

تحلیل کمانش گرمایی یک طرفه ورق مرکب لایه لایه بر روی بستر الاستیک بدون کشش

امید واثقی، حمیدرضا میردامادی* و علیرضا شهیدی
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۱/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۰۸/۳)

چکیده -

()

واژگان کلیدی :

Unilateral Thermal Buckling Analysis of Laminated Composite Plates on Tensionless Elastic Foundation

O. Vaseghi, H.R. Mirdamadi and A. Shahidi

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Abstract *In this paper, using Rayleigh-Ritz method (RRM) and based on classical plate theory, thermal buckling of laminated composite rectangular plates is analyzed. Effects of plate aspect ratios, fiber orientations, and the kinds of lamination scheme with and without the foundation on the uni-lateral thermal buckling behavior are analyzed. All studies done in uni-lateral buckling field are specialized for single-layer isotropic plates which are affected by in-plane mechanical loads. The numerical results are validated very satisfactorily for the present method, with its accuracy and reliability confirmed*

Keywords: *Uni-lateral thermal buckling, laminated composite plate, Rayleigh-Ritz method, Tensionless elastic foundation.*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

نیم مود کمانش ورق	m	طول، عرض و ارتفاع ورق مرکب لایه لایه	a, b, h
تابع‌های لاگرانژی میدان جابه‌جایی درون صفحه	$H_i \quad i = 1, 2$	نسبت طول به عرض ورق	a / b
تابع‌های طبقاتی میدان جابه‌جایی درون صفحه	$H_i \quad i = 3..10$	تعداد لایه‌ها	N
ماتریس میدان جابه‌جایی کل ورق	$[N]$	ضخامت k امین لایه ورق	Z
ماتریس حاصل از گسسته سازی کرنش غشایی	$[C_M]$	مولفه‌های میدان جابه‌جایی ورق	u, v, w
ماتریس حاصل از گسسته سازی کرنش خمشی	$[C_B]$	مولفه‌های میدان جابه‌جایی میان صفحه ورق	u_0, v_0, w_0
تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک	δU_e	بردار کرنش کل	$\{\varepsilon\}$
ماتریس سختی ناشی از حضور بستر	$[K_e]$	بردار کرنش غشایی	$\{\varepsilon^{(01)}\}$
تابع تماسی	X	بردار کرنش فون‌کارمن و بردار کرنش خمشی	$\{\varepsilon^{(02)}\}$
سختی هر فنر (معرف مدول بستر)	k_f	بردار کرنش خمشی	$\{\varepsilon^{(1)}\}$
تغییرات انرژی کرنش نیروهای غشایی و خمشی	δU	مولفه‌های سختی و سختی دوران یافته لایه k ام	Q_{ij}^k, \bar{Q}_{ij}^k
تغییرات انرژی پتانسیل نیروهای درون صفحه	δV	مدول یانگ	E
ماتریس سختی هندسی	$[K_G]$	مدول برشی	G
ماتریس حاصل از نیروهای غشایی	$[N_0]$	نسبت پواسون	ν
تغییرات انرژی پتانسیل کل	$\delta \Pi$	مولفه‌های بردار تنش و کرنش ورق	σ_i, ε_i
ماتریس سختی کل	$[K_T]$		$i = 1, 2, 6$
ماتریس سختی نیروهای محوری	$[K_{mm}]$	بردار نیروهای برابند تنش‌های درون سطح	$\{N\}$
ماتریس سختی نیروهای محوری و خمشی	$[K_{mb}]$	بردار گشتاورهای برابند تنش‌های برون سطح	$\{M\}$
ماتریس سختی نیروهای خمشی	$[K_{bb}]$	ماتریس سختی محوری	$[A]$
ماتریس حاصل از کرنش فون‌کارمن	$[H]$	ماتریس سختی خمشی	$[B]$
بردارهای ضرایب مجهول میدان جابه‌جایی	$\{\hat{w}\}, \{\hat{v}\}, \{\hat{u}\}$	ماتریس سختی نیروی محوری و گشتاور خمشی	$[D]$
بردار کل ضرایب مجهول	$\{\hat{U}\}$	بردار برابند نیروهای درون سطح گرمایی	$\{N\}^{Tr}$
مختصه‌های طبیعی (مختصه‌های بی بعد)	ξ, η	بردار برابند گشتاورهای درون سطح گرمایی	$\{M\}^{Tr}$
مختصه‌های دکارتی	x, y	امین جمله میدان جابه‌جایی برون صفحه	$\varphi_m(\xi, \eta)$
بار بحرانی کمانش	λ	تابع چند جمله‌ای برای ارضای شرایط مرزی برون صفحه	$\varphi_b(\xi, \eta)$
نیروهای گرمایی	$\{F\}^{Tr}$	صفحه	
شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار	F, S, C	زاویه چرخش رشته‌ها نسبت به محور x	θ

ورق‌ها به عنوان پرکاربردترین اجزا و قطعات سیستم‌های مکانیکی، مهم‌ترین و گسترده‌ترین کاربرد را در مهندسی سازه و مکانیک در زمینه ساخت سازه‌هایی نظیر هواپیماها، فضاپیماها و سازه‌های دریایی دارند. کمناش که ناشی از بارگذاری‌های فشاری درون صفحه، عیب‌های سازه‌ای، بارگذاری‌های برون مرکز و انواع دیگر بارگذاری‌های برون صفحه است، باعث تغییر شکل‌های بزرگ و موجب ناپایداری و در نهایت آسیب به سازه‌ها می‌شود. کمناش یک‌طرفه در واقع یک مسئله تماسی است که تحلیل رفتار ورق‌ها روی فونداسیون‌ها، اتصالات اجزای مکانیکی و ورق‌های تقویت کننده تیرها و ستون‌های بتنی و غیره از جمله کاربردهای عملی مسئله کمناش یک‌طرفه اجسام و سازه‌هاست. وجود قید یک‌طرفه، به طور مستقیم، دلیل موجهی برای غیرخطی شدن رفتار بستر الاستیک است. مد کمناشی ورق با اعمال تدریجی یک تابع سختی ناشی از بستر به سیستم، با استفاده از روند تکرار به دست می‌آید. گسترش روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی برای حل مسئله تماسی اجسام الاستیک بر مبنای نظریه هرتز در سال ۱۸۹۶ و دینیک در سال ۱۹۵۲ آغاز شد. از آن پس مطالعات زیادی بر روی مسئله تماسی انجام شده است. در این گونه مسایل، فرض بر این بود که یکی از دو جسم به عنوان بستر دیگری عمل می‌کند، و دو جسم به هم چسبیده‌اند. پس بین دو جسم نیروی چسبندگی وجود دارد. بنابراین با توجه به معلوم بودن ناحیه تماس بین دو جسم، حل مسئله از طریق معادله‌های دیفرانسیل خطی امکانپذیر شد. در بسیاری از موارد، به علت چسبندگی ناکافی، صفحه نیمه‌صلب نمی‌تواند قیدی کششی اعمال کند. این نوع شرایط مرزی به عنوان شرایط تماس یک‌طرفه شناخته می‌شوند. طبیعت دوگانه بستر، بیانگر رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد و مجهول بودن ناحیه تماس بین دو جسم باز هم نظریه را پیچیده‌تر می‌سازد. با توجه به این شرایط، تحقیق بر روی سیستم‌های یک‌طرفه نیاز به روش‌های عددی دارد. در سال ۱۹۹۴ شهوان و واس [۱] بر اساس نظریه کلاسیک ورق و با

انتخاب یک تابع انرژی کرنشی مناسب برای بستر الاستیک و با روش گالرکین توانستند بار بحرانی کمناشی برای یک ورق مستطیلی الاستیک را به دست آورند. در سال ۱۹۹۷ اسمیت، برادفورد و اوهلرز [۲] با استفاده از روش ریلی-ریتز به بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی مقید شده زیر بارگذاری برشی پرداختند. ایشان قید بستر یک‌طرفه را با یک بستر بدون قابلیت اعمال نیروی کششی مدل کردند. در سال ۱۹۹۸ شهوان و خالد [۳] با روش گالرکین و با توجه به نظریه کرشهاف به بررسی کمناش یک‌طرفه ورق‌های مقید پرداختند. ایشان برای بستر یک‌طرفه از یک بستر الاستیک غیرخطی استفاده کردند که بستر الاستیک بدون قابلیت اعمال نیروی کشش بود. در سال ۱۹۹۹ اسمیت، برادفورد و اوهلرز [۴] طی تحقیقاتی نظری و با روش نیمه‌تحلیلی-نیمه‌عددی ریلی-ریتز به بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی مقید شده یک‌طرفه، پرداختند. سپس در همان سال طی تحقیقاتی آزمایشگاهی دستاوردها به دست آمده را تایید کردند [۵]. ورق‌های پیچ شده به تیرهای بتنی نوع ویژه‌ای از مسایل است که نظر محققان را به خود جلب کرده است. بررسی پایداری این ورق‌ها، توسط شهیدی، هدایتی و برادفورد [۶] در سال ۲۰۰۷ انجام گرفت. ایشان به کمک ضرایب لاگرانژ برای اعمال قیدها و استفاده از روش ریلی-ریتز به تحلیل پایداری موضعی یک‌طرفه ورق تقویتی پرداختند که با پیچ به یک بستر بتنی متصل شده بود. ایشان قید بستر یک‌طرفه را همانند مرجع [۴] به صورت یک بستر الاستیک بدون قابلیت اعمال نیروی کشش مدل کردند. شن و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از نظریه رایزنر-میندلین به بررسی غیرخطی رفتار خمشی ورق مستطیلی با تکیه گاه چهارطرف گیردار که بر روی بستر الاستیک بدون کشش قرار داده شده است، پرداختند. با توجه به برخی ملاحظات اقتصادی در مهندسی از قبیل مصرف سوخت کمتر و دستیابی به سرعت‌های بالاتر، علاقه روزافزونی به کاهش ضخامت قطعات و سازه‌های سبک وزن در صنایع هوافضا، دریانوردی، خودرو، و روش‌های ساخت و تولید، منجر به جایگزینی تدریجی بسیاری از مواد همسانگرد

سنتی با مواد مرکبی شده است که ارایه دهنده هر دو برتری سختی ویژه بالا و وزن ویژه کم است. از میان عناصر مختلف سازه‌های کارآمد و پیشرفته ساخته شده از مواد مرکب، رفتار کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. به طور کلی حل تحلیلی و دقیق این نوع از ورق‌ها، به دلیل پیچیدگی رابطه‌های، محدود به چند نمونه خاص از انواع شرایط مرزی، نوع بارگذاری و ترتیب قرارگیری لایه‌ها شده است. یکی از نخستین مطالعات در زمینه مباحث کمانش گرمایی توسط گوزارت و همکاران در سال ۱۹۵۲ [۷]، انجام شد. آنها با استفاده از روش ریلی-ریتز، دمای بحرانی کمانش گرمایی ورق مستطیلی همگن و همسانگرد را زیر گرمای گسترده یکنواخت، بر روی تکیه‌گاه چهار طرف مفصل به دست آوردند. تاچرت در سال ۱۹۸۷ [۸]، به بررسی کمانش گرمایی ورق‌های لایه‌لایه نسبتاً ضخیم از نوع پادمقارن عمودچین، زیر گرمای یکنواخت پرداخت. وی تأثیر تغییر شکل برشی عمودی را بر روی رفتار ترموالاستیک، در زمینه کمانش گرمایی ورق، با استفاده از نظریه راینر-میندلین (نظریه کرنش برشی مرتبه اول) مورد مطالعه قرار داد. تانگراتنام و همکاران در سال ۱۹۸۹ [۹]، تحلیل کمانش ورق مرکب لایه‌لایه را برای به دست آوردن دمای بحرانی، زیر نیروهای گرمایی، بررسی کردند. فرمول‌بندی آنها بر اساس نظریه خطی (نظریه کلاسیک) و روش اجزای محدود با استفاده از المان پوسته ۳۲ درجه آزادی سمی لوف انجام پذیرفت. سان و همکارش در سال ۱۹۹۰ [۱۰] با بررسی کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه مقارن عمودچین، تأثیر مهم تغییرشکل‌های برشی را بر روی ورق‌های مقارن لایه‌لایه عمودچین، زیر شرایط مرزی ساده نشان دادند. چن و همکاران به ترتیب در سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۱، رشته مطالعاتی در زمینه کمانش گرمایی ورق‌های لایه-لایه مرکب انجام دادند. آنها با به کارگیری روش گالرکین در سال ۱۹۸۷ [۱]، به مطالعه کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه زیر گرمای یکنواخت پرداختند؛ در سال ۱۹۸۹ [۱۲]، با استفاده از روش اجزای محدود به بررسی کمانش گرمایی ورق‌های

مرکب لایه‌لایه زیر گرمای نایکنواخت پرداختند و در سال ۱۹۹۱ [۱۳]، با استفاده از المان ۴۰ درجه آزادی چهارضلعی، همراه با نظریه میندلین (کرنش برشی مرتبه یکم)، رفتار کمانش گرمایی را برای ورق‌های ضخیم زیر گرمای یکنواخت و نایکنواخت گسترش دادند. هوانگ و تاچرت در سال ۱۹۹۲ [۱۴]، به بررسی حل دقیق از کمانش گرمایی ورق عمودچین مقارن و نسبتاً ضخیم، زیر شرایط مرزی گیردار و افزایش دمای یکنواخت، پرداختند. آنها با استفاده از نظریه راینر-میندلین، تأثیر تغییرشکل برشی عرضی را در افزایش ضخامت ورق نشان دادند. آنها دستاوردهای مطالعه خود را با روش اجزای محدود مقایسه کردند. کبیر و همکاران در سال ۲۰۰۳ [۱۵]، با استفاده از روش اجزای محدود و المان ۳ گرهی، به حل مسایل کمانش گرمایی ورق مربعی و کج مرکب لایه‌لایه پرداختند. آنها با استفاده از نظریه کرنش برشی مرتبه یکم، ورق‌های نسبتاً ضخیم و نیز نازک را مورد بررسی قرار دادند. آنها با اعمال جمله تصحیح برشی در مولفه‌های کرنش برشی عرضی توانستند اثر قفل‌شدگی برشی را از بین ببرند. شیایو و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۱۶]، به بررسی رفتار کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه پرداختند. آنها با استفاده از نظریه کلاسیک، شکل مود کمانش گرمایی ورق‌های مرکب لایه‌لایه در دو حالت اریب‌چین و عمودچین را زیر انواع مختلف نسبت مدول یانگ، نسبت طول به عرض، زاویه قرارگیری رشته‌ها، ترتیب قرارگیری لایه‌ها و شرایط مرزی مختلف، مورد مطالعه قرار دادند. آنها در این تحقیق از روش اجزای محدود و المان مثلثی ۱۸ درجه آزادی با توجه به کار شیایو و کیو در سال ۲۰۰۴ [۷]، استفاده کردند. شن در سال‌های ۱۹۹۷ [۱۹] و ۲۰۰۰ [۲۰]، رفتار گرمایی بعد از کمانش ورق مستطیلی همسانگرد را همراه با قید بستر الاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار داد. بستر ارایه شده توسط شن، که در مقالات دیگری نیز مورد استفاده قرار گرفته است، در طبقه بندی بستر یک طرفه در نظر گرفته نمی‌شود. زیرا این بستر هم در کشش و هم در فشار متناسب با دو سختی تعریف شده، بر ورق نیرو اعمال می‌کند.

جابه‌جایی در میان صفحه‌اند. بنابراین مؤلفه‌های کرنش (با در نظر گرفتن کرنش فون‌کارمن) به صورت معادله زیر بیان می‌شوند [۱۸].

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{(01)}\} + \{\varepsilon^{(02)}\} + z\{\varepsilon^{(1)}\} \quad (2)$$

که در آن $\varepsilon^{(01)}$ بردار کرنش غشایی، $\varepsilon^{(02)}$ بردار کرنش فون‌کارمن و $\varepsilon^{(1)}$ بردار کرنش خمشی به شکل زیرند:

$$\{\varepsilon^{(01)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(01)} \\ \varepsilon_{yy}^{(01)} \\ \varepsilon_{xy}^{(01)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\{\varepsilon^{(02)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(02)} \\ \varepsilon_{yy}^{(02)} \\ \varepsilon_{xy}^{(02)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\{\varepsilon^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

معادله تنش-کرنش کاهش یافته پس از دوران از دستگاه مختصه‌های مادی (۱-۲) به دستگاه مختصه‌های مادی (x,y)، برای لایه عمودسانگرد k ام از ورق مرکب با ضخامت کل h و تعداد N لایه، همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است به صورت معادله زیر است [۱۸].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{pmatrix} \Delta T$$

$$\{\sigma_{xx}\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} - [\bar{Q}]^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} \Delta T$$

در این مقاله از روش ریلی-ریتز برای بررسی رفتار کمانش ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک یک‌طرفه، زیر افزایش دمای یکنواخت استفاده شده است. کارهایی که تاکنون در زمینه تحلیل کمانش یک‌طرفه صورت گرفته، مختص به ورق تک‌لایه همسانگرد زیر نیروهای درون سطح مکانیکی است، بنابراین برای تحلیل کمانش گرمایی یک‌طرفه ورق مرکب لایه‌لایه نخست سعی شده با ارایه مثال‌های مختلف، دستاوردهای به‌دست آمده در زمینه کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه بدون وجود بستر، زیر تاثیر زاویه چیدمان رشته‌ها، نسبت طول به عرض ورق، شرایط مرزی متفاوت، تعداد و نوع چینش لایه‌ها، با کارهایی که تاکنون انجام شده، مطالعات پارامتری شود و سپس تاثیر بستر الاستیک یک‌طرفه بر روی رفتار کمانشی ورق مرکب لایه‌لایه با شرایط یادشده در بالا مورد بررسی قرار گیرد.

در بخش (۲) فرمول‌بندی کلی از ورق مرکب لایه‌لایه ارایه شده است. در بخش (۳) میدان جابه‌جایی گسسته شده در روش ریلی-ریتز استخراج شده است. در بخش (۴) به بررسی پایداری ورق مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک یک‌طرفه پرداخته شده است. در بخش (۵) مثال‌های حل شده مبادرت می‌ورزیم و در انتها دستاوردهای حاصل از این تحقیق را بیان می‌کنیم.

۲- فرمول‌بندی ورق مرکب لایه‌لایه عمودسانگرد

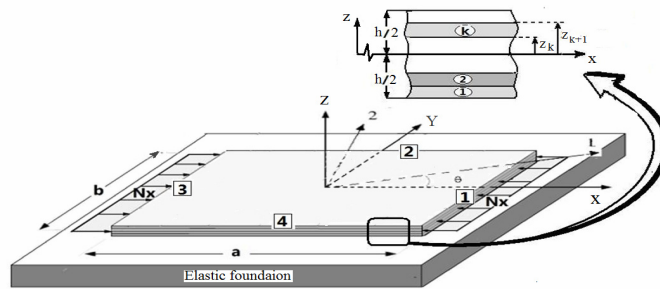
با توجه به شکل (۱) و رفتار ورق‌های لایه‌لایه نازک طبق نظریه کلاسیک، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت زیر فرض می‌شوند [۲۱].

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

در معادله بالا u، v و w به ترتیب مولفه‌های میدان جابه‌جایی در جهت‌های x، y و z هستند و u_0 ، v_0 و w_0 مولفه‌های



شکل ۱- نمایش ورق مرکب لایه لایه بر روی بستر الاستیک بدون قید کششی در دستگاه

مختصه‌های کلی

سینماتیکی را ارضا کنند. این در حالی است که ارضای شرایط مرزی استاتیکی یا طبیعی توسط این تابع‌های الزامی نیست. بنابراین، میدان جابه‌جایی برون صفحه $w_0(\xi, \eta)$ بر اساس یک تابع چندجمله‌ای (چندجمله‌ای خیم پاسکال) و با افزودن تابعی که بتواند شرایط مرزی را ارضا کند به صورت زیر به دست می‌آید [۴].

$$w_0(\xi, \eta) = \phi_b(\xi, \eta) \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^q w_{0m} \varphi_m(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$w_0(\xi, \eta) = \langle N_w(\xi, \eta) \rangle_{l \times n} \{ \hat{w} \}_{n \times 1} \quad (11)$$

به طوری که p درجه تابع چند جمله‌ای، $\{ \hat{w} \}$ بردار ضرایب مجهول ریتز که مختصه‌های تعمیم یافته نامیده می‌شوند و $\langle N_w \rangle$ ، با توجه به معادله (۱۰) است. تابع $\varphi_m(\xi, \eta)$ ، m امین جمله از چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$\varphi_m(\xi, \eta) = \zeta^r \eta^{q-r} \quad (12)$$

با تعریف زیر برای m :

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - r \quad (13)$$

تعداد جمله‌های چندجمله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (14)$$

در معادله (۱۰) تابع $\phi_b(\xi, \eta)$ برای ارضای انواع شرایط مرزی برون صفحه در لبه‌های ورق، با توجه به شکل (۱)، به کار گرفته شده و مقدار آن در جدول (۱) برای انواع شرایط مرزی داده

بنابراین می‌توان بردار نیروهای برآیند (N_x, N_y, N_{xy}) و بردار گشتاورهای برآیند (M_x, M_y, M_{xy}) را برای ورق مرکب لایه-لایه (بدون در نظر گرفتن کرنش‌های فون کارمن) به دست آورد [۱۸].

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0l)}\} \\ \{\varepsilon^{(1l)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N\}^{Tr} \\ \{M\}^{Tr} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

در معادله بالا $[A]$ ماتریس سختی محوری، $[D]$ ماتریس سختی خمشی و $[B]$ ماتریس سختی حاصل از برهم‌کنش نیروی محوری و گشتاور خمشی است. $\{N\}^{Tr}$ و $\{M\}^{Tr}$ ، به ترتیب بردار برآیند نیروها و گشتاورهای درون سطح گرمایی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\{N\}^{Tr} = \sum_{k=1}^N (z_{k+1} - z_k) [\bar{Q}]^{(k)} \{ \bar{\alpha} \}^{(k)} \Delta T(x, y) \quad (8)$$

$$\{M\}^{Tr} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_{k+1}^2 - z_k^2) [\bar{Q}]^{(k)} \{ \bar{\alpha} \}^{(k)} \Delta T(x, y) \quad (9)$$

۳- میدان جابه‌جایی گسسته شده در روش ریلی-

ریتز

در روش ریلی-ریتز میدان جابه‌جایی، توسط تابع‌هایی از پیش تعیین شده با ضرایب مستقل نامعلوم یا به اصطلاح مختصه‌های تعمیم یافته، تقریب زده می‌شود. این تابع‌های به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که دست کم، شرایط مرزی هندسی یا

جدول ۱- تابع $\phi_0(\xi, \eta)$ برای شرایط مرزی آزاد (F)، ساده (S) و گیردار (C) در لبه‌های ورق مرکب لایه‌لایه

edges	Boundary condition		
	F	S	C
1	$(\zeta-1)^0$	$(\zeta-1)1$	$(\zeta-1)^2$
2	$(\eta-1)^0$	$(\eta-1)^1$	$(\eta-1)2$
3	$(\zeta+1)^0$	$(\zeta+1)1$	$(\zeta+1)2$
4	$(\eta+1)^0$	$(\eta+1)1$	$(\eta+1)2$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle N_v \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle N_w \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\hat{v}\} \\ \{\hat{w}\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{U\} = [N] \{\hat{U}\} \quad (18)$$

در کلیه معادله‌های بالا $\xi = x/a$ و $\eta = y/b$ است به طوری که a و b به ترتیب نصف طول مستطیل در راستاهای x و y است. بنابراین می‌توان بردارهای کرنش تعریف شده در معادله‌های (۳) تا (۵) را با توجه به تابع‌های شکل ارایه شده برای تعریف میدان جابه‌جایی ورق در روش ریلی-ریتز به دست آورد:

$$\{\varepsilon^{(01)}\}_{(3 \times 1)} = [C_M]_{(3 \times (n+2))} \{\hat{U}\}_{((n+2) \times 1)} \quad (19)$$

$$\{\varepsilon^{(1)}\}_{(3 \times 1)} = [C_B]_{(3 \times (n+2))} \{\hat{U}\}_{((n+2) \times 1)} \quad (20)$$

در معادله‌های بالا، $\{\hat{U}\}_{((n+2) \times 1)}$ بردار کل ضرایب مجهول (کل مختصه‌های تعمیم یافته) است و ماتریس‌های $[C_M]_{(3 \times (n+2))}$ و $[C_B]_{(3 \times (n+2))}$ به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$[C_M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_v}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_v}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[C_B] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_w}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 N_w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

شده است. میدان جابه‌جایی درون صفحه $u_0(\xi, \eta)$ و $v_0(\xi, \eta)$ به صورت رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$u_0(\xi, \eta) = \langle N_u(\xi, \eta) \rangle_{1 \times 1} \{\hat{u}\}_{1 \times 1} \quad (15)$$

$$v_0(\xi, \eta) = \langle N_v(\xi, \eta) \rangle_{1 \times 1} \{\hat{v}\}_{1 \times 1} \quad (16)$$

به طوری که $\{\hat{u}\}$ و $\{\hat{v}\}$ بردار ضرایب مجهول ریتز، $\langle N_u \rangle$ و $\langle N_v \rangle$ بردار حاصل از تابع‌های چند جمله‌ای است که از ضرب ده جمله تابع‌های طبقاتی [۲۱] مطابق با معادله‌های زیر، در دو راستای $\xi = x/a$ و $\eta = y/b$ (در مجموع ۱۰۰ تابع شکل بر روی کل دامنه ورق) به دست می‌آید.

$$H_1(\zeta) = 0.5(1 + \zeta) \quad (17)$$

$$H_2(\zeta) = 0.5(1 - \zeta)$$

$$H_3(\zeta) = 1 - \zeta^2$$

$$H_4(\zeta) = \zeta - \zeta^3$$

$$H_5(\zeta) = 1 - 10\zeta^2 + 9\zeta^4$$

$$H_6(\zeta) = \zeta - 5\zeta^3 + 4\zeta^5$$

$$H_7(\zeta) = 1 - 4\zeta^2 + 94\zeta^4 - 6\zeta^6$$

$$H_8(\zeta) = \zeta - 3\zeta^3 + 7\zeta^5 - 5\zeta^7$$

$$H_9(\zeta) = 1 - 5\zeta^2 + 6\zeta^4 - 9\zeta^6 + 7\zeta^8$$

$$H_{10}(\zeta) = \zeta - 4\zeta^3 + 6\zeta^5 - 10\zeta^7 + 7\zeta^9$$

در معادله‌های بالا دو تابع نخست، تابع‌های لاگرانژی مرتبه یکم هستند که در شرایط مرزی مختلف درون صفحه، ممکن است یکی از آنها حذف شود.

با توجه به معادله‌های (۱۱)، (۱۵) و (۱۶) میدان جابه‌جایی

ورق را می‌توان به این صورت نوشت:

۴- بررسی پایداری ورق مرکب لایه‌لایه بر روی

بستر الاستیک یک‌طرفه

تاثیر حضور بستر الاستیک را، مطابق شکل (۱)، به صورت یک رابطه نیرو-جابجایی نشان می‌دهیم که به علامت جابجایی w وابسته است. هنگامی که جابجایی ورق تمایل به دور شدن از سطح بستر را داشته باشد، نیروی ناشی از واکنش بستر بر ورق، صفر است ولی وقتی که خلاف آن رخ دهد، واکنش فشاری بستر، که خطی در نظر گرفته می‌شود، متناسب است با جابجایی جانبی ورق. چنانچه بستر الاستیک را به صورت گروهی از فنرهای خطی در زیر ورق مدل کنیم انرژی پتانسیل الاستیک ناشی از تغییرشکل محوری فنرها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta U_e = \delta \{ \hat{U} \}^T [K_e] \{ \hat{U} \} \quad (23)$$

که در آن $[K_e]$ ماتریس سختی ناشی از حضور بستر به این صورت بیان می‌شود:

$$[K_e] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{.k_f} \cdot [N]^T [N] \quad (24)$$

در معادله بالا n و m به ترتیب تعداد فنرها در راستای طولی و عرضی ورق، k_f سختی هر فنر (معرف مدول بستر) است. به منظور کنارگذاری نیروی فنر در حالت کششی از تابع تماسی X استفاده شده است، به طوری که مقدار آن در حالت جدایی بین ورق و بستر ($w > 0$) صفر است و در حالتی که ورق تمایل به فرو رفتن در بستر الاستیک را دارد ($w < 0$) مقدار آن برابر یک خواهد بود.

$$\begin{cases} X = 0 & w \geq 0 & (\text{separation}) \\ X = 1 & w < 0 & (\text{contact}) \end{cases} \quad (25)$$

تغییرات انرژی کرنشی ورق مرکب لایه‌لایه ناشی از انرژی کرنش نیروهای غشایی و خمشی، بدون در نظر گرفتن کرنش گرین-لاگرانژ به صورت معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$\delta U = \int_V (\delta \{ \epsilon^{(01)} \}^T \{ N \} + \delta \{ \epsilon^{(1)} \}^T \{ M \}) dv \quad (26)$$

با قرار دادن معادله‌های به‌دست آمده در معادله (۲۶) داریم:

$$\delta U = \delta \{ \hat{U} \}^T [K_T] \{ \hat{U} \} - \delta \{ \hat{U} \}^T \{ F \}^{Tr} \quad (27)$$

$$[K_T] = [K_{mm}] + [K_{mb}] + [K_{bm}] + [K_{bb}]$$

$$\{ F \}^{Tr} = \{ F_m \}^{Tr} + \{ F_b \}^{Tr}$$

که در آن

$$[K_{mm}] = \int_V [C_M]^T [A] [C_M] dv \quad (28)$$

$$[K_{mb}] = [K_{bm}]^T = \int_V [C_M]^T [B] [C_B] dv \quad (29)$$

$$[K_{bb}] = \int_V [C_b]^T [D] [C_B] dv \quad (30)$$

$$\{ F_m \}^{Tr} = \sum_{k=1}^N ((Z_{k+1} - Z_k) \quad (31)$$

$$\int_A [C_M]^T [\bar{Q}]^{(k)} \{ \bar{\alpha} \}^{(k)} \Delta T dA \Big|_{\Delta T=cte} = [K_{mt}] \Delta T$$

$$\{ F_b \}^{Tr} = \sum_{k=1}^N ((Z_{k+1}^* - Z_k^*) \quad (32)$$

$$\int_A [C_B]^T [\bar{Q}]^{(k)} \{ \bar{\alpha} \}^{(k)} \Delta T dA \Big|_{\Delta T=cte} = [K_{bt}] \Delta T$$

تغییرات انرژی پتانسیل ورق، ناشی از بردار نیروهای درون‌صفحه یا غشایی $\{ N \} = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}^T$ ، وارد شده به میان‌صفحه ورق را همراه با در نظر گرفتن کرنش فون کارمن می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta V = - \int_V \delta \{ \epsilon^{(*)} \}^T \{ N \} dv = - \delta \{ \hat{U} \}^T [K_G] \{ \hat{U} \} \quad (33)$$

در معادله بالا $[K_G]$ ماتریس سختی هندسی به این صورت بیان می‌شود:

$$[K_G] = \int_V [H]^T [N_0] [H] dv \quad (34)$$

در معادله بالا ماتریس حاصل از نیروهای غشایی (درون‌صفحه) $[N_0]$ به صورت زیر بیان می‌شود:

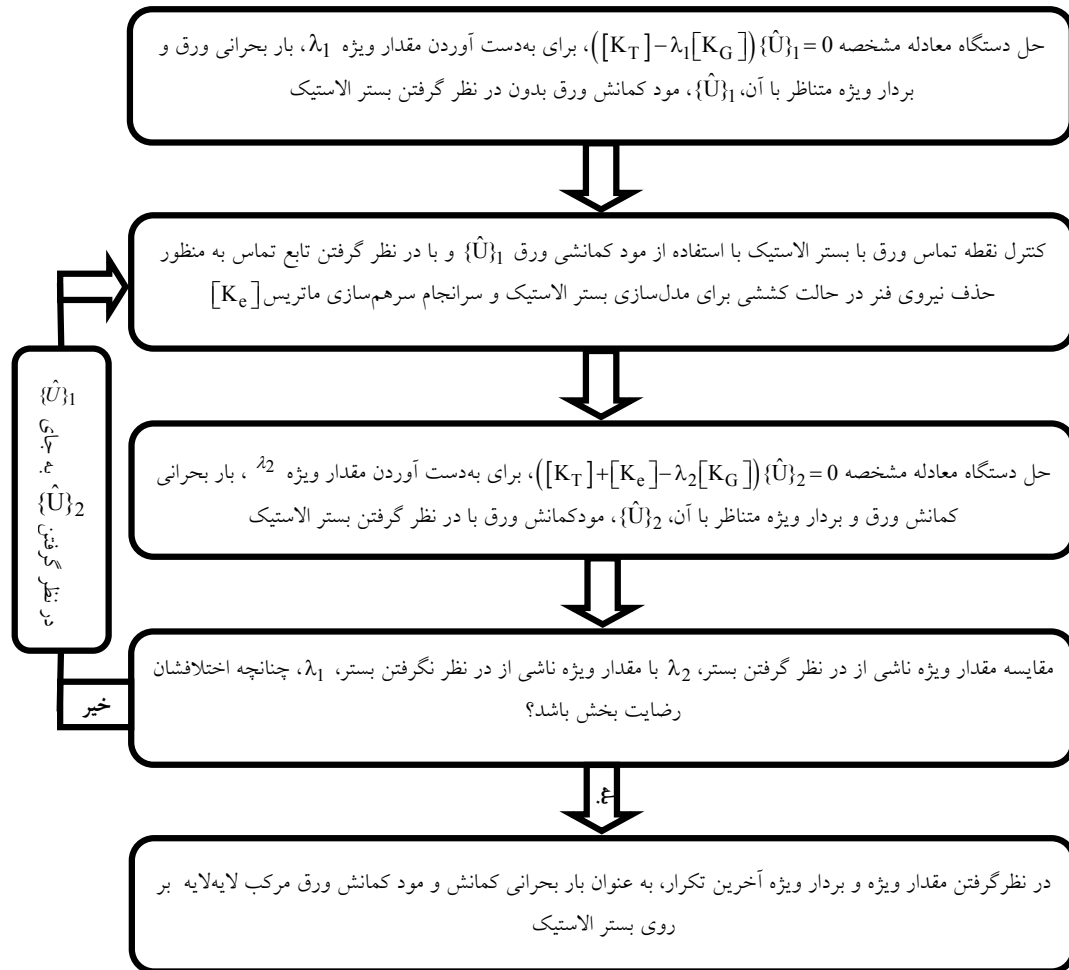
$$[N_0] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (35)$$

ماتریس $[H]$ در روش ریلی-ریتز برای ورق به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_w}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (36)$$

با توجه به اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل داریم:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta U_e + \delta V = 0 \quad (37)$$



شکل ۲- الگوریتم حل غیرخطی کمانش یک طرفه

سطح اولیه در درون سطح ورق (تنش های درون سطح اولیه بر واحد ضخامت) ناشی از اعمال نیروهای گرمایی، به منظور جاگذاری در عناصر ماتریس $[N_0]$ ، با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل و در حالت تعادل استاتیکی به دست آورد. بنابراین با مساوی قرار دادن کار خارجی ناشی از نیروهای وارد شده بر ورق با انرژی کرنش ورق، رابطه زیر به دست می آید:

$$[K_T] \{ \hat{U} \} = \{ F \}^{Tr} \quad (39)$$

که در آن بردار $\{ F \}^{Tr}$ ناشی از نیروهای گرمایی است. با استفاده از معادله (۳۹) و اعمال شرایط مرزی، میدان جابه جایی ورق، $\{ \hat{U} \}$ ، به دست می آید. در نهایت با قرار دادن میدان

با جانشینی معادله های (۲۳)، (۲۷) و (۳۳) در معادله بالا به معادله زیر می رسیم:

$$([K_T] + [K_e] - \lambda [K_G]) \{ \hat{U} \} = 0 \quad (38)$$

معادله بالا نمایانگر یک مسئله مقدار ویژه جبری است که به یک معادله ی سرشت نما منجر می شود. بعد از اعمال شرایط مرزی، کمترین مقدار ویژه، همان λ بار بحرانی کمانش ورق و بردار ویژه متناظر با آن مقدار ویژه، مود نخست کمانش ورق به دست می آید. در حل مسایل ورق مرکب با لایه های متقارن ماتریس $[B]$ در معادله (۷) صفر خواهد شد و در این حالت رفتار درون سطح مستقل از رفتار برون سطح می شود. پیش از حل معادله (۳۸)، ابتدا می بایست میزان توزیع نیروهای درون

جدول ۲- مقایسه کماتش گرمایی ورق تک لایه همسانگرد و شرایط مرزی SSSS

Present [RRM]	چو و همکاران [۱۶]	ماتسونگ [۲۰]
۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۶۵ (المان ۶×۶)	۰/۱۲۶۴

جدول ۳- مقایسه کماتش گرمایی ورق لایه لایه متقارن عمودچین و اریبچین، زیر شرایط مرزی SSSS

تعداد و نوع چینش لایه ها	a / b	ΔT_{cr} (° F) [16] (12*12)	ΔT_{cr} (° F) [21] (12*12)	ΔT_{cr} (° F) Present (RRM)
(0/45/-45/90) _s	۱/۲۵	۱۳/۷۱	۱۳/۷۵۱۹	۱۳/۷۴۲۴
(0/90/90/0) _s		۱۲/۲۶	۱۲/۲۶۱۰	۱۲/۲۶۱۰

میدان جابه جایی درون سطح u و v در کلیه مرزهای ورق صفر در نظر گرفته می شود.

در جدول (۲) کماتش گرمایی ورق تک لایه همسانگرد و شرایط مرزی SSSS درون سطح، با کار شیبایو و همکاران [۱۶] و ماتسونگ [۲۰] مقایسه شده است. ویژگی های مادی ورق به صورت $a/h=100$ ، $\nu=0.3$ ، $a/b=1$ ، $E=1.0e6$ ، $\alpha_0=1.0e-6$ هستند و ضریب دمای بحرانی به صورت $\alpha_0 T_{cr} \times 10^{-3}$ در جدول بیان شده است.

در جدول (۳) کماتش گرمایی ورق لایه لایه متقارن عمودچین و اریبچین، زیر شرایط مرزی SSSS، با کار شیبایو و همکاران [۱۶] و شی و همکاران [۲۱] مقایسه شده است. ورق دارای نسبت طول به عرض $a/b=1.25$ ، $[15 \times 12 \times 0.048] \text{in}$ و از نوع گرافیت-اپوکسی با ویژگی های مادی $E_1 = 22.5 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $E_2 = 1.17 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $\nu = 0.22$ ، $G_{12} = 0.66 \times 10^6 \text{ psi}$ ، $\alpha_1 = -0.04 \times 10^{-6} / ^\circ \text{F}$ و $\alpha_2 = 16.7 \times 10^{-6} / ^\circ \text{F}$ است.

شکل های زیر تغییر در دمای بحرانی ورق مرکب لایه لایه متقارن عمودچین و اریبچین، با شرایط مرزی SSSS، نسبت به پارامترهای a/b و θ ، در دو حالت یک طرفه و دوطرفه، نشان داده شده است. در کلیه مثال ها، ورق از نوع

جابه جایی ورق در معادله (۷)، میزان توزیع نیروهای درون سطح در ورق مرکب لایه لایه، برای جاگذاری در ماتریس $[N_0]$ ، به صورت زیر استخراج می شود:

$$\{N\} = [A][C_M][K_T]^{-1}\{F\}^{Tr} + [B][C_B][K_T]^{-1}\{F\}^{Tr} - \{N\}^{Tr} \quad (40)$$

از طرفی به خاطر طبیعت دوگانه بستر و نامشخص بودن ناحیه تماس ورق مرکب با بستر یک طرفه، معادله (۴۰) منجر به یک سیستم معادله های غیرخطی می شود و برای حل آن از الگوریتم ارایه شده در شکل (۲) استفاده می شود.

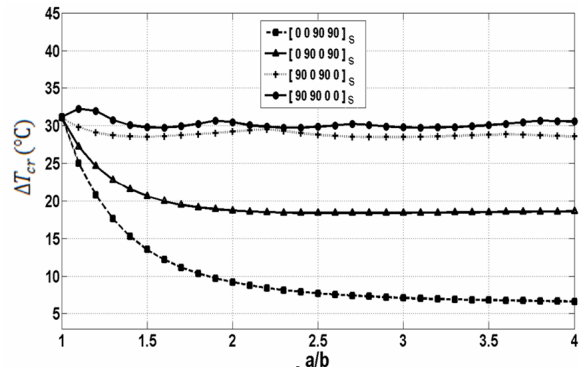
۵- دستاوردهای محاسباتی، مثال های عددی و مطالعات پارامتری

در این بخش به بررسی مثال هایی از کماتش گرمایی ورق مرکب لایه لایه بر روی بستر الاستیک یک طرفه زیر اثر گرمای یکنواخت بر روی کل دامنه ورق پرداخته و در هر نمونه برای اطمینان از درستی آنالیز حاضر، دستاوردهای به دست آمده با کارهای دیگران مقایسه شده است. با توجه به شماره گذاری مرزهای ورق نشان داده شده در شکل (۱) در کلیه مثال های حل شده s و c و f به ترتیب بیانگر تکیه گاه ساده، گیردار و آزاد برای شرایط مرزی خارج سطح اند. از طرفی در کلیه مثال ها

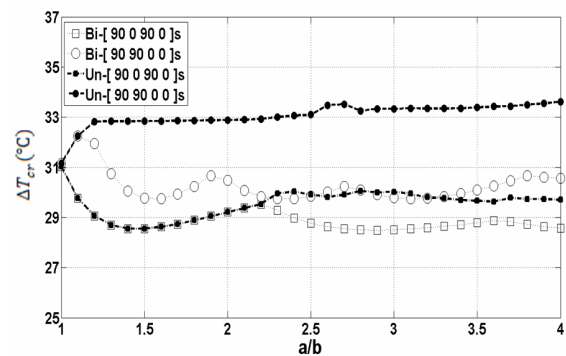
موج را در جهت x ، اختیار می‌کند و با توجه به شکل با افزایش نسبت طول به عرض، دمای بحرانی کاهش می‌یابد، به طوری که تا میزان $a/b=2$ دمای بحرانی به شدت کاهش و از نسبت $a/b > 2$ ، دمای بحرانی به صورت آرام کاهش می‌یابد. برخلاف آن دو ورق با لایه‌های $[(90/0)2]_s$ و $[902/02]_s$ ، با افزایش نسبت طول به عرض، مود کمانشی، تعداد $m > 1$ نیم موج را در جهت x ، اختیار می‌کند و با توجه به شکل با افزایش نسبت طول به عرض، دمای بحرانی به صورت نوسانی (به خاطر تغییر در مود کمانش) و تقریباً ثابت می‌یابد و این به خاطر تغییرات به وجود آمده در ماتریس سختی خمشی است.

شکل‌های (۴) و (۵) تأثیر کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین را در حضور بستر الاستیک، نشان می‌دهد. ترتیب چینش لایه‌ها به صورت $[02/902]_s$ ، $[(0/90)2]_s$ ، $[(90/0)2]_s$ و $[902/02]_s$ ، همانند ورق‌های استفاده شده در شکل (۳)، در نظر گرفته شده است. برای نمایش تأثیر بستر الاستیک، فنرهایی با سختی $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ ، به عنوان یک پارامتر متغیر در نظر گرفته می‌شود. شدت توزیع فنرهای بستر در هر راستا، به ازای هر یک متر ۴۰ عدد فنر در دو راستای طول و عرض ورق‌اند به طوری که تشکیل یک شبکه گسسته از فنرهای متمرکز را داده‌اند [۴].

با توجه به شکل (۴)، تا هنگامی که مود کمانشی ورق، تعداد $m=1$ نیم موج را اختیار می‌کند، سختی بستر یک‌طرفه هیچ تأثیری بر روی بار بحرانی کمانش ندارد، زیرا در این حالت ورق تمایل به دور شدن از صفحه بستر را دارد. بنابراین منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک‌طرفه دقیقاً مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش دو طرفه را طی می‌کند. با افزایش نسبت طول به عرض ورق مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق، تعداد نیم موج $m > 1$ را اختیار می‌کند، در این حالت ورق تمایل به نفوذ در بستر را دارد. بنابراین با توجه به میزان سختی بستر الاستیک، بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. تأثیر بستر الاستیک با سختی $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ بر افزایش دمای بحرانی، در ورق با نوع چینش لایه‌های



شکل ۳- تغییر دمای بحرانی، ΔT_{cr} (°F)، بر ورق‌های لایه‌لایه متقارن عمودچین، نسبت به تغییر پارامتر a/b



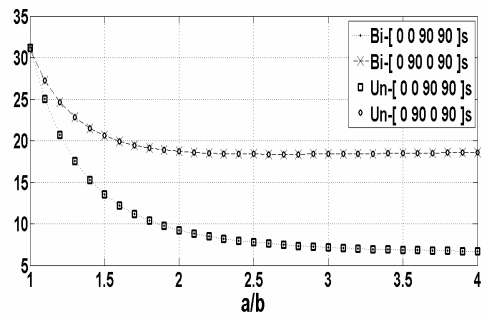
شکل ۴- تأثیر کمانش گرمایی دوطرفه و یک‌طرفه بر ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین

گرافیت-اپوکسی T300/5208 با ویژگی‌های مادی $E_1 = 22.5 \text{ GPa}$ ، $E_2 = 1.17 \text{ GPa}$ ، $G_{12} = 0.66 \text{ GPa}$ ، $\alpha_1 = -0.04 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ و $\alpha_2 = 16.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ، $\nu = 0.22$ است و ضخامت هر لایه 0.001 m در نظر گرفته شده است. در شکل (۳) تغییر در دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن عمودچین، نسبت به تغییرات پارامتر طول به عرض ورق a/b و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک، نشان داده شده است. ترتیب چینش لایه‌ها به صورت $[02/902]_s$ ، $[(0/90)2]_s$ ، $[902/02]_s$ و $[(90/0)2]_s$ در نظر گرفته شده است. دو ورق با لایه‌های $[02/902]_s$ و $[(0/90)2]_s$ ، با افزایش نسبت طول به عرض، همواره مود کمانشی با تعداد $m=1$ نیم

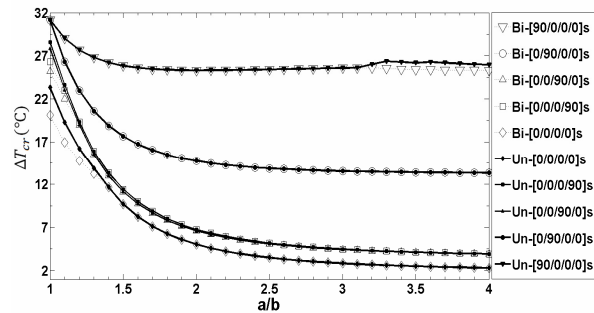
در حالت بیشینه افزایش، به ترتیب $[902/02]_s$ و $[(90/0)2]_s$ ، در حدود ۱۳٪ و ۶٪ است. در شکل (۵)، به علت آنکه مود کمانشی گرمایی ورق، همواره تعداد $m=1$ نیم موج را اختیار می‌کند، سختی بستر یک‌طرفه هیچ تاثیری بر روی دمای بحرانی کمانش ندارد و منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک‌طرفه دقیقاً مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش دو طرفه را با ازای افزایش نسبت طول به عرض ورق، طی می‌کند. شکل (۶) تأثیر تک‌لایه عمودسانگرد با زاویه رشته‌ها نود درجه را در قرارگیری بین لایه‌های ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین با لایه‌های عمودسانگرد تماماً صفر درجه نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۶)، هر چه لایه عمودسانگرد ۹۰ درجه به سمت لایه‌های بیرونی قرار می‌گیرد، دمای بحرانی متناظر با نسبت قرارگیری لایه ۹۰ درجه در لایه‌های درونی، افزایش می‌یابد. بنابراین نوع چینش ورق مرکب لایه‌لایه $[90/0/0/0]_s$ بیشترین دمای بحرانی را برای رخداد کمانش، با توجه به تغییر در پارامتر a/b ، تجربه می‌کند.

در شکل (۷) تغییر در دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اربچین، نسبت به تغییرات پارامتر θ ، بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک یک‌طرفه و در دو حالت نسبت طول به عرض ۱ و ۲، نشان داده شده است. ترتیب چینش لایه‌ها به صورت $[(+0/-0)_2]_s$ و $[(+0)_2 / (-0)_2]_s$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل برای هر دو نوع چینش، هنگامی که ورق مربعی ($a/b=1$) باشد، روند نمودار به صورت متقارن از ۰ تا ۹۰ درجه تغییر می‌کند، به طوری که تا زاویه ۴۵ درجه روندی افزایشی و بیشینه دمای بحرانی در زاویه ۴۵ درجه رخ می‌دهد. سپس روندی کاهشی را پیش می‌گیرد. ولی با افزایش نسبت طول به عرض، دیگر روند نمودار به صورت متقارن از ۰ تا ۹۰ درجه تغییر نمی‌کند، به طوری که بیشینه دمای بحرانی در ورق با نوع چینش لایه $[(+0/-0)_2]_s$ و $[(+0)_2 / (-0)_2]_s$ ، به ترتیب ۶۲ و ۶۰ برای $a/b=2$ پدید می‌آید.

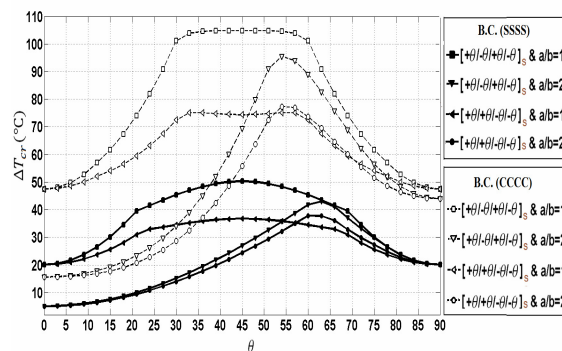
شکل (۸) و (۹) تأثیر پارامتر θ بر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اربچین، در دو حالت یک‌طرفه و دو طرفه و



شکل ۵- تأثیر کمانش گرمایی دو طرفه و یک طرفه بر ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین



شکل ۶- تغییر دمای بحرانی، ΔT_{cr} (°F) بر ورق‌های لایه‌لایه متقارن عمودچین، نسبت به تغییر پارامتر a/b ، با و بدون حضور بستر الاستیک بدون کشش



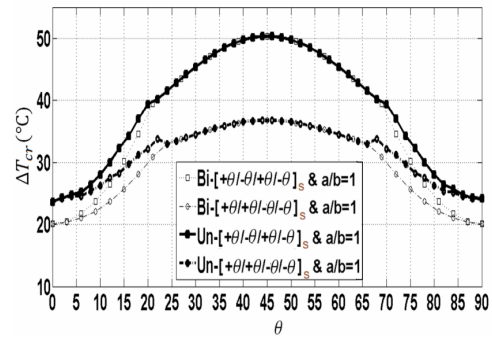
شکل ۷- تغییر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اربچین، نسبت به تغییر پارامتر θ ، بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک بدون کشش و در دو حالت نسبت طول به عرض ۱ و ۲

طرفه هیچ تاثیری بر روی بار بحرانی کمانش ندارد. در نتیجه منحنی تغییرات دمای بحرانی ورق در کمانش یک طرفه دقیقاً منطبق بر مسیر تغییرات دمای بحرانی ورق، در کمانش دو طرفه است. ولی هنگامی که زاویه قرارگیری رشته‌ها در محدوده زاویه‌های یاد شده در بالا، قرار نداشته باشد، مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق، تعداد نیم‌موج $m > 1$ را اختیار می‌کند. در این حالت ورق تمایل به نفوذ در بستر را دارد و با توجه به میزان سختی بستر الاستیک، دمای بحرانی کمانش، افزایش می‌یابد. تأثیر بستر الاستیک با سختی $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ ، بر افزایش دمای بحرانی، در دو ورق، با نوع چینش لایه‌های $[90/0/2]_s$ و $[(90/0)2]_s$ ، در حالت $a/b=1$ و $a/b=2$ در حالت بیشینه افزایش، حدود ۱۸٪ است.

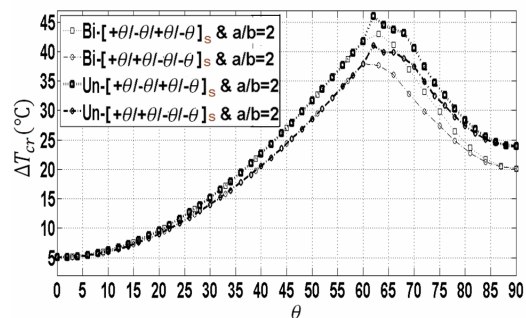
شکل (۱۰) مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق مرکب لایه‌لایه، در دو حالت دوطرفه (بدون وجود بستر الاستیک) و یک طرفه (با وجود بستر الاستیک)، برای ورق با نوع چینش $[90/0]_s$ ، با توجه به شکل (۴) و به ترتیب برای نسبت‌های $a/b=1.5$ ، $a/b=3$ و $a/b=4$ ، نشان داده شده است. برای تأثیرگذاری بستر از فنرهایی با سختی $k_f = 300 \text{ N/m}$ استفاده شده است و شدت توزیع فنرها نیز همانند مثال پیش است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به دلیل سختی نسبتاً کم بستر، برای نسبت‌های $a/b=3$ و $a/b=4$ ، ورق در بستر به مقدار ناچیزی نفوذ می‌کند.

۶- دستاوردها

در این مقاله با استفاده از روش ریلی ریتز و بر اساس نظریه کلاسیک ورق، کمانش گرمایی یک طرفه ورق‌های مستطیلی مرکب لایه‌لایه بر روی بستر الاستیک بدون کشش بررسی شد. در روش ریلی ریتز از چند جمله‌ای مثلث خیام-پاسکال برای رفتار برون صفحه و برای رفتار درون صفحه از تابع‌های شکل طبقاتی استفاده شد. تأثیر نسبت طول به عرض ورق، زاویه چیدمان رشته‌ها، شرایط مرزی متفاوت، و نوع چینش لایه‌ها، با و بدون وجود بستر الاستیک بدون کشش، بر روی میزان دمای

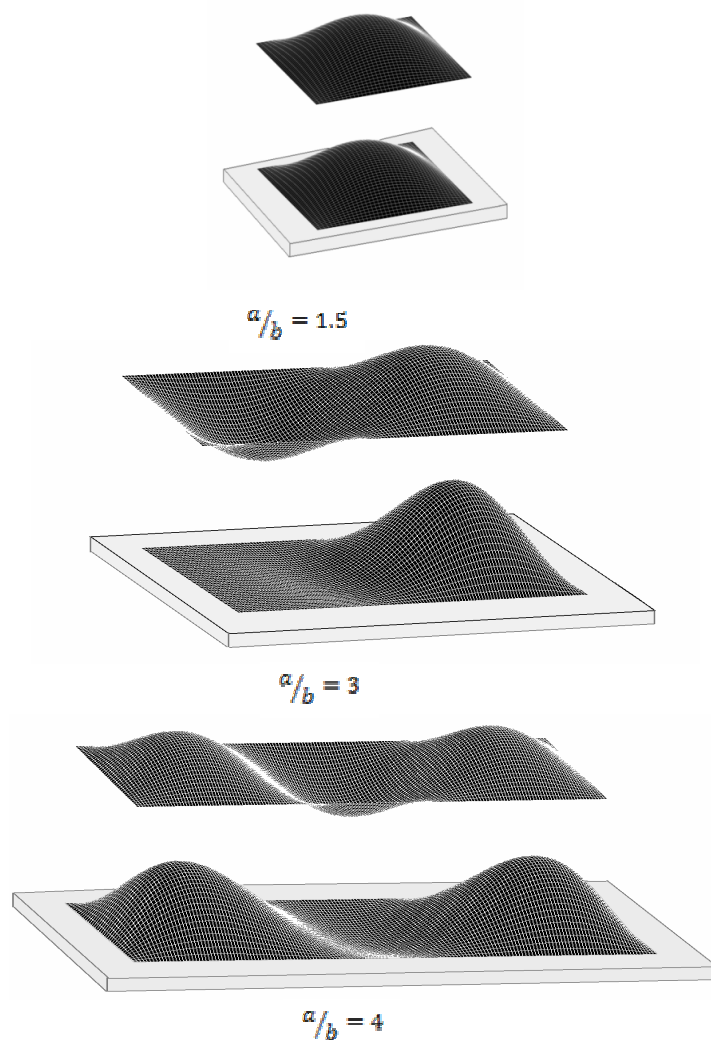


شکل ۸- تأثیر پارامتر θ بر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اریب‌چین، در دو حالت یک طرفه و دو طرفه و برای نسبت $a/b=1$



شکل ۹- تأثیر پارامتر θ بر دمای بحرانی ورق لایه‌لایه متقارن اریب‌چین، در دو حالت یک طرفه و دو طرفه و برای نسبت $a/b=2$

به ترتیب برای نسبت‌های $a/b=1$ و $a/b=2$ را نشان می‌دهد. برای تأثیرگذاری بستر از فنرهایی با سختی $k_f = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ استفاده شده است و شدت توزیع فنرها همانند مثال پیش است. همان‌طور که، به ترتیب، در شکل‌های (۸) و (۹) مشاهده می‌شود، هنگامی که زاویه قرارگیری رشته‌ها در ورق‌های $[(+0/-0)2]_s$ و $[(+0)2 / (-0)2]_s$ ، در محدوده زاویه ۲۳ تا ۶۷ درجه برای نسبت $a/b=1$ و محدوده زاویه ۰ تا ۶۰ درجه برای نسبت $a/b=2$ ، قرار بگیرند، مود کمانشی ورق، تعداد $m=1$ نیم‌موج را اختیار می‌کند. بنابراین در این حالت ورق تمایل به دور شدن از صفحه بستر را دارد و سختی بستر یک



شکل ۱۰- مود حاصل از دمای بحرانی کمانش ورق مرکب لایه‌لایه، برای ورق با نوع چینش $[(90/0)_2]_s$ ، در دو حالت دوطرفه (بدون وجود بستر الاستیک) و یک‌طرفه (با وجود بستر الاستیک) و $k_f = 300 \text{ N/m}$

۱. تاثیر بستر الاستیک بدون کشش بر روی میزان دمای بحرانی به شکل مود حاصل از کمانش گرمایی ورق مرکب لایه‌لایه بستگی دارد. هنگامی که ورق زیر افزایش دما، مود کمانشی $m=1$ در جهت طول ورق را تجربه کند، ورق تمایل به دور شدن از سطح بستر را دارد و بنابراین سختی بستر هیچ تاثیری بر روی میزان دمای بحرانی و مود حاصل از آن ندارد. ولی چنانچه ورق زیر افزایش دما، مود کمانشی $m>1$

بحرانی و شکل مود کمانشی حاصل از آن، مورد بررسی قرار گرفت. دستاوردهای به دست آمده با کارهایی که تاکنون انجام گرفته که عبارت‌اند از کمانش یک‌طرفه (با وجود بستر) ورق تک‌لایه همسانگرد زیر اثر نیروهای درون‌سطح مکانیکی و کمانش گرمایی دوطرفه (بدون وجود بستر) ورق مرکب لایه-لایه مقایسه شد و تطابق بسیار قابل قبولی در روش حل مشاهده شد. دستاوردهای به دست آمده نشان می‌دهد که:

$m=1$ در جهت طول ورق پدید می‌آید. در این شرایط سختی بستر هیچ تاثیری بر روی میزان دمای بحرانی و مود حاصل از آن ندارد.

۴. با توجه به شکل‌های (۶) هر چه جایگاه تک‌لایه عمودسانگرد با زاویه رشته‌ها 90° درجه به سمت لایه‌های بیرونی ورق مرکب لایه‌لایه متقارن عمودچین با لایه‌های عمودسانگرد تماماً صفر درجه، قرار می‌گیرد بار بحرانی کمانش دوطرفه افزایش می‌یابد. بنابراین نوع چینش ورق مرکب لایه‌لایه [90/0/0/0]s، بیشترین دمای بحرانی را برای کمانش، با توجه به تغییرات پارامتر a/b ، تجربه می‌کند.

در جهت طول ورق را تجربه کند، ورق تمایل به وارد شدن در سطح بستر را دارد و بنابراین با افزایش سختی بستر، میزان دمای بحرانی افزایش و مود کمانشی حاصل از آن نیز به گونه‌ای تغییر می‌کند که با توجه به افزایش سختی بستر، ورق کمتر در بستر نفوذ کند.

۲. مود کمانش گرمایی دو طرفه ورق مرکب لایه‌لایه و در نتیجه آن بار بحرانی کمانش گرمایی یک‌طرفه وابستگی شدید به نسبت طول به عرض ورق، زاویه چیدمان رشته‌ها، شرایط مرزی متفاوت، و نوع چینش لایه‌ها دارد.

۳. برای ورق مربعی مرکب لایه‌لایه اریب‌چین با تکیه‌گاه چهار طرف ساده، در حالت کمانش دوطرفه، بیشینه دمای بحرانی در زاویه 45° درجه رخ می‌دهد و مود کمانشی

مراجع

1. Shawan, K., and Waas, A., "A Mechanical Model for the Buckling of Uni-laterally Constrained Rectangular Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 75-87, 1994.
2. Smith, S.T., Bradford, M. A., Oehlers D.J., "Buckling of Uni-laterally Constrained Rectangular Plates in Pure Shear," *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 443-453, 1997.
3. Shawan, K., and Waas, A., "Buckling of Uni-laterally Constrained Plates: Applications to the Study of Delaminations in Layered Structures," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 335(6), pp. 1009-1039, 1998.
4. Smith, S. T., Bradford, M. A., and Oehlers, D.J., "Local Buckling of Side-Plated Reinforced Concrete Beams. 1: Theoretical Study," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126(6), pp. 622-634, 1999a.
5. Smith, S.T., Bradford, M. A., Oehlers, D.J., "Local Buckling of Side-Plated Reinforced Concrete Beams. II: Experimental Study," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126(6), pp. 622-634, 1999b.
6. Shahidi, A.R., Hedayati, P., Azhari, M., and Bradford, M.A., "On the Use of the Lagrange Multiplier Technique for the Uni-lateral Local Buckling of Point-Restrained Plates, with Application to Side-Plate Concrete Beams in Structural Retrofit," *International Journal of Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 26(6), pp. 673-685, 2007.
7. Shen, H.S., Yu, L., "Nonlinear Bending Behavior of Reissner-Mindlin Plate with Free Edges Resting on Tensionless Elastic Foundations," *International Journal of Solif and Structures*, Vol. 41, pp. 4809-4825, 2004.
8. Gossard, M.L., Seide, and P., Roberts, W.M., "Thermal Buckling of Plate," NACA TN 2771, 1952.
9. Tauchert, T.R., "Thermal Buckling of Thick Antisymmetric Angle-Ply Laminates," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 10(2), pp. 113-24, 1987.
10. Thangaratnam, K.R., Palaninathan., and Ramachandran, J., "Thermal Buckling of Composite Laminated Plates," *Computers and Structures*, Vol. 32(5), pp. 1117-24, 1989.
11. Sun, L.X., and Hsu, T.R., "Thermal Buckling of Laminated Composite Plates with Transverse Shear Deformation," *Computers Structures*, Vol. 36(5), pp. 883-9, 1990.
12. Chen, L.W., and Chen, L.Y., "Thermal Buckling of Laminated Composite Plates," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 10(4), pp. 345-56, 1987.
13. Chen, L.W., and Chen, L.Y., "Thermal Buckling Analysis of Composite Laminated Plates by the Finite Element Method," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 12(1), pp. 41-56, 1989.
14. Chen, W.J., Lin, P. D., and Chen, L. W., "Thermal Buckling Behavior of Thick Composite Laminated Plates under Nonuniform Temperature Distribution," *Computers Structures*, Vol. 41(4), pp. 637-45, 1991.
15. Huang, N.N., and Tauchert, T.R., "Thermal Buckling of Clamped Symmetric Laminated Plates," *Thin-*

- Walled Structures*, Vol. 13, pp. 259-273, 1992.
16. Kabir, H.R.H., and Askar, H., and Chaudhuri, R. A., "Thermal Buckling Response of Shear Flexible Laminated Anisotropic Plates Using a Three-Node Isoparametric Element," *Composite Structures*, Vol. 59, pp. 173-187, 2003.
 17. Shiau, L.C., Kuo, S.Y., and Chen, C. Y., "Thermal Buckling Behavior of Composite Laminated Plates," *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 508-514, 2010.
 18. Shiau, L.C., and Kuo, S.Y., "Thermal Buckling of Composite Sandwich Plates," Vol. 32(1), pp. 57-72, 2004.
 19. Shen, H.S., "Thermal Postbuckling Analysis of Imperfect Reissner-Mindlin Plates on Softening Nonlinear Elastic Foundation," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, pp 259-270, 1998.
 20. Shen. H.S., "Nonlinear Analysis of Simply Supported Reissner-Mindlin Plates Subjected to Lateral Pressure and Thermal Loading and Resting on Two-parameter Elastic Foundation," *Engineering Structures*, Vol. 23, pp 1481-1493, 2000.
 21. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
 22. Zienkiewicz, O.C., and Taylor R.L., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, Vol. 2, 1989.
 23. Matsunaga, H. "Thermal Buckling of Cross-ply Laminated Composite and Sandwich Plates According to a Global Higher-Order Deformation Theory," *Computers Structures*, Vol. 68(4), pp. 439-54, 2005.
 24. Shi, Y., Lee, R.Y.Y., and Mei, C., "Thermal Postbuckling of Composite Plates Using the Finite Element Modal Coordinates Method," *Journal of Thermal Stress*, Vol. 22(6), pp. 595-614. 1999.