considered where the costs are piecewise linear concave. Several methods are compared: Simulated Annealing method, a heuristic based on the method proposed by Minoux, and a lagrangian method based on lower bounding procedure.*

Keywords: *Newtwork flow, Piecewise linear concave function, link-path model, random search methods, lagrangian relaxation method, subgradient method*

* – استادیار

۱-مقدمه

امروزه استفاده از مدلهای شبکه در اغلب زمینه‌های علمی و فنی گسترده شده است. به عنوان مثال می‌توان از برنامه‌ریزیهای مربوط به حمل و نقل، ارتباطات، انرژی، خدمات شهری و حتی علوم اجتماعی نام برد که تقریباً در تمام موارد، اساسیترین مسئلهٔ مطرح شده، مسئلهٔ جریان در شبکه[۵] است. هدف در مسئلهٔ جریان در شبکه عبارت است از تعیین الگوی بهینهٔ جریان با حداقل هزینه برای جابه جایی یک یا چند کالا از طریق کمانهای شبکه به نحوی که توازن جریان[۶] در گره‌های شبکه برقرار باشد.

در مسائل جریان در شبکه، معمولاً فرض می‌شود که هزینه‌ها توابعی خطی یا محدب از جریانها هستند. ولی در واقع، هزینه‌های ریالی مربوط به ساخت، به دلیل خاصیت اقتصاد به مقیاس[۷]، معمولاً ماهیتی مقعر دارند. به عکس در توابع محدب، هر مینیمم موضعی یک تابع مقعر، لزوماً مینیمم مطلق نیست. از آنجایی که روش حل مینیمم‌سازی مقعر به طریقی درگیر جستجو و شمارش نقاط حدی ناحیه امکانپذیر است، این مسئله مشکل غیرچندجمله‌ای[۸] شناخته شده است.

چون مدلهای شبکه با تابع هزینه مقعر، ابزاری برای مدلسازی مسائل گسسته، از جمله مسئلهٔ هزینهٔ ثابت[۹] هستند، حل مؤثر این مدلها راهگشای حل مسائل مهمی در مدیریت انبار و تولید خواهد بود. متاسفانه روشهای حل مینیمم‌سازی مقعر در مقایسه با مینیمم سازی توابع خطی یا محدب بسیار کند است [۱]. لذا برای حل مسائل عملی روشهای کاراتر مانند روشهای تقریبی، ساده‌سازی و یا ابداعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این مقاله، ضمن ارائهٔ یک مدل تقریبی برای مسئلهٔ جریان در شبکه با هزینه مقعر، چگونگی کاربرد سه روش ذوب تدریجی شبیه ساخته شده یا بهینه سازی ترمودینامیکی[۱۰]، روش ابداعی مینوکس[۱۱] و روش ساده سازی لاگرانژی[۱۲] برای حل آن تشریح و نتایج محاسباتی آن مقایسه می‌شود.

۲-یک مدل مسائل جریان در شبکه با هزینهٔ مقعر و خاصیت جوابهای آن

یک شبکه بدون جهت و بدون ظرفیت[۱۳] شامل N گره و K جفت مبدأ – مقصد (کالا) را در نظر بگیرید. فرض کنید هزینه جریان روی هر کمان یک تابع خطی قطعه بندی شدهٔ مقعر از میزان جریان باشد. می‌دانیم که هر تابع را می‌توان به صورت خطی قطعه‌بندی شده تقریب زد، هر چه تعداد قطعات (R) بیشتر باشد تقریب بهتری خواهیم داشت. با این فرض تابع هزینه را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$C_e(x_e) = \begin{cases} F_e^r + c_e^r x_e & x_e \in \left(M_e^{r-1}, M_e^r\right] \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن x_e جریان بر روی یال e و c_e^r ، F_e^r ، M_e^{r-1} و M_e^r به ترتیب شیب، عرض از مبدأ، کرانهٔ پایینی و بالایی قطعه خط r (برای r=1,…,R) هستند. برای آنکه توابع C_e مقعر باشند لازم است که $M_e^0 = 0$ ، $F_e^1 = 0$، و برای هر r داشته باشیم: $F_e^r < F_e^{r+1}$ و $F_e^r + c_e^r M_e^r = F_e^{r+1} + c_e^{r+1} M_e^r$.

چون مشخص نیست که جریان کل یال در کدام قطعه قرار می‌گیرد، متغیر تصمیم پیوسته x_e^{kr} را برابر میزان جریان کالای k بر روی یال e، به شرط اینکه در قطعهٔ r قرار بگیرد، تعریف می‌شود. همچنین متغیر تصمیم دوتایی y_e^r مشخص می‌کند که جریان بر روی یال e در قطعهٔ r قرار می‌گیرد یا خیر. به علاوه با استفاده از X_μ^K به عنوان میزان جریان کالای k بر روی مسیر μ برای $\mu \in P_k$ ، که در آن P مجموعهٔ تمام مسیرهای بین مبدأ – مقصد مربوط به کالای k است، مدل یال – مسیر[۱۴] مربوط به جریان در شبکه عبارت خواهد بود از [۲]

$$\begin{aligned} &\min \Sigma_e \Sigma_r c_e^r \left(\Sigma_k x_e^{kr}\right) + \Sigma_e \Sigma_r F_e^r y_e^r \\ &\text{s.t.}\ \Sigma_e x_e^{kr} - \Sigma_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k = 0,\ \forall e, k \\ &\sum\nolimits_{\mu \in P_k} X_\mu^k = d_k,\ \forall k \\ &\sum\nolimits_k x_e^{kr} \le M_e^r y_e^r,\ \forall e, r \\ &\sum\nolimits_k x_e^{kr} \ge M_e^{r-1} y_e^r,\ \forall e, r \\ &\sum\nolimits_r y_e^r \le 1,\ \forall e \\ &x_e^{kr} \ge 0, X_\mu^k \ge 0,\ \forall e, r, k, \mu \in P_k \end{aligned} \qquad (۲)$$

$y_e^r = 0$ یا 1 , $\forall e, r$

که در آن:

e : اندیس مربوط به یال،

r : اندیس مربوط به قطعه،

k : اندیس مربوط به کالا،

P_k : مجموعهٔ تمام مسیرها برای کالای k،

d_k : ترافیک مورد تقاضای کالای K

$\delta_{e\mu}$: عنصر مربوط به وقوع یال e در مسیر μ،

c_c^r : شیب تابع هزینه یال e مربوط به قطعهٔ r،

هستند. اولین دسته از محدودیتها به عنوان محدودیتهای جریان یال – مسیر و دومین دسته مربوط به تساوی تقاضا و ترافیک مربوط به کالا با کل جریان بر روی مسیرهای مختلف بین جفت مبدأ – مقصدند.

از آنجایی که مینیمم یک تابع مقعر (که لزوماً پیوسته نیز هست) و متناهی، بر روی یک چندوجهی محدب، در یکی از نقاط حدی چندوجهی است و از طرف دیگر، هر مینیمم موضعی ممکن است مینیمم مطلق نباشد، هر روش حل مسئله، باید به نحوی تمام نقاط حدی ناحیه امکانپذیر را بررسی کند. یک نقطهٔ حدی برای مسائل جریان در شبکه با هزینهٔ غیرنزولی و تفکیک پذیر بر روی یالها، الگویی از جریان است که از تخصیص ترافیک تقاضا بر روی یک مسیر ساده[۱۵] و یکتا[۱۶] برای هر جفت مبداء – مقصد حاصل می‌شود [۲].

۳–روش بهینه‌سازی ترمودینامیکی (.S.A)

۳–۱– مقدمه

.S.A یک روش جستجوی تصادفی قوی است که برای یافتن یک جواب خوب (نه لزوماً بهینه) برای مسائل مشکل ترکیباتی[۱۷] به کار می‌رود. ایدهٔ ترمودینامیکی روش بر این پایه است که اگر یک ماده دمای بسیار بالایی داشته باشد و بعد به آرامی و با تامل خنک شود، اجزا و مولکولهای ماده یک وضعیت منظمی پیدا خواهند کرد. این روش برخلاف روشهای جستجوی معمولی، در هر تکرار علاوه بر حرکت به سوی جواب بهتر، جوابهای با مقدار تابع هدف بهتر را نیز با احتمال غیرصفری قبول می‌کند. این احتمال در ابتدا بزرگ است و ضمن اجرای روش متناسب با پارامتر مثبتی به نام دما[۱۸] کاهش پیدا می‌کند. در نتیجه، روش .S.A از لحاظ نظری با غلبه بر بهینگی موضعی، قادر به یافتن جواب بهینهٔ مطلق نیز خواهد بود[۳].

برای یک مسئلهٔ عمومی مینیمم سازی، ایدهٔ اصلی در روش .S.A تولید جواب در همسایگی جواب فعلی و محاسبهٔ موثر تغییر در مقدار تابع هدف، ΔC است. سپس ضمن ذخیرهٔ بهترین جواب به دست آمده، اگر $\Delta C \leq 0$ باشد، جواب جدید قطعاً پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت اگر $\Delta C > 0$ باشد، جواب جدید با احتمال $\exp\left(-\frac{\Delta C}{T}\right)$ پذیرفته می‌شود که در آن T دمای سیستم است. دمای سیستم، که درجهٔ تصادفی بودن حرکت به سوی جواب را تعیین می‌کند، مطابق با یک برنامهٔ معین با پیشرفت روش حل، کاسته می‌شود. در واقع دمای سیستم مشخص کنندهٔ زیرفضای جواب مسئله است که در هر تکرار مورد قبول قرار می‌گیرد. روش .S.A در شکل (۱) خلاصه شده است.

همان طور که دیده می‌شود، در دمای بالا تقریباً تمام جوابهای تولید شده صرف نظر از مقدار تابع هدف پذیرفته می‌شوند. با پیشرفت الگوریتم و کاهش دما، جوابهای نامناسب، شانس کمتری برای پذیرفته شدن دارند. در واقع در هر دما، احتمال پذیرفتن جواب با مقدار تابع هدف بیشتر، بستگی به اندازهٔ افزایش (ΔC) دارد.

۳–۲– کاربرد .S.A برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی شبکه با هزینهٔ مقعر

برای کاربرد روش .S.A برای هر مسئلهٔ بهینه سازی، بایستی دو دسته از پارامترها تعیین شوند. دستهٔ اول، پارامترهای مربوط به کنترل دما و تعداد جوابهایی که باید تولید شوند، و دستهٔ دوم مربوط به ویژگیهای خاص مسئلهٔ مورد نظرند.

- پارامترهای زیر داده شده‌اند: دمای اولیه، تعداد دفعات کاهش دما و فرمول آن و تعداد جوابهایی که در هر دما باید تولید شوند.
- یک جواب اولیه x_s و $C_s = C(x_s)$ قرار دهید.
- بهترین جواب به دست آمده $x^*=x_s$ و $c^*=c_s$ قرار دهید.
- تکرار برای دماهای مختلف
  - یک جواب همسایه x برای x_s تولید کنید.
  - اگر $\Delta c=c(x)-c_s\leq 0$ آن گاه
    - جواب جدید را قبول و $x_s=x$ و $c_s=c(x)$ قرار دهید.
    - اگر $c(x)<c^*$ بهترین جواب را با $x^*=x$ و $c^*=c(x)$ جایگزین کنید.
    - در غیر این صورت:
      - یک عدد تصادفی یکنواخت به نام rand تولید کنید.
      - اگر $rand < \exp\left(-\frac{\Delta x}{T}\right)$ باشد، آن گاه
        - جواب جدید را قبول و $x_s=x$ و $c_s=c(x)$ قرار دهید.
      - در غیر این صورت جواب تولید شده را رد کنید.
  - دما را کاهش دهید.

شکل ۱- روش بهینه سازی ترمودینامیکی

۳-۲-۱- تصمیمات عمومی

انتخاب پارامترهای عمومی به مسئلهٔ بهینه سازی و موارد خاص مورد نظر بستگی دارد. بـرای انتخـاب منـاسب، بایستـی روش را با چند نمونه پارامترها اجرا و سپس بهترین ترکیب پارامترهـا را تعیین کرد.

دمای اولیه باید به طریقی تعیین شود که احتمال قبول و رد جوابـها بـرای حـالت $\Delta C>0$ در تکـرار اول روش برابـر باشـد. انتخاب صحیح دمای اولیه بسیار مـهم اسـت، چـون اگر خیلـی پایین باشد، روش ممکن است یک مینیمم موضعی را به دسـت آورد و اگر خیلی بالا باشد، اجرای روش طولانی خواهد شد.

استراتژی خنک کردن سیستم، چگونگی کـاهش دمـا را در حین تکرارهای روش تعیین می‌کند. ما استراتژی نمایی را بـرای خنک کردن سیستم در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریـف می‌شود

$$T_{k+1} = \alpha T_k$$

که در آن T_k، دما در تکرار kام و $0<\alpha<1$ سرعت خنـک کـردن سیستم است. مقدار α باید به اندازهٔ کافی بزرگ باشـد و $\alpha=0.9$ مقداری است که برای این مسئله در نظر گرفته‌ایم.

کیفیت جواب روش .S.A به میزان زیادی بستگی به تعـداد جوابهایی دارد که در هر دما مورد بررسی قرار می‌گیرند. هر چه این مقدار بزرگتر باشد، شانس یافتن مینیمم مطلق بیشتر می‌شود ولی در عوض از کارایی روش کاسته می‌شـود. بنـابراین مقـدار این پارامتر هم بستگی به ابعاد مسئله دارد و با چند بـار اجـرای آزمایشی روش برای مقادیر مختلف تعیین می‌شود. برای مسـئلهٔ مورد نظر در ابعاد کوچک (شبکه با تعداد گره‌های حداکـثر ۳۰) در هر دما حدود ۲۰۰۰ جواب تولید می‌شوند.

چون تکرارهای روش نظیر دماهـای مختلـف اسـت، یـک طریقـه بـرای توقـف روش انجـام آن بـرای تعـداد مشـــخصی دماست. برای مسئله بالا ۴۰ تا ۶۰ بار تغییر دمـا کـافی بـه نظـر می‌رسد. عملاً نیز برای کاهش بیشتر دمـا، جـواب بـدون تغیـیر باقی می‌ماند.

۳-۲-۲- تصمیمات اختصاصی

در هر تکرار روش .S.A، بایستی تعداد زیادی جواب تولید شوند تا یک تعادل گرمایی در هر دما برقرار شود. اساس محاسبات روش مربوط به تعیین تغییر مقدار تابع هدف برای هر جواب تولید شده است و کارایی روش بر پایه چگونگی محاسبهٔ موثر آن است.

همان طور که ذکر شد، جواب مسئلهٔ جریان در شبکه با مینیمم هزینهٔ مقعر، یک نقطهٔ حدی ناحیه امکانپذیر است و بنابراین طرحی[19] از جوابهای کاندید که توسط روش .S.A باید تولید شوند، شامل K مسیر ساده و یکتا بین مبدا – مقصدهاست. برای تولید یک جواب جدید، یک زوج مبدا – مقصد به صورت تصادفی انتخاب و مسیر بین آن دو تغییر داده می‌شود. یک راه این تغییر انتخاب یک گره در مسیر موجود و اضافه کردن، حذف و یا تغییر گرهٔ بعد از آن است. به این ترتیب محاسبهٔ تغییر مقدار تابع هدف بسیار سریع و فقط نیاز به محاسبهٔ تغییر هزینه ۳ یا ٤ یال در هر تکرار خواهد داشت.

٤-روش ابداعی مینوکس

مینوکس روشی برای حل مسئلهٔ جریان در شبکهٔ چندکالایی با هزینهٔ مقعر ارائه کرد [٤] که بر پایه شرایطی لازم برای بهینگی استوار است که در این مورد قویتر از شرایط بهینگی موضعی است که مبنای سایر تحقیقات بوده است [٥-٨]. بنابراین قبل از تشریح روش، ابتدا این شرایط بیان می‌شوند.

یک جریان چندکالایی f را در نظر بگیرید که ترافیک هر کالا روی یک مسیر ساده و یکتا نظیر شده باشد. فرض کنید جریان روی یال e، f_e باشد. اگر یال $\upsilon=(i,j)$ دارای جریان $f_\upsilon>0$ باشد، برای تمام یالهای شبکه طول l به طریق زیر تعریف می‌شود.

برای یال	υ	$l_\upsilon = +\infty$
برای هر یال دیگر	$U \neq \upsilon$	$L_U=C_u(f_u+f_\upsilon)-C_u(f_u)$

(۳)

که در آن $C_u(f_u)$ هزینه جریان f_u روی یال u است. حال $L(f,\upsilon)$ را طول کوتاهترین مسیر غیرمستقیم بین i و j تعریف کنید که می‌تواند به عنوان کمترین هزینهٔ جابه جایی جریان f_υ از طریق یک مسیر جانشین (به جای راه مستقیم (i,j)) نیز در نظر گرفته شود. بدین ترتیب یک شرط لازم برای جریان f که یک جواب با هزینه مینیمم باشد این است که برای هر یال υ با $f_\upsilon>0$ داشته باشیم:

$$\Delta(\upsilon) = L(f,\upsilon) - C_\upsilon(f_\upsilon) \geq 0 \quad (٤)$$

به این ترتیب نحوهٔ بهبود یک جواب که دارای شرط لازم بالا نیست نیز مشخص می‌شود. روش ابداعی فوق از نوع گریدی[20] است، چون پس از محاسبهٔ مقادیر $\Delta(\upsilon)$ برای تمام یالها با جریان مثبت، یال با حداقل $\Delta(\upsilon)$ را انتخاب و سپس جریان مربوط به آن را روی مسیر جانشین قرار می‌دهد. شرط توقف روش هم این است که مینیمم مقادیر Δ ها غیرمنفی باشد که نشان می‌دهد که شرایط بهینگی برقرار شده است. شکل (۲) روش بالا را دقیقاً نشان می‌دهد.

٥-روش ساده سازی لاگرانژی

٥-۱- مقدمه

روشهای ابداعی و روشهای جستجوی تصادفی، اغلب برای حل مسائل مشکل یا در ابعاد بزرگ بهینه سازی ترکیباتی به کار می‌رود. اگرچه ایده‌ای در این مورد وجود ندارد که جواب به دست آمده توسط روشهای بالا تا چه حد به جواب بهینه نزدیک است. به این منظور با کاربرد یک روش تعیین حد پایینی، میزان خوبی جوابها قابل بررسی خواهد بود. شپیرو نشان داده است که روش ساده سازی لاگرانژی، به خصوص برای مسائل گسسته، حدود پایینی خوبی به دست می‌آورد [۹].

٥-۲- صورت ساده شدهٔ لاگرانژی مسئله

مسئلهٔ (۲) ارائه شده در بخش (۲) را در نظر بگیرید. محدودیت اول آن را با

$$\sum_e x_e^{kr} - \sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k \geq 0 \;\; , \;\; \forall\, e,k$$

جایگزین کنید. به عبارت دیگر، جریان روی هر یال بزرگتر یا مساوی جریان روی مسیرهای مختلف شامل یال بالا باشد. اگرچه برای یک جواب بهینه این محدودیت به شکل تساوی برقرار خواهد شد، ولی در نظر گرفتن علامت محدودیت به شکل ≥ برای کاربرد روش ساده سازی لاگرانژی لازم است، چرا که در این صورت ضرایب لاگرانژ محدود به مقادیر نامثبت خواهند بود.

یک صورت ساده شده برای مسئلهٔ (۲) با حذف اولین سری محدودیتها (به شکل جدید) و توسط افزودن مضارب v_e^k از آن محدودیتها به تابع هدف به دست می‌آید. از آنجایی که تنها این سری محدودیتها بودند که متغیرهای یال را با متغیرهای مسیر مرتبط می‌کردند، مسئله ساده شده را می‌توان به دو زیرمسئلهٔ جدا از هم، یکی (LR1) برحسب متغیرهای یال و دیگری (LR2) برحسب متغیرهای مسیر تقسیم کرد. در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{LR1})\, Z_1(V) = \min \sum_e \sum_r \sum_k \left(c_e^r + v_e^k\right) x_e^{kr} + \\
&\sum_e \sum_r F_e^r y_e^r \\
&\text{s.t.} \quad \sum_k x_e^{kr} \le M_e^r y_e^r\,,\ \forall e, r \\
&\sum_k x_e^{kr} \ge M_e^{r-1} y_e^r\,,\ \forall e, r \\
&\sum_r y_e^r \le 1,\ \forall e \\
&y_e^r = 0 \vee 1, x_e^{kr} \ge 0\,,\ \forall e, r, k
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{LR2})\, Z_2(V) = \min \sum_e \sum_k \left(\sum_{\mu \in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k\right)\left(-v_e^k\right) \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{\mu \in P_k}, X_\mu^k = d_k\,,\ \forall k \\
&X_\mu^k \ge 0\,,\ \forall e, k, \mu \in P_k
\end{aligned}
\tag{٦}
$$

زیرمسئلهٔ اول (LR1) به راحتی قابل تفکیک برای هر یال (e) خواهد بود و سپس با حل آن برای قطعات مختلف، قطعه‌ای که کمترین هزینه را بدهد، انتخاب می‌شود. حل زیرمسئلهٔ (LR1) به تفکیک یال و قطعه، بسیار ساده است، چرا که آن یک مسئلهٔ کوله پشتی پیوسته با حدود بالایی و پایینی است [۱۰].

دومین زیرمسئله، که در مورد شبکه‌های جهت‌دار ظاهر نمی‌شود [۱۱]، با تفکیک به مسائل کوتاهترین مسیرها بین مبدأ – مقصدهای مختلف و با در نظر گرفتن طول $\left(-v_e^k\right)(\ge 0)$ برای یالهای شبکه، به راحتی قابل حل است.

و بالاخره یک حد پایینی برای تابع هدف مسئلهٔ اصلی، به طریق زیر، پس از حل دو زیرمسئلهٔ (LR1) و (LR2)، به دست می‌آید

$$Z(V) = Z_1(V) + Z_2(V) \tag{۷}$$

۵-۳- تعیین حدود پایینی برای مسئله

با حل مسئلهٔ ساده شدهٔ لاگرانژی یک حد پایینی برای مسئلهٔ (۲) به دست می‌آید. برای تعیین بهترین حد پایینی لازم است که حداکثر مقدار بهینهٔ تابع هدف مسئلهٔ ساده شدهٔلاگرانژی را بر روی مقادیر مختلف ضرایب لاگرانژ v به دست آوریم. از آنجایی که مقادیر بهینهٔ تابع هدف مسئلهٔ ساده شده یک تابعی خطی قطعه‌بندی شده مقعر از v هستند [۹]، نمی‌توان روشهای کلاسیک بهینه‌سازی را برای ماکزیمم کردن آن به کار برد. روش زیرگرادیان[۲۱] روش مناسبی در این مورد است [۱۲].

روش زیرگرادیان یک روش تکراری است که به منظور بهبود ضرایب لاگرانژ برای افزایش مقدار بهینهٔ تابع هدف لاگرانژ به کار می‌بریم. در این روش، ضرایب به طور سیستماتیک در هر تکرار تغییر می‌یابند. مقدار اولیه ضرایب را برابر منفی کمترین شیب تابع هزینه برای هر یال در نظر می‌گیریم که به نظر می‌رسد حد پایین بزرگتری تولید خواهد کرد. در هر تکرار حد پایینی نظیر ضرایب فعلی v ، با حل دو زیرمسئلهٔ (LR1) و (LR2)، به طور مجزا، به طریقی که در قسمت قبل تشریح شد، به دست می‌آید.

چون مسئلهٔ ساده شده با حذف محدودیتهای جریان یال – مسیر به دست آمده، برای جواب به دست آمده، جریان روی یالها لزوماً با جریان روی مسیرهای مختلف شامل آنها

- توابع هزینه جریان روی کمانها، C_u ها، و تقاضاهای ترافیک مربوط به هر جفت مبدأ – مقصد داده شده‌اند.
- ترافیک هر مبدأ – مقصد را روی یالهای مستقیم نظیر کنید.
- تکرار تا وقتی که شرایط بهینگی (٤) برقرار شود.
- برای تمام یالها به شکل (i,j) با جریان مثبت،
- کوتاهترین مسیر غیرمستقیم بین i و j را با در نظر گرفتن طول تعریف شده (معادلهٔ ٣) برای یالهای شبکه به دست آورید.
- اگر $\Delta<0$ (معادلهٔ ٤) باشد، یال را علامتگذاری کنید.
- یال نظیر حداقل Δ را انتخاب کنید.
- اگر حداقل Δ ها نامنفی باشد، توقف، جواب فعلی را به عنوان یک جواب خوب قبول کنید.
- در غیر این صورت، جریان روی یال بالا را روی کوتاهترین مسیر به دست آمدهٔ جانشین، نظیر کنید.

شکل ٢- روش ابداعی مینوکس

برابر نخواهد بود. بنابراین جهتهای زیرگرادیان، w_e^k ، می‌توانـد برابر تفاوت این دو مقدار باشد، به عبارت دیگر

$$w_e^k = \Sigma_r X_e^{kr} - \Sigma_{\mu\in P_k} \delta_{e\mu} X_\mu^k \qquad (٨)$$

W_e^k جهتی برای تغییر مقادیر فعلی v_e^k است معمولاً به طریقهٔ زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$v_e^k = v_e^k + e w_e^k \qquad (٩)$$

که در آن e طول قدم است که توسط معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$e = \lambda \frac{\hat{Z} - Z(V)}{\|w\|^2} \qquad (١٠)$$

و در آن λ یک ضریب مربوط به طول قدم، $0<\lambda\le 2$، $\hat{Z}$ یـک حد بالا برای تابع هدف اصلی و $\|.\|$ هم نرم اقلیدسی است.

مقدار حد بالایی $(\hat{Z})$ مقدار تابع هدف به ازای یک جـواب امکانپذیر است. روند تعیین حد بالایی در قدم اول با توجـه بـه حل زیر مسئلهٔ (LR1) طولهایی را به یالهای شبکه نظیر می‌کنـد. به این ترتیب که برای هر یال که در جواب زیـر مسـئلهٔ (LR1) دارای جریان صفر است، طول صفر و برای سـایر یالـها، طولـی برابر شیب قطعه‌ای از تابع هدف که جواب زیر مسئلهٔ (LR1) را به دست می دهد، در نظر گرفته می‌شود. سپس ترافیک مربــوط به مبدأ – مقصدهای متفاوت را به کوتــاهترین مسـیر بیـن آنـها تخصیص می‌دهد. با پیشرفت تکرارهای روش، این روند سـاده جواب بسیار خوبی را برای مسئله تولید می‌کند.

روش زیر گرادیان ضرایب لاگرانژی (v_e^k) را متوالیـاً، در جهت نزدیکی حد بـالا و حـد پـایینی بـه دسـت آمـده، بـهبود می‌دهد تا شرایط توقف حاصل شود. شــرایط توقـف می‌توانـد: نزدیکی به اندازهٔ کافی دو حد بالا و پایینی و در نتیجه کوچــک شدن طول قدم e و یا تعداد معینی تکرار روش باشد. ضمنـاً اگر مقدار تابع هدف مسئلهٔ ساده شده برای تعداد معینی تکرار بدون تغییر باقی بماند، با تغییر ضریب λ از تکرار بـی‌پایـان ضرایـب لاگرانژ جلوگیری می‌شود. مقدار اولیه ضریـب λ، ٢ اسـت و در هر بار تغییر نصف می‌شود.

٦-نتایج محاسباتی

برنامه‌های رایانه‌ای برای روش بهینه سازی ترمودینـــامیکی، روش ابداعی مینوکس و روش ساده سازی لاگرانژی به زبـان C نوشته و روی ماشین SunOs با سیستم Unix اجرا شد. خلاصـهٔ نتایج حاصل از کاربرد روشها بـرای چنـد مثـال در جـدول (١) ارائه شده است. در مثالها، تعداد گره‌ها، تعداد مبدأ – مقصدها و یالهای بین گره‌ها همه به طـور تصـادفی تولیـد شـده‌اند. توابـع هدف روی یالها، توابعی خطی قطعه‌بندی شده و مقعر شـامل ٥ قطعه، هر یک با شیبهایی متناسب با طول یالها هستند. زمانــهای اجرا برحسب ثانیــه گزارش شـده‌اند. مقـادیر درصـدی، نسـبت

جدول ۱- نتایج محاسباتی حاصل از کاربرد سه روش

شماره	تعداد گره‌ها	تعداد کالاها	روش .S.A هزینه – زمان	روش مینوکس هزینه – زمان	روش ساده سازی لاگرانژی هزینه – زمان – حد پایینی
۱	۵	٤	۱۰۰٪–۱/۱۱	۱۰۰٪–۰/۰۲	۱۰۰٪–۰/۲۸–۹۵٪
۲	۷	۸	۱۰٤٪–۲/۱۰	۱۰٦٪–۰/۰۳	۱۰۰٪–۰/۲۱–۹٤٪
۳	۱۲	۱٤	۱۰۱٪–۷/٦۳	۱۰۰٪–۰/۱۱	۱۰۰٪–٤/۹۳–۹۹٪
٤	۱۵	۵۲	۱۰۵٪–۲۰/۹۵	۱۰٤٪–۱/٤۲	۱۰۰٪–٤۵/۳۵٤–۹۹٪
۵	۱٦	۲۳	۱۰۳٪–۲۷/۵۹	۱۰۰٪–۰/۳۲	۱۰۰٪–۱۵/٤۱–۸۹٪
٦	۱۷	٤۳	۱۱۷٪–۳۱/۸۸	۱۰۸٪–۱/۵۲	۱۰۳٪–۳۸/۵٦–۹۹٪
۷	۱۸	٤۸	۱۱۸٪–۳۵/۳٦	۱۰٦٪–۱/۸۸	۱۰۵٪–۵۱/۳۳–۹۹٪
۸	۱۹	۵۹	۱۱۵٪–۳۸/٤٦	۱۰۷٪–۳/۳۸	۱۰۳٪–۹٦/۳٦–۹٦٪
۹	۲۲	۷۳	۱۲۰٪–۱۱۰/۰۳	۱۰٦٪–۷/۲۷	۱۰۵٪–۱۷٤/۰۱–۹٦٪
۱۰	۲۳	۸۲	۱۲۵٪–٦۹/۷۹	۱۰۵٪–۹/٤۸	۱۰٤٪–۲۲٦/۵۹–۹٦٪
۱۱	۲۵	۱۰۱	۱۱۸٪–۱۰٤/٤٤	۱۰۷٪–۱۵/۵۳	۱۰۲٪–۳۵۲/٦٦–۹۵٪

هزینهٔ مربوط به جواب هر روش بــه هزینـهٔ مربـوط بـه بـهترین جواب به دست آمده است. بـهترین جـواب، حـاصل از کـاربرد روش ساده سازی لاگرانژی با تعداد بیشتری تکرار است.

اگرچه روش .S.A ، ضمن سادگی ابزاری قوی برای حل مسائل بهینه سازی ترکیباتی است ولـی دقت زیـادی در انتخاب نحـوهٔ تولید مؤثـر جوابـها، زمـانبندی خنـک کـردن و کفـایت تعـداد جوابهای تولید شده لازم است. با این وجود زمینه‌هایی نیز برای بهبود روش وجود دارد. از جمله اینکه تعـداد جوابـهایی کـه در هر دما باید تولید شوند با کـاهش دمـا، افزایـش یـابد. بـه ایـن ترتیب شانس دستیابی به جوابهای جدید برای موقعی که بیشـتر جوابها رد می‌شوند، افزایش می‌یابد. راه دیگر روش .S.A با یک روش دیگر است. به عنوان مثال می‌تــوان از جـواب حـاصل از .S.A ، به عنوان جواب اولیه روش مینوکس استفاده کرد.

همان طـور کـه در جـدول نشـان داده شـده اسـت، روش مینوکس در زمانی کوتاه، جواب خوبی را به دست مـی‌آورد کـه برای مسائل بزرگ کارا خواهد بود. ولی بدون داشتن یـک حـد پایینی، ایده‌ای در مورد دقت جواب وجـود نـدارد. روش سـاده سازی لاگرانژی ضمن به دست آوردن حد پایینی بـرای مسـئله، جواب بهتری را در مدت زمان بیشتری می‌دهد. با افزایش ابعـاد شبکه، مخصوصا تعداد مبدأ – مقصدها، از کـارایی روش سـاده سازی لاگرانژی کاسته می‌شود. بدیهی است که با کاهش تعـداد قطعات تابع هدف، ابعاد زیر مسئلهٔ لاگرانژی کمتر شـده و ایـن روش مؤثرتر عمل می‌کند. به علاوه برای کـاهش زمـان اجـرای آن می‌توان نحوهٔ تولید حد بالایی در روش زیرگرادیان را بـهبود داد. همچنیـن می‌تـوان ضرایـب لاگرانـژی را بـــه طـور غـیر سیستماتیک و با استفاده از روشهای دوآل افزایشـی [۱۰] تغییـر داد.

در خاتمه به نظر می‌رسد که با توجه بـه سـاختار جوابـهای مسـئله و امکـان تولیـد سـریع جوابـهای امکـانپذیر، روشــهای جستجوی تصادفی هوشمند کاندید مناسـبی بـرای حـل مسـئله هستند.

واژه نامه

1. communication network
2. multicommodity
3. undirected
4. piecewise linear concave
5. the network flow problem
6. flow conservation
7. economics of scale
8. NP-hard
9. The fixed cost problem
10. Simulated annealing
11. Minoux
12. Lagrangian relaxation
13. Uncapacitated
14. the link path model
15. simple
16. single
17. combinatorial
18. temprature
19. scheme
20. greedy
21. subgradient optimization

مراجع

1. Florian, M., and Robillard, P., "An Implicit Enumeration Algorithm for the Concave Cost Network Flow Problem," *Management Science* Vol. 18, 1971.
2. Ketabi, S., "Network Routing and Design Problems with Piecewise Linear Costs," PhD Thesis, University of Adelaide, 1997.
3. Eglese, R., "Simulated Annealing: A Tool for Operation Research," *European Journal of Operational Research*, Vol. 46, 1990.
4. Minoux, M., "Network Synthesis and Optimum Network Design Problems: Models, Solution Methods and Application," *Networks*, Vol. 19, 1989.
5. Yaged, B., "Minimum Cost Routing for Static Network Models," *Networks,* Vol. 1, 1971.
6. Zadeh, N., "On Building Minimum Cost Communication Networks," *Networks,* Vol. 3, 1973.
7. Gallo, G., and Sadini, C., "Concave Cost Minimization on Network," *European Journal of Operational Research,* Vol. 3, 1978.
8. Erickson, R., Monma, C., and Veinott, A., "Send and Split Method for Minimum Concave Cost Network Flow Problem," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 12, 1987.
9. Shapiro, R., "A Survey of Lagrangian Techniques for Discrete Optimization," *Annals of discrete Mathematics*, Vol. 5, 1979.
10. Balakrishnan, A., and Graves, S., "A Composite Algorithm for a Concave Cost Network Flow Problem," *Networks*, Vol. 19, 1989.
11. Gavish, B., "Topological Design of Computer Communication Networks-the Overall Design Problem," *European Jornal of Operational Research,* Vol. 58, 1992.
12. Held, M., Wolfe, P., and Crowder, H., "Validation of Subgradient Optimization," *Mathematical Programming*, Vol. 6, 1973.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1380.20.1.10.5]