

# روش اصلاح شده شکافت بردار شار برای تحلیل میدان جریان همراه با اندرکنشهای موج ضربه‌ای با لایه مرزی آرام

عبداله شادآرام\*، حسن خالقی\*\* و محمدصادق صادقی‌پور\*\*\*

دانشکده مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۷۸/۸/۹ - دریافت نسخه نهایی: ۸۰/۲/۲۹)

**چکیده:** در این مقاله یک روش اصلاح شده شکافت بردار شار<sup>۱</sup> برای حل معادلات کامل ناویراستوکس دوبعدی تراکم‌پذیر معرفی می‌شود. در اثر این اصلاح، پخش عددی در محاسبات کاهش یافته است. کد رایانه‌ای تهیه شده با استفاده از این الگوریتم را می‌توان به طور دقیق و ساده، برای تحلیل میدانهای جریان پیچیده همراه با ناپیوستگیها در خواص جریان، نظیر اندرکنشهای موج ضربه‌ای با لایه مرزی به کار برد. در این روش به منظور استفاده از الگوریتمهای مختلف، از روشهای شکافت آپ ویند جابه‌جایی<sup>۲</sup> و شکافت بردار شار با پخش عددی کم<sup>۳</sup> استفاده شده است. برای افزایش دقت و یکنوایی<sup>۴</sup> جوابها، متغیرهای پایستار<sup>۵</sup> در فصل مشترک سلولها با اعمال محدودگر<sup>۶</sup> به کمک روشهای MUSCL<sup>۷</sup> برونیابی شده‌اند. با استفاده از این روش چهار مسئله نمونه حل شده و نتایج آنها با نتایج حاصل از حل عددی و / یا اندازه‌گیری تجربی دیگران مقایسه شده‌اند. بررسیها نشان می‌دهد که ضمن کاهش پخش عددی، سازگاری خوبی بین نتایج مقایسه شده وجود دارد.

واژگان کلیدی: معادلات ناویراستوکس تراکم‌پذیر، شکافت بردار شار، آپ ویند جابه‌جایی، پخش عددی

## A Modified Flux Vector Splitting Scheme for Flow Analysis in Shock Wave Laminar Boundary Layer Interactions

A. Shadaram, H. Khaleghi and M. S. Sadeghipour

Department of Engineering, Tarbiat Modarres University

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

**Abstract:** *The present work introduces a modified scheme for the solution of compressible 2-D full Navier-Stokes equations, using Flux Vector Splitting method. As a result of this modification, numerical diffusion is reduced. The computer code which is developed based on this algorithm can be used easily and accurately to analyze complex flow fields with discontinuity in properties, in cases such as shock wave boundary layer interactions. This scheme combines advantages of both Advective Upstream Splitting (AUSM) and Low Diffusion Flux Vector Splitting (LDFVS) Methods. To increase accuracy and monotonicity, the conservative variables are extrapolated at the cell interfaces by using the MUSCL approach with limiter. This algorithm has been used to solve four sample problems. It has been shown that the numerical diffusion has been reduced and the results are in good agreement with published numerical and/or experimental data.*

**Keywords:** *Compressible Navier Stokes Equations, Flux Vector splitting, Advective upwind, Numerical diffusion*

\*\*\* - استاد

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکترا

a	سرعت صوت محلی	R	ثابت گازها
e	انرژی داخلی	S	پارامترهای محدودگر
$e_t$	انرژی کلی	T	دما
H	انتالپی کل	u,v	مؤلفه‌های سرعت
K	پارامتر انتخابی برای دقت مکانی در محاسبه متغیرهای چپ و راست	<b>حروف یونانی</b>	
	وجه سلول	$\Delta S$	مساحت وجه سلول
$l_g$	ابعاد سلول	$\Delta t$	گام زمانی
$M_n$	عدد ماخ براساس مؤلفه سرعت در جهت عمود بر وجه سلول	$\Delta V$	حجم سلول
n	بردار واحد عمود بر وجه سلول	$\rho$	جرم مخصوص
P	فشار	$\mu$	ضریب لزجت
q	شار گرمایی		

## ۱- مقدمه

در سالهای اخیر، گسترش وسایل پرنده با سرعتهای بالا، توجه محققان را به مسئله پیش بینی دقیق پدیده اندرکنش موج ضربه‌ای با لایه مرزی به خود معطوف کرده است. این پدیده اغلب در نواحی سطوح کنترلی، مکش، کنجها و ... به وقوع می‌پیوندد. برآورد دقیق توزیع فشار، افتهای گرمایی و اصطکاک، چگونگی و ابعاد جدایش جریان موضوعهای مهمی‌اند که بایستی در طراحی این وسایل در نظر گرفته شوند. اندرکنش موج ضربه‌ای با لایه مرزی در جریانهای مافوق صوت، اغلب، باعث جدایش جریان از مرز شده و در ناحیه تماس مجدد، بستگی به شرایط پرواز، جریان لایه مرزی آرام و یا در هم می‌گردد. تشکیل این ناحیه جدایش از کارایی آیرودینامیکی متحرک مورد نظر می‌کاهد.

نظر به پیدایش پدیده‌های پیچیده مذکور همراه با ناپیوستگیهای شدید، معادلات حاکم بر آنها معادلات کامل ناویراستوکس تراکم پذیر وابسته به زمان هستند. برای تجزیه و تحلیل عددی چنین میدان جریانی، بایستی از یک روش عددی نسبتاً دقیق و سازگار با فیزیک مسئله استفاده کرد. روشهای آپ ویند ارائه شده، اغلب به علت در نظر گرفتن اصول نظری

مشخصه‌ها برای دستگاه معادلات هایپربولیک، ملاحظات مربوطه را در نظر گرفته و تسخیر ناپیوستگیها را بهتر نمایان می‌سازند. لذا، از آغاز دهه ۱۹۸۰ تحقیقات بسیاری در مورد آنها انجام گرفته است.

یک گروه از روشهای آپ ویند برای حل معادلات جریان لزج، روشهای شکافت بردار شارند. مقدماتی‌ترین روشهای مورد استفاده از این گروه، که ابتدا برای جریانهای غیرلزج (معادلات اولر) ارائه شده‌اند، روش استیگر و وارمینگ [۱] و روش وان لیر [۲] هستند. گرچه کاربرد این روشها سهل است، لیکن، به علت ماهیت آنها، پخش عددی زیادی را باعث می‌شوند. لذا، بدون اصلاحات، این روشها دقت لازم را نداشته و این عیب مزیت سهولت استفاده از آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. گرچه نشان داده شده است که روشهای شکافت تفاضل شار<sup>۱</sup> از قبیل روش رو [۳] و اوشر [۴] از دقت بالایی برخوردارند، لیکن، این افزایش دقت همراه با افزایش عملیات محاسباتی برای تعیین ضریب ماتریسی قسمت پخش عددی شاره‌است. در حالی که در روشهای شکافت بردار شار این ضرایب تابعی از عدد ماخ هستند. از این رو سهولت محاسباتی روشهای شکافت بردار شار برای خطی سازی و حجم محاسبات

کمتر آنها، انگیزه‌ای است برای محققان تا با اصلاح آنها بتوان میدانهای پیچیده را تجزیه و تحلیل کرد.

هنگام کاربرد روشهای شکافت بردار شار برای نواحی لزج در لایه مرزی، به علت وجود پخش عددی زیاد آنها، پخش فیزیکی مقدار واقعی خود را نشان نمی‌دهد. برای کاهش پخش عددی، هنل و همکارانش [۵] برای معادله انرژی نوعی تجزیه را پیشنهاد کردند که به موجب آن در فصل مشترک سلولها، بقای انرژی بهتر ارضا می‌شود. هنل و شووان [۶] با ترکیب شکافت بردار شار و روش شکافت تفاضل شار معادلات ممتهم عرضی و انرژی را اصلاح کردند. این اصلاح یک پایه‌گذاری برای روشهای ترکیبی (هایبریدی) بین شکافت بردار شار و شکافت تفاضل شار محسوب می‌شود.

اصلاحات روشهای شکافت بردار شار برای کاهش پخش عددی در عدد ماخ کمتر از یک را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد. گروه اول، روشهای کاهش پخش عددی مانند روش کوایره و وان‌لیر [۷] (معروف به LDFVS) و روش شکافت عدد ماخ در شار جرمی با مرتبه بالای لیو و استفان [۸] (معروف به HOPE) هستند. گرچه اصلاحات انجام گرفته بر روی روشهای وان‌لیر [۷] توسط این گروه توزیع دما را در نزدیکی دیواره بهبود می‌بخشد، لیکن، نوسانات توزیع فشار در نزدیکی دیواره به قوت خود باقی می‌ماند. گروه دوم روشهای ترکیبی متشکل از روشهای شکافت بردار شار و روشهای شکافت تفاضل شار مانند روش لیو و استفان [۹] (معروف به AUSM) هستند. روش اخیر دقت قابل مقایسه‌ای با روش رو دارد، ضمن اینکه به عملیات محاسباتی کمتری نیاز دارد.

در این مقاله سعی شده است که با ارائه یک روش حجم محدود، برای حل عددی معادلات کامل ناویراستوکس، بتوان جریانهای لزج تراکم پذیر، همراه با اندرکنشهای قوی، را به طور ساده و دقیق تجزیه و تحلیل کرد. برای این منظور، با ترکیب روش AUSM که دارای مزیت سادگی و عملیات محاسباتی کم است و روش شکافت عدد ماخ با مرتبه بالا، که پخش عددی را کاهش می‌دهد، ترکیبی جدید ارائه شده است.

با ترکیب این دو روش پخش عددی نسبت به روش AUSM کاسته شده و در نتیجه پخش فیزیکی در لایه مرزی مقدار واقعی خود را بهتر نمایان می‌سازد، لیکن، تا حدودی از یکنوایی جوابها می‌کاهد. برای رفع این عیب با انتخاب گونه‌ای اصلاح شده از طرحهای MUSCL، برای تقریب متغیرهای پایستار در طرف چپ و راست فصل مشترک بین سلولها و اعمال محدودگر مناسب می‌توان به یکنوایی قابل قبولی در جوابها نسبت به روش AUSM خالص رسید. با این توضیحات میزان کاهش پخش عددی روش حاضر صرفاً با روشهای اصلاح شده در زیرگروه روشهای شکافت بردار شار قابل قیاس است. توسط حل عددی چهار مسئله نمونه، همراه با اندرکنشهای موج ضربه‌ای با لایه مرزی، و مقایسه نتایج حاصل با نتایج تجربی و عددی دیگران صحت و دقت ترکیب جدید روش شکافت بردار شار نشان داده شده است.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر پدیده‌های پیچیده، مانند اندرکنش موج ضربه‌ای با لایه مرزی، معادلات کامل ناویراستوکس تراکم پذیر است. شکل برداری وابسته به زمان این معادلات در حالت دوبعدی به صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S [(F_i - F_v) \cdot n] ds = 0 \quad (1)$$

که در آن Q بردار مجهول،  $F_i$  بردار شار غیرلزج و  $F_v$  بردار شار لزج به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}, F_i^x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}, F_i^y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix}$$

$$F_v^x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{bmatrix}, F_v^y = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \end{bmatrix}$$

که  $R$ ،  $H$ ،  $e_t$  و  $q$  به ترتیب انرژی کل، انتالپی کل، ثابت گازها و شار گرمایی‌اند، که از معادلات زیر محاسبه می‌شوند

مستقل از یکدیگرند. برای محاسبه  $F_c$  در وسط وجه بین دو سلول مجاور  $i$  و  $i+1$ ، بستگی به جهت جریان در امتداد عمود بر وجه سلول مؤلفه‌های جابه‌جایی  $[\rho a \ \rho a u \ \rho a v \ \rho a H]^T$  از طرف چپ یا راست محاسبه می‌شوند

$$F_c = M_{n1/2} \begin{Bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{Bmatrix}_{L/R} \quad (4)$$

اگر  $M_{n1/2} \geq 0$  باشد

$$\{*\}_{L/R} = \{*\}_L \quad (5)$$

اگر  $M_{n1/2} < 0$  باشد

$$\{*\}_{L/R} = \{*\}_R \quad (6)$$

سرعت جابه‌جایی  $M_{n1/2}$  را می‌توان به طرق مختلف تجزیه کرد. به عنوان مثال، لیو و استفان [۹]،  $M_n$  را به طریقه وان‌لیو تجزیه کردند. در این تحقیق از تکنیک به کار رفته توسط کوایره و وان‌لیو [۷] در روش LDFVS استفاده می‌شود

$$M_n = M_n^+ + M_n^- \quad (7)$$

که اگر  $|M_n| \leq 1$ ،

$$M_n^\pm = \pm \frac{1}{4} \left\{ (M_n \pm 1)^2 - \lambda (M_n^2 - 1)^2 \right\} \quad (8)$$

و اگر  $|M_n| > 1$  باشد

$$M_n^\pm = \frac{1}{2} (M_n \pm |M_n|) \quad (9)$$

$\lambda$  پارامتر انتخابی است که با توجه به فیزیک مسئله، مقدار آن بین صفر تا یک انتخاب می‌شود. جمله فشار در مرکز وجه مشترک بین دو سلول مجاور را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$p_{1/2} = p_L^+ + p_R^- \quad (10)$$

که اگر  $|M_n| \leq 1$  باشد

$$p^\pm = \frac{p}{4} \left\{ (M_n \pm 1)^2 (2 \mp M_n) \mp v M_n (M_n^2 - 1)^2 \right\} \quad (11)$$

و اگر  $|M_n| > 1$  باشد

$$p^\pm = \frac{p}{2} (M_n \pm |M_n|) / M_n \quad (12)$$

که در آن  $v$  یک پارامتر انتخابی است. مناسبترین مقدار  $v$ ، عددی بین صفر و  $0.75$  است. به ازای  $v=0.75$ ، شیب تغییرات

$$p = \rho RT, \quad q = -\text{grad } T, \quad e_t = e + (u^2 + v^2)/2, \quad H = e_t + p/\rho$$

برای محاسبه ضریب لزجت دینامیکی از قانون ساترلند استفاده می‌شود

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}} = \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S}$$

### ۳- حل عددی

با فرض ثابت بودن متغیرهای پایستار ( $Q$ ) در درون حجم سلول و انتگرال‌گیری از معادله (۱) روی حجم سلول، معادلات جبری زیر به دست می‌آیند

$$\Delta Q = - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{\beta=1}^4 [(F_i - F_v) \cdot n \Delta S]_\beta \quad (2)$$

که در آن، به ترتیب،  $\beta$  بیانگر شماره سطح سلول،  $n$  معرف بردار واحد عمود بر سطح،  $\Delta S$  سطح وجه سلول و  $\Delta V$  حجم سلول‌اند.

مهمترین بخش در کاربردهای عددی معادلات بالا محاسبه شارهای غیرلزج از وجوه حجم کنترل است. آنچه که عمدتاً روشهای مختلف را از یکدیگر متمایز می‌سازد روش تعیین این شارهاست. در فصل مشترک سلولها شارهای لزج عموماً به صورت تفاضل مرکزی محاسبه می‌شوند.

الف) محاسبه شارهای غیرلزج شارهای غیرلزج را براساس روش AUSM، که توسط لیو و استفان [۹] ارائه شده است، در نظر می‌گیریم. در این روش، بردار شار عمود بر وجه سلول به دو مؤلفه تجزیه می‌شود، که یکی از این دو مؤلفه مشتمل بر جملات جابه‌جایی،  $F_c$ ، و دیگری مشتمل بر جملات فشار،  $F_p$ ، در معادلات ممتهم است

$$F_i^n = M_n \begin{Bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ n_x p \\ n_y p \\ 0 \end{Bmatrix} = F_c + F_p \quad (3)$$

که در آن  $M_n = U_n/a$ ،  $n_x$  و  $n_y$  مؤلفه‌های بردار واحد عمود بر وجه سلول،  $a$  سرعت صوت محلی و  $U_n$  مؤلفه سرعت عمود بر وجه سلول است. روشهای محاسبه  $F_c$  و  $F_p$  مختلف و

که در آن  $k$  پارامتر تعیین دقت مکانی و  $S$  محدودگر گرادینانهاست. در این تحقیق  $k = \frac{1}{3}$  انتخاب شده است. برای تعیین محدودگر از معادله وان آبادا به شکل زیر استفاده شده است

$$S = \frac{2\Delta Q \cdot \nabla Q + \varepsilon}{(\Delta Q)^2 + (\nabla Q)^2 + \varepsilon} \quad (15)$$

$\varepsilon$  عدد کوچکی است که برای جلوگیری از تقسیم بر صفر شدن افزوده می شود.

ب) جایگزینی مشتق زمانی. در روشهای صریح، هنگام حل معادلات جبری با دقت مکانی مرتبه دو به بالا، برای حفظ دقت و استفاده از گام زمانی بزرگتر از روشهای چندمرحله‌ای استفاده می شود. معمولترین روشهای جایگزینی مشتقات زمانی در طرحهای صریح، روشهای رانگه-کوتا پنج مرحله‌ای و روشهای سه مرحله‌ای پیش‌بینی و اصلاح هستند. در این تحقیق محاسبه بردار مجهول  $Q_{i,j}$  به طریقه صریح در سه مرحله انجام می شود. در مرحله اول در نیم گام زمانی مقادیر میانی بردار مجهول  $(\bar{Q}_{i,j})$  در سلولها محاسبه می شود. در این مرحله شارهای غیرلزج در وجوه حجم کنترل با دقت مکانی مرتبه یک محاسبه می شوند

$$\Delta \bar{Q}_{i,j} = - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{\beta=1}^4 \{ (F_i - F_v) \cdot n \Delta S \}_\beta \quad (16)$$

که

$$\bar{Q}_{i,j} = \Delta \bar{Q}_{i,j} + Q_{i,j}^n \quad (17)$$

در مرحله دوم، ابتدا برای تعیین سهم شارهای چپ و راست، با معلوم بودن مقادیر اولیه و میانی به کمک معادلات (۱۳) و (۱۴)، متغیرهای پایستار در طرف چپ و راست وجه مشترک دو سلول مجاور، با دقت مکانی مرتبه بالا (مرتبه دو یا مرتبه سه) برآورد شده، سپس در تمام گام زمانی تغییرات بردار مجهول در لحظه  $n+1$  از معادله زیر به دست می آید

$$\Delta \bar{Q}_{i,j} = - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{\beta=1}^4 \{ (F_i - F_v) \cdot n S \}_\beta \quad (18)$$

در مرحله سوم بردار مجهول از معادله زیر به دست می آید

$$Q_{i,j}^{n+1} = \Delta Q_{i,j} + Q_{i,j}^n \quad (19)$$

$p^+/p$  برحسب عدد ماخ در حوالی  $M=0$ ، برابر با صفر شده و این معادل با انفصال مرکزی است. نحوه تأثیر پارامترهای  $\nu$  و  $\lambda$  در محدوده مذکور، در شکافت شار جرمی و فشار در مرجع [۷] بحث شده است. به ازای مقدار  $\nu > 0.75$ ، شکافت فشار از خاصیت یکنوایی روش می‌کاهد که این خود از نظر فیزیکی چندان مطلوب نیست. در مسائل نمونه برای ارزیابی کد رایانه‌ای به طور تجربی از  $\lambda=0.25$  و  $\nu=0.5$  استفاده شده است.

#### ۴- روش حل

برای حل دستگاه معادلات جبری (۲) نیاز به برآورد جایگزینی مشتقات مکانی و مشتقات زمانی به طور مستقل است. برای این منظور در روشهای آب ویند برای هر کدام از مشتقات بالا الگوریتمهای متفاوتی وجود دارد. برای جایگزینی مشتقات مکانی از روشهای MUSCL استفاده شده است. برای جایگزینی مشتقات زمانی می توان از روشهای صریح و یاضمنی استفاده کرد. نظر به اینکه روش AUSM اساساً برای طرحهای صریح طراحی شده است، لذا، در اینجا هم معادلات به صورت صریح حل می شوند.

الف) جایگزینی مشتقات مکانی. به دو طریق می توان شارهای چپ و راست در وسط وجوه سلول را محاسبه کرد. در روش اول شارهای چپ و راست از طرف مربوطه به طور مستقیم تقریب می شوند. در روش دوم، ابتدا متغیرهای پایستار از هر طرف تقریب شده و سپس توسط آنها، شارهای شکافته شده محاسبه می شوند. در این تحقیق با استفاده از گونه اصلاح شده طرحهای MUSCL که سازگاری بهتری با روشهای شکافت بردار شار دارند، مقادیر متغیرهای پایستار در چپ و راست وجه سلول را به طریق زیر برآورد می کنیم.

$$Q_{i+1/2,j}^l = \bar{Q}_{i,j} + \frac{1}{4} \{ S [(1-kS) \nabla_x Q + (1+kS) \Delta_x Q] \}_{i,j} \quad (13)$$

$$Q_{i+1/2,j}^r = \bar{Q}_{i+1,j} - \frac{1}{4} \{ S [(1-kS) \Delta_x Q + (1+kS) \nabla_x Q] \}_{i+1,j} \quad (14)$$

ج) محاسبه گام زمانی. محاسبه گام زمانی براساس معیار لزجت فن نیومن و جابه جایی کورانت که توسط گرولیموس و والت [۱۰] ارائه شده، انجام گرفته است

$$\Delta t_{i,j} \leq CFL \cdot \min \left\{ \frac{l_g}{\bar{V} + a}, \frac{l_g}{2v_{eq}} \right\}_{V_{i,j}} \quad (20)$$

که،  $l_g$  اندازه سلول،  $\bar{V}$  سرعت جریان،  $a$  سرعت صوت محلی،  $K$  ضریب هدایت گرمایی و  $v_{eq}$  پخش معادل است. برای محاسبات در حالت دائمی از CFL در حدود  $0.3$  الی  $0.6$  استفاده شده است.

## ۵- شرایط مرزی

شرایط مرزی در ورود به میدان حل شرایط جریان آزاد است. با انتخاب مرز بالا به اندازه کافی دور از جسم، در صورتی که موجی آن مرز را قطع نکند، از خاصیت گرادیان صفر برای متغیرها استفاده می شود. اگر موجی از خارج وارد میدان حل شود، تا قبل از محل ورود موج، از شرایط جریان آزاد یا گرادیان صفر و برای متغیرها در بعد از محل ورود موج از معادلات رانکین هوگونیوت استفاده می کنیم. در مرز پایین (مرز جسم) از شرایط عدم لغزش و نفوذ ناپذیر بودن سطح، مؤلفه های سرعت  $u$  و  $v$  صفرند. گرادیان فشار عمود بر سطح جامد  $(\partial p / \partial n)$  را صفر در نظر می گیریم. شرط مرزی دما بر روی دیوار به صورت دما ثابت و یا آدیباتیک بودن دیوار می تواند اعمال شود. اغلب در مرز خروجی شرایط جریان معلوم نیست، لذا، شرایط مرز خروجی از تقریب نقاط داخل میدان حل تعیین می شود. گرچه این شرایط در مرز خروجی دقیق نیستند، لیکن، واضح است که رفتار معادلات جریان در نزدیکی مرز جامد در لایه مرزی سهمی گون بوده و خارج از آن چون جریان مافوق صوت است هذلولی گون است. لذا، انتظار می رود که این شرایط در مرز خروجی خطای مهمی را در بالادست خود ایجاد نکنند. البته ذکر این نکته ضروری است

که بایستی مرز خروجی را در فاصله نسبتاً دور از ناحیه جدایش جریان در نظر گرفت تا اثرات بیضی گون این ناحیه بر مرز خروجی تأثیری نداشته باشد.

## ۶- حل مسائل نمونه

برای ارزیابی دقت و کارایی الگوریتم عددی، چهار مسئله نمونه حل شده و نتایج حاصل با نتایج عددی و تجربی دیگران مقایسه شده اند. در مسئله اول صرفاً اثرات اصلاح جدید در شکافت شار جرمی و فشار نسبت به روش AUSM خالص در غیاب پخش فیزیکی بررسی شده است. شرایط هندسی و فیزیکی سه مسئله دیگر به گونه ای است که، موجب اندرکنشهای قوی موج ضربه ای با میدان جریان و لایه مرزی می شود. برای اطمینان از عدم وابستگی جوابها به اندازه شبکه، هر مسئله با تعداد سلولهای مختلف حل شده و مناسبترین شبکه انتخاب شده است. در مسئله دوم تا چهارم ابعاد شبکه در جهت  $x$  یکنواخت و در جهت  $y$  نایکنواخت انتخاب شده اند. به طریقی که در نزدیکی مرز جامد به صورت نمایی فشرده شده، و خارج از لایه مرزی به صورت یکنواخت باشند.

در مسائل اندرکنش موج ضربه ای با لایه مرزی، معمولاً برای سنجش دقت نتایج از مقایسه ضریب اصطکاک پوسته ای، توزیع فشار سطحی یا ضریب فشار و طول ناحیه جدایش استفاده می شود. معمولاً طولی را که در آن ضریب اصطکاک پوسته ای منفی می شود، به عنوان طول ناحیه جدایش ( $l_{SR}$ ) در نظر می گیرند.

معیار همگرایی برای رسیدن به جواب حالت دائمی در مسئله دوم تا چهارم مطابق معادله زیر، ریشه متوسط مربعات<sup>۹</sup> تغییرات نسبی انرژی کل است. این معیار، که متأثر از اغلب مشخصه های جریان است، برابر  $10^{-6}$  انتخاب شده است

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n_{max}} [\Delta \rho e_t / \rho e_t]^2}{n_{max}}} \quad (21)$$

که در آن  $n_{max}$  تعداد نقاط میدان حل است.

## الف) مسئله اول

در این مسئله برای نشان دادن اثر شکافت شار جرمی و شکافت فشار با پخش عددی کم نسبت به روش AUSM خالص، به حل جریان در لوله ضربه یک بعدی که جواب تحلیلی آن در دسترس است می‌پردازیم. در لوله‌ای به طول ۱۰ متر توسط دیافراگمی، گاز کامل و ساکنی در فشار و جرم مخصوص متفاوت از یکدیگر جدا شده‌اند. فشار و جرم مخصوص قسمت مترامم شده به ترتیب  $10^0$  و ۱ است (در سیستم آحادی متریک). در طرف دیگر دیافراگم همان گاز با فشار و جرم مخصوص به ترتیب  $10^3$  و  $0/01$  قرار دارد. برداشتن دیافراگم، در قسمت پرفشار انبساطی انتشار می‌یابد، در حالی که در قسمت کم فشار به دنبال یک موج ضربه‌ای، یک ناپیوستگی تماسی منتشر می‌شود. توضیحات بیشتر چنین جریانی در مرجع [۱۱] آمده است. این مسئله به طریقه صریح و با انفصال مرتبه یک حل شده است. تعداد سلولها در امتداد لوله به طور یکنواخت، ۲۰۰ انتخاب شده است. از آنجا که کلیه روشهای اصلاحی شکافت بردار شار برای محدوده  $|M| < 1$  انجام گرفته است، اگر بخواهیم اثر این اصلاحات را در این لوله ضربه نشان دهیم، در قسمت کم فشار اولیه، که متشکل از جریانی فراصوتی ( $M > 1$ ) و سکون است، بین روش AUSM و AUSM با پخش کم تغییرات محسوسی مشاهده نمی‌شود. لذا، تنها برای ناحیه پرفشار اولیه که در آن جریان زیر صوت ( $M < 1$ ) برقرار می‌شود، افزایش دقت محسوس است.

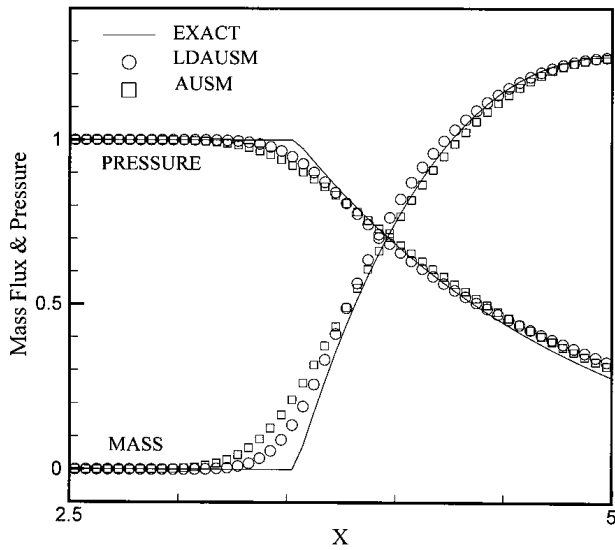
در شکل (۱-الف)، نتایج محاسباتی شار جرمی و فشار (بدون بعد)، بعد از گذشت  $3/9$  میلی ثانیه در طول لوله ضربه و در شکل (۱-ب)، همان نتایج برای قسمتی از طول لوله که تحت تأثیر اصلاحات قرار می‌گیرد، یعنی قسمت انبساطی، نشان داده شده است. همان طور که از شکل (۱-ب) پیداست نتایج حاصل از روش حاضر از نظر انطباق تعداد گره‌های محاسبه شده با حل دقیق، توافق بهتری دارد. با مقایسه نتایج، جبهه امواج انبساطی محاسبه شده توسط روش AUSM با پخش کم تیزتر از روش AUSM خالص است. در قسمت انتهایی امواج

انبساطی نتایج حاضر نسبت به AUSM تطابق بهتری با حل تحلیلی از خود نشان می‌دهند. با این کاهش پخش عددی در محدوده  $M < 1$ ، پخش فیزیکی در لایه مرزی مقدار واقعی خود را بهتر نمایان می‌سازد. در مسائل بعدی با محاسبه کمیاتی در لایه مرزی نتایج قابل قبولی ارائه می‌شود.

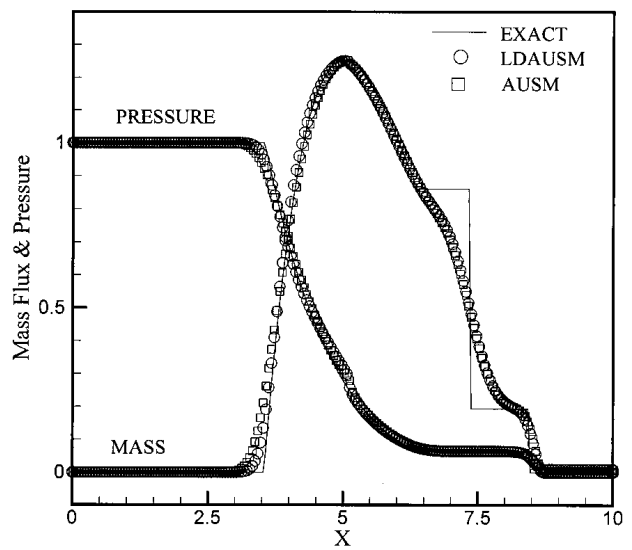
## ب) مسئله دوم

صفحه‌ای مسطح که در ادامه با زاویه  $10^\circ$  درجه امتداد می‌یابد، در معرض جریان آزاد با ماخ ۳ قرار گرفته است، شکل (۲). در این مسئله عدد رینولدز به ازای واحد طول مشخصه ( $Re/L_p$ ) برابر با  $10^4 \times 1/68$  است. دمای جریان آزاد 216.6K و دمای دیواره 606.6K است. شرایط هندسی و فیزیکی مسئله طوری است که موج تشکیل شده در لبه حمله با لایه مرزی و موج تشکیل شده در قسمت کنج اندرکنشی ندارد. برای اطمینان از عدم وابستگی جوابها به اندازه شبکه، محاسبات برای ۵ شبکه مختلف به اندازه‌های  $82 \times 28$ ،  $102 \times 32$ ،  $102 \times 42$ ،  $102 \times 52$ ،  $202 \times 52$  انجام گرفته است. با توجه به نتایج نشان داده شده در شکل (۳)، نتایج شبکه  $102 \times 52$  و  $202 \times 52$  تغییرات قابل ملاحظه‌ای نشان نمی‌دهند. لذا، از میان آنها شبکه  $102 \times 52$  برای صرفه جویی محاسباتی انتخاب می‌شود. با این شبکه مطلوب،  $\Delta y_{min} = 2.5 \times 10^{-3}$  و  $\Delta y_{max} = 4 \times 10^{-3}$  هستند. نسبت ابعاد شبکه<sup>۱</sup> در ناحیه نایک‌نواخت بین ۵ تا ۸ است.

برای مقایسه نتایج محاسباتی با نتایج عددی هونگ و مک کورمک [۱۲] و کارتر [۱۳]، توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای و توزیع فشار در شکلهای (۴) و (۵) نشان داده شده‌اند. بین نتایج این تحقیق و دیگران توافق خوبی برقرار است. در شکل (۴)، نتایج محاسباتی ضریب اصطکاک پوسته‌ای نشان می‌دهد که از لبه حمله تا شروع اندرکنش ( $X/L=0.64$ ) نتایج هر سه تحقیق بر هم منطبق‌اند. معمولاً شروع ناحیه اندرکنش را مکانی در نظر می‌گیرند که ضریب اصطکاک پوسته‌ای محاسبه شده برای جریانی با مشخصات مشابه بر روی صفحه‌ای مسطح و بدون اندرکنش بیش از یک درصد اختلاف با نتایج مسئله اصلی

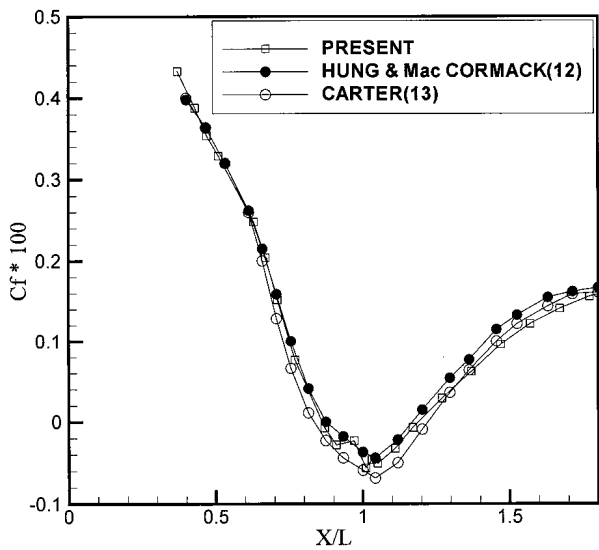


(ب) نتایج محاسباتی در قسمتی از لوله ضربه که تحت تأثیر اصلاحات قرار گرفته است.

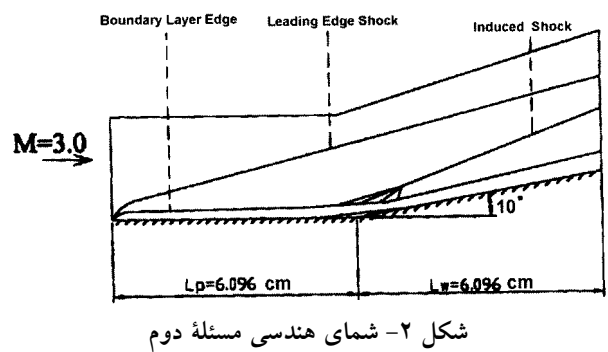


(الف) نتایج محاسباتی در تمام طول لوله ضربه

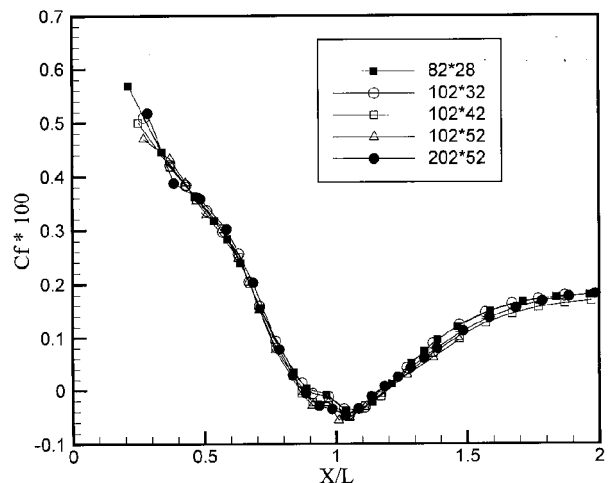
شکل ۱- مقایسه توزیع شار جرمی و فشار بدون بعد شده در لوله ضربه به روش AUSM خالص و AUSM با پخش عددی کم



شکل ۴- مقایسه ضریب اصطکاک پوسته‌ای با نتایج عددی برای  $M=3$

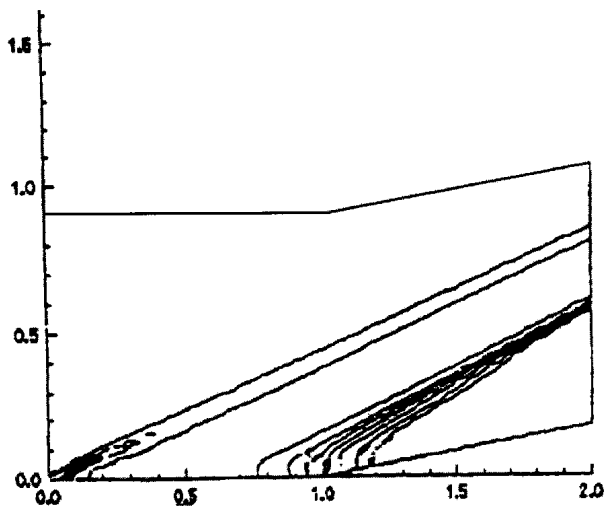


شکل ۲- شمای هندسی مسئله دوم

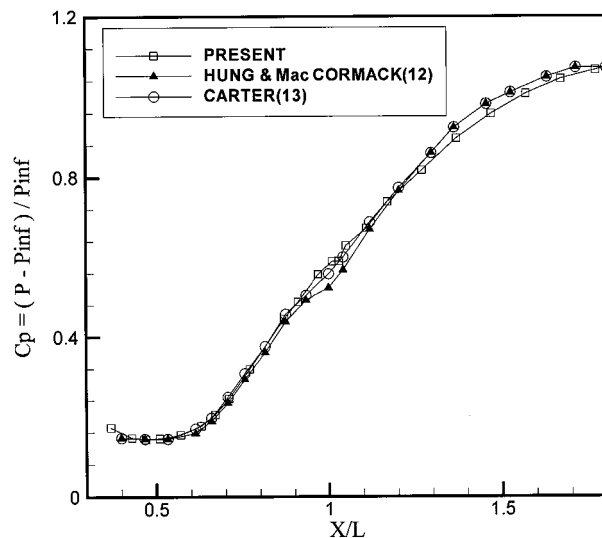


شکل ۳- نتایج محاسباتی برای توزیع اصطکاک پوسته‌ای برای اطمینان از عدم وابستگی جوابها به اندازه شبکه





شکل ۶- خطوط فشار ثابت جریان با  $M=3$



شکل ۵- مقایسه توزیع فشار روی سطح با نتایج عددی برای  $M=3$

### ج) مسئله سوم

برای مقایسه نتایج کد حاصل با نتایج تجربی، جریانی هایپرسونیک با ماخ ۱۰، گذرنده از کنجی با زاویه ۲۵ درجه مورد بررسی قرار گرفته است. عدد رینولدز به ازای واحد طول مشخصه،  $3 \times 10^4$ ، دمای جریان آزاد 52.5K و دمای صفحه 290K است. هندسه این مسئله، به طور شماتیک، در شکل (۷) نشان داده شده است. شرایط هندسی و فیزیکی این مسئله به گونه‌ای است که موج تشکیل شده در لبه حمله با موج تشکیل شده در کنج اندرکنش دارد.

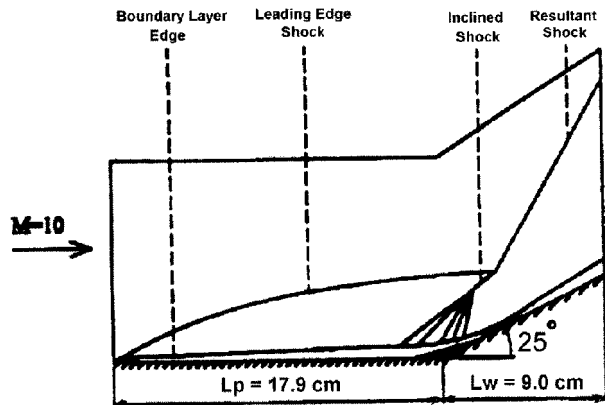
برای اطمینان از عدم وابستگی جوابها به اندازه شبکه. نتایج چهار شبکه  $142 \times 42$ ،  $142 \times 52$ ،  $212 \times 64$  و  $212 \times 128$  مقایسه شده‌اند که نتیجتاً شبکه  $212 \times 64$  مناسب تشخیص داده شد. برای این شبکه حداقل و حداکثر بعد در جهت  $y$ ، به ترتیب  $\Delta y_{\min} = 2.53 \times 10^{-4}$  و  $\Delta y_{\max} = 1.15 \times 10^{-3}$  هستند. شرایط سکون آزمایش طوری است که به جز در نزدیکی لبه حمله، لایه مرزی آرام تشکیل می‌شود.

تغییرات  $C_p$  و  $C_f$  در طول صفحه، محاسبه شده از حل عددی حاضر، در شکل‌های (۸) و (۹) با نتایج تجربی گراسو و همکاران [۱۴] مقایسه شده است. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای محاسبه شده با داده‌های تجربی از لبه حمله تا نزدیکی

یکدیگر میل می‌کنند.

در شکل (۵)، نتایج حاصل از توزیع فشار سطحی تا شروع جدایش در هر سه روش بر هم منطبق‌اند. در حالی که در ناحیه جدایش اختلاف اندکی بین نتایج حاصل از سه روش مشاهده می‌شود. حداکثر اختلاف ضریب فشار حاصل از روش حاضر با روش هونگ و مک کورمک [۱۲]، ۷٪ و با روش کارتر [۱۳]، ۲٪ است. خطوط فشار ثابت برای این مسئله در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. به جز ناحیه بسیار نزدیک مرکز تشکیل حباب جدایش در بقیه نواحی، خطوط فشار یکنوایی مشاهده می‌شود. شاید بتوان نوسانات بسیار جزئی در مرکز این حباب را به علت نادانمی بودن یا درهم بودن محلی جریان در این ناحیه دانست. با توجه به معیار همگرایی، برای رسیدن جواب به حالت دایمی، محاسبات در ۱۱۴۰۰ تکرار انجام گرفته است. گام زمانی مورد نیاز (بدون بعد)  $1/15 \times 10^{-3}$  است. با توجه به طول مشخصه و اینکه سرعت جریان آزاد در حدود ۵۸۸ متر بر ثانیه است، گام زمانی بعددار  $2/33 \times 10^{-4}$  میلی ثانیه می‌شود. حال با توجه به تعداد تکرار بالا، زمان فیزیکی لازم برای رسیدن به جواب حالت دایمی ۲/۶۵۵ میلی ثانیه محاسبه می‌شود.

ناحیه جدایش توافقی بسیار عالی را نشان می‌دهد، لیکن در ناحیه جدایش و تماس مجدد جریان اختلاف جزئی مشاهده می‌شود. نسبت طول ناحیه جدا شده ( $l_{SR}$ ) به طول لبه حمله تا کنج در روش محاسباتی و تجربی به ترتیب  $0/49$  و  $0/46$  برآورد شده است. نتایج محاسباتی طول ناحیه جدایش را حدوداً  $6\%$  بیشتر نشان می‌دهد. توزیع ضریب فشار سطحی محاسبه شده در ناحیه بالادست جدایش با توزیع حاصل از داده‌های تجربی بر هم منطبق هستند. اختلاف این ضریب با داده‌های تجربی در ناحیه جدایش و تماس مجدد بسیار اندک است.

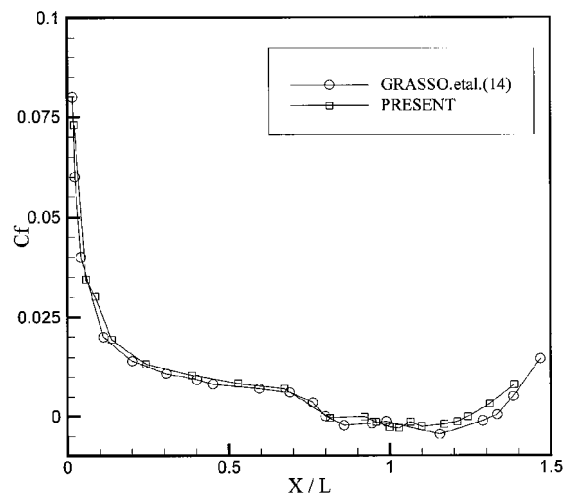


شکل ۷- شمای هندسی مسئله سوم

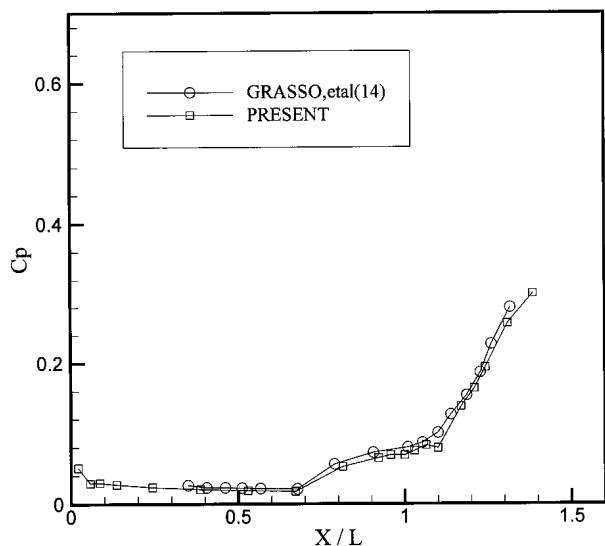
#### د) مسئله چهارم

موج تشکیل شده ناشی از برخورد جریانی با ماخ ۲ با یک گوه وارد میدان حل شده و با لایه مرزی آرام ناشی از همان جریان بر روی صفحه تخت برخورد می‌کند. زاویه موج حاصل با امتداد افق  $32/6$  درجه محاسبه می‌شود. عدد رینولدز در محل برخورد موج با صفحه  $2/96 \times 10^6$  و دمای دیواره 165K است. دیواره آدیاباتیک در نظر گرفته شده است. هندسه این مسئله بدون نشان دادن اندرکنش موج ضربه‌ای تشکیل شده در لبه حمله تا موج اصلی ورودی، به طور شماتیک. در شکل (۱۰) رسم شده است.

با شبکه مناسب  $52 \times 42$ ، نتایج محاسباتی توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای و فشار سطحی با نتایج تجربی هاکینن [۱۵] و نتایج عددی مک کورمک [۱۶] در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) مقایسه شده‌اند. مقدار تجربی  $C_f$  توسط هاکینن [۱۵] در طول ناحیه جدایش اندازه‌گیری نشده است، لیکن، طول ناحیه برگشت جریان تشخیص داده شده است. نتایج محاسباتی  $C_f$  توسط این تحقیق در ناحیه بالادست و پایین دست ناحیه اندرکنش توافقی خوبی را با نتایج تجربی نشان می‌دهند. در ناحیه اندرکنش این نتایج نسبت به نتایج مک کورمک با داده‌های تجربی، توافقی بهتری را نشان می‌دهند. طول ناحیه جدایش بدون بعد شده توسط روش حاضر، داده‌های تجربی و نتایج محاسباتی مک کورمک به ترتیب  $0/29$ ،  $0/26$  و  $0/41$



شکل ۸- مقایسه نتایج محاسباتی توزیع اصطکاک پوسته‌ای با نتایج تجربی گراسو و همکاران [۱۴]

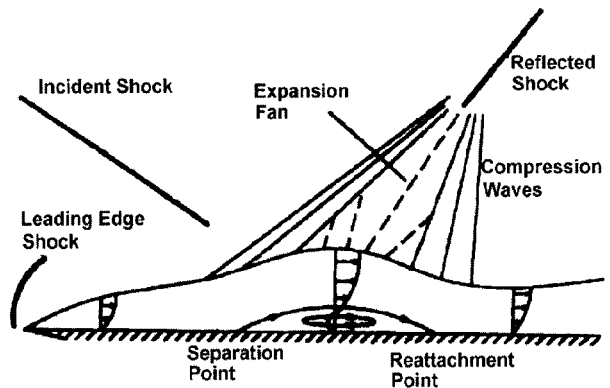


شکل ۹- مقایسه نتایج محاسباتی ضریب فشار با نتایج تجربی گراسو و همکاران [۱۴]

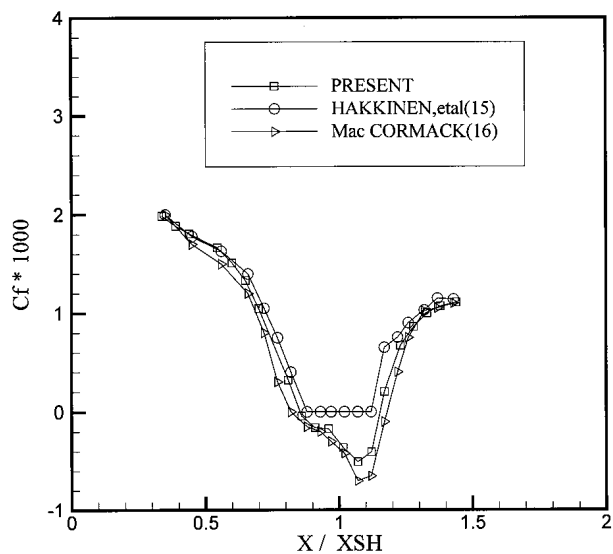
هستند که نشان می‌دهد طول محاسبه شده توسط این روش به داده‌های تجربی نزدیکتر است. ضمن توافق عالی توزیع فشار محاسبه شده با داده‌های تجربی در بالادست و پایین دست ناحیه اندرکنش، حداکثر انحراف مقدار فشار سطحی محاسبه شده در ناحیه جدایش از مقدار تجربی ۱/۶٪ است، در حالی که حداکثر انحراف نتایج محاسباتی مک کورمک ۳٪ است. خطوط ماخ ثابت برای این مسئله در شکل (۱۳) رسم شده‌اند. یکنوایی مطلوبی در خطوط رسم شده مشاهده می‌شود. نتایج حاصل از حل تحلیلی موج ضربه‌ای مایل در بیرون از لایه مرزی (جریان آیزنروپیک) با نتایج محاسباتی این روش توافق خوبی را نشان می‌دهد.

### ۷- نتیجه گیری

در مقاله حاضر ضمن مطالعه و مقایسه روشهای شکافت بردار شار غیرلزج، براساس طرح ترکیبی AUSM و به کمک روشهای LDFVS ترکیبی جدید بر روی روش شکافت بردار شار AUSM اعمال شد و حاصل به صورت ارائه یک روش حجم محدود برای بررسی مسائلی همراه با اندرکنشهای قوی موج ضربه‌ای با لایه مرزی آرام مورد استفاده قرار گرفت. برای ارزیابی کد رایانه‌ای چهار مسئله با شرایط گوناگون، بعد از انتخاب شبکه مناسب، تحلیل شدند. با حل مسئله لوله ضربه‌ای یک بعدی به روش AUSM و روش جدید اثر کاهش پخش عددی بر جملات شار جرمی و فشار نشان داده شد. به کمک این روش مسائل پیچیده اندرکنشهای موج ضربه‌ای با لایه مرزی در محدوده وسیعی از شرایط حل عددی شد. با توجه به سادگی روش محاسباتی، نتایج با دقت قابل ملاحظه‌ای به دست آمدند. با اصلاحات انجام گرفته به علت کاهش پخش عددی، پخش فیزیکی مقدار واقعی خود را بهتر نشان می‌دهد. همچنین با مشاهده خطوط فشار ثابت یکی از معایب روشهای شکافت بردار شار که ایجاد نوسانات فشار در نزدیکی مرز جامد و نواحی با گرادیان شدید است از بین می‌رود. با توجه به اینکه در روشهای شکافت عدد ماخ با مرتبه بالا از یکنوایی جوابها

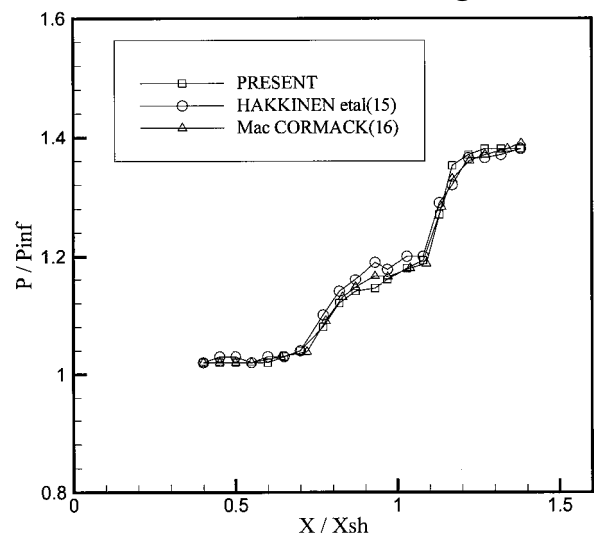


شکل ۱۰- شمای هندسی مسئله چهارم



شکل ۱۱- مقایسه نتایج محاسباتی توزیع اصطکاک پوسته‌ای با

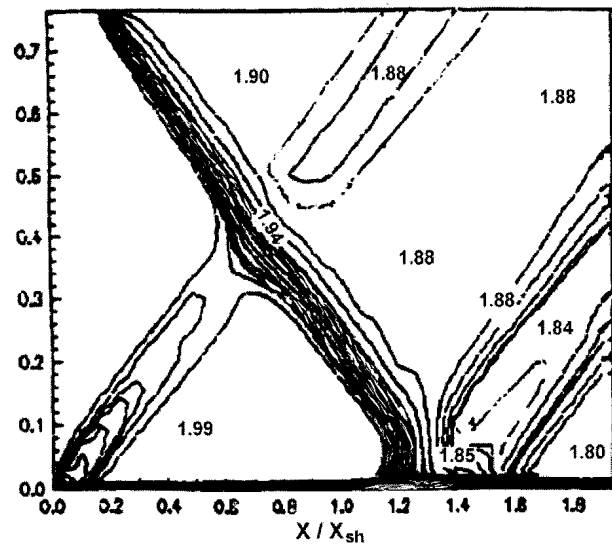
نتایج تجربی و عددی برای جریان با  $M=2$



شکل ۱۲- مقایسه نتایج محاسباتی توزیع فشار بر روی سطح با

نتایج تجربی و عددی برای جریان  $M=2$

کاسته می‌شود، لذا، به منظور جلوگیری از بروز این عیب برای نواحی غیرحدی پارامتر محدودگر اعمال می‌شود. برای نواحی حدی، که در آن گرادیانهای متغیر پایستار تغییر علامت می‌دهند، مقدار محدودگر، صفر انتخاب می‌شود. گرچه با این انتخاب، در این نواحی، دقت مکانی تقریب مرتبه یک می‌شود، لیکن، از رفتار نایکنوایی جوابها جلوگیری می‌شود.



شکل ۱۳- خطوط ثابت برای جریان با  $M=2$

#### واژه نامه

- |  |  |                                    |
|--|--|------------------------------------|
| 1. flux vector splitting (FVS)                 | 5. conservative variable   | 8. flux difference splitting (FDS) |
| 2. advection upstream splitting method (AUSM)  | 6. limiter   | 9. root mean square (RMS)          |
| 3. low diffusion flux vector splitting (LDFVS) | 7. monotone upstream-centered scheme for conservation laws (MUSCL) | 10. aspect ratio                   |
| 4. monotonicity                                |  |                                    |

#### مراجع

1. Steger., J. L., and Warming, R. F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods," *Journal of Computational Physics*, No. 40, pp. 263-293, 1981.
2. Van Leer, B., "Flux Vector Splitting for Euler Equations," *Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Berlin, Springer Verlag, Lecture Notes in Physics Vol. 170, pp. 501-512, 1982.
3. Roe, P. L., "The Use of Riemann Problem in Finite Difference Scheme: Lecture Notes in Physics, Vol. 141, pp. 354-9 Berlin Springer Verlag, 1981.
4. Osher, S., and Engquist, B., "One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws," *Mathematics of Computation*, No. 36, pp. 321-52, 1981.
5. Hanel, D., Schwane, R., and Seider, G., "On the Accuracy of Upwind Scheme for the Solution of Navier-Stokes Equation," *AIAA 8th Computation Fluid Dynamics Conference*, 1987.
6. Hanel, D., and Schwane, R., "An Implicit Flux Vector Splitting for Computation of Viscous Hypersonic Flow," *AIAA Paper* 89-0274, 1989.
7. Coirier, W. J., and Van Leer, B., "Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations," *AIAA paper*, March 1991, AIAA 1566-CP, 1991.
8. Liou, M. S., and Steffen, Jr., "High Order Polynomial Expansion for Flux Vector Splitting," *International Conference on Computational Engineering Science*, 1991.
9. Liou, M. S., and Steffen, J., "A new Flux Splitting Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol. 107, pp. 23-39, 1993.
10. Gerolymos, G. A., and Vallet, I., "Implicit Computation of Three-Dimensional-Compressible Navier-Stokes Equations Using k-ε Closure," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 7, pp. 1321-1330, July 1996.
11. Sod, G. A., "A Survey of Several Finite Difference Methods for System of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, pp. 1-31, 1978.

12. Hung, C. M., and Mac Cormack, R. W., "Numerical Solution of Supersonic and HyperSonic Laminar Compression Corner Flow," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 4, pp. 475-481, 1976.
13. Carter, J. E., "Numerical solution of Navier-Stokes Equations for Supersonic Laminar Flow Over a Two Dimensional Compression Corner," NASA, TR R-385, July 1972.
14. Grasso, F., Leone, G., and Delery, J. M., "Validation Procedure for the Analysis of Stock-Wave/Boundary Layer Interaction Problems," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 9, pp. 1820-1827, September 1994.
15. Hakkinen, R. J., Greber, I., Trilling, L., and Abarbanel, S. S., "The Interaction of an Oblique Shock Wave with a Laminar Boundary Layer," NASA, Memo 2-1859W, 1959.
16. Mac Cormack, R. W., "Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 9, pp. 1275-1279, Sept. 1982.