ارتعاش آزاد ورق نازک ناهمسان در ضخامت به روش نوار محدود دقیق

محمدرضا سلطانی[۱]، شهاب‌الدین حاتمی[۱*] و مجتبی ازهری[۲]

۱. دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج

۲.دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۶/۱۸– دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۶/۲۰)

چکیده – در این مقاله، روش نوار محدود دقیق براي حل ارتعاش آزاد ورق‌هاي مستطيلي نازک ناهمسان در ضخامت تحت نيروهاي درون‌صفحه توسعه داده مي‌شود. بدين منظور در ابتدا به‌جاي استفاده از تار مياني، از تار ديگري براي بسط معادلات ديفرانسيل حاکم بر ورق نازک مبتني بر نظريه کلاسيک ورق استفاده مي‌شود؛ به گونه‌اي که معادلات درون‌صفحه و برون‌صفحه از هم مستقل شده و به‌صورت غيردرگير باشند. سپس روش نوار محدود دقيق براي حل معادلات ديفرانسيل غيردرگير در شرايطي که دو لبه موازي ورق مفصلي است، توسعه داده مي‌شود. در اين روش هر ورق چندده‌انه، به تعداد اندکي نوار محدود تقسيم مي‌شود. تابع شکل هر نوار محدود، در راستاي عمود بر لبه‌هاي مفصلي، به شکل سينوسي در نظر گرفته شده؛ و تابع شکل در جهت ديگر از حل تحليلي معادله ديفرانسيل حاکم بر ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت استخراج مي‌شود. بدين صورت درايه‌هاي ماتريس سختي دقيق هر نوار محدود، تابعي ضمني از فرکانس‌هاي طبيعي، نيروهاي درون‌صفحه، و مشخصات هندسي و مصالح ورق حاصل مي‌شود. از آنجا که الگوريتم‌هاي استاندارد مقادير ويژه قادر به حل ارتعاش آزاد مسئله نيستند؛ با توسعه‌ي الگوريتمي موثر، فرکانس‌هاي دقيق ارتعاش آزاد ورق از دترمينان ماتريس سختي کل حاصل مي‌شود. نتايج به‌دست آمده از اين روش با ساير نتايج موجود، مقايسه و صحت آن بررسي مي‌شود. در ادامه با ارائه مثال‌هايي، قابليت اين روش در حل مسائل متنوع با تغيير در پارامترهايي همچون شرايط مرزي، تکيه‌گاه‌هاي مياني، نيروهاي درون‌صفحه، نسبت طول به عرض، و توان کسر حجمي بررسي مي‌شود. همان‌گونه که انتظار مي‌رود با افزايش سختي تکيه‌گاه‌ها و افزايش نيروي کششي درون‌صفحه، فرکانس طبيعي ارتعاش آزاد افزايش مي‌يابد. مقادير فرکانس‌هاي طبيعي ارتعاش آزاد ورق‌هاي ناهمسان در ضخامت حاصل از روش نوار محدود دقيق مي‌توانند به‌عنوان مرجعي براي بررسي دقت نتايج حاصله از روش‌هاي عددي ارائه شده توسط ساير محققان به‌کار گرفته شوند. البته نظريه کلاسيک ورق که در اين مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است، براي ورق‌هاي نازک معتبر است؛ لذا با افزايش ضخامت ورق، از دقت نتايج در مقايسه با نظريه‌هاي تغييرشکل برشي کاسته مي‌شود.

واژگان کلیدی: مواد ناهمسان در ضخامت، ارتعاش آزاد، نوار محدود دقيق، نظريه کلاسيک ورق، ورق نازک ناهمسان، نيروهاي درون‌صفحه.

---

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: hatami@yu.ac.ir

Free Vibration of Thin Functionally Graded Plates by Exact Finite Strip Method

M. Soltani[1], S. Hatami[1] and M. Azhari[2]

1. Civil Engineering Department, Yasouj University
2. Dapartment of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: ***In this article, an exact finite strip method is developed for free vibration of rectangular thin functionally graded plates subjected to in-plan forces. First, a reference surface, instead of mid-plane of the plate, is used to extract the equation of motion based on classical plate theory so that there is no coupling between in-plane and out-of-plane equations of functionally graded plates. Then, an exact finite strip method is developed for the uncoupled differential equation of motion by keeping two parallel edges of the plate as simply supported. In the method, the multi-span plate is divided into a small number of strips. The shape function of each strip is sinusoidal in the direction perpendicular to the simple edges; and in the other direction, the shape function is the analytical solution of the differential equation governing free vibration of the functionally graded plate. Thus, the elements of exact stiffness matrix for any finite strip are a function of natural frequencies, in-plane forces, and material and geometry properties of the plate. As the standard eigenvalue algorithms cannot solve the free vibration problem, an efficient algorithm is developed to extract the natural frequencies from determinant of the stiffness matrix.***

Comparison studies are performed to verify the validity of the present results. Also, some examples are presented in an attempt to illustrate the ability of the exact finite strip method to solve various problems with different parameters such as boundary conditions, internal supports, in-plane forces, aspect ratio, and power of volume fraction. As expected, the natural frequency increases when the stiffness of supports and in-plane forces increase. The exact vibration solutions obtained for such plates can serve as important benchmark solutions for checking the accuracy of numerical methods for the analysis of FG plates. But, the classical plate theory used in this study is valid for thin plates; thus in comparison to shear deformation plate theories, the accuracy of results decreases when the plate thickness increases.

Keywords: ***Functionally Graded Material (FGM), Free Vibration, Exact Finite Strip, Classical Plate Theory (CPT), Thin FGM Plate, In-Plane Forces.***

فهرست علائم

"	ماتریس سختی کششی
α	عرض یک نوار ورق در امتداد x
B	ماتریس سختی درگیرکننده
b	بعد ورق در راستای x
D	ماتریس سختی خمشی
D_0	سختی خمشی ورق ایزوتروپیک همگن
A', B', C'	ماتریس‌های سختی نسبت به تار مرجع جدید
E_t	مدول الاستیسیته ماده در سطح بالایی
E_b	مدول الاستیسیته ماده در سطح پایینی
h	ضخامت ورق
I_i	مقادیر اینرسی
k	نیروهای درون‌صفحه بی‌بَعد
L	بعد ورق در راستای y
M	بردار لنگرهای خمشی ورق
N	بردار نیروی درون‌صفحه ورق
p	توان کسر حجمی
T_b	خواص ماده در سطح پایینی
t	زمان
V_c	کسر حجمی
u	جابه‌جایی یک نقطه در راستای محور x
v	جابه‌جایی یک نقطه در راستای محور y
w	جابه‌جایی یک نقطه در راستای عمود بر صفحه ورق
u_0	جابه‌جایی میان‌صفحه در راستای محور x
v_0	جابه‌جایی میان‌صفحه در راستای محور y
w_0	جابه‌جایی میان‌صفحه عمود بر صفحه ورق
Z	محور مختصات در راستای عمود بر صفحه ورق

علائم یونانی

α	نسبت L به b
β	نسبت h به L

Q	ماتریس خواص سختی مصالح	ρ	چگالی
S_n	ماتریس سختی نوار محدود	ρ_b	چگالی ماده در سطح پایینی
$T(z)$	یکی از خواص ماده مانند چگالی، الاستیسیته یا ضریب پواسون	ρ_t	چگالی ماده در سطح بالایی
T_t	خواص ماده در سطح بالایی	ω	فرکانس ارتعاش آزاد ورق
γ	کرنش برشی	λ	مقادیر ویژه ارتعاش آزاد
ϑ	ضریب پواسون	Ω	فرکانس بی‌بعد شده ارتعاش ورق
$\varepsilon^{(0)}$	بردار کرنش	$\varepsilon^{(1)}$	بردار انحنا
		σ	بردار تنش

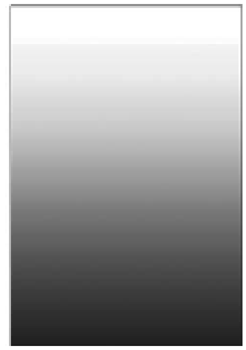
۱- مقدمه

امروزه مواد ناهمسان در ضخامت به عنوان موادی با مقاومت گرمایی بالا و تنش‌های گرمایی پایین شهرت یافته‌اند. کاربرد این مواد در سازه‌هایی که در معرض محیط‌هایی با شوک‌های گرمایی قرار می‌گیرند، مانند سازه‌های فضایی، مرسوم است. گرچه این مواد در ابتدا به منظور استفاده در سازه‌های فضاپیما و رآکتورهای هسته‌ای طراحی شدند؛ ولی در سال‌های اخیر کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به اجزای موتورهای انفجاری، وسایل مغناطیسی، ابزار برش و پوشش محفظه احتراق پیشران موشک نام برد [۱]. این مواد که جزو مواد کامپوزیتی جدید دسته‌بندی می‌شوند؛ اولین بار توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی [۲- ۳] در سال ۱۹۸۴ تولید شد. شکل معمول مواد ناهمسان در ضخامت۱، از سرامیک و فولاد تشکیل شده است. سرامیک توانایی مقاومت در مقابل بارهای گرمایی شدید در محیط‌هایی با درجه گرمای بالا را دارد؛ در طرف مقابل فولاد توانایی کاهش تنش‌های کششی ایجاد شده در مراحل اولیه خنک شدن سرامیک را داراست. به دلیل تغییرات تدریجی و پیوسته خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر، مواد ناهمسان در ضخامت، مشکلات کامپوزیت‌های لایه‌ای از جمله ترک‌ها و حفره‌های ایجاد شده در مرز مشترک لایه‌ها برطرف کرده است و تغییرات تنش در ضخامت بدون شکستگی و به‌صورت هموار اتفاق می‌افتد.

با توجه به کاربرد فراوان مواد ناهمسان در ضخامت، حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن، اهمیت ویژه‌ای پیداکرده ولی حل دقیق این معادلات به دلیل پیچیدگی آن‌ها، تنها در مسائل خاص از نظر شکل هندسی ورق، شرایط مرزی، توزیع نیروهای درون‌صفحه وارده و همسانی ماده موجود است و در اکثر مسائل، الزاماً باید از روش‌های عددی همچون روش‌های ریتز[۲]، گالرکین[۳]، سری‌های ریاضی، اجزای محدود، نوار محدود و تفاضل‌های محدود استفاده کرد. قابل ذکر است که روش‌های عددی، اگر به طور مناسبی مورد استفاده قرار گیرند، می‌توانند با دقت لازم به حل دقیق نزدیک شوند. این دقت بستگی به تعداد جملات حل یا درجات آزادی مسئله دارد. البته در روش‌های عددی، معمولاً تعیین نتایج با دقت زیاد، نیازمند حل یک دستگاه معادلات خطی بزرگ است. در میان حالات مختلف ورق از نظر شکل هندسی، حل دقیق ممکن است برای ورق مستطیلی و دایروی یافت شود که معادلات حاکم بر رفتار آن‌ها به‌ترتیب در دستگاه متعامد و قطبی قابل ارائه است. در همین راستا، محققان به دنبال راه‌حل‌های ساده‌سازی معادلات دیفرانسیل‌اند تا از پیچیدگی‌های موجود در حد امکان کاسته شود. از جمله پیچیدگی‌های موجود در حل دقیق مسائل ورق، می‌توان به شرایط مرزی پیچیده، بارگذاری‌های مختلف و درگیری تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه اشاره‌کرد. برای

مثـال، حـذف درگیـری تغییرمکـان‌هـای درون‌صـفحه و برون‌صفحه رابطه‌ای مستقیم بـا کـاهش هزینـه‌هـا و افـزایش سـرعت محاسـبات دارد و عـلاوه بـر آن، امکـان حـل دقیـق معادلات دیفرانسیل را به‌صورت چشم‌گیری افزایش می‌دهد.

یکی از روش‌های حل دقیق، الاستیسیته سه بعـدی اسـت که در عین رسیدن به حل دقیق، در اندکی از مـسائل حـل آن امکانپـذیر اسـت. لـی یـو چونـگ و همکـارش [۴]، پاسـخ دینامیکی ورق تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده را بـا اسـتفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی توسعه دادنـد. سـپس سـرینیواز و همکاران [۵] با استفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی خطی به تحلیـل ارتعـاش آزاد ورق‌هـای مـستطیلی ضـخیم همگـن و لایه‌ای تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند. ایـشان [۶] بـا استفاده از همین نظریه، خمش، ارتعاش و کمـانش ورق‌هـای ضخیم ارتوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی ساده را مورد مطالعـه قرار دادند. لوینسون [۷] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی ساده را با استفاده از نظریه الاستیـسیته سـه بَعـدی برای ورقی با ضخامت متغیر تحلیل کرد. ویتریک [۸] با نظریه الاستیـسیته سـه بعـدی، کمـانش و ارتعـاش آزاد تعـدادی از ورق‌ها را به روش دقیق حـل کـرد. نـور و همکـاران [۹] بـه بررسـی تـنش و ارتعـاش آزاد ورق‌هـای کامپوزیـت لایـه‌ای نامتقارن با لایـه‌هـای زاویـه‌دار ۴ و متعامـد ۵ از روش دقیـق الاستیسسته سه بعدی پرداختند. با رشد روز افزون تکنولـوژی و پیچیده‌تر شدن خواص مواد مـورد اسـتفاده در ورق، امکـان حل دقیق نظریه الاستیسیته آن‌ها نیز به همـان نـسبت کـاهش یافت. در این راستا دانشمندان با استفاده از نظریه‌های دوبعدی از جمله نظریـه کلاسـیک ورق، نظریـه برشـی مرتبـه اول و نظریه برشی مرتبه بالا، به حل دقیق ارتعاش آزاد ورق‌ها تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند. لین و کینگ [۱۰] با استفاده از نظریه کلاسـیک ورق بـه بررسـی ارتعـاش آزاد ورق‌هـای نامتقارن لایه‌ای پرداختند و به روش دقیـق فرکـانس ارتعـاش آزاد ورق‌های نامتقارن لایه‌ای زاویه‌دار و متعامـد را بـه‌دسـت آورنـد. گـورمن [۱۱]، تحلیـل دقیـق ارتعـاش آزاد صـفحات مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مختلط، از جملـه سـاده و گیـردار را ارائه کـرد. ردی و فـان [۱۲]، پایـداری و ارتعـاش ورق‌هـای ایزوتروپیک، ارتوتروپیک و ورق‌های لایه‌ای را بـا اسـتفاده از نظریه برشی مرتبه بالا به روش دقیق تحلیل کردنـد. اسـکیوا [۱۳] بـا نظریـه الاستیـسیته سـه بَعـدی، نظریـه کلاسـیک ورق‌هـای لایـه‌ای (نظریـه کیرشـهف) و نظریـه برشـی تیموشینکو- میندلین به حل دقیق ورق‌هـای ارتوتروپیـک، بـا استفاده از سه ضـریب تـصحیح بـرش پرداخـت؛ و ارتعـاش، خمش و کمانش این ورق‌ها با تکیه‌گاه‌های مفصلی را بررسی کرد. خـدیر [۱۴] ارتعـاش آزاد و کمـانش ورق‌هـای متقـارن لایه‌ای را با استفاده از نظریه کلاسـیک ورق بـه روش دقیـق تحلیـل کـرد. خـدیر [۱۵] در سـال ۱۹۸۹ بـه مقایـسه نظریـه تغییرشکل برشی و نظریه کیرشـهف بـرای محاسـبه خمـش، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های پادتقـارن۶ زاویـه‌دار لایـه‌ای پرداخت. حل دقیق ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم دایـروی بـا تکیه‌گاه‌های سـاده توسـط مکجـی [۱۶] از نظریـه مینـدلین۷ مورد بررسـی قـرار گرفـت. چـن و همکـاران [۱۷] در مـورد تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بـر روی تکیه‌گاه الاستیک میانی، تحقیق کردند و فرکانس ارتعاش ایـن ورق‌هـا را محاسـبه کردنـد. بوسـکولا و همکـارش [۱۸] بـا استفاده از روش ماتریس سختی دینامیکی به بررسی ارتعـاش درون‌صفحه ورق پرداخته و صحت نتایج را با استفاده از نتایج مدل‌سازی عددی به روش اجزای محـدود (توسـط نـرم‌افـزار آباکوس) مقایسه کردند. سیانگ [۱۹] حل دقیـق ارتعـاش آزاد ورق‌های دایروی بر روی تکیه‌گاه‌های هم‌محور حلقوی شکل را ارائـه کـرد. لـی [۲۰] حـل دقیـق ارتعـاش آزاد صـفحات ایزوتروپیک مستطیلی با فرض تغییرات جرم به‌صورت خطـی با تکیه‌گاه‌های فنری انتقالی۸ را ارائه کرد. حاتمی و همکـاران [۲۱] با استفاده از نظریه کلاسیک ورق بـه بررسـی ارتعـاش آزاد ورق‌های لایه‌ای در حال حرکت با استفاده از نوار محدود دقیق و اجزای محدود پرداختـه و بـه محاسـبه فرکـانس‌هـای ارتعاش آزاد ورق‌های چنددهانه بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک



شکل ۱- مواد ناهمسان در ضخامت [۳۵]

پرداختند. سپس ایشان [۲۲] روش نوار محدود دقیق را برای ورق‌های ویسکوالاستیک دارای حرکت محوری توسعه دادند. سیانگ و همکارش در سال ۲۰۰۹ به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های نازک مستطیلی ارتوتروپیک در شرایط تکیه‌گاهی مختلف به روش دقیق پرداختند. آنها به روش دقیق ارتعاش آزاد درون‌صفحه صفحات مستطیلی را نیز حساب کردند؛ سپس حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات ارتوتروپیک مستطیلی با استفاده از نظریه میندلین را توسعه‌دادند [۲۳].

پیچیدگی مواد ناهمسان در ضخامت، یکی از مشکلات تحلیل دقیق فرکانس ارتعاش آزاد این ورق‌هاست و به دلیل جدید بودن این مواد، مطالعات انجام شده برای تحلیل دقیق آنها محدود است. از پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، محاسبه فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌های نسبتا ضخیم دایروی و حلقوی ساخته شده از مواد ناهمسان در ضخامت توسط حسینی هاشمی و همکاران است. ایشان با استفاده از نظریه‌های برشی مرتبه اول [۲۴] و مرتبه سوم [۲۵] نسبت به حل دقیق اقدام کردند؛ سپس ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیل ناهمسان در ضخامت را با استفاده از نظریه برشی میندلین- ریزنر [۲٦] و نظریه برشی مرتبه سوم ردی محاسبه کردند [۲۷]. در این مقاله، با توسعه‌ی روش نوار محدود دقیق برای مواد ناهمسان در ضخامت، بر اساس نظریه کلاسیک ورق، فرکانس‌های ارتعاش آزاد برون‌صفحه ورق مستطیلی نازک ناهمسان در ضخامت محاسبه می‌شود. برای کاستن از پیچیدگی معادلات دیفرانسیل حاکم، با استفاده از تعریف تار جدید به جای تار میانی ورق، درگیری تغییرمکان‌های درون‌صفحه با برون‌صفحه ورق، حذف می‌شود. نتایج تحلیل‌های ارائه شده در این مقاله، می‌تواند به عنوان مبنایی برای تعیین صحت و دقت نتایج مطالعات عددی قرار گیرد.

۲- مواد ناهمسان در ضخامت

مواد با ساختار ناهمسان در ضخامت که به اختصار FGM نامیده می‌شوند، مواد مرکب پیشرفته‌ای هستند که به منظور تحمل گرادیان گرمایی شدید در ضخامت کم به‌کار می‌روند، شکل (۱). این مواد که اکثراً از ترکیب سرامیک و فولاد ساخته می‌شوند، برای ارتقای مواد مرکب طراحی شده‌اند. مواد ناهمسان در ضخامت ساختار متالوژیکی نایکنواختی دارند. این مواد در دسته‌بندی مواد ناهمگن قرار می‌گیرند؛ لذا خواص فیزیکی آن‌ها مانند مدول الاستیسیته و یا ضریب هدایت گرمایی متغیر است. با این حال ساختار این مواد به‌گونه‌ای است که فرض ایزوتروپیک بودن آن‌ها در اکثر موارد معتبر است.

به طور کلی برای تعریف توابع مواد ناهمسان در ضخامت، دو رویکرد متفاوت برای مدل کردن تغییرات خواص در این مواد وجود دارد:

۱- فرض تابعی برای تغییر کسر حجمی[۹] ماده

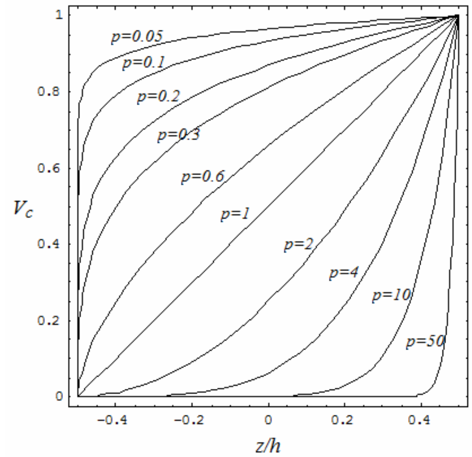
۲- نگرش میکرومکانیکی در مطالعه یک محیط ناهمگن

تأثیر واقعیت مسئله و سادگی آن، دو ویژگی مهم برای انتخاب مدل پیشنهادی است؛ مدلی که در ادامه به توضیح آن پرداخته می‌شود، توجه بیشتری را از سوی مجامع علمی به خود معطوف کرده است. این مدل، در معادلات (۱) ارائه می‌شود:

$$T(z) = (T_t - T_b)V_c + T_b \qquad (۱\text{-الف})$$

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, -(h/2) \le z \le +(h/2) \qquad (۱\text{-ب})$$

در معادله فوق، $T(z)$ یک مشخصه ماده مانند مدول الاستیسیته E و یا چگالی ρ است؛ T_t و T_b، به‌ترتیب خواص



شکل ۲- تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق برای مقادیر مختلف p، طبق معادله (۱-ب) $p=50$

ماده در وجوه بالایی و پایینی ورق هستند؛ و h ضخامت کل ورق است؛ V_c، کسر حجمی ماده سازنده ورق بوده، که به‌صورت یک تابع توانی، تغییرات خواص مصالح در ضخامت را بیان می‌کند. توزیع توانی نشان داده شده در معادله (۱)، معرف ترکیب ساده‌ای از دو ماده است که کارایی مفید و مورد نیاز را ایجاد می‌کند؛ p ، توان کسر حجمی، چگونگی توزیع ماده در ضخامت را نشان می‌دهد. مثلاً چنانچه این عدد برابر با یک باشد، تغییرات خطی است؛ و چنانچه صفر باشد، ماده‌ای همگن با مشخصات وجه فوقانی ورق وجود خواهد داشت. با افزایش p ، مقدار ماده تشکیل دهنده وجه پایینی افزایش می‌یابد. شکل (۲) تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق را، برای مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.

مواد ناهمسان در ضخامت به طور عمده در صنایع هوا فضا و نیز در سازه‌هایی که تحت اثر تغییرات شدید درجه دما و شوک‌های گرمایی‌اند، مانند ابزارهای ترموالکتریکی به‌کار رفته در صنعت تبدیل انرژی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. گرچه این مواد در ابتدا به منظور استفاده در سازه‌های فضاپیما و رآکتورهای هسته‌ای طراحی شدند؛ ولی در سال‌های اخیر کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به اتصال فلز به سرامیک، پیوند زدن اعضا به انسان، اجزای موتورهای انفجاری، وسایل مغناطیسی، ابزار برش، وسایل اطفای حریق، مواد مرکب پلیمری با مقاومت بالا، پوشش محفظه احتراق پیشران موشک، آستر محفظه پرتاب راکت، و ساخت مواد پیزوالکتریک و فروالکتریک نام برد[۱].

۳- نظریه کلاسیک ورق

نظریه کلاسیک ورق‌های ناهمسان در ضخامت، شکل تعمیم‌یافته نظریه کلاسیک ورق [۲۸] برای ورق‌های کامپوزیت است. بر اساس فرضیات کیرشهف [۲۹]، میدان جابه‌جایی مطابق با شکل (۳)، به‌صورت معادله (۲) بیان می‌شود:

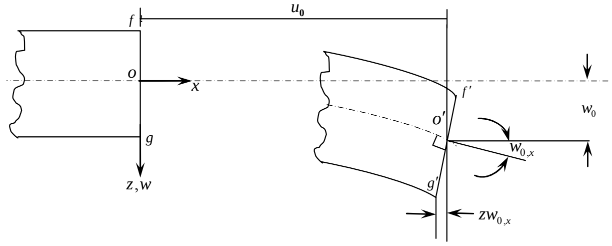
$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن u_0، v_0 و w_0 جابه‌جایی میان‌صفحه ورق در $(z=0)$، به‌ترتیب در راستای x، y و z دستگاه مختصات‌اند. در ادامه، به‌دلیل برابری تغییر مکان راستای z میان‌صفحه با سایر صفحات موازی آن، به‌جای w_0، از w استفاده می‌شود. جابه‌جایی میان‌صفحه ورق در $(z=0)$ است. کرنش‌های هر نقطه از ورق، بر حسب تغییرمکان‌های میان‌صفحه طبق معادلات (۳) عبارت‌اند از:

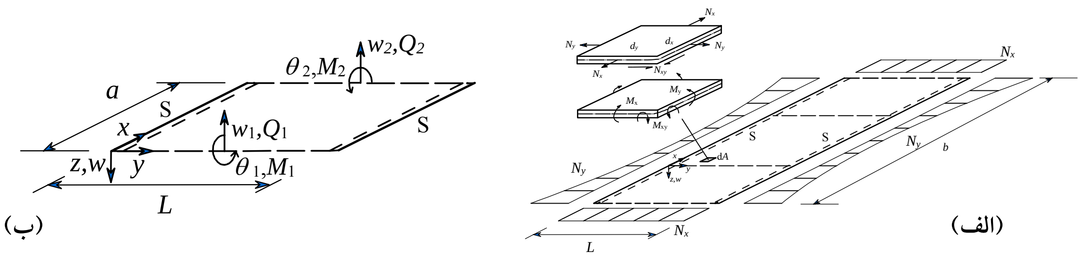
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 0, \gamma_{yz} = 0, \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \qquad (۳)$$

و روابط کرنش–جابه‌جایی به شکل ماتریسی زیر، معادله (۴) قابل بازنویسی هستند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \qquad (۴)$$



شکل۳- نحوه تغییرشکل مقطع ورق بر اساس نظریه کلاسیک ورق [۲۹]



شکل ۴- الف) ورق تحت بارهای درون‌صفحه که به سه نوار محدود تقسیم شده است و نمایش نیروها بر روی یک جزء بینهایت کوچک از ورق ب) یک نوار محدود با تغییرمکان‌ها و نیروهای خطوط گرهی آن

با استفاده از معادله (۴) و قانون هوک تعمیم‌یافته، بردار تنش از معادله (۵) به‌دست می‌آید:

$$\sigma = Q\varepsilon = Q\varepsilon^{(0)} + zQ\varepsilon^{(1)} \qquad (۵)$$

در معادله (۵)، $\varepsilon^{(0)}$، ماتریس ستونی کرنش تار میانی و $\varepsilon^{(1)}$، مشتق دوم تغییرمکان، ماتریس ستونی انحناست؛ و Q ماتریس خواص سختی مصالح مورد استفاده در ورق بوده که در مواد ناهمسان در ضخامت تابعی از z است. درایه‌های غیرصفر ماتریس Q برای مواد ایزوتروپیک از معادله (۶) حاصل می‌شوند:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{\left(1-\vartheta(z)^2\right)}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \vartheta(z)Q_{11}, \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2\left(1+\vartheta(z)\right)} \qquad (۶)$$

که E و ϑ به‌ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون و تابعی از z هستند.

با در نظر گرفتن یک جزء بی‌نهایت کوچک از ورق مطابق شکل (۴)، بردار نیروها N و بردار لنگرهای خمشی ورق M دارای درایه‌هایی طبق معادله (۷) بوده که به‌ترتیب بیانگر نیرو و لنگر در واحد عرض ورق هستند :

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۷)$$

در ادامه بردارهای نیرو و لنگر بر حسب بردار کرنش به‌دست می‌آیند. در مورد بردار نیرو با بهره‌گیری از معادله (۵) و با فرض علامت مثبت برای نیروی درون‌صفحه کششی، معادله (۸) حاصل می‌شود:

$$N = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma dz = \int_{-h/2}^{+h/2} Q\varepsilon^{(0)} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} zQ\varepsilon^{(1)} dz \qquad (۸)$$

با توجه به اینکه انحنا $\varepsilon^{(1)}$ و کرنش $\varepsilon^{(0)}$ تار میانی نسبت به محور z ثابت هستند معادله (۸) را می‌توان به‌شکل (۹) خلاصه کرد:

$$N = A\varepsilon^{(0)} + B\varepsilon^{(1)} \qquad (۹)$$

که به A، ماتریس سختی کششی[10] و B، ماتریس سختی درگیرکننده گفته می‌شود. به‌طور مشابه، بردار لنگرهای خمشی ورق برحسب بردارهای انحنا و کرنش تار میانی به‌صورت معادله (۱۰) توسعه داده می‌شود:

$$M=\int_{-h/2}^{+h/2} z\sigma dz=\int_{-h/2}^{+h/2} Q\varepsilon^{(0)}zdz+\int_{-h/2}^{+h/2} Q\varepsilon^{(1)}z^2dz \qquad (۱۰)$$

و با خلاصه نویسی آن، معادله (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$M=B\varepsilon^{(0)}+D\varepsilon^{(1)} \qquad (۱۱)$$

که در معادله بالا به D، ماتریس سختی خمشی می‌گویند. معادلات نیرو و لنگر (۹) و (۱۱) به شکل ماتریسی معادله (۱۲) بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad (۱۲)$$

که می‌توان A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} را به شکل کلی معادله (۱۳) نوشت:

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}\left(1,z,z^2\right)dz \qquad (۱۳)$$

همان‌طور که از معادله (۱۲) قابل مشاهده است، درایه‌های ماتریس A_{ij}، نیروهای درون‌صفحه (N)را به کرنش‌های تار میانی $\left(\varepsilon^{(0)}\right)$ و درایه‌های ماتریس D_{ij}، خمش‌ها (M) را به انحنا $\left(\varepsilon^{(1)}\right)$ مربوط می‌سازد؛ ولی درایه‌های ماتریس B، رابط بین نیروهای درون‌صفحه و انحنا و در طرف دیگر خمش‌ها با کرنش‌های تار میانی‌اند. در حالت خاصی که عناصر ماتریس B صفر شود، درگیر بین رفتار درون‌صفحه و برون‌صفحه حذف شده؛ و فقط نیرو با کرنش، و در سمت دیگر، خمش با انحنا مربوط می‌شوند.

برای توسعه‌ی نظریه کلاسیک ورق برای مواد ناهمسان در ضخامت، به نوشتن روابط تعادل در راستای محورهای مختصات پرداخته می‌شود؛ و با ساده‌سازی آن‌ها، معادلات دیفرانسیل تعادل دینامیکی ورق به‌شکل معادلات (۱۴) بیان می‌شوند [۳۰]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (۱۴\text{–الف})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \qquad (۱۴\text{–ب})$$

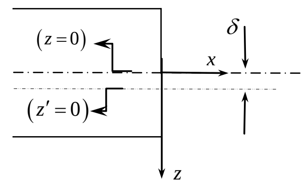
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\&=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \qquad (۱۴\text{–ج})$$

که در معادلات (۱۴)، I_i، مقادیر اینرسی‌اند که در معادله (۱۵) تعریف می‌شوند:

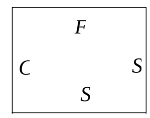
$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix}=\int_{-h/2}^{+h/2}\rho(z)\begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix}dz \qquad (۱۵)$$

معادلات (۱۴) شامل نُه پارامتر مجهول M_x، M_y، M_{xy}، N_x، N_y، N_{xy}، u_0، v_0 و w است که البته مجهولات نیرویی به مجهولات تغییرمکانی وابسته‌اند. برای حل معادلات دیفرانسیل ورق، بدیهی است که علاوه بر سه معادله فوق، معادلات (۱۴)، شش رابطه مستقل جدید با همین پارامترها لازم است. بدین منظور از معادلات اساسی که توسط معادله (۱۲) بیان شده‌اند استفاده می‌شود و با بسط آن به‌صورت معادله (۱۶)، دستگاهی با شش معادله حاصل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (۱۶)$$



شکل ۵- صفحه جدید (z') که حول آن عناصر ماتریس درگیرکننده برابر صفر است $(B'_{ij}=0)$



شکل ۶- ورقی با شرایط تکیه‌گاهی CSSF که معرف لبه‌های گیردار (C)، ساده (s)، ساده (s) و آزاد (F) می‌باشد

با استفاده از معادله (۱۶) و جایگذاری در معادلات (۱۴)، به‌دست آوردن سه معادله دیفرانسیل برحسب تغییرمکان‌های درون‌صفحه v_0 و u_0، و تغییرمکان‌های برون‌صفحه، w، امکانپذیر شده؛ که برای محاسبه فرکانس ارتعاش آزاد ورق، حل همزمان این معادلات دیفرانسیل مورد نیاز است. اما درگیری تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه که ناشی از حضور ماتریس B است، باعث پیچیدگی حل معادلات دیفرانسیل می‌شود؛ که به‌نوبه خود حل دقیق ارتعاش آزاد ورق را دشوار می‌کند. اما ماهیت رفتار ورق ناهمسان در ضخامت به‌گونه‌ای است که امکان حذف این درگیری را فراهم می‌کند. در ادامه به بررسی روشی برای غیردرگیرکردن تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه پرداخته شده است.

۴- غیردرگیرکردن تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه

در صفحات کامپوزیتی که تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه به‌صورت درگیر عمل می‌کنند؛ معادلات حاکم برحسب سه پارامتر مستقل تغییرمکانی u_0، v_0 و w قابل حل است که در معادله (۱۴) قابل مشاهده است. در ارتعاش خارج از صفحه ورق‌های ناهمسان در ضخامت، این بدان معنی است که به جای حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، تنها به حل یک معادله دیفرانسیل برحسب تغییرمکان برون‌صفحه نیاز است. این مسئله باعث کاهش چشم‌گیر محاسبات در روند حل معادلات می‌شود. با مشخص شدن اهمیت موضوع به بررسی روشی، برای حذف درگیری موجود در ورق‌های ناهمسان پرداخته می‌شود. همان‌طور که گفته شد، درایه‌های ماتریس سختی درگیرکننده، B، رابط بین کرنش‌های درون‌صفحه و انحنا هستند و در صورت صفر بودن این ماتریس، درگیری بین آن‌ها حذف می‌شود؛ پس با علم به این موضوع، صفر کردن این ماتریس مدنظر است. آبریت[۳۱]، امکانپذیر بودن حذف عناصر ماتریس درگیرکننده برای مواد ناهمسان در ضخامت را بررسی و تایید کرد. وی به‌جای استفاده از تار میانی $z=0$ به عنوان صفحه مرجع، از تار دیگری به فاصله δ از تار میانی، استفاده کرد. تار جدید با موقعیت $z'=0$، به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که حول آن، درایه‌های ماتریس درگیرکننده برابر صفر شوند [۳۱].

شکل (۵) موقعیت تار جدید را نشان می‌دهد و پارامترهای محاسبه شده حول تار جدید با پرایم نشان داده می‌شوند. برای محاسبه خواص سختی ورق حول هر تار جدید دلخواه $(A'_{ij}, B'_{ij}, D'_{ij})$، معادله تار جدید $(z=z'+\delta)$ در معادله (۱۳) قرار داده می‌شود. در این‌صورت، برای محاسبه A_{ij} طبق معادله (۱۷) داریم:

$$A_{ij}=\int_{-z_b}^{z_t} Q_{ij}dz' = \int_{-z'_b}^{z'_t} Q_{ij}dz' = A'_{ij} \qquad (۱۷)$$

در معادله بالا z'_t و z'_b به‌ترتیب بیان‌کننده فاصله دورترین تار قرار گرفته در بالا و پایین ورق نسبت به تار جدید هستند. همان‌طور که از معادله (۱۷) قابل مشاهده است؛ تفاوتی بین A_{ij} و A'_{ij} وجود ندارد؛ چرا که هر دو، برابر با سطح زیر نمودار Q_{ij} در راستای ضخامت ورق هستند.

به طور مشابه با جایگذاری z' در معادله B_{ij}، معادله (۱۸) حاصل می‌شود:

$$B_{ij}=\int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}\, z\, dz=\int_{-z'_b}^{z'_t} Q_{ij}\times\left(z'+\delta\right)dz'$$
$$=\int_{-z'_b}^{z'_t}\left(Q_{ij}\times z'\right)dz'+\delta\times\int_{-z'_b}^{z'_t} Q_{ij}\, dz'=B'_{ij}+\delta\times A'_{ij} \qquad (۱۸)$$

ودر نتیجه با بهره‌گیری از معادله (۱۷)، B'_{ij} از معادله (۱۹) قابل محاسبه است:

$$B'_{ij}=B_{ij}-\delta A \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن معادله تار جدید در معادله (۱۳) برای D_{ij}، معادله (۲۰) به‌دست می‌آید:

$$D_{ij}=\int_{-z'_b}^{z'_t} Q_{ij}\left(z'+\delta\right)^2 dz'$$
$$=\int_{-z'_b}^{z'_t} Q_{ij}\left(z'^2+\delta^2+2z'\times\delta\right)dz' \qquad (۲۰)$$
$$=D'_{ij}+2\delta\times B'_{ij}+\delta^2\times A'_{ij}$$

که با استفاده از معادلات (۱۷) و (۱۹)، ماتریس سختی خمشی ورق نسبت به هر تار جدید دلخواه به‌شکل معادله (۲۱) ظاهر می‌شود:

$$D'_{ij}=D_{ij}-2\delta B_{ij}+\delta^2 A_{ij} \qquad (۲۱)$$

اما هدف از تعریف تار جدید z' این بود که حول این تار، ماتریس درگیرکننده برابر صفر شود $\left(B'_{ij}=0\right)$. با صفر گذاشتن B'_{ij} در معادله (۱۹)، مقدار فاصله تار جدید تا تار میانی، δ، طبق معادله (۲۲) محاسبه می‌شود:

$$\delta=\frac{B_{ij}}{A_{ij}} \qquad (۲۲)$$

مقدار δ، برای حالتی که ضریب پواسون مقدار ثابتی در ضخامت دارد، وابسته به i و j نیست و برای هر ورق ناهمسان در ضخامت مشخص، مقداری ثابت است که همزمان تمام درایه‌های ماتریس B' را صفر می‌کند. البته حتی اگر ضریب پواسون در ضخامت تغییر کند، مقدار $\delta=B_{11}/A_{11}$، باعث صفر شدن B'_{11} و B'_{22} شده، و B'_{12} و B'_{66} هم مقادیر کوچکی دارند؛ که نتیجتاً می‌توان با تقریب خوبی ماتریس B' را صفر فرض کرد. با قرار دادن δ از معادله (۲۲) در معادله (۲۰)؛ و درنظر گرفتن برابری A'_{ij} با A_{ij}، D'_{ij} حول تاری که ماتریس B' را صفر می‌کند، به‌صورت معادله (۲۳) ساده می‌شود:

$$D'_{ij}=D_{ij}-\delta^2 A_{ij}=D_{ij}-\frac{B_{ij}^{\,2}}{A_{ij}} \qquad (۲۳)$$

روشن است که برای به‌دست آوردن درایه‌های ماتریس سختی خمشی ورق نسبت به تار جدید، D'_{ij}، از معادله (۲۳)، به مقادیر سختی ورق نسبت به میان‌تار A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} نیاز است. با جایگذاری مقادیر Q_{ij} از معادله (۶) در معادله (۱۳)، برای مواد ناهمسان در ضخامت ایزوتروپیک با ضریب پواسون ثابت، خواص سختی ورق نسبت به میان‌تار از معادلات (۲۴) به‌دست می‌آیند:

$$A_{11}=A_{22}=\left(A_{12}+2A_{66}\right)$$
$$=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{\left(1-\vartheta^2(z)\right)}dz \qquad (۲۴\text{-الف})$$

$$B_{11}=B_{22}=\left(B_{12}+2B_{66}\right)$$
$$=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{\left(1-\vartheta^2(z)\right)}z\,dz \qquad (۲۴\text{-ب})$$

$$D_{11}=D_{22}=\left(D_{12}+2D_{66}\right)$$
$$=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{\left(1-\vartheta^2(z)\right)}z^2 dz \qquad (۲۴\text{-ج})$$

برای به‌دست آوردن هر یک از مقادیر D'_{ij}، کافی است به‌ازای هر i و j مشخص، مقادیر متناظر از معادلات (۲۴) در معادله (۲۳) قرار گیرد. بعد از محاسبه D'_{11}، D'_{22}، D'_{12} و D'_{66} از این روش چنین نتیجه می‌شود که

$$D'_{11}=D'_{22}=\left(D'_{12}+2D'_{66}\right)=D'_0 \qquad (۲۵)$$

که پارامتر D'_0 برای سادگی در نوشتار استفاده شده است. از معادله (۲۳) همچنین روشن می‌شود که درایه‌های D'_{16} و D'_{26}،صفر هستند؛ چرا که درایه‌های متناظر از ماتریس‌های A و D صفر هستند.

حال با جایگزینی سختی خمشی حول تار جدید، D'_{ij} و صفر قرار دادن B'_{ij} در معادله (۱۶)، مقادیر گشتاورهای خمشی حول تار جدید به‌دست می‌آیند. با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱۴-ج)، معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد برون‌صفحه ورق ناهمسان در ضخامت، به‌صورت یک معادله غیردرگیر، مطابق معادله (۲۶) حاصل می‌شود:

$$D'_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D'_{12}+2D'_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D'_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$
$$N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+ \quad (۲۶)$$
$$I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0$$

با به‌کارگیری معادله (۲۵) برای مواد ناهمسان در ضخامت ایزوتروپیک، و با صرف‌نظر کردن از اینرسی دورانی، معادله (۲۶) به‌شکل معادله (۲۷) ساده می‌شود:

$$D'_o\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D'_o\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2D'_o\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}- \quad (۲۷)$$
$$N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

قابل ذکر است، برای حذف درگیری تغییرمکان‌ها، هیچ‌گونه فرضی در مورد تغییرات مدول الاستیسته $E(z)$ و $\rho(z)$ در نظر گرفته نشده است؛ بنابراین این روش غیردرگیر کردن قابل بسط برای انواع مختلف توابع حجمی است.

۵- حل معادلات ورق ناهمسان در ضخامت به روش نوار محدود دقیق

روش نوار محدود که از لحاظ مبانی مشابه روش اجزای محدود است، برای تحلیل ارتعاش و پایداری اعضای جدار نازک منشوری کاربرد وسیعی دارد. در این روش، عضو جدار نازک به تعدادی نوار محدود تقسیم می‌شود. تغییرشکل هر نوار از ضرب توابع پایه مربوط به راستای طولی نوار در توابع شکل راستای عرضی به‌دست می‌آید؛ و با استفاده از این تابع تغییرشکل تقریبی، ماتریس سختی هر نوار که تغییرمکان‌های خطوط گرهی را به نیروهای خطوط گرهی مرتبط می‌کند، قابل محاسبه است. اما در روش نوار محدود دقیق، تابع تغییرمکان از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار نوار محدود محاسبه می‌شود و لذا ماتریس سختی حاصله ماتریس سختی دقیق نامیده می‌شود؛ چرا که از تغییرمکان دقیق به‌دست آمده است. این روش که توسط مولفان [۲۱] برای ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای توسعه داده شد، در ادامه برای ورق ناهمسان در ضخامت به‌کار گرفته می‌شود. شکل (۴-الف) ورقی با تکیه‌های مفصلی در امتداد x را نشان می دهد که به سه نوار محدود تقسیم شده است. یک نوار محدود با تغییرمکان‌ها و نیروهای خطوط گرهی آن در شکل (۴-ب) ارائه شده است. شرایط مرزی مفصلی در لبه‌های موازی محور x، و تقارن موجود در هندسه و بارگذاری نسبت به خط $y=L/2$، ایجاب می‌کند که تغییرمکان عمود بر صفحه نوار ورق در راستای محور y به‌صورت سینوسی باشد؛ لذا تابع تغییرمکان نوار ورق به‌صورت معادله (۲۸) تعریف می‌شود:

$$w(x,y,t)=W_n(x)\times\left(e^{ik_n y}-e^{-ik_n y}\right)\times e^{i\omega t} \quad (۲۸)$$

در معادله بالا $k_n=n\pi/L$، و اندیس n برای نشان دادن مودهای تغییرشکلی مختلف در راستای y است؛ ω فرکانس ارتعاش آزاد ورق است که به‌صورت اعداد حقیقی است.

برای تغییرمکان عمود بر صفحه ورق در راستای محور x، یعنی $W_n(x)$، تابعی مدنظر است که منطبق بر حل معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد ورق باشد؛ چرا که در این صورت، حل دقیق مسئله حاصل می‌شود. از آن‌جا که پاسخ هر معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه m با ضرایب ثابت، از مجموع m تابع نمایی با ضرایب مختلف به‌دست می‌آید؛ لذا شکل کلی تابع تغییرمکان $W_n(x)$ در معادله (۲۸)، به شکل توابع نمایی انتخاب شده؛ و با توجه به وجود مشتق مرتبه چهارم در معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد، معادله (۲۷)، این تابع طبق معادله (۲۹) از مجموع چهار جمله نمایی حاصل می‌شود:

$$W_n(x)=\sum_{m=1}^{4}A_{mn}e^{r_{mn}x} \quad (۲۹)$$

در معادله بالا، A_{mn}، ضرایب ثابت توابع نمایی بوده و r_{mn} ضرایب توانی این توابع هستند؛ که هر دو به عنوان مجهول مسئله محسوب می‌شوند. برای محاسبه r_{mn}، با جایگذاری تابع تغییرمکان $w(x,y,t)$ در معادله دیفرانسیل ورق، معادله (۲۷)؛ معادله مشخصه مسئله، به‌صورت یک معادله جبری درجه چهار برحسب r_{mn}، طبق معادله (۳۰) به‌دست می‌آید:

$$D'_o r^4_{mn} - \left(N_x + 2D'_o k_n^2\right) r^2_{mn} + D'_o k_n^4 + N_y k_n^2 - I_0 \omega^2 = 0 \qquad (۳۰)$$

با حل معادله جبری فوق، به‌ازای هر مقدار n، چهار مقدار برای r_{mn} (r_{1n} تا r_{4n}) برحسب خصوصیات هندسی، مصالح و نیروهای درون صفحه ورق حاصل می‌شود. اما برای هر نوار محدود از ورق مطابق شکل(۴-ب)، مقادیر A_{mn} در معادله (۲۹) وابسته به شرایط مرزی تغییرمکانی و نیرویی نوار ورق در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ هستند. در ادامه، چگونگی وابستگی تغییرمکان‌ها و نیروهای خطوط گرهی با A_{mn} روشن می‌شود.

مطابق شکل (۴-الف)، ورقی به بَعد L در راستای محور y و بَعد b در راستای محور xها که تحت نیروهای درون‌صفحه یکنواخت و شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در امتداد موازی با محور x قرار گرفته، در نظر گرفته می‌شود؛ و این ورق به تعدادی نوار محدود که با خطوط گرهی از هم جدا می‌شوند تقسیم می‌شود. هر نوار محدود از این ورق مطابق شکل (۴-ب)، دارای دو خط گرهی است که همان لبه‌های نوار در امتداد محور y هستند. در هر خط گرهی دو درجه آزادی تعریف می‌شود که عبارتند از تغییرمکان خارج از صفحه‌ی خط گرهی (w_i) و دوران حول محور y در خط گرهی (θ_i)؛ و اندیس i، مطابق شکل (۴-ب) برای خطوط گره‌ای در دو طرف نوار دارای مقدار یک یا دو است. متناظر با درجات آزادی تغییرمکانی، نیروهای خطوط گرهی تعریف می‌شوند که به‌ترتیب عبارت‌اند از نیروی برشی خط گرهی (Q_i) و گشتاو خمشی آن (M_i). لذا در خط گرهی $x=0$ می‌توان معادلات (۳۱) را برای تغییرمکان‌ها و نیروهای خطوط گرهی ارائه کرد:

$$Q_x = Q_1,\ w = -w_1,\ \ M_x = -M_1, \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_1 \qquad (۳۱)$$

به‌طور مشابه در $x=a$ معادلات (۳۲) ارائه می‌شوند:

$$Q_x = -Q_2,\ w = -w_2,\ M_x = M_2,\ \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_2 \qquad (۳۲)$$

نیروی برشی Q_x و لنگر خمشی M_x براساس معادلات (۳۳)، برحسب تغییرمکان عمود بر صفحه w بیان می‌شوند:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad (۳۳)$$

$$M_x = -D'_o\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (۳۴)$$

M_{xy} در معادله (۳۳) لنگر پیچشی است و از معادله (۳۵) به‌دست می‌آید:

$$M_{xy} = (1-\vartheta) D'_o \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (۳۵)$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۳۴) و (۳۵) و جایگذاری در معادله (۳۳)، معادله (۳۶) به‌شکل زیر توسعه داده می‌شود:

$$Q_x = -D'_o\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \vartheta\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] + N_x\frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (۳۶)$$

حال می‌توان تغییرمکان‌ها و نیروهای خطوط گرهی را به‌ازای هر مود n، در قالب بردار، به‌شکل معادلات (۳۷) و (۳۸) ارائه کرد:

$$\{d_n\} = \{\theta_{1n}, w_{1n}, \theta_{2n}, w_{2n}\}^T \qquad (۳۷)$$

$$\{p_n\} = \{M_{1n}, Q_{1n}, M_{2n}, Q_{2n}\}^T \qquad (۳۸)$$

با جایگذاری تابع تغییرمکانی عمود بر صفحه w از معادله (۲۸) در معادلات (۳۴) و (۳۶) و بهره‌گیری از معادلات (۳۱) و (۳۲)، بردارهای فوق، به‌شکل معادللات (۳۹) و (۴۰) به‌دست می‌آیند:

$$\{d_n\} = \{\bar{d}_n\}\left(e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}\right)e^{i\omega t} \qquad (۳۹)$$

$$\{p_n\} = \{\bar{p}_n\}\left(e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}\right)e^{i\omega t} \qquad (۴۰)$$

که $\{\bar{d}_n\}$ و $\{\bar{p}_n\}$به A_{mn} وابسته بوده و در معادلات (۴۱) و (۴۲) ارائه می‌شوند:

$$\{\bar{d}_n\} = -\sum_{m=1}^{4}\begin{Bmatrix} r_{mn} \\ 1 \\ r_{mn}e^{r_{mn}b} \\ e^{r_{mn}b}\end{Bmatrix} A_{mn} = [X_n]_{4\times4}\{A_n\}_{4\times1} \qquad (۴۱)$$

$$\{\bar{p}_n\} = \sum_{m=1}^{4}\begin{Bmatrix} \left[D'_o r_{mn}^2 - D'_o\vartheta k_n^2\right] \\ \left[D'_o k_n^2 r_{mn} - D'_o r_{mn}^3 + r_{mn}N_x\right] \\ -\left[D'_o r_{mn}^2 - D'_o\vartheta k_n^2\right]e^{r_{mn}b} \\ \left[D'_o r_{mn}^3 - D'_o k_n^2 r_{mn} - r_{mn}N_x\right]e^{r_{mn}b}\end{Bmatrix} A_{mn} \qquad (۴۲)$$

$$\rightarrow \{\bar{p}_n\} = [Y_n]_{4\times4}\{A_n\}_{4\times1}$$

با حذف بردار ضرایب $\{A_n\}$ از معادلات (۴۱) و (۴۲)،

ارتباط بردار نیروهای گرهی با بـردار تغییرمکـان‌هـای گرهـی طبق معادله (۴۳) به‌دست می‌آید:

$$\{\overline{p}_n\}=[S_n]\{\overline{d}_n\} \quad (۴۳)$$

به طـوری کـه $[S_n]$، مـاتریس سـختی دینـامیکی دقیـق نـوار محدود ورق برای مود nام، از معادله (۴۴) حاصل می‌شود:

$$[S_n]=[n_y][X_n]^{-1} \quad (۴۴)$$

$[S_n]$ ماتریس سختی دقیق حـاکم بـر ورق اسـت کـه دارای درایه‌های حقیقی است. درایه‌های این ماتریس توابعی صـحیح از ω، نیروهای درون‌صفحه N_x و N_Y، خواص ماده و ابعـاد نوار ورق هستند. با ترکیب ماتریس سختی هر نـوار، در یـک ماتریس کلی، ماتریس سـختی دقیـق یـک ورق ناهمـسان در ضخامت به‌دست می‌آید. بررسـی ارتعـاش آزاد ورق بـا حـل معادله ویژه (۴۵) و استخراج مقادیر ویژه ω ممکن می‌شود.

$$\mathrm{Det}[S_n(\omega)]=0 \quad (۴۵)$$

۶- نتایج عددی

۶-۱- کلیات

برای استخراج نتایج عددی از نظریه مورد بحث، برنامه‌ای رایانه‌ای تهیه شده، کـه قابلیـت مـدل‌سـازی شـرایط مختلـف ورق‌ها از نظر شرایط مرزی، تکیه‌گاه‌هـای میـانی و نیروهـای درون‌صفحه را در محدوده‌ی نظریـه توسـعه یافتـه، داراسـت. معادله (۴۵) در بردارنده توابع ویژه یـک مـسئله ارتعـاش آزاد اسـت. بـا حـل ایـن معـادلات، مقـادیر ویـژه مـسئله، یعنـی فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق به‌دسـت مـی‌آینـد. در حالـت کلی، این معـادلات توابـع ضـمنی از مقـادیر ویـژه بـا تعـداد جملات زیاد هستند. افزایش تعداد دهانه‌هـای مـورد تحلیـل، موجب افزایش تعداد نوارها ورق و در پی آن پیچیده‌تر شـدن توابع ویژه می‌شود. در برنامه رایانه‌ای، الگوریتمی مـؤثر بـرای استخراج سریع و دقیـق مقـادیر ویـژه از توابـع ویـژه مـسئله طراحی شده است.

در این بخش، مثال‌هایی برای تایید صحت و کارایی روش نوار محدود دقیق در تحلیل ارتعاش ورق‌هـا ارائـه مـی‌شـود.

برای یکسان‌سازی و قابل قیـاس کـردن نتـایج، بیـشتر نتـایج عددی به‌صورت بی‌بعد ارائه مـی‌شـود. در عـین حـال، بـرای اطلاع از مشخصات مصالح این ورق‌ها، ذیلاً مشخصات مـواد نوعی تشکیل دهنده ورق ناهمسان در ضخامت، مرکـب از دو ماده زمینه سرامیک و فلز که به‌ترتیب در سطح بالایی و پایینی ورق قرار گرفته‌اند، ذکر می‌شوند [۲۶]:

سرامیک‌ها (آلومینا و زیرکونیا) با مشخصات

Alumina (Al_2O_3)

$E=380(Gpa), \vartheta=0.3, \rho=3800\left(kg/m^3\right)$

Zirconia (ZrO_2)

$E=200(Gpa), \vartheta=0.3, \rho=5700\left(kg/m^3\right)$

و فلزها (آلومینیوم و فولاد) با مشخصات

Aluminum (Al)

$E=70(Gpa), \vartheta=0.3, \rho=2702\left(kg/m^3\right)$

Steel (St)

$E=200(Gpa), \vartheta=0.3, \rho=7800\left(kg/m^3\right)$

متغیرهای بدون بَعد مورد اسـتفاده در ایـن بخـش، در معادلـه (۴۶) ارائه می‌شوند:

$$\alpha=\frac{L}{b},\ \beta=\frac{h}{L},\quad \Omega=\omega h\sqrt{\frac{\rho_t}{E_t}},\quad \left(k_x,k_y\right)=\left(N_x,N_y\right)\frac{b^2}{\pi^2 D_0} \quad (۴۶)$$

L بعـد ورق در جهـت محـور y ، b بعـد ورق در جهـت محور x (تکیه‌گاه مفـصلی) و h ضـخامت ورق اسـت. Ω، مقدار بـی‌بعـد شـده فرکـانس ارتعـاش آزاد ورق، ω، اسـت. اندیس t برای مواد قرار گرفته در سطح بالایی ورق است، که طبق قرارداد، مواد سرامیکی در این سطح قرار می‌گیرند. k_x و k_y نیز مقادیر بی‌بعد نیروهای درون‌صفحه هستند که علامت مثبت برای آن‌ها به‌معنـای نیـروی کشـشی، و علامـت منفـی بیـانگر نیـروی فـشاری اسـت. D_0 سـختی خمـشی ورق ایزوتروپیک همگن معادل از جنس ماده سطح بالایی است، که از معادله (۴۷) حاصل می‌شود:

$$D_0 = \frac{E_t h^3}{12\left(1-\vartheta^2\right)} \tag{۴۷}$$

عدد طبیعی n در نتایج، بیانگر تعداد نیم‌موج‌های سینوسی در راستای محور y به هنگام ارتعاش است. برای نمایش شرایط تکیه‌گاهی در لبه‌های پیرامونی ورق، از چهار حرف بزرگ لاتین در چهار لبه ورق استفاده می‌شود. طبق قرارداد، حرف اول مربوط به لبه سمت چپ بوده و از این لبه به صورت پاد ساعتگرد نام‌گذاری انجام می‌شود. به عنوان مثال؛ علامت CSGF معرف ورقی با تکیه‌گاه‌های گیردار (C)، ساده (S)، ساده (S) و آزاد (F) است شکل (۶).

در این بخش، ابتدا فرکانس ارتعاش آزاد ورق چهار طرف مفصل ایزوتروپیک و ارتوتروپیک بررسی می‌شود و با نتایج ردی [۲۹] که از نظریه کلاسیک ورق به حل دقیق ارتعاش آزاد این ورق‌ها را انجام داده، مقایسه می‌شود؛ تا صحت الگوریتم نوشته شده برای این حالت ساده اثبات شود. سپس برای تأیید اعتبار روش نوار محدود دقیق و الگوریتم حل آن برای ورق‌های ناهمسان در ضخامت نازک، فرکانس ارتعاش آزاد این ورق‌ها با نتایج سایر محققان مقایسه می‌شود. در ادامه نیز با ارائه‌ی چند مثال، قابلیت این روش دقیق در تحلیل ورق‌های ناهمسان در ضخامت با شرایط تکیه‌گاهی مختلف و یا با حضور تکیه‌گاه‌های میانی، بررسی می‌شود.

۶-۲- ورق ایزوتروپیک و ارتوتروپیک چهار طرف مفصل

برای بررسی صحت الگوریتم نوشته شده به روش نوار محدود دقیق، در این قسمت به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با نسبت مدول الاستیسیته $E_1/E_2 = 3,10$، پرداخته می‌شود. در جدول (۱)، نتایج برای ورق‌های چهار طرف مفصل SSSS با نسبت‌های مختلف α و به‌ازای $\beta = 0.02$، با نتایج ردی[۲۹] که به حل دقیق ارتعاش آزاد این ورق‌ها با استفاده از نظریه کلاسیک ورق پرداخت، مقایسه می‌شود. خواص مصالح ایزوتروپیک عبارت‌اند از $E = 206.8\,\text{GPa}, \rho = 7800\,\text{kg}/\text{m}^3$. تطبیق کامل نتایج روش نوار محدود با نتایج ردی به دلیل آن است که، در هر دو تحقیق، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد ورق نازک به‌صورت دقیق حل شده است.

۶-۳- ورق ناهمسان در ضخامت با شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل

در این مثال، ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه‌ی مربعی با شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل بررسی می‌شود. مصالح ورق مرکب از ماده سرامیکی آلومینا (Al_2O_3) و ماده فلزی آلومینیوم (Al) است؛ که مدول الاستیسیته و دانسیته آن، به‌صورت تابع توانی تعریف شده در معادله (۱) در ضخامت تغییر می‌کند. حل ارتعاش آزاد این ورق تنها با یک نوار ورق و دو درجه آزادی دورانی انجام می‌شود. در واقع در روش نوار محدود دقیق، برای رسیدن به جواب دقیق نیازی به افزایش نوارها نیست؛ چرا که تابع تغییرمکان دقیق بوده و از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش ورق به‌دست می‌آید. در جدول (۲)، مقادیر بدون بعد فرکانس ارتعاش آزاد ورق برای نسبت‌های مختلف β شامل ۰/۰۵، ۰/۱ و ۰/۲ ارائه می‌شود. تغییرات مواد در ضخامت توسط پارامتر توان حجمی V_c بیان می‌شود؛ توان حجمی بر حسب تغییر پارامتر p تابع‌های مختلفی را برای توزیع مواد در ضخامت پیدا می‌کند. در این مثال برای مقادیر مختلف p شامل ۰، ۰/۵، ۱، ۴، ۱۰ و ∞، فرکانس ارتعاش آزاد ورق محاسبه شده است. فرکانس بی‌بعد محاسبه شده از روش نوار محدود قیق، با نتایج ژائو و همکاران [۳۳]، حسینی هاشمی و همکاران [۲۴ و ۲۶] و ماتسوناگا [۳۶] در جدول (۲) مقایسه می‌شود. ژائو و همکاران [۳۳] نظریه برشی مرتبه اول را با استفاده از روش بدون جزء برای تحلیل ورق‌های ناهمسان در ضخامت به‌کار بردند. حسینی هاشمی و همکاران [۲۴ و ۲۶] با استفاده از یک روش حل دقیق، ارتعاش آزاد ورق‌های

جدول ۱- فرکانس اصلی بی‌بعد ورق (Ω_1) برای ورق مربعی همگن ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل و نسبت‌های مختلف α و مدول الاستیسیته $(\beta = 0.02)$

$\alpha = b / L$	ایزوتروپیک		$E_1 / E_2 = 3$		$E_1 / E_2 = 10$	
	مرجع[29]	حاضر	مرجع [29]	حاضر	مرجع [29]	حاضر
۰/۵	۰/۰۰۰۳۶۱۸	۰/۰۰۰۳۶۱۸	۰/۰۰۰۵۵۵۰	۰/۰۰۰۵۵۵۰	۰/۰۰۰۹۴۶۱	۰/۰۰۰۹۴۶۱
۱/۰	۰/۰۰۰۱۴۴۷	۰/۰۰۰۱۴۴۷	۰/۰۰۰۱۸۳۸	۰/۰۰۰۱۸۳۸	۰/۰۰۰۲۶۵۷	۰/۰۰۰۲۶۵۷
۱/۵	۰/۰۰۰۱۰۴۵	۰/۰۰۰۱۰۴۵	۰/۰۰۰۱۱۸۵	۰/۰۰۰۱۱۸۵	۰/۰۰۰۱۴۶۲	۰/۰۰۰۱۴۶۲
۲/۰	۰/۰۰۰۰۹۰۵	۰/۰۰۰۰۹۰۵	۰/۰۰۰۰۹۷۱	۰/۰۰۰۰۹۷۱	۰/۰۰۰۱۰۸۴	۰/۰۰۰۱۰۸۴
۲/۵	۰/۰۰۰۰۹۰۴	۰/۰۰۰۰۹۰۴	۰/۰۰۰۰۸۷۷	۰/۰۰۰۰۸۷۷	۰/۰۰۰۰۹۳۱	۰/۰۰۰۰۹۳۱
۳/۰	۰/۰۰۰۰۸۰۳	۰/۰۰۰۰۸۰۳	۰/۰۰۰۰۸۲۸	۰/۰۰۰۰۸۲۸	۰/۰۰۰۰۸۵۵	۰/۰۰۰۰۸۵۵

ناهمسان در ضخامت را با نظریه برشی مرتبه اول ریزنر-میندلین[11] تحلیل کردند. ماتسوناگا [۳۶] نیز به روشی عددی و با نظریه برشی مرتبه بالاتر، ارتعاش آزاد این ورق‌ها را بررسی کرده است.

همان‌طور که در جدول (۲) قابل مشاهده هست، در ورق نازک $(\beta = 0.05)$، نتایج تحقیق حاضر، تطبیق بسیار خوبی با نتایج سایر محققان دارد. با افزایش ضخامت، نتایج این تحقیق با سایر مراجع فاصله می‌گیرد؛ چرا که نظریه کلاسیک ورق، که در مقاله حاضر مبنای توسعه فرمول‌سازی نوار محدود دقیق بوده است، نظریه مناسبی برای تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم نیست. نظریه کلاسیک ورق مبتنی بر فرض عمود ماندن مقطع ورق بر میان‌صفحه بوده و اعتبار این فرض با افزایش ضخامت ورق کاهش می‌یابد. لذا با زیاد شدن β کارایی نظریه کلاسیک در محاسبه فرکانس ارتعاش آزاد ورق پایین آمده و باید با استفاده از نظریه های دیگری از جمله نظریه برشی مرتبه اول یا مراتب بالاتر به تحلیل این دست از ورق‌ها پرداخت.

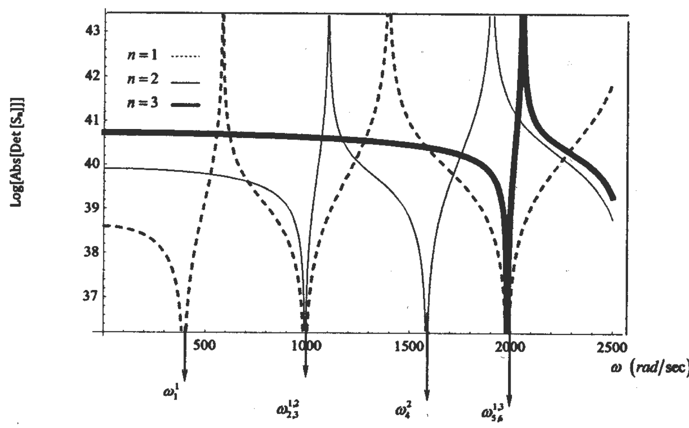
شش فرکانس اول ارتعاش آزاد یک ورق ناهمسان آلومینا-آلومینیوم تک‌دهانه چهار طرف مفصل، با مشخصات $L = 0.5\text{m}$ ، $\alpha = 1$ ، $\beta = 0.05$ و $p = 4$ ، در شکل (۷) نشان داده شده است. در این شکل، تغییرات $\text{Det}\left[S_n(\omega)\right]$ در مقیاس لگاریتمی بر حسب ω_i به‌ازای مقادیر مختلف نیم‌موج‌های سینوسی، n، را برای این ورق نشان می‌دهد. نقاطی که در آن $\text{Log}\left(\text{ABS}\left(\text{Det}\left[S_n(\omega)\right]\right)\right)$ به سمت ∞- میل می‌کند، همان فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق، ω_i، هستند. علت ترسیم دترمینان ماتریس سختی در مقیاس لگاریتمی، رؤیت حدود ریشه‌های دترمینان به‌صورت واضح و قابل تشخیص است. البته در الگوریتم نگاشته شده برای استخراج دقیق ریشه‌ها، از مقادیر تقریبی ریشه‌ها در نمودار لگاریتمی تنها به عنوان حدس اولیه جواب برای استخراج فرکانس دقیق استفاده می‌شود.

به‌ازای تعداد مشخص نیم موج سینوسی در جهت y (n)، بی‌شمار ریشه برای دترمینان ماتریس سختی وجود دارد که همان فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق در مودهای مختلف ارتعاشی‌اند. در شکل (۷)، در محدوده فرکانس از صفر تا ۲۵۰۰ رادیان بر ثانیه، ریشه‌های دترمینان ماتریس سختی

جدول ۲- فرکانس اصلی بی‌بعد (Ω_1)، برای ورق ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه مربعی چهار طرف مفصل

($\beta = h / L$)	روش	تابع توانی p					
		۰/۰	۰/۵	۱/۰	۴/۰	۱۰	∞
۰/۰۵	حاضر	۰/۰۱۴۹	۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۴۴	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۷۶
	مرجع. [33]	۰/۰۱۴۶	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۱۲	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۳	_
	مرجع. [24]	۰/۰۱۴۸	۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۰۱	۰/۰۰۹۶	_
	مرجع. [26]	۰/۰۱۴۸	۰/۰۱۲۵	۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۹۴	_
۰/۱	حاضر	۰/۰۵۹۷	۰/۰۵۰۶	۰/۰۴۵۵	۰/۰۳۹۶	۰/۰۳۸۰	۰/۰۳۰۰
	مرجع. [33]	۰/۰۴۸۲	۰/۰۴۸۲	۰/۰۴۳۵	۰/۰۳۷۶	۰/۰۳۵۹	۰/۰۳۷۹
	مرجع.[24]	۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۹۲	۰/۰۴۵۵	۰/۰۳۸۳	۰/۰۳۶۳	۰/۰۲۹۴
	مرجع. [26]	۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۹۰	۰/۰۴۴۲	۰/۰۳۸۵	۰/۰۳۶۶	۰/۰۲۹۳
	مرجع. [36]	۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۹۲	۰/۰۴۴۳	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۶۴	۰/۰۲۹۳
۰/۲	حاضر	۰/۲۳۸۹	۰/۲۰۲۲	۰/۱۸۲۲	۰/۱۵۸۵	۰/۱۵۲۴	۰/۱۲۱۶
	مرجع. [33]	۰/۲۰۵۵	۰/۱۷۵۷	۰/۱۶۵۰	۰/۱۳۷۱	۰/۱۳۰۴	۰/۱۰۷۵
	مرجع. [24]	۰/۲۱۱۲	۰/۱۸۰۶	۰/۱۶۵۰	۰/۱۳۷۱	۰/۱۳۰۴	۰/۱۰۷۵
	مرجع. [26]	۰/۲۱۱۲	۰/۱۸۰۵	۰/۱۶۳۱	۰/۱۳۹۷	۰/۱۳۲۴	۰/۱۰۷۶
	مرجع. [36]	۰/۲۱۲۱	۰/۱۸۱۹	۰/۱۶۴۰	۰/۱۳۸۳	۰/۱۳۰۶	۰/۱۰۷۷

به‌ازای $n = 1,2,3$ قابل مشاهده است. کوچک‌ترین ریشه، فرکانس اصلی یا فرکانس اول ارتعاش آزاد بوده و ریشه‌های بعدی از نظر بزرگی، به‌ترتیب فرکانس مودهای دوم به بعد هستند. فرکانس ارتعاش آزاد مودهای مختلف در این شکل، با نماد ω_i^n نشان داده شده است؛ که i، بیان‌کننده شماره مود مورد نظر بوده و n ، تعداد نیم‌موج‌ها در راستای محور y است. برای مثال ω_3^2، نشان‌دهنده مود سوم و دارای دو نیم موج در راستای محور y است. در این مثال، ورق در مودهای اول، دوم و پنجم ارتعاش دارای یک نیم‌موج در راستای محور y ($n = 1$)، و در مودهای سوم و چهارم دارای دو نیم موج ($n = 2$) هستند؛ همچنین ورق در مود ششم، سه نیم موج ($n = 3$) را در راستای محور y تجربه می‌کند. مودهای ارتعاشی بعدی نیز به همین صورت قابل حصول‌اند.



شکل ۷- استخراج فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه
باتکیه‌گاه‌های چهار طرف مفصلی

جدول ۳- فرکانس اصلی بی‌بعد (Ω_1) برای ورق‌های ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه تحت نیروهای درون‌صفحه‌ای مختلف و با شرایط تکیه‌گاهی متنوع و مشخصات $p = 4$ و $\beta = 0.05$، مثال شکل (۸)

شرایط تکیه‌گاهی	α	$k_x = 0.0$ $k_y = 0.0$	$k_x = 4.0$ $k_y = 0.0$	$k_x = 4.0$ $k_y = -1.5$
SSSS	۳/۱۰	۰/۰۴۹۸۹۷۰	۰/۰۷۱۱۹۴۸	۰/۰۷۰۴۲۶۳
	۱	۰/۰۰۹۹۱۰۳	۰/۰۱۹۸۹۷۰	۰/۰۱۶۷۲۱۲
	۱۰/۳	۰/۰۰۵۴۰۱۲	۰/۰۰۷۴۳۶۲	۰/۰۰۶۴۰۹۹
SSCS	۳/۱۰	۰/۰۸۹۸۹۷۰	۰/۰۱۰۸۵۲۹۰	۰/۱۰۸۳۹۷۰
	۱	۰/۰۱۱۸۹۷۰	۰/۰۲۱۴۴۴۱	۰/۰۱۸۸۹۷۰
	۱۰/۳	۰/۰۰۵۴۶۵۲	۰/۰۰۷۵۴۶۰	۰/۰۰۶۹۱۴۲
CSCS	۳/۱۰	۰/۱۲۷۵۹۸۰	۰/۱۴۲۳۹۷۰	۰/۱۴۱۹۸۴۰
	۱	۰/۰۱۸۸۹۷۰	۰/۰۲۳۸۹۷۰	۰/۰۲۱۰۶۳۳
	۱۰/۳	۰/۰۰۵۵۴۲۹	۰/۰۰۷۶۶۲۹	۰/۰۰۷۴۲۰۷

۶-۴- ورق ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

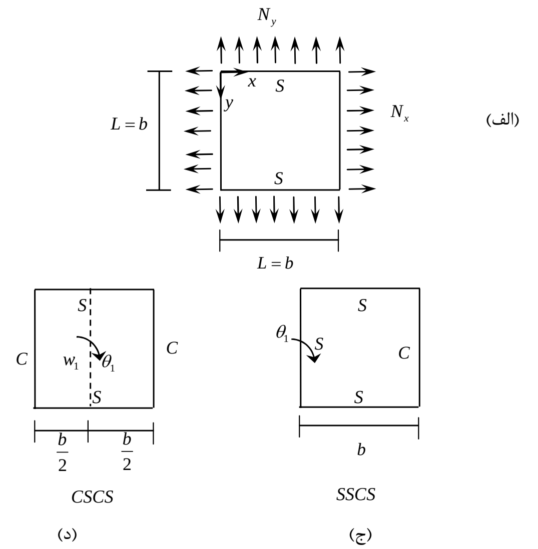
در این قسمت، حالت‌های مختلف از ورق‌های ناهمسان در ضخامت تک‌دهانه، از لحاظ شرایط مرزی، نیروهای درون‌صفحه و ابعاد ورق مورد تحلیل قرار می‌گیرد. شکل (۸-الف) ورقی ناهمسان با تکیه‌گاه‌های ساده (مفصلی) در راستای x، تحت نیروهای درون‌صفحه را نشان می‌دهد. در جدول (۳)، فرکانس‌های اصلی بی‌بعد این ورق با شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده، یک سر ساده-یک سر گیردار، و دو سر گیردار در امتداد محور y، و برای مقادیر مختلف نیروهای درون‌صفحه‌ای و ابعاد ورق ارائه شده است. فرکانس اصلی ارتعاش آزاد، کوچک‌ترین فرکانس محاسبه شده از معادله (۴۵) است. حداقل نوارهای مورد نیاز در این روش، تعدادی است که درجات آزادی خطوط گرهی آنها بتوانند شرایط تکیه‌گاهی در راستای محور y را براورده کنند. همان‌گونه که پیشتر ذکر شد، در روش نوار محدود دقیق افزایش تعداد نوارها منجر به دقت بیشتر نخواهد شد. لذا برای حالت SSSS، تنها به یک نوار ورق با دو درجه آزادی دورانی در دو انتها، نیاز است، شکل (۸-ب)؛ برای شرایط SSCS، یک نوار ورق و تنها یک درجه آزادی دورانی در انتهای ساده، لازم است شکل(۸-ج)؛ و برای حالت CSCS با دو نوار ورق و دو درجه آزادی در امتداد فصل مشترک آنها یکی دورانی و دیگری انتقالی، شکل (۸-د)، می‌توان به نتایج دقیق دست یافت.

نتایج مندرج در جدول (۳) برای سه نسبت $\alpha = 0.3, 1, 3.333$ و به‌ازای $\beta = 0.05$ محاسبه شده‌اند. همچنین، سه وضعیت برای نیروهای درون‌صفحه شامل، ورق بدون نیرو $\left(k_x = k_y = 0.0\right)$، ورق با نیروی کششی در امتداد x $\left(k_x = 4.0, k_y = 0.0\right)$، و ورق تحت نیروی‌های کششی در امتداد x و فشاری در راستای y $\left(k_x = 4.0, k_y = -1.5\right)$ مدنظر قرار گرفته‌اند. تابع مواد در ضخامت برحسب توان حجمی $(p = 4)$، تغییر می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش نیروهای محوری کششی، فرکانس ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت افزایش می‌یابد. مقادیر فرکانس‌های ارتعاش آزاد حاصل از روش نوار محدود دقیق، می‌تواند مبنایی برای سنجش دقت روش‌های عددی مورد استفاده برای ارتعاش آزاد ورق‌های نازک، قرار گیرد.

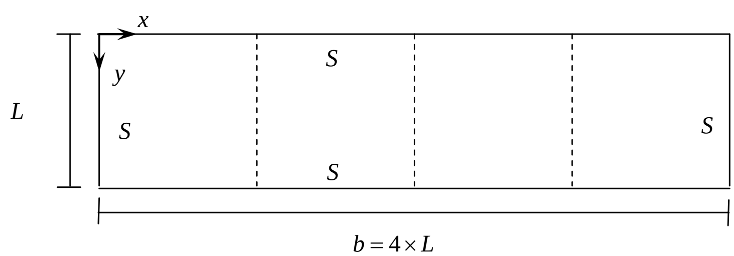
۶-۵- ورق ناهمسان در ضخامت با تکیه‌گاه‌های میانی

در این بخش، ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت با تکیه‌گاه‌های میانی، برای نسبت‌های مختلف توزیع مواد در ضخامت مطالعه می‌شود. شکل (۹) یک ورق با لبه‌های پیرامونی ساده و با سه تکیه‌گاه میانی موازی با محور y، که ورق را به چهار پانل مربعی تقسیم کرده‌اند را نشان می‌دهد. تکیه‌گاه‌های میانی با خط‌چین نمایش داده شده‌اند؛ و بدون این‌که از دوران ورق جلوگیری کنند، تغییرمکان جانبی را صفر می‌کنند. حل ارتعاش آزاد این ورق به روش دقیق، تنها با چهار نوار ورق و پنج درجه آزادی امکانپذیر است. هر نوار ورق شامل بخشی از ورق است که بین دو تکیه‌گاه قرار دارد و درجات آزادی، دوران خطوط گرهی‌اند. با این تعداد نوار محدود و درجه آزادی، ورق پیوسته مورد نظر، آزادی عمل لازم برای ارتعاش در شرایطی که تکیه‌گاه‌های پیرامونی و میانی به‌صورت ساده هستند را دارد و افزایش نوارها بیش از این تعداد، به افزایش دقت منجر نخواهد شد. جدول (۴)، مقادیر بدون بعد شش فرکانس اول ارتعاش، برای ورق ناهمسان در ضخامت آلومینا- فولاد با سه تکیه‌گاه میانی موازی را ارائه می‌دهد. در این جدول، اعداد درون پرانتز، تعداد نیم‌موج‌های سینوسی در راستای y به هنگام ارتعاش هستند. مشابه بخش (۶-۴)، نتایج برای سه وضعیت نیروهای درون‌صفحه و به‌ازای $\beta = 0.02$ استخراج شده‌اند.

برای ورق همگن ایزوتروپیک $(p = \infty)$ و فاقد نیروهای غشایی $\left(k_x = k_y = 0.0\right)$، نتایج روش حاضر با نتایج سعادت‌پور و همکاران [۳۲] که از روش گالرکین برای تحلیل



شکل ۸-الف) ورق تک‌دهانه تحت شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در امتداد موازی با محور xها و شرایط تکیه‌گاهی مختلف در راستای دیگر به‌ترتیب: ب) مفصلی-مفصلی ج) مفصلی-گیردار د) گیردار-گیردار



شکل ۹- ورق با تکیه‌گاه‌های میانی و لبه‌های پیرامونی ساده[۳۴]

ارتعاش آزاد ورق با تکیه‌گاه‌های میانی استفاده کردند، مقایسه شده است؛ همچنین صحت و دقت فرکانس‌های ارتعاش آزاد با نتایج حاتمی [۳۴] که از نظریه کلاسیک ورق و به روش نوار محدود دقیق، ارتعاش ورق‌های ایزوتروپیک با تکیه‌گاه‌های میانی را تحلیل کردند، ارزیابی شده است. در حالت ورق ناهمسان در ضخامت $(p=4)$، مودهای اول تا چهارم، در زمان ارتعاش، یک نیم‌موج سینوسی را در راستای محور y تجربه می‌کنند؛ اما مود پنجم و ششم، دو نیم‌موج در این راستا خواهند داشت. اولین مود ارتعاشی ورق، مانند اولین مود یک ورق مربعی چهار طرف مفصل بوده که در هر دو راستا یک نیم‌موج سینوسی را تجربه می‌کند.

۷-نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، با استفاده از نظریه کلاسیک ورق، تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های ناهمسان در ضخامت نازک به روش نوار محدود دقیق انجام شده است. برای تحلیل دقیق این ورق‌ها، در ابتدا با استفاده از تار مرجع جدید به‌جای تار میانی، درگیری تغییرمکان‌های درون‌صفحه و برون‌صفحه در معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش ورق حذف شده؛ و

جدول ۴- شش فرکانس اول بی‌بَعد شده (Ω) برای ورق ناهمسان در ضخامت نازک $\beta = 0/05$ با سه تکیه‌گاه میانی موازی محور y، که ورق را به چهار پانل مربعی تبدیل می‌کنند، مربوط به مثال شکل (۹)

	p	k_x	k_y	شماره فرکانس 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
مرجع [32]	∞	۰/۰	۰/۰	۰/۰۰۱۲۱	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۱۴۳	۰/۰۰۱۶۶	۰/۰۰۳۰۱	۰/۰۰۳۰۳
مرجع [34]	∞	۰/۰	۰/۰	۰/۰۰۱۲۱	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۰۱۴۵	۰/۰۰۱۶۶	۰/۰۰۳۰۳	۰/۰۰۳۰۳
حاضر	∞	۰/۰	۰/۰	۰/۰۰۱۲۱ (n=1)	۰/۰۰۱۲۸ (n=1)	۰/۰۰۱۴۵ (n=1)	۰/۰۰۱۶۶ (n=1)	۰/۰۰۳۰۳ (n=1)	۰/۰۰۳۰۳ (n=2)
	۴/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰۰۱۴۳ (n=1)	۰/۰۰۱۵۰ (n=1)	۰/۰۰۱۷۱ (n=1)	۰/۰۰۱۸۰ (n=1)	۰/۰۰۳۵۶ (n=2)	۰/۰۰۳۶۱ (n=2)
	۴/۰	۴/۰	۰/۰	۰/۰۰۲۲۷ (n=1)	۰/۰۰۲۳۷ (n=1)	۰/۰۰۲۴۶ (n=1)	۰/۰۰۲۷۴ (n=1)	۰/۰۰۳۹۸ (n=2)	۰/۰۰۴۰۳ (n=2)
	۴/۰	۴/۰	–۱/۵	۰/۰۰۱۹۹ (n=1)	۰/۰۰۲۰۷ (n=1)	۰/۰۰۲۲۸ (n=1)	۰/۰۰۲۵۲ (n=1)	۰/۰۰۳۳۴ (n=2)	۰/۰۰۳۴۰ (n=2)

معادله حاکم بر ارتعاش خارج از صفحه ورق ناهمسان، مستقل از معادلات ارتعاش درون‌صفحه، استخراج شده است. برای توسعه روش نوار محدود دقیق، شرایط مرزی دو لبه موازی از ورق (در راستای محور x) به‌صورت مفصلی فرض شده و لبه‌های دیگر دارای شرایط مرزی دلخواه‌اند؛ لذا تابع تغییرمکان ورق در راستای y، به‌شکل توابع سینوسی است. بعد از تقسیم ورق به تعدادی نوار محدود، از مجموع توابع نمایی برای محاسبه تغییرمکان در راستای محور x، استفاده می‌شود؛ و ضرایب و توان‌های این توابع به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که تابع تغییرمکان نوار محدود، منطبق بر حل دقیق معادله دیفرانسیل ارتعاش باشد. با بهره‌گیری از تابع تغییرمکان دقیق، بردار تغییرمکان‌های خطوط گرهی و بردار نیروهای خطوط گرهی محاسبه شده؛ و از ارتباط این دو بردار، ماتریس سختی دقیق نوار محدود حاصل می‌شود. برای دستیابی به حل دقیق، تنها به تعداد اندکی نوار محدود و درجه آزادی نیاز است؛ یعنی به میزانی که شرایط مرزی مسئله مدل شوند؛ که این مزیت موجب کاهش حجم محاسبات می‌شود. با سرهم‌کردن ماتریس سختی نوارهای محدود، ماتریس سختی کل به‌دست می‌آید. دترمینان این ماتریس، تابعی ضمنی از فرکانس‌های ارتعاش آزاد ورق است؛ لذا الگوریتم‌های استاندارد حل مقادیر ویژه، برای استخراج فرکانس‌های ارتعاش آزاد قابل استفاده نیستند؛ در نتیجه الگوریتمی ویژه برای محاسبه این فرکانس‌ها به‌کار گرفته شد.

از توانایی‌های این روش، می‌توان به مدل‌کردن شرایط تکیه‌گاهی مختلف در امتداد محور y و نیز ورق‌های چنددهانه با تکیه‌گاه‌های میانی با استفاده از تعداد معدودی نوار محدود اشاره کرد. برای تصدیق نتایج این روش، فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌های همگن و ورق‌های ناهمگن در ضخامت با شرایط تکیه‌گاهی مختلف محاسبه شده و با نتایج موجود مقایسه شده است. در مواردی که سایر محققان از

تحلیل دقیق و از نظریه کلاسیک ورق برای محاسبه فرکانس ارتعاش آزاد استفاده کرده‌اند؛ نتایج کاملاً بر هم منطبق‌اند. برای بیان قابلیت روش نوار محدود در تحلیل مسائل متنوع، مثال‌هایی از ارتعاش ورق‌های ناهمسان در ضخامت با چند ترکیب از مواد سرامیکی و فلزی، با حضور نیروهای درون‌صفحه و با شرایط مرزی پیرامونی و میانی مختلف، ارائه شده است.

همان‌گونه که انتظار می‌رود، با افزایش بارهای درون‌صفحه کششی، فرکانس ارتعاش آزاد ورق ناهمسان در ضخامت افزایش می‌یابد. از طرفی، فرکانس ارتعاش آزاد ورق با افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها در لبه‌های موازی محور y (که به ترتیب سختی عبارت‌اند از: ساده–ساده SSSS، ساده–گیردار SSCS و گیردار– گیردار CSCS) بیشتر می‌شود. از آنجا که در این تحقیق از نظریه کلاسیک ورق، برای توسعه نوار محدود دقیق استفاده شده است؛ نتایج حاصل از آن در محدوده ورق‌های نازک معتبر است؛ و با افزایش ضخامت ورق، از دقت فرکانس‌های محاسبه شده در این مطالعه کاسته می‌شود.

واژه‌نامه

1. functionally graded material (FGM)
2. Ritz
3. Galerkin
4. angle-ply
5. cross-ply
6. anti-symmetric
7. Mindlin's plate theory
8. a line-translational spring support
9. volume fraction
10. extensional stiffness matrix
11. Reissner–Mindlin plate theory

مراجع

1. Miyamoto, Y. A., Kaysser, W., Rabin, B. H., kawasaki, A., and Ford, R. G., *Functionally Graded Material: Desing, Processing and Applications,* United States, 1999.
2. Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., and Shiota, I., *Proceedings of First International Symposium on Functionally Gradient Materials,* Sendai, Japan, 1990.
3. Koizumi, M., "The Concept *of FGM*", *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials,* Vol. 34, pp. 3-10, 1993.
4. Yu-Chung, L., and Reismann, H., "Dynamics of rectangular plates", *International Journal of Engineering Science,* Vol. 7, pp. 93-113, 1969.
5. Srinivas, S., Joga-Rao, C. V., and Rao, A. K., "An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 12, pp. 187-199, 1970.
6. Srinivas, S., and Rao, A. K., "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 6, pp. 1463-1481, 1970.
7. Levinson, M., "Free Vibrations of a Simply Supported, Rectangular Plate: An Exact Elasticity Solution", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 98, pp. 289-298, 1985.
8. Wittrick, W. H., "Analytical, Three-Dimensional Elasticity Solutions to Some Plate Problems, and Some Observations on Mindlin's Plate Theory", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 23, pp. 441-464, 1987.
9. Noor, A. K., and Burto, W. S., "Three-Dimensional Solutions for Antisymmetrically Laminated Anisotropic Plates", *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 57, pp. 182-8, 1990.
10. Lin, C.-C., and King, W. W, "Free Transverse Vibrations of Rectangular Unsymmetrically Laminated Plates", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 36, pp. 91-103, 1974.
11. Gorman, D. J., "An Exact Analytical Approach to the Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Mixed Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 93, pp. 235-247, 1984.
12. Reddy, J. N., and Phan, N. D., "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 98, pp. 157-170, 1985.
13. Sciuva, M. d., "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluation of a New Displacement Model", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 105, pp. 425-442, 1986.
14. Khdeir, A. A., "Free Vibration and Buckling of

Symmetric Cross-Ply Laminated Plates by an Exact Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 447-461, 1988.
15. Khdeir, A. A., "Comparison Between Shear Deformable and Kirchhoff Theories for Bending, Buckling and Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates", *Composite Structures*, Vol. 13, pp. 159-172, 1989.
16. McGee, O. G., Huang, C. S., and Leissa, A. W., "Comprehensive Exact Solutions for Free Vibrations of Thick Annular Sectorial Plates with Simply Supported Radial Edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 37, pp. 537-566, 1995.
17. Chen, W. q., Ding, H. j., and Xu, R.-q., "On Exact Analysis of Free Vibrations of Embedded Transversely Isotropic Cylindrical Shells", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 75, pp. 961-966, 1998.
18. Boscolo, M., and Banerjee, J. R., "Dynamic Stiffness Method for Exact In-plane Free Vibration Analysis of Plates and Plate Assemblies", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, pp. 2928-2936, 2001.
19. Xiang, Y., "Exact Vibration Solutions for Circular Mindlin Plates with Multiple Concentric Ring Supports", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 6081-6102, 2002.
20. Li, Q. S., "An Exact Approach for Free Vibration Analysis of Retangular Plates with Line-Concentrated Mass and Elastic Line-Support", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 669-685, 2003.
21. Hatami, S., Azhari, M., and Saadatpour, M. M., "Free Vibration of Moving Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 80, pp. 609-620, 2007.
22. Hatami, S., Ronagh, H. R., and Azhari, M., "Exact Free Vibration Analysis of Axially Moving Viscoelastic Plates", *Computers & Structures*, Vol. 86, pp. 1738-46, 2008.
23. Xing, Y. F., and Liu, B., "Exact Solutions for the Free In-Plane Vibrations of Rectangular Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 246-255, 2009.
24. Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., and Omidi, M., "Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates Using First-Order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 1276-1291, 2010.
25. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., and Atashipour, S. R., "Study on the Free Vibration of Thick Functionally Graded Rectangular Plates According to a New Exact Closed Form Procedure", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 722-735, 2011.
26. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., and Atashipour, S. R., "A New Exact Analytical Approach for Free Vibration of Reissner–Mindlin Functionally Graded Rectangular Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, pp. 11-22, 2010.
27. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Damav, R., and Hosseimi, T., "Exact Solutions for Free Flexural Vibration of Le´vy-Type Rectangular Thick Plates Via Third-Order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Mathematical Modelling*, pp. 708–727, 2011.
28. Kirchhoff, G., "Uber Das Gleichgewicht Und Die Bewegung Einer Elatischen Scheibl", *Mathematik*, Vol. 40, pp. 51-88, 1850.
29. Reddy, J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Taylor & Francis Group, New York, 2007.
30. Birman, V., *Plate Structures, Solid Mechanics and It's Applications* 178, Springer, Netherlands, 2011.
31. Abrate, S., "Functionally Graded Plates Behave Like Homogeneous Plates", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, pp. 151–158, 2008.
32. Saadatpour, M. M., Azhari, M., and Bradford, M. A., "Vibration Analysis of Simply Supported Plates of General Shape with Internal Point and Line Supports Using The Galerkin Method", *Engineering Structures*, Vol. 22, pp. 1180-1188, 2000.
33. Zhao, X., Lee, Y., and Liew, K. , "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using the Element Free Kp-Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 918-939, 2009.

۳۴. حاتمی، ش.، "بررسی ارتعاش، پایداری و تعادل غیر خطی ورق‌های پیوسته دارای سرعت طولی"، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۱۳۸۵.

۳۵. فدکی، و. ا.، "بررسی کمانش ورق‌های با خواص ناهمسان در ضخامت نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۱۳۸۷.

36. Matsunaga, H., "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2-D Higher-Order Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol. 82, pp. 499-512, 2008.