

# حل مسئله سینماتیک معکوس رباتهای همکار در حضور افزودگی درجه آزادی سینماتیکی به روش کنترل بهینه

علی حسینی\*، مهدی کشمیری\* و محمد جعفر صدیق\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، MIT آمریکا

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۲/۷/۲۶ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۱۱/۲۱)

**چکیده** - در این تحقیق طراحی مسیر در فضای مفاصل رباتهای همکار با نامعینی سینماتیکی، به کمک نظریه کنترل بهینه بررسی شده است. در این روش با در نظر گرفتن یک تابع هدف و مینیمم سازی آن در کل مسیر، پاسخ بهینه مسیر هر یک از مفاصل محاسبه می شود. با استفاده از اصل مینیمم سازی پونتریگن<sup>۱</sup> و تعیین نوع شرایط اولیه حاکم بر سیستم دینامیکی، مسئله شرط اولیه به مسئله شرط مرزی دوطرفه تبدیل می شود و معادلات سینماتیک مستقیم به عنوان قیود مسئله در نظر گرفته می شوند. با حل مسئله شرط مرزی دوطرفه، جواب بهینه استخراج خواهد شد. روش ارائه شده برای طراحی مسیر دو ربات همکار صفحه ای با سه درجه آزادی به کار گرفته شده است.

واژگان کلیدی: رباتهای همکار با افزودگی درجه آزادی؛ طراحی مسیر؛ کنترل بهینه؛ مسئله شرط مرزی دو طرفه.

## Inverse Kinematics Resolution of Redundant Cooperative Manipulators Using Optimal Control Theory

A. Hosseini, M. Keshmiri, and M. J. Sadigh

Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** *The optimal path planning of cooperative manipulators is studied in the present research. Optimal Control Theory is employed to calculate the optimal path of each joint choosing an appropriate index of the system to be minimized and taking the kinematics equations as the constraints. The formulation has been derived using Pontryagin Minimum Principle and*

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکترا

results in a Two Point Boundary Value Problem, (TPBVP). The problem is solved for a cooperative manipulator system consisting of two 3-DOF serial robots.

**Keywords:** Redundant cooperative manipulators; Path planning; Optimal control; Two point boundary Value problem.

## ۱- مقدمه

همکاری بین رباتها برای انجام یک کار به صورت مشترک، منجر به پیدایش مبحث جدیدی در عرصه علم رباتیک شده است که از آن به عنوان رباتهای همکاری یاد می‌شود. توانایی این نوع سیستمها در انجام کارهایی که به لحاظ پیچیدگی، کارایی و یا دقت از عهده یک ربات خارج است توجه محققان را به خود جلب کرده است. علاوه بر این به کارگیری افزودگی درجات آزادی در بازوهای مکانیکی به دلیل قابلیت‌های مفید آن از قبیل افزایش تسلط، مهارت و دوری جستن از نقاط منفرد در فضای کار نیز مورد توجه محققان قرار دارد. از طرفی نامعینی سینماتیکی و دینامیکی این گونه سیستمها، به کارگیری این نوع سیستمها را با مشکلاتی همراه می‌سازد.

برای حل دستگاه معادلات سینماتیکی سیستم نامعین، بررسیهای متعددی انجام گرفته است. ویتنی و لجیس به حل معادله سینماتیک معکوس در سطح سرعت مفاصل به کمک شبه معکوس ماتریس ژاکوبین مفاصل اقدام کردند [۱ و ۲]. این حل برای مسیری بسته در فضای کار، به یک مسیر بسته در فضای مفاصل منجر نمی‌شود [۳]. کلین و کی نشان دادند که با در نظر گرفتن حل فضای پوچ، می‌توان روش قبلی را اصلاح کرد و در نتیجه کنترل بازوی نامعین را محافظه‌کار<sup>۲</sup> کرد [۳ و ۴]. در حل معادلات سینماتیک نامعین ملاحظات مختلفی در نظر گرفته شده است که از جمله آنها به حداقل مربعات سرعت مفاصل توسط ویتنی، اعمال محدودیت مفاصل توسط لجیس، اجتناب از نقاط منفرد توسط یوشیکاوا، اجتناب از موانع توسط کلین و ماکیجوسکی و حداقل نمودن انرژی پتانسیل توسط ناکانو و ازاکای می‌توان اشاره کرد [۱-۷].

استفاده از چند جمله‌ای‌های محدود به عنوان تقریبی از زوایای مفاصل و تعیین ضرایب مجهول آن به وسیله اعداد

تصادفی توسط یوچی یاما و همکارانش به کار گرفته شد [۸]. چونگ و همکارانش مسئله افزودگی درجات آزادی را با تقریب مسیر با چند جمله‌ای‌های محدود و شرایط اولیه معلوم بررسی کردند [۹]. ناگورکا و ین استفاده از مجموع چند جمله‌ایها و تعداد محدودی از جملات سری فوریه، برای تقریب مسیر با شرایط اولیه نامشخص را مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. همچنین کیو و ازاکای از تکنیکهای درونبایی B اسپلاین<sup>۳</sup> یکنواخت برای حل مسئله شرط مرزی استفاده کردند [۱۱].

سپس استفاده از تکنیکهای بهینه سازی مورد توجه قرار گرفت. چانگ با تعریف یک اندیس و بهینه کردن آن همزمان با قید معادلات سینماتیک، به حل این معادلات پرداخت [۱۲]. به کمک نظریه حساب تغییرات<sup>۴</sup> و با استخراج معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول، یافتن مقدار بهینه برای اندیس مورد نظر به حل یک مسئله شرط مرزی تبدیل می‌شود [۱۳-۱۵]. اندیس مورد نظر می‌تواند از جنس سینماتیکی و یا دینامیکی باشد.

اگر اندیس انتخابی به پارامترهای سینماتیکی وابسته باشد و مقادیر بهینه با توجه به معادلات سینماتیکی به دست آیند، اندیس سینماتیکی نامیده می‌شود. اگر اندیس به پارامترهای دینامیکی (نیرو و گشتاور) وابسته باشد و در بهینه سازی مقادیر کوبلهای بهینه با استفاده از معادلات دینامیکی به دست آیند، اندیس دینامیکی نامیده می‌شود.

در این مقاله هدف تعیین نامعینی در سطح سینماتیک است و اندیس مذکور وابسته به متغیرهای سینماتیکی تعریف می‌شود. توابعی که بیشتر در اندیس انتگرالی  $\int f dt$  مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارت‌اند از:

$$f_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q}; f_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}; f_3 = 1 \quad (1)$$

$f_1$  بیانگر مینیم نرْم سرعت مفاصل در مسیر ربات است. بیان دیگر  $f_1$ ؛ حداقل کردن انرژی جنبشی برای سیستمی با ماتریس

جرم واحد است.  $f_2$  بیانگر حداقل انرژی جنبشی سیستم در کل مسیر است و  $f_3$  معیار حداقل کردن زمان حرکت بازوست. همچنین استفاده از معیار چابکی<sup>۵</sup> [۱۷-۱۵] و ماتریس انعطاف پذیری<sup>۶</sup> پنجه [۱۸] به عنوان اندیس مسئله بهینه سازی، مورد مطالعه قرار گرفته شده اند.

## ۲- مدل سازی

### ۲-۱- تعریف مسئله

بردارهای  $q \in \mathbb{R}^n$  و  $X \in \mathbb{R}^m$  به ترتیب به عنوان متغیرهای فضای مفاصل و متغیرهای فضای کاری یک سیستم با درجات آزادی افزوده در نظر گرفته می شوند ( $m < n$ ) که  $n$  مجموع متغیرهای مفاصل یک، دو و یا چند ربات است. مسئله طراحی مسیر را می توان به شکل زیر بیان نمود:

"مسیر  $q(t)$  در فضای مفاصل را به گونه ای تعیین کنید که جسم متصل به پنجه (ها) از مختصات  $X_0$  شروع نموده و با حرکت روی مسیر مشخص  $X(t)$  به مختصات  $X_f$  برسد."

معادله سینماتیک سیستم را می توان به شکل جبری:

$$F(q) = X(t) \quad (2)$$

و یا به شکل دیفرانسیلی زیر در نظر گرفت:

$$J(q)\dot{q} = \dot{X}(t) \quad (3)$$

که  $J_{m \times n}$  ماتریس ژاکوبین سیستم رباتیک است.

حل دستگاه (۳) در شکل کلی عبارت است از

$$\dot{q}(t) = J^\# \dot{X}(t) + (I - J^\# J)\beta \quad (4)$$

که  $J^\#$  معکوس ضعیف<sup>۷</sup> ماتریس ژاکوبین بوده و در وضعیتهای غیر منفرد، از معادله زیر محاسبه می شود:

$$J^\#(q) = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (5)$$

اگر  $\dot{X}$  متعلق به فضای ستونی ماتریس ژاکوبین باشد؛ آن گاه (۴) حل دقیق دستگاه (۳) خواهد بود، وگرنه جواب با حداقل مربعات خطا را ارائه می دهد. از آنجا که (۳) یک مسئله فیزیکی را مدل می کند، بنابراین  $X(t)$  در فضای کار ربات تعریف می شود و (۴) جوابی دقیق و کلیترین پاسخ معادلات سینماتیک مستقیم است.

جملات اول و دوم در (۴) به ترتیب جوابهای خصوصی و عمومی معادله (۳) به شمار می روند که اولی از فضای مکمل متعامد فضای پوچ ماتریس ژاکوبین<sup>۸</sup> و دومی از فضای پوچ<sup>۹</sup> آن ماتریس اختیار شده اند.  $\beta$  برداری کاملاً اختیاری از فضای  $\mathbb{R}^n$  است که با نگاشت  $I - J^\# J$  در  $NS$  تصویر می شود. در واقع جمله دوم قابلیت افزودگی درجات آزادی بازوها را نشان می دهد و می تواند جوابهای متفاوت برای  $\dot{q}(t)$  تولید کند. این قابلیت به طراح اجازه می دهد تا برای انجام یک عملیات مشخص، یک اندیس را نیز بهینه کند.

به طور مثال اندیس  $P$  زیر را در نظر می گیریم:

$$P = \int_{t_0}^{t_f} \dot{q}^T \dot{q} dt \quad (6)$$

در این صورت، مسئله به پیدا کردن مسیر  $q(t)$  (و یا در واقع  $\beta$ ) تبدیل می شود که علاوه بر ارضای معادلات سینماتیک، این اندیس را بهینه کند.

این موضوع را می توان با روشهای کنترل بهینه بررسی کرد. از جمله این روشها استفاده از اصل مینیمم سازی پونترینگن است [۱۹].

### ۲-۲- اصل مینیمم سازی پونترینگن

سیستم دینامیکی

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (7)$$

مفروض است. قانون کنترلی  $u^*$  متعلق به زیر مجموعه  $U \subset \mathbb{R}^r$  که حالت  $x \in \mathbb{R}^n$  را به حرکت روی مسیری مجاز وادار نماید و اندیس

$$P = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt \quad (8)$$

را حداقل کند، قانون کنترلی بهینه می نامیم.

با در نظر گرفتن بردار الحاقی<sup>۱۰</sup>  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ، همیلتونین<sup>۱۱</sup> سیستم را به شکل

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) = f_0 + \lambda^T f \quad (9)$$

تعریف می کنیم. برای آنکه  $u^*$  قانون کنترلی بهینه مسئله برای بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  باشد باید:

$$\beta = -\frac{1}{2}[I - J^\# J] \lambda \quad (13)$$

نهایتاً معادلات به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\dot{q} = f \quad (14-الف)$$

$$\dot{\lambda} = -\left[\frac{\partial f}{\partial q}\right]^T (2f + \lambda) \quad (14-ب)$$

که  $f$  به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$f = J^\# \dot{X}(t) - \frac{1}{2}[I - J^\# J] \lambda \quad (15)$$

### ۲-۳- شرایط مرزی

معادلات (۱۴-الف) و (۱۴-ب) شامل  $2n$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند. بنابراین به دست آوردن حل بهینه مشروط به تعیین  $2n$  شرط اولیه است. بدیهی است معادله (۲) در لحظه  $t = t_0$  باید برقرار باشد:

$$F(q_0) = X_0 \quad (16)$$

در انتهای مسیر با توجه به افزودگی درجات آزادی،  $q_f$  آزاد است؛ ولی معادلات حاکم بر آنها و زمان خاتمه مسیر معلوم‌اند. این نوع از مسائل، مسئله حالت نهایی آزاد با زمان معلوم<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شوند و برای آنها خواهیم داشت [۲۰]:

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (17)$$

دو معادله اخیر مجموعاً  $n + m$  شرط تعریف می‌کنند.  $n - m$  شرط دیگر نیز از شرط تعامد در ابتدای مسیر به دست می‌آید. این شرط بیان می‌کند که  $\lambda$  باید بر دسته معادلات قیود حاکم (معادلات سینماتیک مستقیم) عمود باشد. به عبارت دیگر بردار  $\lambda$  باید در برد  $J^T$  قرار گرفته باشد. بیان ریاضی این شرط به شکل زیر است:

$$[I_n - J^\#(q_0)J(q_0)] \lambda(t_0) = 0 \quad (18)$$

و نهایتاً  $2n$  شرط مرزی در دو انتهای بازه انتگرالگیری به دست می‌آید.

محاسبه مسیر بهینه منوط به حل مسئله شرط مرزی دوطرفه<sup>۱۳</sup> خواهد بود. از جمله روشهای حل این نوع مسائل روش شلیک<sup>۱۴</sup> است. در ادامه این روش برای حل مسائل نمونه به کار گرفته شده است.

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x} \quad (10-الف)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} \quad (10-ب)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u} = 0 \quad (10-ج)$$

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*) \leq \mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*) \quad (10-د)$$

مشاهده می‌شود که معادلات فوق ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی و به صورت کوپل‌اند. بنابراین با حل  $r$  عدد معادله جبری (۱۰-ج) و محاسبه  $u^*(t)$  و جاگذاری آن در (۱۰-الف) و (۱۰-ب) مسیر بهینه  $x^*(t)$  قابل محاسبه خواهد بود. تذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که معادلات (۱۰) تنها بیانگر شرط لازم برای مینیمم کردن  $\mathcal{H}$  هستند و امکان دارد مسیری این شرایط را ارضا کند ولی جواب بهینه نباشد.

معادله جبری غیرخطی (۱۰-ج) برای تعیین  $u^*(t)$  در حالت خاص که همپلتونین مسئله بر حسب  $u$  خطی یا سهموی باشد، دارای حل تحلیلی است. در غیر این صورت این معادله باید در هر گام انتگرالگیری به طریقه عددی حل شود. اما به دلیل انتگرالگیری‌های مکرر از نظر محاسباتی فوق‌العاده سنگین می‌شود.

با در نظر گرفتن معادله‌های (۴) و (۶) و تعریف

$$f(q, \beta) = J^\#(q)\dot{X}(t) + (I - J^\#(q)J(q))\beta \quad (11)$$

مسئله بهینه‌سازی مورد نظر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{q} = f(q, \beta) \quad (12)$$

$$P = \int_{t_0}^{t_f} f_0(q, \beta) \quad (12)$$

که  $f_0 = f^T f$ . با مقایسه این معادلات با معادلات (۷) و (۸) می‌توان دید مسئله طراحی مسیر بهینه حاضر را می‌توان با استفاده از روشهای کنترل بهینه حل کرد که  $\beta, q$  به ترتیب به جای  $u, x$  قرار گرفته‌اند. با استفاده از این روش و توجه به این نکته که در مسئله حاضر اندیس  $P$  بر حسب  $\dot{q}$  و در نتیجه  $\beta$  به شکل سهموی است می‌توان نشان داد حل معادله (۱۰-ج) منجر به پاسخ تحلیلی برای  $\beta$  به شکل بسته می‌شود (چگونگی حل این معادله در پیوست ارائه شده است):

### ۳- تکنیکهای عددی

در روش شلیک برای آن دسته از شرایط اولیه که اطلاعاتی در مورد آنها نداریم، حدس اولیه‌ای در نظر گرفته می‌شود تا شرایط اولیه در یک طرف بازه انتگرالگیری کامل شود. به این ترتیب می‌توان عملیات انتگرالگیری را انجام داد و مقادیر نهایی بازه را به دست آورد. این مقادیر با اطلاعات قبلی از شرایط مرزی معلوم مقایسه می‌شود و با توجه به خطای موجود، حدس اولیه اصلاح می‌شود. این کار آن قدر تکرار می‌شود تا مسئله به جواب واقعی خود همگرا شود. بدیهی است که هرچه معلومات در یک طرف بازه بیشتر باشد، همگرایی سریعتر و آسانتر خواهد بود.

با توجه به معادلات (۱۶) تا (۱۸) مجموعاً  $n$  شرط مرزی در  $t_0$  و  $n$  شرط مرزی دیگر در  $t_f$  معلوم است. بنابراین به عنوان مثال باید در  $t_0$ ،  $n$  حدس اولیه در نظر گرفت و انتگرالگیری را انجام داد و مقادیر نهایی را با  $n$  شرط معلوم مقایسه کرد. در مسئله حاضر می‌توان تعداد این حدسها را کاهش داد. اگر  $q_0$  شرط  $F(q_0) = X_0$  را ارضا کند و  $q(t)$  از معادله (۴) محاسبه شود، آن‌گاه  $q_f$  الزاماً شرط  $F(q_f) = X_f$  را ارضا می‌کند. عکس این مطلب نیز صادق است. اگر معادله (۱۶) را به جای  $t_0$  در  $t_f$  در نظر بگیریم، تعداد شرایط مرزی معلوم در انتهای بازه انتگرالگیری افزایش می‌یابد. به این ترتیب با در نظر گرفتن یک انتگرال پسرونده، از مجموع  $2n$  شرط مرزی،  $n+m$  شرط معلوم است و تنها  $n-m$  حدس انجام خواهد شد. در انتهای بازه نیز ( $t = t_0$ ) تنها شرط تعامد را باید بررسی کرد. این کار حجم محاسبات را کاهش و سرعت همگرایی را افزایش خواهد داد. نهایتاً شرایط مرزی مسئله به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} F(q_f) = X(t_f) \\ \lambda(t_f) = 0 \\ e = [I_n - J^\#(q_0)J(q_0)]\lambda(t_0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

با تکمیل شرایط مرزی در  $t_f$  و انتگرالگیری پسر، مقادیر  $q_0$  و  $\lambda_0$  به دست می‌آیند. آن‌گاه اگر شرط  $e = 0$  برقرار نبود، سعی می‌شود حدسها را به گونه‌ای تعدیل کرد که معادله اخیر ارضا

شود. در واقع هدف ما پیدا کردن ریشه‌های معادله  $e$  است که  $e$  تابعی از نتیجه انتگرالگیری روی مسیر داده شده است.

(شرایط اولیه حدسی)  $e = e$

اگر بردار شرایط اولیه حدسی را  $s$  بنامیم، با استفاده از بسط تیلور؛ مقدار  $s$  را در هر تکرار برای  $e \neq 0$  با فرمول بازگشتی

$$s_{n+1} = s_n - \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)^{-1} \Big|_n e_n \quad (20)$$

اصلاح می‌کنیم تا وقتی که دقت مورد نظر ارضا شود. در این تحقیق از نرُم اول  $e$  به عنوان شرط خاتمه محاسبات استفاده شده است.

استفاده از فرمول بازگشتی (۲۰) برای حل عددی  $e(s) = 0$

گاهی منجر به جوابهایی خارج از محدوده مجاز متغیرهای حدسی می‌شود. در این گونه موارد باید با حدس جدیدی از داخل بازه، مسئله را ادامه داد و به همگرایی پاسخ امیدوار بود. معمولاً هرچقدر حدس اولیه به مقدار اکسترم آن نزدیکتر باشد، همگرایی سریعتر و مطمئنتر خواهد بود.

### ۴- مسئله نمونه

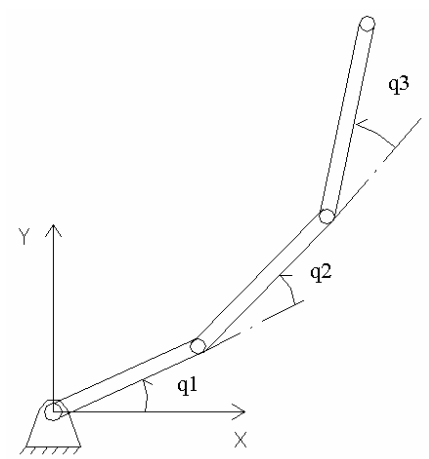
قبل از به کارگیری این روش در مجموعه رباتهای همکار، ابتدا مثال ساده‌تری را برای یک ربات مستقل مورد توجه قرار می‌دهیم، شکل (۱). سپس در بخش بعدی به مسئله دو ربات همکار صفحه‌ای می‌پردازیم، شکل (۲).

#### الف) یک ربات صفحه‌ای با یک درجه نامعینی

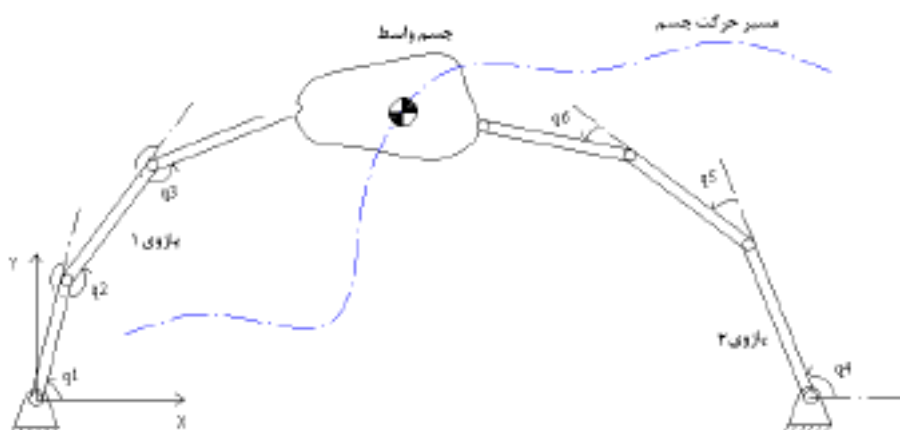
شکل (۱) یک ربات صفحه‌ای با سه درجه آزادی را نشان می‌دهد، که از سه عضو صلب با مفاصل دورانی ایجاد شده‌اند. پنجه ربات با مختصات  $X = [x, y]^T$  معرفی می‌شود. بنابراین سیستم دارای یک درجه نامعینی سینماتیکی خواهد بود. مقادیر طول بازوها در جدول (۱) آمده است.

مسیر پنجه ربات را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.4 \\ y(t) &= \frac{1}{4}[1 - \cos(\pi t)] \\ t &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (21)$$



شکل ۱ - ربات صفحه‌ای با سه درجه آزادی؛ مسئله نمونه (الف)



شکل ۲ - دو ربات همکار صفحه‌ای با پنج درجه آزادی؛ مسئله نمونه (ب)

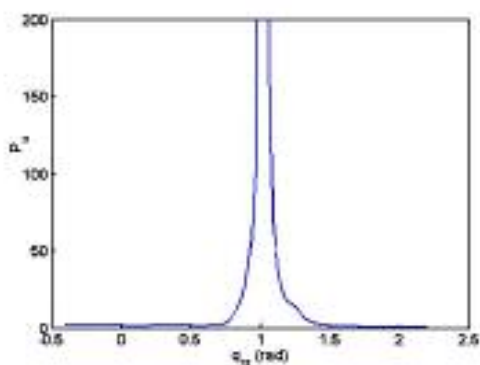
جدول ۱- ابعاد طولی بازوهای ربات شکل (۱)

شماره بازو	۱	۲	۳
نماد	$l_1$	$l_2$	$l_3$
اندازه (m)	۰/۵	۰/۴	۰/۳

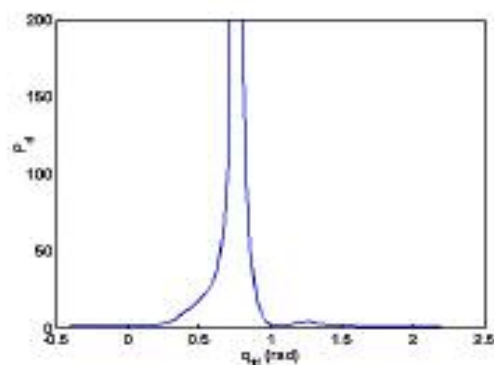
$$q_{1f} \in [-0.406, 2.198]$$

بدیهی است با فرض معلوم بودن  $q_{1f}$  و به کمک معادلات سینماتیک مستقیم، می‌توان دو دسته جواب آرنج بالا<sup>۱۵</sup> و آرنج پایین<sup>۱۶</sup> برای  $q_f$  معرفی کرد. با تعیین بردارهای  $q_f$  به ازای تمامی مقادیر  $q_{1f}$  در بازه مجاز فوق، اندیس  $P_u$  در حالت آرنج بالا و اندیس  $P_d$  در حالت آرنج پایین محاسبه می‌شوند.

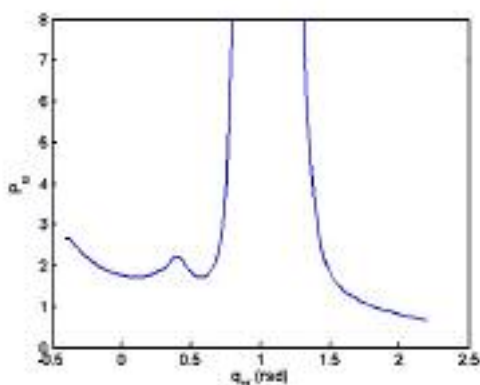
وقتی درجه نامعینی برابر یک باشد، معادله (۱۸) به رابطه‌ای اسکالر تبدیل خواهد شد. متغیر  $q_{1f} = q_1(t_f)$  به عنوان شرط اولیه حدسی  $s$  در نظر گرفته می‌شود. این متغیر به لحاظ محدودیتهای هندسی، در بازه محدودی مجاز به تغییر خواهد بود. این بازه برای ربات شکل (۱) با ابعاد مذکور در جدول (۱) عبارت است از:



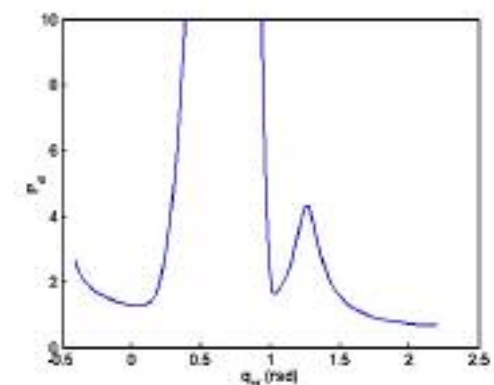
(ب) آرنج بالا



(الف) آرنج پایین



(د) جزئیات شکل ب



(ج) جزئیات شکل الف

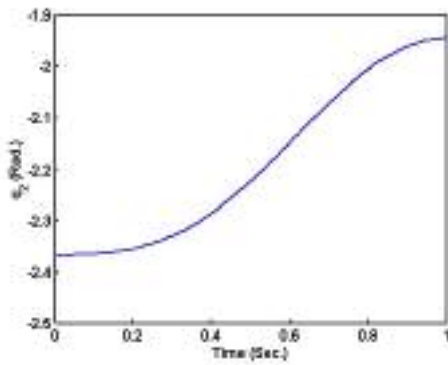
شکل ۳ - منحنی تغییرات P بر حسب متغیر حدسی s - مسئله نمونه اول.

جدول ۲- نتایج مسئله نمونه (الف)

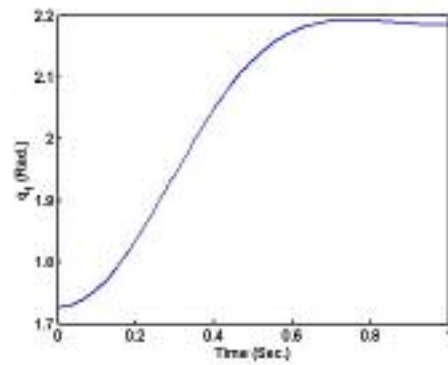
P شکل (۳) (Rad <sup>2</sup> /Sec.)	P بهینه (Rad <sup>2</sup> /Sec.)	q30 بهینه (Rad.)	q20 بهینه (Rad.)	q10 بهینه (Rad.)	q1f بهینه (Rad.)	تعداد تکرار	$\ e\ _1 <$	q1f حدسی (Rad.)
۱/۲۹۲۸	۱/۲۹۲۴	۲/۲۷۵	۱/۳۷۷	-۰/۶۶۲	۰/۰۴۸	۶	۰/۰۱	۰/۴
۱/۷۰۸۶	۱/۷۰۸۵	-۳/۲۸۹	۲/۳۲۰	-۰/۱۱۴	۰/۵۷۲	۸	۰/۰۱	۱
۰/۶۷۴	۰/۶۸۵۵	-۰/۳۸۴	-۲/۳۶۵	۱/۷۲۸	۲/۱۸۶	۴	۰/۰۹	۱/۵

با مقادیر نشان داده شده در شکل (۳) مقایسه می‌کند. گاهی تصحیح حدس به گونه‌ای اتفاق می‌افتد که مقدار جدید  $q_{1f}$  بیرون از بازه مجاز به دست می‌آید و بنابراین پنجه بازو در موقعیت مورد انتظار قرار نمی‌گیرد. این مسئله برای نقاط حدسی نزدیک به نقاط انتهایی بازه کاملاً مشهود است. به همین دلیل در حدس سوم از جدول (۲)، از شرط خاتمه محاسبات  $\|e\|_1 < 0.09$  استفاده شده است.

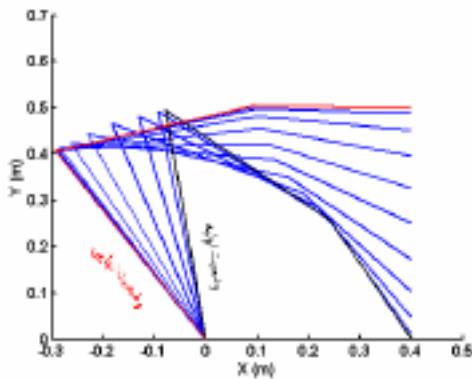
شکل (۳) تغییرات این دو اندیس را بر حسب کلیه مقادیر مجاز  $q_{1f}$  نشان می‌دهد. مقدار P در نقاط منفرد به بی نهایت میل می‌کند و باعث می‌شود که در نواحی پایینی شکل‌های (۳-الف) و (ب) تغییرات منحنی P محسوس نباشد. نواحی پایینی این دو منحنی مجدداً در شکل‌های (۳-ج و د) رسم شده است. جدول (۲)، نتایج حاصل از چند مورد حدس اولیه برای  $q_{1f}$  و استفاده از حل مسئله کنترل بهینه را نشان داده و آنها را



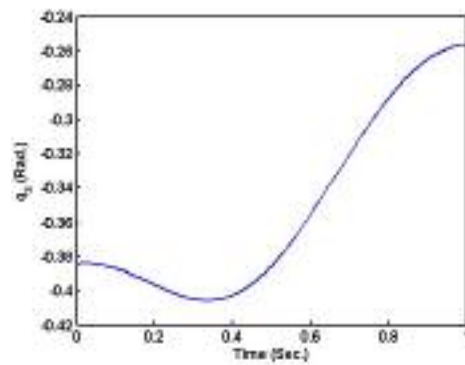
(ب)



(ف)



(د)



(ج)

شکل ۴ - مسیر بهینه در فضای مفاصل - مسئله نمونه اول

$$X = [x(t), y(t), \theta(t)]^T \quad (22)$$

متغیرهای فوق در چارچوب مرجع، متصل به پایه ربات ۱ تعریف می‌شوند. راستای محورهای  $x$  و  $y$  به ترتیب در راستای میز کار و عمود بر آن و  $\theta$  زاویه خط واصل دو لولا با محور افقی چارچوب فوق تعریف می‌شوند.

هریک از دو سیستم ربات و جسم دارای سه درجه آزادی هستند که مجموعاً ۹ پارامتر غیر مستقل برای معرفی این رباتهای همکار که یک جسم را گرفته‌اند، نیاز دارند. از طرفی در نقطه اتصال جسم به دو ربات، برای مختصات  $x$  و  $y$  مجموعاً ۴ قید ایجاد می‌شود. بنابراین تعداد درجه آزادی کل سیستم برابر ۵ است. از آنجا که جسم هدف دارای ۳ درجه آزادی است، مسئله از نظر سینماتیکی دارای ۲ درجه نامعینی است.

منحنی مسیر بهینه مفاصل و همچنین شماتیک مسیر حرکت ربات در فضای کار آن برای حدس سوم که حداقل مقدار عددی برای  $P$  را پیش بینی می‌کند، به ترتیب در شکل (۴) رسم شده است.

#### (ب) دو ربات صفحه‌ای با دو درجه نامعینی

حال دو ربات صفحه‌ای را مطابق شکل (۲) در نظر می‌گیریم که به طور مشترک جسمی را در فضای دکارتی حرکت می‌دهند. هر یک از دو ربات از نوع سری و پایه ثابت و دارای سه درجه آزادی‌اند، که از سه عضو صلب با مفاصل دورانی ایجاد شده‌اند. جسم مورد نظر با اتصال لولایی به انتهای دو ربات متصل است. مسیر حرکت مرکز جرم جسم واسط در فضای دکارتی کاملاً معلوم است.



جدول ۳- ابعاد طولی بازوهای ربات شکل ۲

ربات ۲			ربات ۱			شماره بازو
۳	۲	۱	۳	۲	۱	
$l_6$	$l_5$	$l_4$	$l_3$	$l_2$	$l_1$	نماد
۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵	اندازه (m)

جدول ۴- نتایج مسئله نمونه (ب)

P بهینه (Rad <sup>2</sup> /Sec.)	q <sub>4f</sub> بهینه (Rad.)	q <sub>1f</sub> بهینه (Rad.)	تعداد تکرار	$\ e\ _1 <$	q <sub>4f</sub> حدسی (Rad.)	q <sub>1f</sub> حدسی (Rad.)
۲/۵۸۵۲	۳/۰۹۴	۰/۰۴۸	۱۴	۰/۰۱	۲/۷۴۲	۰/۴
۳/۴۱۷۱	۲/۵۷	۰/۵۷۱	۱۱	۰/۰۱	۲/۱۴۲	۱

مسئله برای دو حدس از مثال قبلی حل شده است. جدول (۴)، نتایج حاصله را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پاسخهای بهینه ربات ۲ نسبت به ربات ۱ کاملاً قرینه هستند. همچنین مقدار اندیس بهینه، دو برابر مقدار مسئله قبلی به دست آمده است. این نتایج مورد انتظار بودند.

از آنجا که معادلات سینماتیک مستقیم هر یک از بازوها به طور مستقل از سایر مجموعه محاسبه می‌شود، بنابراین اگر اندیس تعریف شده برای مسئله جداپذیر باشد و بتوان آن را به صورت مجموع اندیسهای مستقل برای هر ربات نوشت:

$$f_0 = f_0 + 2f_0 + \dots \quad (25)$$

آن‌گاه می‌توان یک مسئله بهینه سازی با نامعینی مرتبه بالا را به مجموع چند مسئله بهینه سازی با نامعینی مرتبه پایینتر تبدیل کرد و سرعت حل را بالا برد.

شکل (۵) حل مسئله فوق را برای یک مسیر نامتقارن و پیچیده‌تر نشان می‌دهد. معادلات مسیر مرکز جرم میله به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.4 + \frac{1}{5}[1 - \cos(\pi t)] \\ y(t) &= \frac{1}{5}[1 - \cos(\pi t)] \\ \theta(t) &= -\frac{\pi}{4}[1 - \cos(\pi t)] \\ t &\in [0,1] \end{aligned} \quad (26)$$

جسم متصل به پنجه‌ها، میله‌ای به طول ۲۰ سانتیمتر فرض شده است که در ابتدای مسیر خود روی میز کار بوده و مرکز جرم آن در مختصات (۰، ۰/۵) نسبت به چارچوب مرجع قرار گرفته و هر دو پنجه روی خط میانی جسم به آن لولا شده‌اند. فاصله پایه‌های دو ربات ۱ متر در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر طول بازوها در جدول (۳) آمده است.

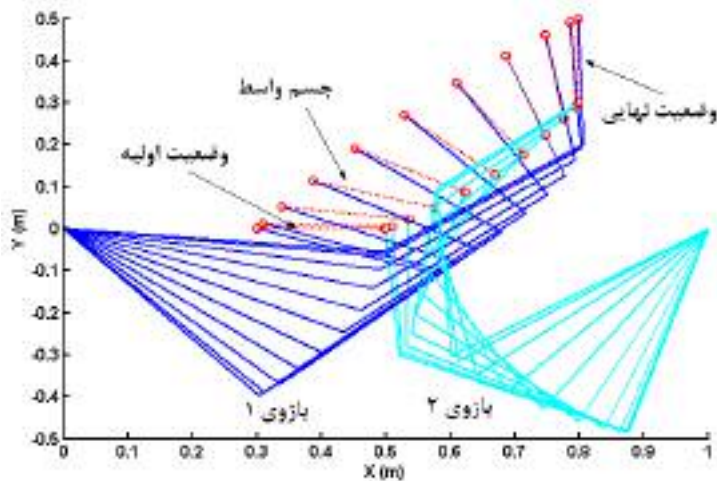
به منظور مقایسه نتایج با مسئله نمونه اول، مسیر مرکز جرم میله به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.5 \\ y(t) &= \frac{1}{4}[1 - \cos(\pi t)] \\ \theta(t) &= 0 \\ t &\in [0,1] \end{aligned} \quad (23)$$

به عبارت دیگر جسم مذکور از حالت سکون از سطح میز کار بلند شده و به طور موازی با آن، به موقعیت سکون جدید می‌رسد.

متغیرهای  $q_{1f} = q_1(t_f)$  و  $q_{4f} = q_4(t_f)$  را به عنوان مولفه‌های  $s$  در نظر می‌گیریم. مسیر تعریف شده برای جسم نسبت به ربات ۱ و ۲ دارای تقارن است. با انتخاب شرایط حدسی متقارن:

$$\begin{cases} q_{4f} = \pi - q_{1f} \\ q_{5f} = -q_{2f} \\ q_{6f} = -q_{3f} \end{cases} \quad (24)$$



شکل ۵ - شماتیک مسیر حرکت رباتهای همکار در فضای کار برای مسیر معادله (۲۲)

روش شلیک، مسئله شرط مرزی دوطرفه حل شد و نتایج برای یک مجموعه ربات همکار صفحه‌ای ارائه شدند. نتایج تایید می‌کند که در صورت جداپذیری اندیس، می‌توان مسئله طراحی مسیر مجموعه همکار را به طور مجزا حل کرد.

مقادیر بهینه برای شکل (۵) عبارت است از:

$$q_{1f} = -1.107 \text{ (Rad)}$$

$$q_{4f} = -2.491 \text{ (Rad)}$$

$$P = 4.2493 \text{ (Rad}^2/\text{sec)}$$

## ۵- نتیجه گیری

رباتهای همکار زنجیره‌های بسته سینماتیکی ایجاد می‌کنند که معمولاً از نظر سینماتیکی و دینامیکی دارای افزودگی درجات آزادی هستند. استفاده از نظریه کنترل بهینه برای حل مسئله سینماتیک معکوس رباتهای همکار، توأم با بهینه کردن یک اندیس سینماتیکی مورد بررسی قرار گرفت. با به کارگیری

## قدردانی

نویسندگان این مقاله وظیفه خود می‌دانند از پشتیبانی مالی که قطب علوم و تکنولوژی زیر دریا در اختیار این تحقیق قرار داده است قدردانی کنند.

## واژه نامه

- |                          |  |  |
|--------------------------|--|--|
| 1. Pontryagin            | 7. weak inverse                                | 12. fixed time, free end state problem       |
| 2. conservative          | 8. orthonormal complement of null space (OCNS) | 13. two point boundary value problem (TPBVP) |
| 3. spline                | 9. null space (NS)                             | 14. shooting method                          |
| 4. calculus of variation | 10. adjoint                                    | 15. elbow up                                 |
| 5. manipulability        | 11. Hamiltonian                                | 16. elbow down                               |
| 6. compliance            |  |  |

## مراجع

- Liegeois, A., "Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Multi-Body Mechanisms," *IEEE Trans. Sys., Man, Cybern*, Vol. 7, No. 12, pp. 868-871, Dec., 1977.
- Whitney, D. E., "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses," *IEEE Trans.*, *Man Machine Sys.*, Vol. MMS-10, No. 2, pp. 47-53, June, 1969.
- Klein, C. A., and Huang, C. H., "Review of Pseudo Inverse Control for Use with Kinematically Redundant Manipulators," *IEEE Trans. Sys., Man, Cybern*, Vol. 13, No. 3, pp. 245-250, 1983.

4. Klein, C. A., and Kee, K. B., "The Nature of Drift in Pseudo Inverse Control of Kinematically Redundant Manipulators," *IEEE Trans., Robotics Automat.*, Vol. 5, No. 2, pp. 231-234, April, 1989.
5. Yoshikawa, T., "Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy," *Robotics Research, The First Int. Symposium*, M. Brady and R. Paul, Eds., pp. 735-747, The MIT Press, Mass., 1984
6. Maciejewski, A. A., and Klein, C. A., "Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments," *Int. J. Robotics Res.*, Vol. 4, No. 3, pp. 109-117, 1985.
7. Nakano, E., and Ozaki, S., "Cooperative Control of a Pair of Anthropomorphic Manipulators - MELARM," *Proc. 4th Int. Symp. Industrial Robots*, pp. 250-260, Tokyo, 1974.
8. Ushiyama, M., Shimizu, K., and Hakomori, K., "Performance Evaluation of Manipulators Using the Jacobian and its Application to Trajectory Planning," *In Robotics Research 2*, Eds. H. Hanafusa and H. Inoue, pp. 447-454. Cambridge, MA: MIT Press, 1985.
9. Chung, C., Desa, S., and deSilvia, C., "Base Reaction Optimization of Redundant Manipulators for Space Application," Technical Report CMU-RI-TR-88-17, The Rob. Institute, Carnegie Mellon University, Pgh, PA 15213, September 1988.
10. Nagurka, M. L., and Yen, V., "Optimal Design of Robotic Manipulator Trajectories," Technical Report CMU-RI-TR-87-12, The Rob. Institute, Carnegie Mellon University, Pgh, PA 15213, April 1987.
11. Qiu, H., and Ozaki, H., "Expression and Optimization of Joint Trajectory of Manipulator Using Uniform B-Spline," *IEEE Int. Conf. on Sys., Man, Cybern.*, Vol. 2, pp. 1267-1272, October, 1995.
12. Chang, P. H., "A Closed Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy," *IEEE J. Robotics Automat.*, Vol. 3, No. 5, pp. 393-403, Oct., 1987.
13. Hemmerle, J. S., and Prinz, F. B., "Optimal Path Placement for Kinematically Redundant Manipulators," *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1234-1244, April, 1991.
14. Agrawal, O. P., and Xu, Y., "On The Global Optimum Path Planning for Redundant Space Manipulator," *IEEE Trans. on Sys., Man, Cybern.*, Vol. 24, No. 9, pp. 1306-1316, September, 1994.
15. Gotlih, K., "The Use and Comparison of A Special Global Optimal Control Algorithm with A Local Optimal Control Solution for Redundant Mechanisms," *Proc. IEEE Int. Symp. on Industrial Electronics*, Vol. 2, pp. 872-876, 1999.
16. Yoshikawa, T., "Manipulability and Redundancy Control of Robotic Mechanism," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation.*, pp. 1004-1009, 1985.
17. Sung, Y. W., Cho, D. K., Chung, M. J., and Ko, K. I., "A Constraints-Based Method of the Inverse Kinematics for Redundant Manipulators," *Proc. IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 531-538, Munich, Sept., 1994.
18. Tagawa, K., Haneda, H., Shiraki, K., and Takami, H., "Optimal Resolution of Kinematical Redundancy for Endpoint Compliance," *Proc. IEEE Int. Symp. Industrial Electronics*, Vol. 3, pp. 1730-1735, 2001.
19. Nakamura, Y., *Advanced Robotics Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
20. Kirk, D. E., *Optimal Control Theory*, Prentice Hall, 1970.

## پیوست محاسبه قانون کنترل

از آنجا که معادله (۴- الف) بر حسب  $\beta$  خطی است می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f \\ &= c + B\beta \end{aligned} \tag{الف-۱}$$

که:

$$B = (I - J^{\#}J) \tag{الف-۲}$$

برای  $f_0 = \dot{q}^T \dot{q}$  و (الف-۱) از معادله (۱۰- ج) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} &= 2 \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial \beta} \right)^T \dot{q} + \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^T \lambda \\ &= 2B^T (c + B\beta) + B^T \lambda \\ &= 0 \end{aligned} \tag{الف-۳}$$

با حل معادله اخیر بر حسب  $\beta$ :

$$\beta = -(B^T B)^{\#} B^T [c + \frac{1}{2} \lambda] \quad (\text{الف-۴})$$

از تعریف ماتریس B و شبه معکوس یک ماتریس می توان خواص زیر را تحقیق کرد:

$$\text{i) } BB = B$$

$$\text{ii) } B^T = B$$

$$\text{iii) } B^{\#} = B$$

$$\text{iv) } Bc = 0$$

(الف-۵)

با جای گذاری (الف-۵) در (الف-۴) قانون کنترلی به شکل نهایی زیر ساده می شود.

$$\beta = -\frac{1}{2} (I - J^{\#} J) \lambda \quad (\text{الف-۶})$$