بهبود روش انتگرال‌گیری در روش بدون المان گالرکین با کمک میان‌یابی کریگینگ

سید حسین دیباجیان[1*]، محمود فرزین[1]، سید حمید هاشم الحسینی[2] و محمد گندم‌کار[1]

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲. دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۷/۲۵– دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۳/۰۴/۲۵)

چکیده – در این مقاله انتگرال‌گیری عددی مورد نیاز در روش بدون المان گالرکین با کمک روش میان‌یابی کریگینگ بهبود یافته است. در روش ارائه شده، تابع انتگرال‌ده با رویه تولید شده توسط کریگینگ ساده جایگزین شده و سپس وزن نقاط انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه سطح تولید شده توسط میان‌یابی کریگینگ با کمک ابر نقاط و بدون نیاز به شبکه تولید می‌گردد، بنابراین وزن نقاط انتگرال‌گیری در کل دامنه در یک مرحله و بدون نیاز به المان محاسبه می‌گردد. اگر چه در ظاهر می‌توان فرآیند بیان شده را با روش‌های دیگر میان‌یابی بدون شبکه انجام داد، ولی به‌دلیل سادگی روش کریگینگ، استفاده از این میان‌یابی ساده‌تر و عملی‌تر خواهد بود. از طرف دیگر به‌دلیل ویژگی خاص روش کریگینگ، در این مقاله از توابع میان‌یاب کریگینگ برای بیان توابع شکل نیز استفاده می‌شود که به‌دلیل ارضاء شرط دلتای کرونیکر، وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی صورت می‌گیرد. روش حاضر در مسائل الاستواستاتیک دوبعدی استفاده شده و کارایی روش نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: روش بدون المان گالرکین، انتگرال‌گیری عددی، روش میان‌یابی کریگینگ، روش‌های بدون المان.

Improvement of Integration in Element Free Galerkin Method using Kriging Interpolation

S. H. Dibajian[1*], M. Farzin[1], S. H. Hashemolhoseini[2] and M. Gandomkar[1]

1. Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology
2. Department of Mining Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: ***In this paper, the numerical integration needed in the element free Galerkin method is improved, using Kriging interpolation. In the presented method, integrand is replaced by a surface which is produced by simple Kriging. Then the weights of integration points are calculated. Since the surface produced by simple Kriging is obtained by cloud of points and without back ground mesh, the weights of integration points are calculated in one step in the whole domain and without any element. Although any mesh free interpolation approach can be used in this procedure, simple Kriging is easier and more applicable. On the other hand, Kriging method is used for construction of shape functions. Hence, due to the satisfaction of Kroneker delta, essential BC can be easily implemented. The present method is used in 2-D elasto-static problems and effectiveness is proven.***

Keywords: ***Element free Galerkin method, numerical integration, Kriging interpolation method, element free methods.***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: dibajian@me.iut.ac.ir

فهرست علائم

$u(x_0)$	متغیر میدان	w_i	وزن نقاط انتگرال‌گیری
$u^h(x_0)$	متغیر میدان تخمین زده شده	σ_{ij}	مؤلفه تانسور تنش
λ_i	تابع شکل	f_i	مؤلفه بردار نیرو
i	بردار توابع شکل	$\bar{u}_i$	شرط مرزی ضروری
$\hat{\mathbf{U}}$	بردار متغیرهای میدان	Γ_s	مرز تحت شرط مرزی ضروری
C_{ij}	تابع کوواریانس	$\bar{t}_j$	مؤلفه بردار تنش سطحی
h_{ij}	فاصله بین دو نقطه	Γ_n	مرز تحت شرایط طبیعی
c&a	مقادیر ثابت در تابع کوواریانس	n_i	مؤلفه بردار عمود بر سطح
r_{inf}	شعاع ناحیه اثر	$\mathbf{K}$	ماتریس سختی
η_i	ضرایب لاگرانژ	$\mathbf{F}$	بردار نیرو
Ω	دامنه مسأله	ϕ_I	تابع شکل گره Iام

۱- مقدمه

روش اجزاء محدود پرکاربردترین روش عددی حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در مسائل مکانیک جامدات است. در این روش المان نقش اساسی در بنا نهادن توابع شکل و محاسبه انتگرال‌گیری دارد. به‌طورکلی به‌منظور محاسبه انتگرال در روش اجزاء محدود، حوزه مسأله به المان‌هایی تقسیم شده و سپس هر المان با استفاده از نگاشت همدیس[۱] به المان استاندارد نگاشت داده می‌شود. در المان استاندارد با استفاده از روش تربیع گاوس[۲] مقدار انتگرال به‌دست می‌آید. با توجه به وابستگی روش اجزاء محدود به شبکه، برخی محدودیت‌ها مانند نیاز به شبکه‌بندی مجدد[۳] در تغییرشکل‌های بزرگ به خاطر اعوجاج بیش از حد المان[۴] وجود دارد. از این رو طی سال‌های گذشته روش‌های بدون شبکه توسط محققین مختلف برای غلبه بر مشکلات روش اجزاء محدود ارائه شده است [۱-۱۴].

به‌طور کلی در بین روش‌های بدون المان که تاکنون ارائه شده است، روش‌های مبتنی بر فرم ضعیف دارای دقت بیشتری هستند. یکی از مهم‌ترین این روش‌ها، فرمول‌بندی فرم ضعیف گالرکین[۵] است [۱۵-۱۹] که در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است. به‌طورکلی استفاده از شبکه‌بندی پس زمینه به‌عنوان یک تکنیک استاندارد انتگرال‌گیری در این روش به‌شمار می‌رود. آشکار است که در صورت استفاده از شبکه به‌منظور انتگرال‌گیری، عملاً وابستگی به شبکه از بین نخواهد رفت و همچنان وابستگی به شبکه باعث برخی محدودیت‌ها خواهد شد. تلاش‌های زیادی صورت گرفته تا انتگرال‌گیری در این روش بدون شبکه انجام گیرد. تکنیک انتگرال‌گیری گره‌ای[۶] [۲۰-۲۲] یکی از راه حل‌های مورد توجه برای حذف شبکه‌بندی پس زمینه است. در این روش، انتگرال‌گیری برروی دامنه مسأله از ارزیابی مقادیر گره‌ای حاصل می‌شود که در آن وزن هر نقطه گره‌ای، نسبت سطح وابسته به آن گره به سطح کل است. بیسل و بلیچکو [۲۰] از این تکنیک در روش بدون المان گالرکین استفاده کرده و سپس تکنیک خود را با افزودن ترم‌های پایدار کننده به فرم ضعیف توسعه دادند. اما در کل دقت این روش کمتر از روش اصلی بدون المان گارکین است. چن و همکاران [۲۱و۲۲] روش انتگرال‌گیری گره‌ای وفق کننده پایدار[۷] را برای حذف نوسانات پاسخ‌ها براساس تکنیک انتگرال‌گیری گره‌ای معرفی کردند. به‌دلیل استفاده از دیاگرام وورونی[۸]، روش انتگرال‌گیری گره‌ای را نمی‌توان به‌عنوان روش بدون شبکه واقعی به‌شمار آورد.

تکنیک انتگرال‌گیری مونت کارلو[۹] [۲۳] توسط روسکا و

لیتاو[10] [۲۴] برای انجام انتگرال‌گیری استفاده شد. توالی‌های مختلف شبه مونت کارلو[11] در این روش تولید و با آزمایش در مسائل سه بعدی الاستیک مقایسه شد. اما تعداد نقاط انتگرال‌گیری لازم در این روش از تعداد نقاط لازم در روش‌های دیگر بیشتر است.

خسروی فرد و همتیان [۲۵] از نظریه گرین[12] برای انتگرال‌گیری در روش‌های بدون شبکه استفاده کردند و آن را روش انتقال کارتزین[13] نامیدند. در این روش با استفاده از تئوری گرین، انتگرال دامنه به یک انتگرال دوگانه، شامل انتگرال مرزی و انتگرال یک بعدی تبدیل شد. آنها این روش را در مسائل خطی و تغییر شکل بزرگ استفاده کرده و نشان دادند که این روش بدون شبکه واقعی بوده و می‌تواند در مقایسه با روش بدون المان گالرکین اصلی دقت را افزایش داده و زمان را نیز کاهش دهد. با این وجود در مسائل پلاستیسیته به‌دلیل لزوم ذخیره شدن تنش‌ها و متغیرهای حالت در نقاط محاسباتی، استفاده از این روش محدود خواهد بود.

پیشرفتی که در این مقاله ارائه شده، استفاده از میان‌یابی کریگینگ در محاسبه وزن‌های نقاط انتگرال‌گیری[14] در روش بدون شبکه گالرکین است. بهبود انجام گرفته برروی انتگرال‌گیری باعث خواهد شد که بدون کاهش دقت در انتگرال‌گیری، نیاز به شبکه پشت زمینه به‌طور کامل حذف شود. در این روش نقاط انتگرال‌گیری بدون نیاز به نظم خاصی در دامنه پخش می‌شوند؛ سپس مقدار وزن‌های نقاط انتگرال‌گیری با استفاده از روش پیشنهاد شده محاسبه می‌شود. به منظور محاسبهٔ دقیق نتایج، باید تعداد و چینش مناسبی برای نقاط انتگرال‌گیری استفاده شود. از نظر کاربرد عملی می‌توان روش حاضر را شبیه روش انتگرال‌گیری نقطه‌ای دانست با این تفاوت که در این روش نیازی به افراز دامنه با کمک دیاگرام ورونی نیست. تعداد نقاط انتگرال‌گیری در این روش کمتر از سایر روش‌ها بوده و حتی می‌تواند در حد تعداد نقاط گره‌ای باشد. دقت جواب نمونه‌های مختلفی از توزیع نقاط انتگرال‌گیری در چند مثال مقایسه شده‌اند. لازم به‌ذکر است که تاکنون از روش میان‌یابی کریگینگ تنها به‌منظور ساختن توابع شکل در روش‌های بدون شبکه استفاده شده است.

به‌خاطر عدم ارضای شرط دلتای کرونیکر در برخی توابع میان‌یاب در روش‌های بدون شبکه، وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی روش اجزا محدود صورت نمی‌گیرد. در این روش از توابع میان‌یاب کریگینگ برای بیان توابع شکل نیز استفاده می‌شود. با استفاده از توابع میان‌یاب کریگینگ که شرط دلتای کرونیکر[15] را ارضا می‌کنند وارد کردن شرایط مرزی ضروری به سادگی امکان‌پذیر است.

جواب‌های عددی کاربردی بودن این تکنیک انتگرال‌گیری را در فرمول‌بندی فرم ضعیف کلی در مسائل دو بعدی الاستواستاتیک نشان می‌دهند.

ترتیب بخش‌ها به این شکل است: در بخش دوم تئوری میان‌یابی کریگینگ مطالعه شده و کریگینگ ساده و عام توضیح داده می‌شود. در بخش سوم تکنیک ارائه شده برای به‌دست آوردن وزن‌های نقاط انتگرال‌گیری شرح داده شده و با مقادیر گاوس مقایسه شده است. در بخش چهارم معادلات حاکم و روش گسسته‌سازی مسائل الاستواستاتیکی دو بعدی ارائه شده است. در بخش پنجم مثال‌های عددی ارائه شده و در آخر نتیجه‌گیری در فصل ششم ذکر شده است.

۲- میان‌یابی کریگینگ

میان‌یابی کریگینگ اولین بار در سال ۱۹۶۲ توسط مترون ارائه گردید [۲۶]. طی سال‌های بعد این روش در مسائل زمین‌آمار توسعه زیادی یافت. انواع مختلفی از روش کریگینگ وجود دارد که می‌توان به روش‌های کریگینگ ساده[16] و عام[17] اشاره نمود. در میان‌یابی کریگینگ ساده متغیر میدان $u(x_0)$ به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود [۲۷]:

$$u(x_0) \approx u^h(x_0) = \sum_{i}^{n} \lambda_i u_i = \mathtt{i}^T \hat{\mathbf{U}} \qquad (۱)$$

$$\mathtt{i} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]^T \quad , \quad \hat{\mathbf{U}} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$$

در این رابطه u_iها مقادیر گره‌ای در x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ و λ_iها مقادیر توابع شکل در نقاط گره‌ای است که از رابطه زیر

حاصل می‌شوند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ \vdots \\ C_{0n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_0} \tag{۲}$$

کـــــــه در آن $C_{ij} = \mathrm{Cov}(h_{ij}) = ce^{-(\frac{h_{ij}}{a})^2}$ و $h_{ij} = \left\| x_i - x_j \right\|$ فاصله بین نقـاط i و j اسـت. ضـرایب a و c را مـی‌تـوان بـا استفاده از روش‌های منتشر شده آمـاری انتخـاب کـرد [۲۷]. در این مقاله ضرایب به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{aligned} &a = \alpha\, r_{inf} \qquad\qquad 1 \le \alpha \le 3 \\ &c = 1 \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن r_{inf} شعاع ناحیه اثر[۱۸] است. با اسـتفاده از رابطـه (۲) ضرایب λ_i حاصل می‌شوند.

اگر چه میان‌یابی کریگینگ ساده در زمین‌آمار کاربرد وسیعی دارد، با این وجود معمولاً برای تعیین توابع شکل در روش‌هـای عددی مناسب نیست. بنابراین برای مشخص کردن توابع شـکل از روش دیگری به نام کریگینگ عام استفاده مـی‌شـود [۲۷]. در میان‌یابی کریگینگ عام λ_iها در رابطه (۲) و در حالت دو بعدی به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & \dots & {y_1}^k \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & \dots & {y_2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 & x_n & y_n & x_ny_n & \dots & {y_n}^k \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ y_1 & y_2 & & y_n & & & & & & \\ x_1y_1 & x_2y_2 & \dots & x_ny_n & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ {y_1}^k & {y_2}^k & \dots & {y_n}^k & 0 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ \vdots \\ C_{0n} \\ 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ x_0y_0 \\ \vdots \\ {y_0}^k \end{pmatrix} \tag{۴}$$

که در آن η_iها ضرایب لاگرانژ هستند.

با توجه به اینکه کریگینگ عام نسبتاً پیچیده است، اسـتفاده از آن بـرای محاسـبه وزن‌هـای انتگـرال‌گیـری مناسـب نیسـت. بنابراین در این مقاله برای اولین بار از میان‌یابی کریگینگ سـاده برای محاسبه وزن‌های انتگـرال‌گیـری اسـتفاده شـده اسـت. در بخش ۳ به بررسی روش انتگرال‌گیری پرداخته خواهد شد.

۳- تخمـــین مقـــادیر وزن نقـــاط انتگـــرال‌گیـــری و انتگرال‌گیری روی ناحیه اثر

در این مقاله برای تخمین انتگرال میدان از روش کریگینگ ساده استفاده شده است. بنابراین با کمـک رابطـه (۲) انتگـرال میـدان به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x)d\Omega &\approx \int_\Omega u^h(x)d\Omega = \int_\Omega \mathbf{i}\,\hat{\mathbf{U}}d\Omega \\ &= \int_\Omega \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\hat{\mathbf{U}}d\Omega = \mathbf{A}^{-1}\int_\Omega \mathbf{V}d\Omega\, \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\mathbf{V} = \left[\mathrm{Cov}(x_1, x) \quad \cdots \quad \mathrm{Cov}(x_n, x)\right]^T$ که از تعریف رابطه (۲) استخراج می‌شود. با توجه به رابطه زیر:

$$\int_\Omega u(x)d\Omega \approx \sum w_i u_i = \mathbf{W}^T\hat{\mathbf{U}} \tag{۶}$$

و به کمک رابطه (۵) می‌توان نوشت:

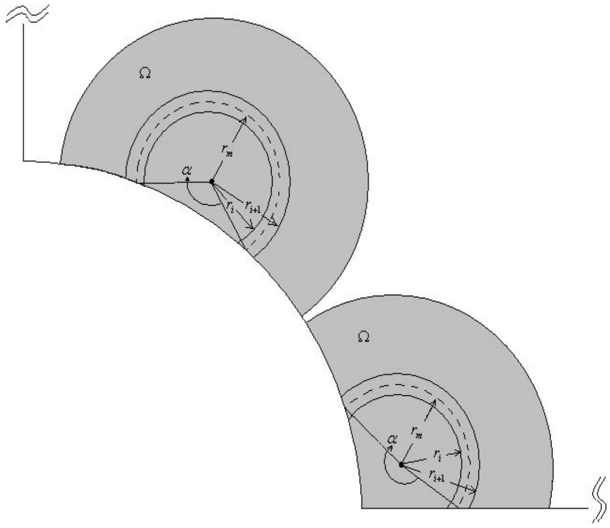
$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}\int_\Omega \mathbf{V}d\Omega \tag{۷}$$

یا به‌صورت گسترده:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(x_1, x_1) & \mathrm{Cov}(x_1, x_2) & \dots & \mathrm{Cov}(x_1, x_n) \\ \mathrm{Cov}(x_2, x_1) & \mathrm{Cov}(x_2, x_2) & \dots & \mathrm{Cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(x_n, x_1) & \mathrm{Cov}(x_n, x_2) & \dots & \mathrm{Cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \int_\Omega \mathrm{Cov}(x_1, x)d\Omega \\ \int_\Omega \mathrm{Cov}(x_2, x)d\Omega \\ \vdots \\ \int_\Omega \mathrm{Cov}(x_n, x)d\Omega \end{bmatrix} \tag{۸}$$

که در آن w_iها وزن نقاط انتگرال‌گیری هستند.

عبارت انتگرالی که در طرف راست رابطـه (۸) وجـود دارد به‌صورت $\int_\Omega \mathrm{Cov}(x_i, x)d\Omega$ بوده و باید روی ناحیـه اثـر Ω

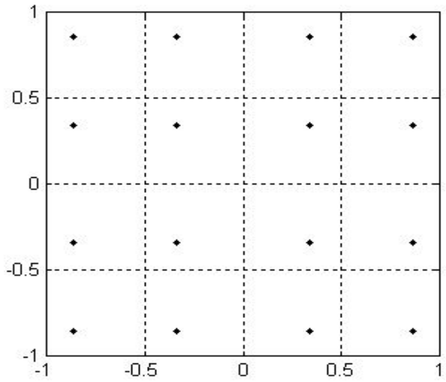


شکل ۱- دامنه محاسبه کوواریانس و زیردامنه‌های آن در تقاطع با مرزها

محاسبه شود. پاسخ این انتگرال بـرای نقـاطی کـه دارای فاصـله زیادی از مرز هستند به‌طور دقیق معلوم است اما اگر ناحیـه اثـر نقطه انتگرال‌گیری توسط دامنه مسأله قطع شـود، محاسـبه ایـن انتگرال ساده نخواهد بود. در شکل (۱) دو نقطه انتگـرال‌گیـری فرضی و ناحیه اثر آن Ω که توسط مرز قطع شده دیده می‌شود. در این مقاله بـرای محاسـبه انتگـرال $\int_{\Omega} \mathrm{Cov}(x_i, x) d\Omega$ روی دامنه اثر Ω در حالت دوبعدی، شعاع ناحیه اثر دایـره‌ای شـکل به چند قسمت تقسیم می‌شود. در هر قسمت یک حلقه از شعاع r_i تا r_{i+1} تولید می‌گردد که در شکل (۱) نشان داده شده است. انتگرال به سادگی از مجموع انتگرال‌های روی حلقه‌ها به‌دسـت می‌آید که در رابطه زیر دیده می‌شود:

$$\int_{\Omega} \mathrm{Cov}(x_i, x) d\Omega = \iint_{\Omega} c_0 e^{-(\frac{r}{a})^2} r dr d\theta = \sum_i 2\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} c_0 e^{-(\frac{r}{a})^2} r\, dr \qquad (۹)$$

اگـر هـر کـدام از حلقـه‌هـا مـرز مسـأله را قطـع کنـد، نسـبت $(2\pi - \alpha)/2\pi$ در انتگـــرال روی همـــان حلقـــه یعنـــی $2\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} c_0 e^{-(\frac{r}{a})^2} r\, dr$ ضرب شده تا انتگرال رابطه (۹) تصحیح شود. مقدار α از روی هندسـه مسـأله و بخـش قطـع شـده آن



شکل ۲- المان مربعی با ۱۶ نقطه انتگرال‌گیری

حلقه در شعاع متوسـط r_m کـه در شـکل (۱) دیـده مـی‌شـود محاسبه خواهد شد.

استفاده از روش انتگـرال‌گیـری فـوق در روش‌هـای عـددی تقریباً مشـابه روش گـوس اسـت. در ایـن روش ابتـدا وزن‌هـای انتگرال‌گیری برای کل دامنه محاسبه می‌گردد. سـپس از وزن‌هـای به‌دست آمده در کل تحلیل استفاده می‌شود. بنابراین در این روش دامنه حل افراز نخواهد شـد و انتگـرال روی کـل دامنـه در یـک مرحله محاسبه می‌شود. به‌عبـارت دیگـر در روش انتگـرال‌گیـری ارائه شده کل دامنه به‌صورت یک المان درنظر گرفته خواهد شد.

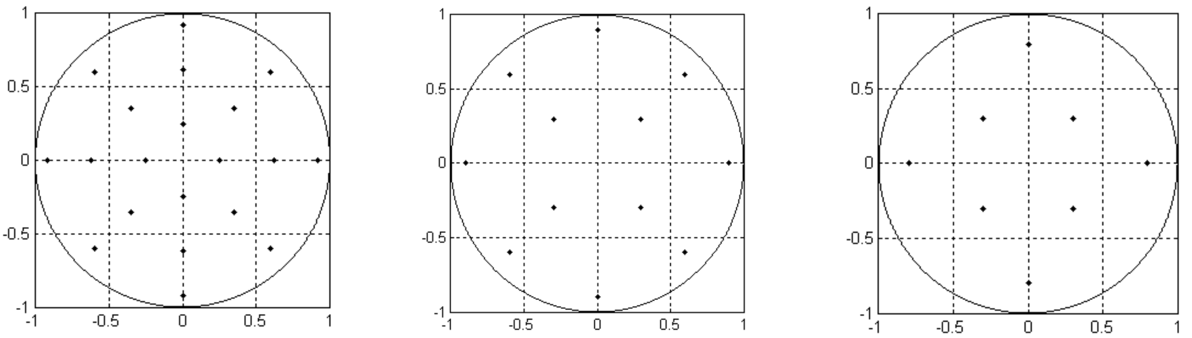
برای بررسی کیفیت وزن‌های به‌دسـت آمـده از روش ارائـه شده، ابتدا این وزن‌ها با وزن‌هـای روش انتگـرال‌گیـری گـوس مقایسه می‌شوند. در این مثال ۱۶ نقطه انتگرالی واقـع در مکـان نقاط گوسی در یک المان مربع مطابق شکل (۲) قرار داده شـده است. جدول ۱ وزن نقاط انتگرالی به‌دست آمـده از روش ارائـه شده را با روش گوس برای یک المان با ۱۶ نقطه انتگرال‌گیـری مقایسه می‌کند. مشاهده می‌شود که وزن‌هـای بـه‌دسـت آمـده از روش ارائه شده نتایجی مشابه روش گوس ارائه می‌دهد.

براساس آنچه بیان شد روش حاضر وابسته به دامنه نیست و برای هر نوع دامنه‌ای قابـل اسـتفاده اسـت. در شـکل (۳) یـک ناحیه دایره‌ای به‌همراه سه چیدمان مختلف از نقاط انتگرال‌گیری نشان داده شده است.

مختصات این نقاط در تعداد ۸ نقطه انتگرال‌گیری به‌صورت زیر درنظر گرفته شد:

جدول ۱- مقایسه وزن نقاط انتگرال‌گیری قرار گرفته بر ۱۶ نقطه گوسی (روش ارائه شده و روش گوس)

موقعیت نقطه	$x=\pm ۰/۳۳۹۹۸۱$ $y=\pm ۰/۳۳۹۹۸۱$	$x=\pm ۰/۳۳۹۹۸۱$ $y=\pm ۰/۸۶۱۱۳۶$ و $x=\pm ۰/۸۶۱۱۳۶$ $y=\pm ۰/۳۳۹۹۸۱$	$x=\pm ۰/۸۶۱۱۳۶$ $y=\pm ۰/۸۶۱۱۳۶$
وزن نقطه با احتساب a =۲ در رابطه ۳	۰/۴۲۵۳	۰/۲۲۶۸	۰/۱۲۱۰
وزن دقیق (وزن گاوس)	۰/۴۲۵۳	۰/۲۲۶۹	۰/۱۲۱۰



۸ نقطه انتگرال‌گیری

۱۲ نقطه انتگرال‌گیری

۲۰ نقطه انتگرال‌گیری

شکل ۳- دامنه دایره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری آن با سه چیدمان مختلف

$$\begin{aligned}&\Omega: x^2+y^2\le 1\\&P_{1,2}=0\,,\pm 0.8 \quad , \quad P_{3,4}=\pm 0.8\,,0\\&P_{5,6,7,8}=\pm 0.3\,,\pm 0.3\end{aligned} \tag{۱۰}$$

بـا کمـک روش ارائـه شـده وزن‌هـای زیـر در تعـداد ۸ نقطـه انتگرال‌گیری به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&w_{1,2,3,4}=0.5448\\&w_{5,6,7,8}=0.2406\end{aligned} \tag{۱۱}$$

مختصات این نقاط در تعداد ۱۲ نقطه انتگرال‌گیری بـه‌صـورت زیر درنظر گرفته شد:

$$\begin{aligned}&\Omega: x^2+y^2\le 1\\&P_{1,2}=0\,,\pm 0.9 \quad , \quad P_{3,4}=\pm 0.9\,,0\\&P_{5,6,7,8}=\pm 0.3\,,\pm 0.3\\&P_{9,10,11,12}=\pm 0.6\,,\pm 0.6\end{aligned} \tag{۱۲}$$

با کمـک روش ارائـه شـده وزن‌هـای زیـر در تعـداد ۱۲ نقطـه انتگرال‌گیری به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&w_{1,2,3,4}=0.20162\\&w_{5,6,7,8}=0.35333\\&w_{9,10,11,12}=0.23044\end{aligned} \tag{۱۳}$$

مختصات این نقاط در تعداد ۲۰ نقطه انتگرال‌گیری بـه‌صـورت زیر درنظر گرفته شد:

$$\begin{aligned}&\Omega: x^2+y^2\le 1\\&P_{1,2}=0\,,\pm 0.92 \quad , \quad P_{3,4}=\pm 0.92\,,0\\&P_{5,6}=0\,,\pm 0.62 \quad , \quad P_{7,8}=\pm 0.62\,,0\\&P_{9,10,11,12}=\pm 0.35\,,\pm 0.35\\&P_{13,14,15,16}=\pm 0.25\,,\pm 0.25\\&P_{17,18,19,20}=\pm 0.6\,,\pm 0.6\end{aligned} \tag{۱۴}$$

با کمـک روش ارائـه شـده وزن‌هـای زیـر در تعـداد ۲۰ نقطـه انتگرال‌گیری به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&w_{1,2,3,4}=0.14945\\&w_{5,6,7,8}=0.15935\\&w_{9,10,11,12}=0.09464\\&w_{13,14,15,16}=0.14184\\&w_{17,18,19,20}=0.24011\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با استفاده از وزن‌های به‌دست آمـده، انتگـرال توابـع مشخصـی طبـق رابطه (۱۶) محاسبه شد و سپس خطای انتگرال‌گیری بـر روی ناحیـه دایره‌ای فوق برای سه حالت مشخص شده به‌دست آمد:

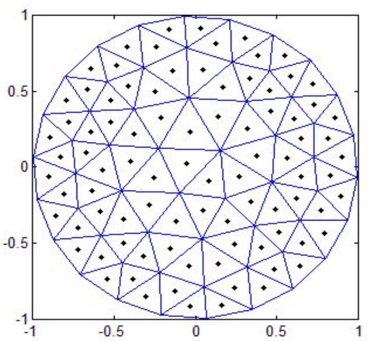
$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} f(x,y)\,dxdy=\sum_{i=1}^{n_{int}} w_i f(x_i,y_i) \tag{۱۶}$$

جدول ۲- مقایسه مقدار انتگرال محاسبه شده با روش حاضر و روش دقیق

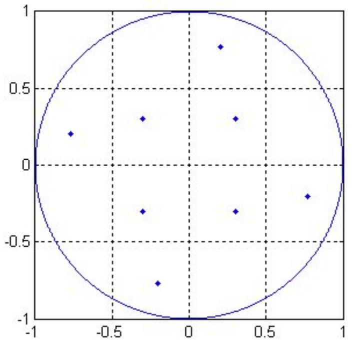
تابع دلخواه	با ۸ نقطه		با ۱۲ نقطه		با ۲۰ نقطه		شبکه مثلثی		انتگرال دقیق
	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	انتگرال	خطای نسبی	
$f(x,y)=3x^2+y^2$	۳/۱۳۵۸	٪۰/۱۸۳	۳/۱۴۱۵	٪۴/۱۸۷	۳/۰۱۰۰	٪۰/۰۰۲	۳/۱۴۱۴	٪۰/۰۲۹	۳/۱۴۲۵
$f(x,y)=4(y-2)^2+10$ $+5(x-2)^2+10(x-2)^4$ $+3(x-2)^2(y-2)^2$	۱۰۱۶/۵	٪۰/۰۱۴	۱۰۱۶/۶	٪۱/۹۸۸	۹۹۶۴/۷	٪۰/۰۰۰۷	۱۰۱۶/۶	٪۰/۰۰۹	۱۰۱۶/۷
$f(x,y)=(x-1)^4+3x^3y$ $+x^2y^2+2xy^3+y^4+2$	۱۵/۰۴۲	٪۰/۰۷۲	۱۵/۰۵۳	٪۲/۶۵۳	۱۴/۶۵۴	٪۰/۰۰۸۲	۱۵/۰۵۲	٪۰/۰۴۷	۱۵/۰۶۰

جدول ۳- ضریب تمرکز تنش صفحه سوراخدار در تحلیل حاضر نسبت به تعداد نقاط گره‌ای

مقدار دقیق تمرکز تنش	تمرکز تنش در تحلیل حاضر	تعداد نقاط گره‌ای
	۲/۷۳	۱۷۶
۳/۰۰	۲/۸۷	۲۴۷
	۲/۹۶۵	۴۰۸



شکل ۴- شبکه‌بندی دامنه دایره‌ای به‌صورت مثلثی و نقاط انتگرال‌گیری درون مثلث‌ها



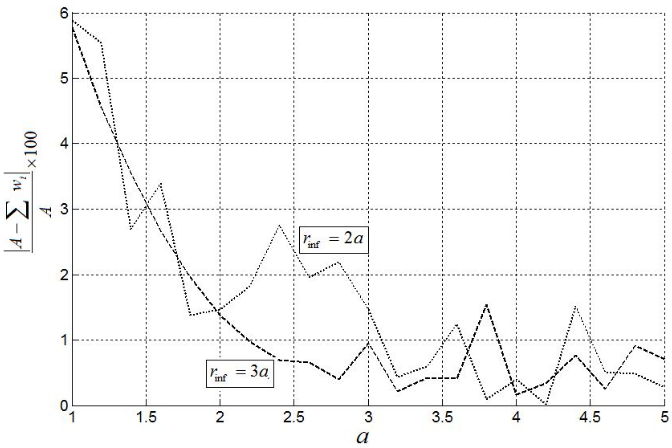
شکل ۵- دامنه دایره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری آن در حالت ۸ نقطه‌ای مشابه شکل ۳ با تغییر موقعیت نقاط بیرونی

در جدول ۲ توابع مورد نظر و مقدار انتگرال محاسبه شده با روش حاضر در سه حالت و روش دقیق با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج بسیار امیدوار کننده هستند. بنابراین روش حاضر به‌عنوان یک روش انتگرال‌گیری قابل قبول برای روش‌های عددی قابل استفاده خواهد بود.

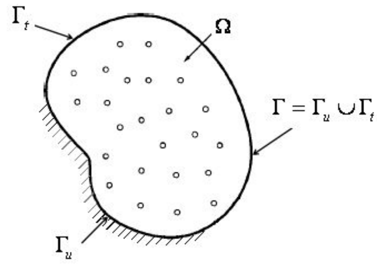
برای اینکه قابلیت روش بهتر مشخص شود نتایج مربوط به انتگرال‌گیری مثلثی نیز ذکر می‌شود. در شکل (۴) دامنه دایره‌ای شکل با شعاع یک با المان‌های مثلثی افراز شده و انتگرال میدان با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مقدار تابع در نقاط میانه مثلث‌ها به‌دست آمده است. نتیجه این انتگرال‌گیری در جدول ۲ ذکر شده است.

همان‌طور که دیده می‌شود دقت روش ارائه شده بسیار بیشتر از روش انتگرال‌گیری با شبکه مثلثی است. همچنین با افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری دقت محاسبه انتگرال بالا می‌رود.

به‌منظور بررسی بیشتر، تعداد ۸ نقطه انتگرال‌گیری مطابق شکل (۵) با چیدمان کمی متفاوت نسبت به شکل (۳) درنظر گرفته شد.



شکل ۶- تأثیر شعاع ناحیه اثر و پارامتر a بر خطای انتگرال‌گیری



شکل ۷- دامنه و مرز در یک جسم الاستیک خطی دوبعدی

خطای محاسبه برای مساحت ۰/۰۳۵٪ و بر اساس توابع نشان داده شده در جدول ۲، برای تابع اول ۱/۰۶۹٪، برای تابع دوم ۰/۲۷۳٪ و برای تابع سوم ۱/۴۳٪ به‌دست آمد. این مطلب از قبل نیز قابل پیش‌بینی بود چرا که نقاط انتگرال‌گیری از توزیع مناسبی برخوردار نبوده‌اند.

در شکل (۶) اثر پارامتر a در معادله (۹) و همچنین شعاع ناحیه اثر بر دقت انتگرال‌گیری نشان داده شده است. در این مثال، یک دامنه مربع شکل با ضلع ۲۰ واحد در نظر گرفته شده که در آن نقاط انتگرالی به‌صورت ماتریسی و با فاصله ۱ واحد از یکدیگر و فاصله ۱ واحد از مرزها چیده شده است. دقت روش در تخمین مساحت به‌عنوان معیار انتخاب شده است. براساس این شکل می‌توان دریافت که انتخاب مقدار پارامتر a حدود ۳ برابر فاصله بین نقاط، مقدار مطلوبی است. البته مقدار بیش از ۳ نیز جواب مناسبی در پی خواهد داشت ولی افزایش این مقدار باعث ایجاد خطای معکوس کردن ماتریس در معادله ۸ خواهد شد. علاوه بر این شعاع ناحیه اثر ۲/۵ یا ۳ برابر مقدار a برای دستیابی به خطای کمتر از ۲ درصد کافی است.

بنابراین روش حاضر به‌عنوان یک روش انتگرال‌گیری قابل قبول برای روش‌های عددی قابل استفاده خواهد بود. در بخش بعد، از این روش در حل مسائل مکانیک جامدات استفاده خواهد شد.

۴- فرمولاسیون فرم ضعیف در روش گالرکین

یک جسم الاستیک خطی در حالت دو بعدی مطابق شکل (۷) درنظر گرفته می‌شود. دامنه مسأله Ω و مرز آن Γ است که از اجتماع دو مرز با شرط مرزی ضروری و شرط مرزی طبیعی حاصل می‌شود.

معادله تعادل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \quad , \quad \sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{۱۷}$$

که در آن σ_{ij} تانسور تنش وابسته به میدان جابه‌جایی u_i و b_i نیروهای حجمی است. شرایط مرزی به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_s \\ \sigma_{ij}n_i &= \bar{t}_j \quad \text{on} \quad \Gamma_n \end{aligned} \tag{۱۸}$$

در این روابط $\bar{u}_i$ و $\bar{t}_i$ به‌ترتیب جابه‌جایی و تنش‌های سطحی و Γ_s و Γ_n مرز ضروری و مرز طبیعی و n_i بردار عمود بر سطح است. با استفاده از اصل کار مجازی، معادله فرم ضعیف زیر برای رابطه مومنتوم خطی به‌دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{T} \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^{T} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^{T} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \qquad (۱۹)$$

فرم گسسته این رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \qquad (۲۰)$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس سختی، $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی نقاط گره‌ای و $\mathbf{F}$ بردار نیرو است. مقادیر به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \qquad (۲۱)$$

$$\mathbf{F}_I = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{t}}_I d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_I^T \mathbf{b}_I d\Omega \qquad (۲۲)$$

در این روابط تانسور $\mathbf{D}$ در حالت تنش صفحه‌ای برابر است با:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

که در آن E مدول الاستیسیته و υ نسبت پواسون است. ماتریس $\mathbf{B}_I$ و $\mathbf{N}_I$ از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_I}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi_I}{\partial y} & \frac{\partial\phi_I}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

$$\mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

مقادیر ϕ_I را می‌توان با هر روش میان‌یابی حاصل کرد. در این تحلیل به‌خاطر ارضای شرط دلتای کرونیکر از میان‌یابی کریگینگ عام استفاده می‌شود. در این میان‌یابی تابع شکل ϕ_I معادل λ_I در رابطه (۴) است.

برای محاسبه انتگرال روابط (۲۱) و (۲۲) در روش‌های اجزا محدود و برخی روش‌های بدون المان وجود شبکه الزامی است. در این مقاله برای محاسبه انتگرال میدان بر روی دامنه، برای اولین بار از روش انتگرال‌گیری ارائه شده در بخش ۳ استفاده می‌شود.

۵- مثال‌های عددی

در این قسمت برای ارزیابی قابلیت روش ارائه شده، سه مسأله بررسی می‌شود: تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی، صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و صفحه سوراخدار. در مثال اول حالت‌های مختلفی برای چینش نقاط انتگرال‌گیری درنظر گرفته شده و مقایسه بین دقت پاسخ‌ها در مورد آنها انجام شده است. در مثال دوم یعنی صفحه تخت تحت بار گسترده خطی، ابتدا نقاط انتگرال‌گیری را منطبق بر نقاط گره‌ای درنظر گرفته و سپس تعداد آنها را افزایش داده و دقت جواب بررسی شده است. در مثال سوم میزان دقت پاسخ‌ها با استفاده از این روش انتگرال‌گیری در صفحه سوراخدار نسبت به حل دقیق دیده می‌شود و نشان می‌دهد که این روش با تعداد نقاط انتگرال‌گیری کم نیز می‌تواند پاسخ‌های مناسبی را ارائه کند. در این مسأله همگرایی پاسخ نسبت به افزایش نقاط گره‌ای نیز بررسی شده است.

در هر سه مثال برای محاسبهٔ ماتریس سختی از میان‌یابی کریگینگ با توابع پایه مرتبه یک استفاده شده است. شعاع ناحیه اثر هر نقطه انتگرال‌گیری ۳/۲۵ برابر کمترین فاصله نقاط گره‌ای در نزدیکی نقطه انتگرال‌گیری است.

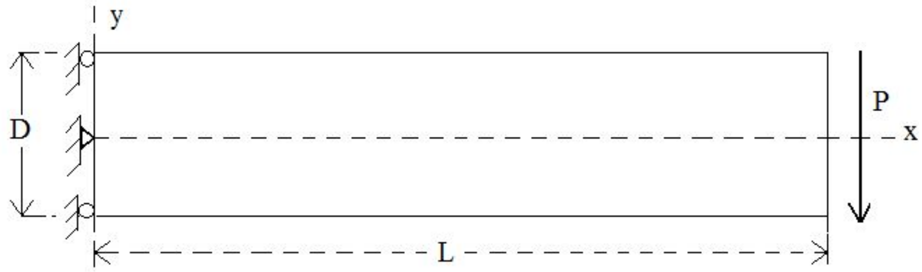
۵-۱- خمش تیر یک‌سر درگیر

در اولین مثال، خمش یک تیر یک‌سر درگیر که مطابق شکل (۸) در معرض بار در انتهای تیر قرار گرفته بررسی می‌شود. مقادیر بارگذاری و خصوصیات تیر به‌صورت $E = 200\text{Gpa}, \upsilon = 0.3, L = 30\text{m}, D = 4\text{m}$ و $P=10^9\text{N}$ تعریف می‌شود.

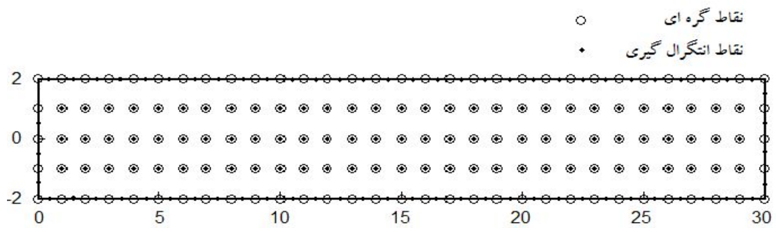
رابطه جابه‌جایی عمودی دقیق u_y برحسب متر به شکل زیر است [۲۸]:

$$u_y = -\frac{P}{6EI}\left(3\upsilon y^2 x + (4+5\upsilon)\frac{D^2(L-x)}{4} + (2L+x)(L-x)^2\right)$$

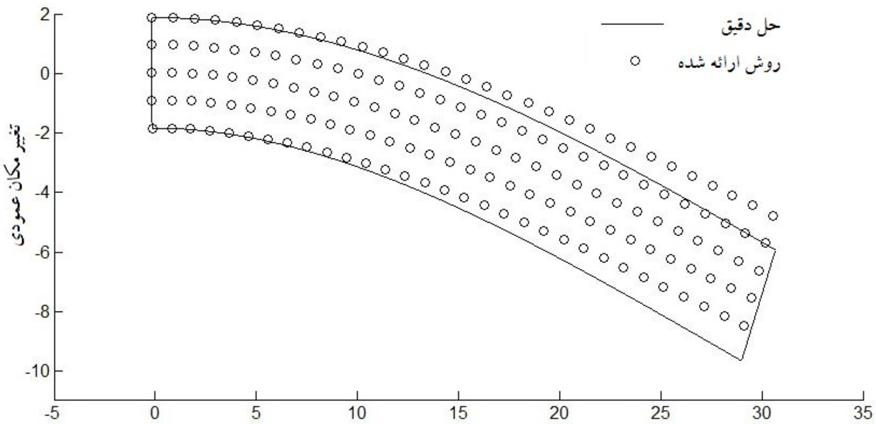
$$I = \frac{D^3}{12} \quad , \quad \tau = -\frac{P}{2I}\times\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \qquad (۲۶)$$



شکل ۸- تیر یک سر درگیر در معرض بار در انتهای تیر



شکل ۹- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری، نقاط انتگرال‌گیری درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط بیرونی روی مرز و بینابین نقاط گره‌ای



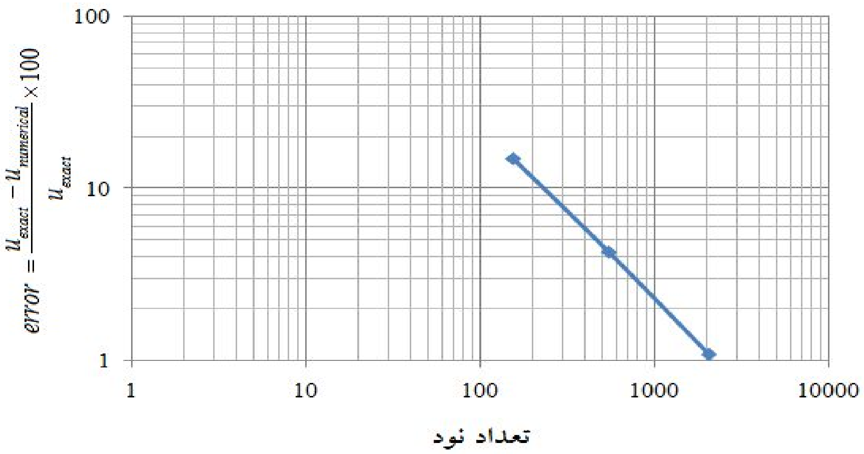
شکل ۱۰- شکل نهایی تیر یک‌سر درگیرتحت بار انتهایی تیر، نقاط انتگرال‌گیری بیرونی روی مرز

در این مثال چند نوع چینش نقاط انتگرال‌گیری با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نقاط انتگرال‌گیری در ابتدا به دو دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که نزدیک به مرز قرار دارند، نقاط بیرونی و آنهایی که درون دامنه واقع شده‌اند نقاط درونی نام‌گذاری می‌شوند. چینش نقاط انتگرالی در اولین مثال به این صورت انجام می‌شود که نقاط درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط بیرونی روی مرز و در بینابین نقاط گره‌ای مطابق شکل (۹) واقع شوند. نقاط گره‌ای به‌صورت منظم و با فاصله ۱ متری از یکدیگر قرار دارند.

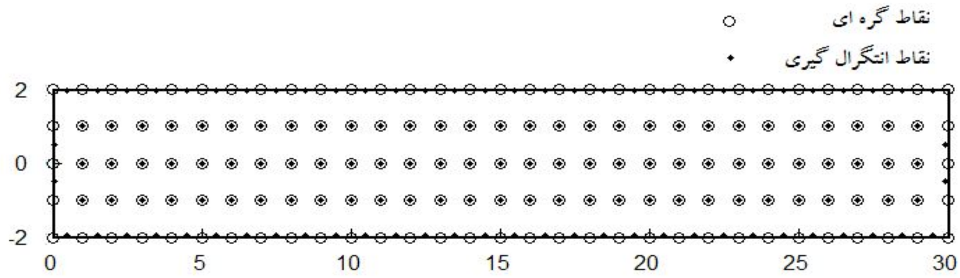
در شکل (۱۰) شکل نهایی تیر یک‌سر درگیر و پس از اعمال بار دیده می‌شود. در این مثال حداکثر خطای نسبی در میزان جابه‌جایی، در انتهای تیر به میزان ۵ درصد مشاهده شده است. میزان خطا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{error} = \frac{u_{\text{exact}} - u_{\text{numerical}}}{u_{\text{exact}}} \times 100 \qquad (۲۷)$$

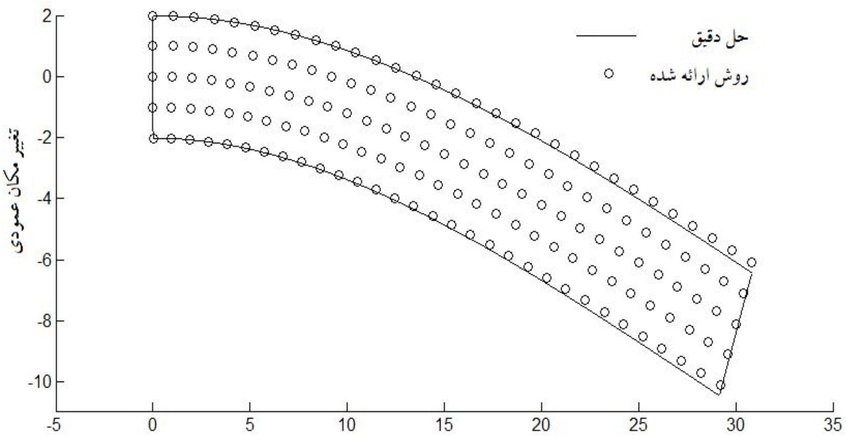
در شکل (۱۱) روند کاهش خطا با افزایش تعداد نقاط نشان داده



شکل ۱۱- روند کاهش خطا در مسأله تیر یک سر گیردار با افزایش تعداد نقاط

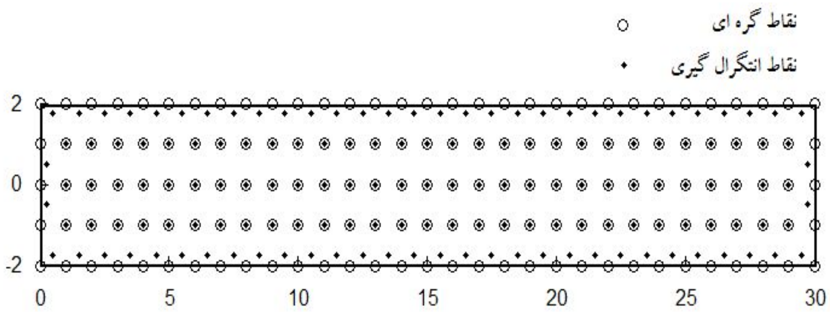


شکل ۱۲- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۰۵ متر)

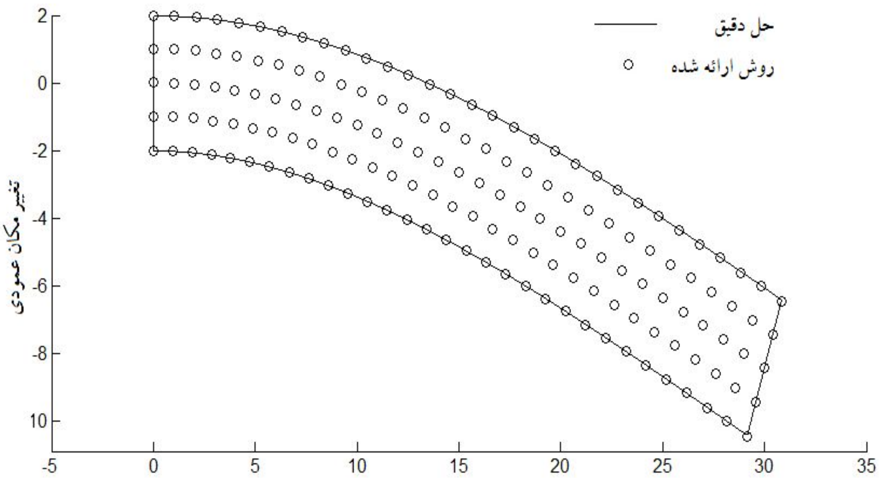


شکل ۱۳- شکل نهایی تیر یک سر در گیرتحت بار انتهایی تیر (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۰۵ متر)

شده است. با تغییر چینش نقاط انتگرال‌گیری و انتقال نقاط بیرونی به داخل مرز به اندازه ۰/۰۵ متر نتایج بهتری حاصل می‌شود. شکل (۱۲) نقاط گره‌ای و نقاط انتگرالی را در این توزیع نشان می‌دهد. شکل نهایی تیر پس از جابجایی مطابق شکل (۱۳) است. در این حالت خطای محاسبات به حدود دو درصد می‌رسد. حال در چینش دیگری برای نقاط انتگرال‌گیری، فاصله نقاط بیرونی از مرز به ۰/۲۵ مترافزایش داده می‌شود. شکل (۱۴) چینش نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری و



شکل ۱۴- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یکسر درگیر تحت بار انتهایی (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)



شکل ۱۵- شکل نهایی تیر یکسر در گیرتحت بار انتهایی تیر (فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)

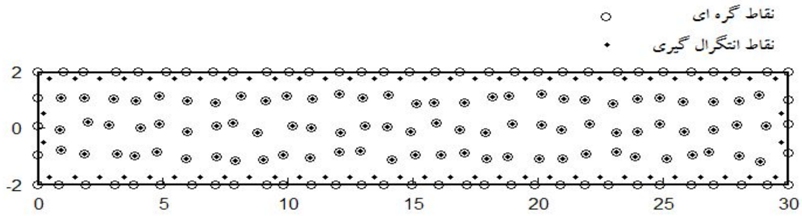
شکل (۱۵) شکل نهایی تیر پس از اعمال بار را نمایش می‌دهد. مشاهده شد که در این حالت جواب‌های بهتری به‌دست آمده و خطا به حدود ۰/۵۴ درصد رسید. این مقایسه نشان می‌دهد که نقاط داخل مرز برای محاسبه انتگرال از نقاط روی مرز مناسب‌تر هستند.

در حالت بعد نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی جابه‌جا شده و نقاط انتگرال‌گیری درونی منطبق بر نقاط گره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری بیرونی بینابین نقاط گره‌ای و با فاصله ۰/۲۵ متر از مرز درنظر گرفته می‌شوند. در این حالت حداکثر میزان جابه‌جایی نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی به میزان ۲۰ درصد فاصله اولیه یعنی مقدار ۰/۲ متر درنظر گرفته شده است. شکل (۱۶) موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در این حالت و شکل (۱۷) نیز شکل نهایی تیر را پس از اعمال بار نشان می‌دهد. خطای این محاسبه ۱ درصد است.

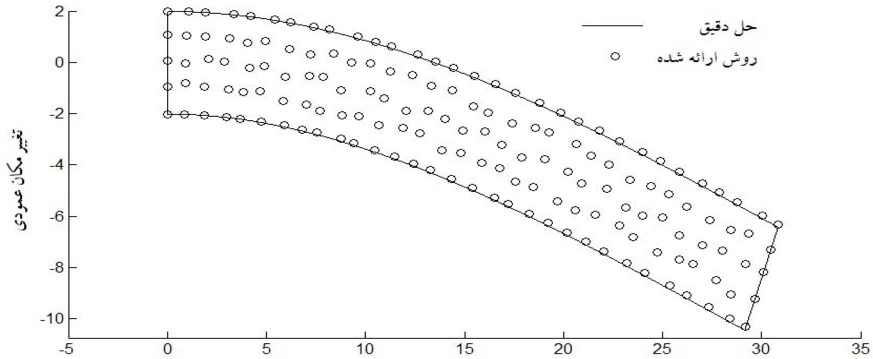
۵-۲- صفحه تخت تحت بار گسترده خطی

شکل (۱۸) یک صفحه مستطیل شکل با خصوصیات $L = 20\text{m},\ D = 10\text{m}\ ,\upsilon = 0.3,\ E = 200\,\text{Gpa}$ و ضخامت واحد، تحت بار خطی را نشان می‌دهد.

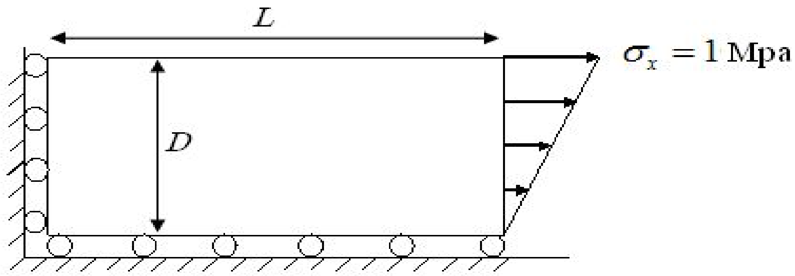
در اولین تحلیل نقاط انتگرال‌گیری منطبق بر نقاط گره‌ای درنظر گرفته می‌شوند. جابه‌جایی نقاط پس از اعمال بار گسترده خطی در انتها مطابق شکل (۱۹) خواهد بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پاسخ‌ها دچار نوساناتی هستند. در این پدیده به‌خاطر خطا در محاسبه انتگرال برخی مودهای حرکتی یک المان نادیده گرفته شده و باعث ناپایداری پاسخ‌ها می‌شود. یکی از راه‌های جلوگیری از این پدیده در اجزا محدود، افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری است.



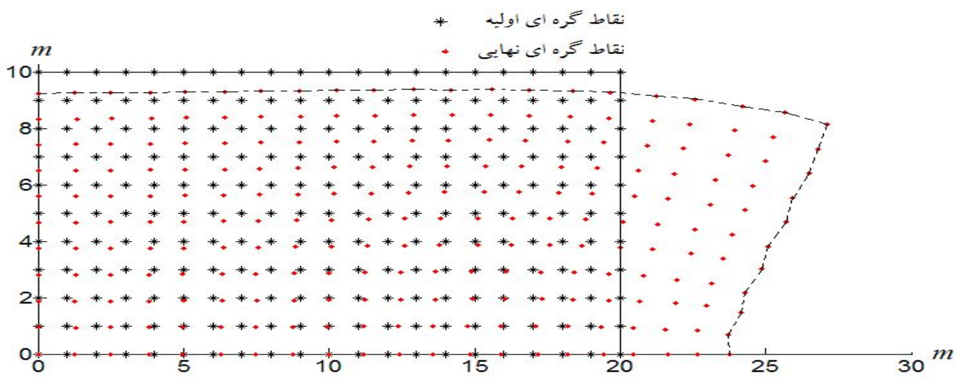
شکل ۱۶- موقعیت نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری در تیر یک‌سر درگیر تحت بار انتهایی
(جابه‌جایی نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی با حداکثر ۰/۲ متر، فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر)



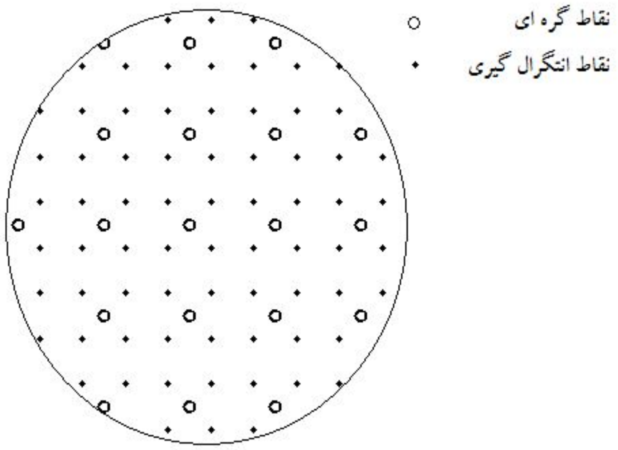
شکل ۱۷- شکل نهایی تیر یک‌سر درگیرتحت بار انتهایی تیر. نقاط گره‌ای به‌صورت تصادفی با حداکثر جابه‌جایی ۰/۲ متر جابه‌جا شده و فاصله نقاط انتگرال‌گیری بیرونی از مرز ۰/۲۵ متر



شکل ۱۸- صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و شرایط مرزی



شکل ۱۹- شکل اولیه و شکل نهایی با جابه‌جایی با ضریب ۱۰۰۰ در صفحه تخت تحت بار گسترده خطی و نمایش نوسانات جابه‌جایی، نقاط انتگرال‌گیری منطبق بر نقاط گره‌ای



شکل ۲۰- نمونه توزیع نقاط گره‌ای و نقاط انتگرال‌گیری با افزایش نقاط انتگرال‌گیری

در این مثال از تکنیک افزایش نقاط انتگرال‌گیری استفاده شده و تعداد این نقاط افزایش یافته و بین نقاط گره‌ای قرار داده شده‌اند. نحوه چینش نقاط گره‌ای و انتگرال‌گیری مطابق شکل (۲۰) انتخاب شده است که در آن نقاط انتگرال‌گیری به‌صورت منظم در دامنه توزیع می‌شوند. نتایج در شکل (۲۱) نشان داده شده‌است. همان‌طور که دیده می‌شود، در شکل (۲۱) نوسانات جابه‌جایی کاملاً از بین رفته است.

در شکل (۲۲- الف) کانتور مؤلفه تنش σ_{xx} حاصل از میدان جابه‌جایی با استفاده از روش ارائه شده در مقاله محاسبه شده است. در شکل (۲۲- ب) کانتور تنش حاصله با مقادیر مشابه خود از نتایج تحلیل اجزا محدود مقایسه می‌شود. در این مقایسه مدل اجزا محدود با دقت بالا و تعداد ۵۰۰۰ المان تحلیل شده و نتایج حاصله برای خط مشخص شده در شکل (۲۲- الف) با نتایج تحلیل حاضر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است میزان خطای نسبی در تنش‌های حاصل از میدان جابه‌جایی در این روش کمتر از ۴ درصد است.

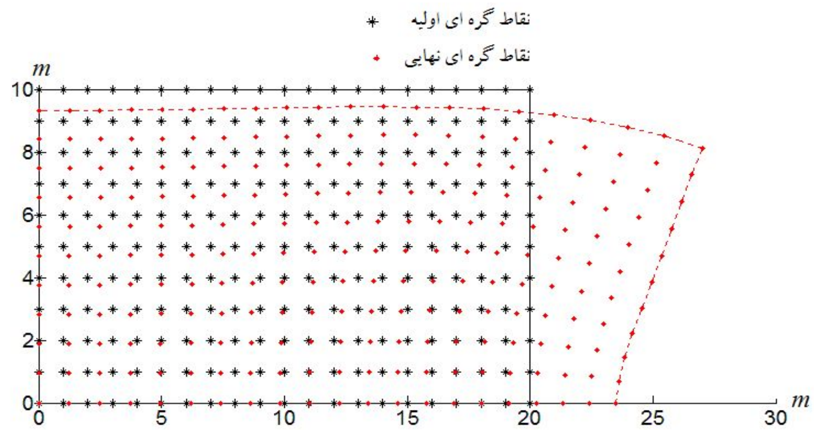
۵-۳- صفحه سوراخدار

آخرین مثالی که در این قسمت بررسی می‌شود، صفحه بی‌نهایت با یک سوراخ در وسط است که تحت بار گسترده یکنواخت قرار می‌گیرد. مطابق شکل (۲۳) صفحه‌ای درنظرگرفته می‌شود که سوراخی به شعاع $a = 1m$ در آن قرار دارد و در جهت محور x تحت تنش یکنواخت $\sigma_{xx} = 10^7 Mpa$ قرار گرفته است. به‌خاطر شرایط تقارن فقط یک چهارم این صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد و شرایط مرزی تقارن به آن اعمال می‌شود. برای مقایسه نتایج حاصل از تحلیل حاضر با حل دقیق صفحه سوراخدار، حداقل طول و عرض صفحه نباید از مقدار ۹a کمتر باشد و به همین دلیل $L = 9.5$ انتخاب شده است. در این حالت نقاط انتگرالی منطبق بر نقاط گره‌ای در شکل (۲۴) انتخاب شده‌اند.

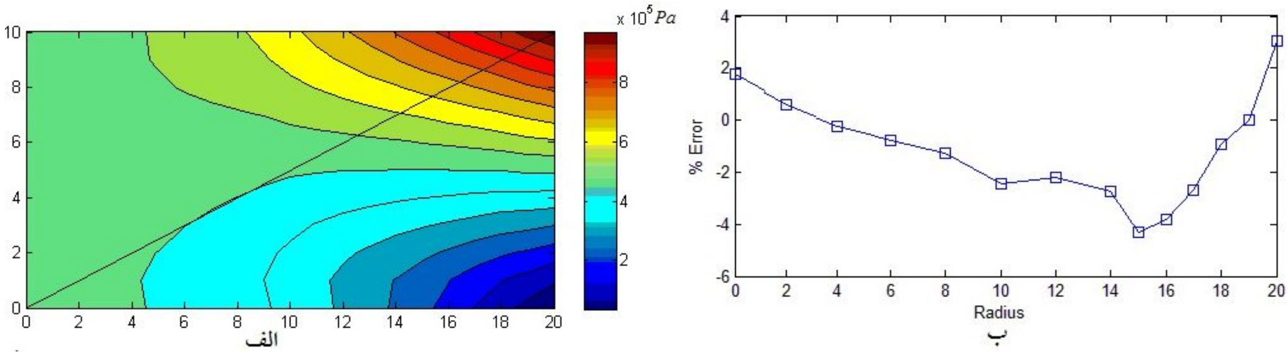
برای تعیین صحت و مقایسه نتایج حاصل از روش ارائه شده، منحنی مقدار مؤلفه تنش σ_{xx} در امتداد خط عمودی $x = 0$ با مقادیر دقیق آن که از رابطه زیر به‌دست می‌آیند، در شکل (۲۵) رسم شده و در شکل (۲۶) خطای نسبی آن ارائه شده است [۲۸]:

$$\sigma_x\left(x,y\right) = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right\} + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta \tag{۲۸}$$

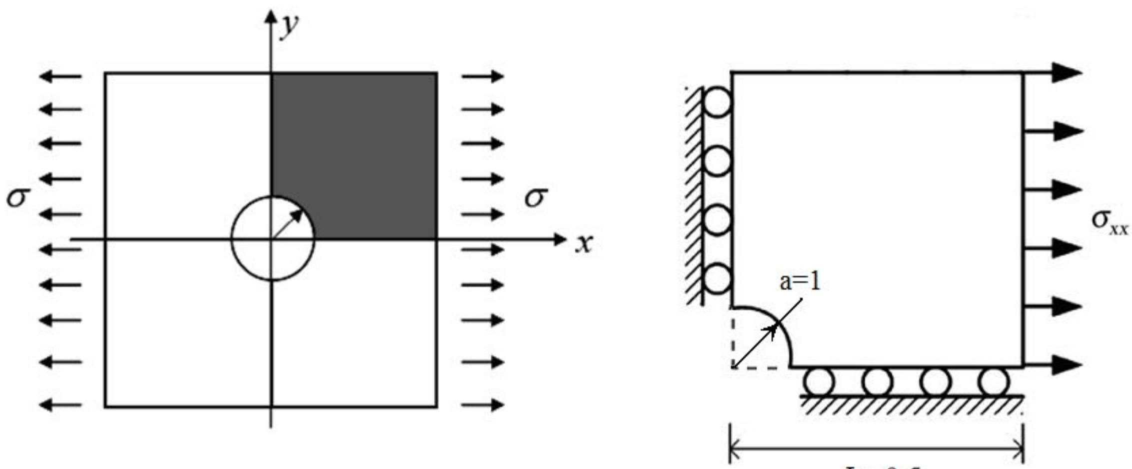
در این رابطه (r,θ) مختصات قطبی نقطه مورد نظر و θ زاویه اندازه‌گیری شده از محور x در جهت راست‌گرد مثلثاتی است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حداکثر میزان خطا ۰/۱۵ درصد بوده و نتایج به‌دست آمده قابل قبول هستند. ضریب تمرکز تنش در این مثال که نسبت بین تنش در نقطه بالای سوراخ و تنش یکنواخت وارد شده به صفحه است،



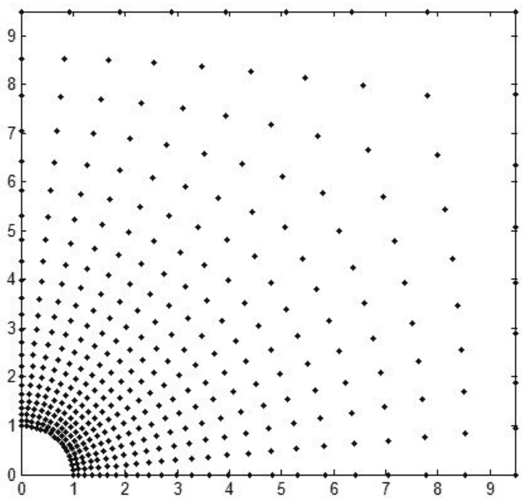
شکل ۲۱- شکل اولیه و شکل نهایی با جابه‌جایی با ضریب ۱۰۰۰۰ در صفحه تخت تحت بار گسترده خطی با نقاط انتگرال‌گیری افزایش یافته



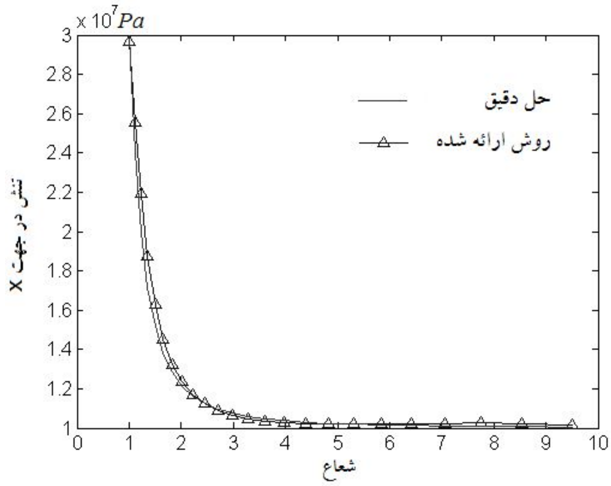
شکل ۲۲- الف- مؤلفه تنش σ_{xx} صفحه تخت تحت بار گسترده خطی با افزایش تعداد نقاط انتگرال‌گیری ب- مقدار خطای نسبی در نتایج مؤلفه تنش σ_{xx} حاصل از میدان جابه‌جایی با مقدار حاصل از اجزا محدود دقیق



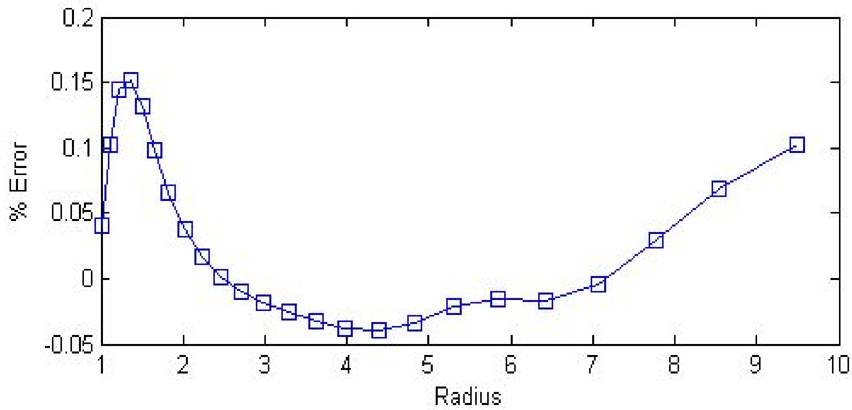
شکل ۲۳- صفحه سوراخدار تحت بار یکنواخت در راستای محور x و قطاع یک چهارم آن



شکل ۲۴- توزیع ۴۰۸ نقطه گره‌ای برای تحلیل صفحه سوراخدار



شکل ۲۵- نمؤدار مؤلفه تنش σ_{xx} (Pa) در امتداد خط عمودی x = ۰ حاصل از تحلیل حاضر با ۴۰۸ نقطه گره‌ای و نمودار مقدار دقیق آن



شکل ۲۶- خطای نسبی مؤلفهٔ تنش σ_{xx} در امتداد خط عمودی x=۰ حاصل از تحلیل حاضر با ۴۰۸ نقطه گره‌ای و مقدار دقیق آن

مقدار ۲/۹۷۵ به‌دست می‌آید که بسیار نزدیک به مقدار دقیق آن یعنی عدد ۳ است.

به منظور نشان دادن همگرایی روش ارائه شده، در جدول ۳ مقایسه‌ای بین ضریب تمرکز تنش در نقطه بالای سوراخ انجام شده که در آن با تعداد نقاط مختلف مسأله تحلیل شده و نتایج حاصل شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش تعداد نقاط، مقدار ضریب تمرکز تنش به مقدار دقیق آن نزدیک‌تر شده است که بیان‌گر همگرایی حل ارائه شده برای مسأله مذکور است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش انتگرال‌گیری جدیدی معرفی شد که با استفاده از آن، انتگرال در روش بدون شبکه گالرکین محاسبه می‌شود. تفاوت این روش با روش‌های دیگر، علاوه بر عدم نیاز به هر نوع شبکه‌بندی، محاسبه انتگرال فرم ضعیف به‌صورت کلی است. به عبارت دیگر در این روش کل دامنه به‌صورت یک المان درنظر گرفته می‌شود. چینش نقاط در مثال تیر یک سر گیردار بررسی شد. نشان داده شد که اگر چه در چینش‌های مختلف می‌توان نتایج قابل قبولی به‌دست آورد ولی در برخی

چینش‌ها جواب دقیق‌تری به‌دست می‌آید. بـه کمـک ایـن روش مسـائل دو بعـدی الاستواسـتاتیک بررسـی شـده و نتـایج زیـر به‌دست آمده است:

۱) تعداد نقاط انتگرال‌گیری در این روش مـی‌توانـد در حـد نقاط گره‌ای باشد.

۲) همگرایی حل در یک مثال و در نقطهٔ بحرانی بررسی شده و به تأیید رسید.

۳) با افزایش نقاط انتگرال‌گیری، پاسخ‌های دقیق‌تری حاصـل خواهد شد.

۴) در این روش انتخاب نقاط انتگرال‌گیری درون دامنه بهتـر از انتخاب آنها در نزدیکی مرز است.

واژه‌نامه

1. conformal mapping
2. Gaussian quadrature
3. remeshing
4. element distortion
5. Galerkin weak formulation
6. nodal integration method
7. stabilized conforming nodal integration
8. Voroni diagram
9. Monte Carlo integration
10. Rosca and Leitao
11. quasi Monte Carlo
12. Green’s theorem
13. Cartesian transformation method
14. weights of integration points
15. Kronecker-delta property
16. simple Kriging
17. universal Kriging
18. radius of influence domain

مراجع

1. Liu, G. R., *Meshless Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2002.
2. De, S., and Bathe, K. J., “The Method of Finite Spheres”, *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 329-345, 2000.
3. Atluri, N., and Zhu, T., “New Concepts in Meshless Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
4. Carpinteri, A., Ferro, G., and Ventura, G., “The Partition of Unity Quadrature in Meshless Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 987-1006, 2002.
5. Liu, G. R., and Wang, J. G., “A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp: 1623–1648, 2002.
6. Atluri, S. N. and Shen, S. P., “The Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method”, *Tech Science Press*, Encino, USA, 2002.
7. Atluri, S. N., Kim, H. G., and Cho, J. Y., “A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG), and Local BoundaryIntegral Equation (LBIE) Methods”, *Computational Mechanics*, Vol. 24, pp. 348–372, 1999.
8. Gu, Y. T., and Liu, G. R., “A Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Formulation for Static and Free Vibration Analyses of Thin Plates”, *Computer Modeling in Engineering Science*, Vol. 2 (4) pp. 463–476, 2001.
9. Gu, Y. T., and Liu, G. R., “A Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method for Free and Forced Vibration Analyses for Solids”, *Computational Mechanics*, Vol. 27 (3), pp. 188–198, 2001.
10. Gu, Y. T., and Liu, G. R., “A Local Point Interpolation Method for Static and Dynamic Analysis of Thin Beams”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 5515–5528, 2001.
11. Liu, G. R., and Gu, Y. T., “A Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) for Free Vibration Analyses of 2-D Solids”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246 (1), pp. 29–46, 2001.
12. Liu, G. R., and Gu, Y. T., “Comparisons of Two Meshfree Local Point Interpolation Methods for Structural Analyses”, *Computational Mechanics*, Vol. 29 (2) , pp. 107–121, 2002.
13. Lam, K. Y., Wang, Q. X., and Hua, L., “A Novel Meshless Approach - Local Kriging (LoKriging) Method with Two-Dimensional Structural Analysis”, *Computational Mechanics*, Vol. 33(3), pp. 235-244. 2004.
14. Gu, Y. T., Wang, Q. X., and Lam, K. Y., “A Meshless Local Kriging Method for Large Deformation Analyses”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1673-1684, 2007.
15. Belytschko, T., Gu, L, and Lu, Y. Y., “Fracture and Crack Growth by Element-Free Galerkin Methods” *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 2, pp. 519–534, 1994.

16. Belytschko, T., and Tabbara, M., “Dynamic Fracture using Element-Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923–938, 1996.
17. Li, G., and Belytschko, T., “Element-Free Galerkin Method for Contact Problems in Metal Forming Analysis,” *Engineering Computations*, Vol. 18, pp. 62–78, 2001.
18. Ponthot, J. P., and Belytschko, T., “Arbitrary Lagrangian–Eulerian formulation for element-free Galerkin method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 152, 19–46, 1998.
19. Singh, I. V., and Tanaka, M., “Heat Transfer Analysis of Composite Slabs using Meshless Element Free Galerkin Method”, *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 521–32, 2006.
20. Beissel, S., and Belytschko, T., “Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method”,. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 49-74, 1996.
21. Chen, J. S., Wu, C., Yoon, T. S., and You, Y., “A Stabilized Conformal Nodal Integration for a Galerkin Mesh-Free Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-466, 2001.
22. Chen, J. S., Yoon, S., and Wu, C. T., “Non-Linear Version of Stabilized Conforming Nodal Integration Galerkin Mesh-Free Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2587-6515, 2002.
23. James, F., “Monte Carlo Theory and Practice”, *Reports on Progress in Physics*, Vol. 43, pp. 1145-1189, 1980.
24. Rosca, V. E., and Leitao V. M. A., “Quasi-Monte Carlo Mesh-Free Integration for Meshless Weak Formulations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, pp. 471-479, 2008.
25. Khosravifard, A., and Hematiyan, M. R., “A New Method for Meshless Integration in 2D and 3D Galerkin mesh free Methods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pp. Vol. 34, pp. 30–40, 2010.
26. Matheron, G., “Traite de Geostatistique Appliquee”, Tome 1. Memoires du Bureau de Recherches Geologiqueset Minieres, No. 14, Editions Technip, Paris. 1962.
27. Cressie, N. AC., “*Statistics for Spatial Data*,” John Wiley & Sons, Chichester. 1993.
28. Timoshenko, S., “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill book Co, 1934.