تحلیل دوبعدی پراکندگی شبکه با استفاده از عدد موج مختلط به‌روش اجزای محدود مبتنی بر بی- اسپلاین

یاسر میرباقری، حسن نحوی* و جمشید پرویزیان
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱/۲۰ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۵/۲۱)

چکیده – تحلیل پراکندگی شبکه یکی از معیارهای بررسی کارآیی روش اجزای محدود در شبیه‌سازی انتشار امواج صوتی یا امواج الاستیک است. مشکلی که معمولا در استفاده از این روش درشبیه‌سازی مسائل انتشار موج به‌وجود می‌آید به ناپیوستگی‌های میدانی برمی‌گردد که نهایتاً منجر به تغییر در اندازه و جهت بردار سرعت موج از یک جزء به جزء مجاور می‌شوند. برای حل این مشکل و بهبود دقت پاسخ‌ها دو راه حل پیشنهاد شده‌اند که عبارتند ازتغییر روش انتگرال‌گیری و تغییر توابع شکل. در این تحقیق از روش اجزای محدود ایزوجئومتریک استفاده شده‌است. در این روش از توابع شکل بی-اسپلاین و نربز استفاده‌می‌شود که باعث بهبود دقت پاسخ‌ها خصوصاً در مسائل دینامیک سازه‌ای یک‌بعدی شده‌اند. درجه پیوستگی این توابع شکل در مرز دو جزء مجاور می‌تواند بزرگتر از صفر باشد. در این تحقیق، تحلیل دو بعدی پراکندگی شبکه در انتشار موج در حالت کرنش‌صفحه‌ای برای اولین بار ارائه‌شده‌است. نتایج نشان‌می‌دهند که پراکندگی شبکه در درجات آزادی یکسان، در مقایسه با روش اجزای محدود کلاسیک، به نصف کاهش‌می‌یابد.

واژگان کلیدی: پراکندگی شبکه، موج الاستیک، توابع شکل بی-اسپلاین ونربز، سرعت فازی موج، سرعت گروهی موج.

Two Dimensional Complex Wavenumber Dispersion Analysis using B-Spline Finite Elements Method

Y. Mirbagheri, H. Nahvi* and J. Parvizian
Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

Abstract: ***Grid dispersion is one of the criteria of validating the finite element method (FEM) in simulating acoustic or elastic wave propagation. The difficulty usually arisen when using this method for simulation of wave propagation problems, roots in the discontinuous field which causes the magnitude and the direction of the wave speed vector, to vary from one element to the adjacent one. To solve this problem and improve the response accuracy, two approaches are usually suggested: changing the integration method and changing shape functions. The Finite Element iso-geometric analysis (IGA) is used in this research. In the IGA, the B-spline or non-uniform rational B-spline (NURBS) functions are used which improve the response accuracy, especially in one-dimensional structural dynamics problems. At the boundary of two adjacent elements, the degree of continuity of the shape functions used in IGA can be higher than zero. In this research, for the first time, a two dimensional grid dispersion***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: hnahvi@cc.iut.ac.ir

analysis has been used for wave propagation in plane strain problems using B-spline FEM is presented. Results indicate that, for the same degree of freedom, the grid dispersion of B-spline FEM is about half of the grid dispersion of the classic FEM.

Keywords: *Grid dispersion, elastic wave, b-spline and NURBS shape functions, phase velocity of wave, group velocity of wave.*

فهرست علائم

$\mathbf{A}$	دامنه پاسخ	$\mathbf{M}$	ماتریس جرم سراسری
$\mathbf{B}$	ماتریس کرنش- جابه‌جایی	$\mathbf{N}$	تابع شکل
$\mathbf{C}$	ماتریس الاستیسیته	$\mathbf{u}$	بردار جابه‌جایی (متر)
c_L	سرعت موج طولی	$\ddot{\mathbf{u}}$	شتاب گره‌ها
c_T	سرعت موج عرضی	$\tilde{\mathbf{u}}$	بردار جابجایی تقریبی
c_p	سرعت فازی	w_i	وزن مربوط به هر تابع شکل
$\mathbf{c_g}$	بردار سرعت گروهی	ε	کرنش
Er_T	خطای پراکندگی شبکه در راستای عرضی	λ	طول موج
Er_L	خطای پراکندگی شبکه در راستای طولی	μ و κ	ضرایب لامه
$\mathbf{F}$	بردار نیروی خارجی وارد بر سیستم	ρ	چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)
$\mathbf{f}$	نیروی بدنه (نیوتن)	σ	تنش (پاسکال)
h	طول هر جزء	Ω_e	حجم جزء در مختصات فیزیکی
i	$\sqrt{-1}$	$\hat{\Omega}_e$	حجم جزء در مختصات پارامتری
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی سراسری	$\bar{\Omega}_e$	حجم جزء در مختصات محلی
$\mathbf{k}$	بردار موج	ω	فرکانس زاویه‌ای
k	عدد موج		

۱- مقدمه

مسائل دینامیکی به دو دسته مسائل دینامیک سازه و مسائل انتشار موج تقسیم می‌شوند [۱]. در مسائل دینامیک سازه، یافتن پارامترهای سیستم مثل فرکانس طبیعی، شکل مود و محاسبه پاسخ سیستم به تحریک خارجی مدنظر است. ولی انتشار موج یک پدیدهٔ دینامیکی گذرا حاصل از واردشدن نیرو در زمانی بسیار کوتاه است. در این نوع بارگذاری طیف وسیعی از فرکانس‌ها وجود دارند که منشاء تفاوت میان مسائل انتشار امواج و دینامیک سازه‌ها هستند [۱]. از جمله کاربردهای انتشار امواج عبارتند از استفاده از انتشار امواج در پایش سلامتی سازه‌ها [۲]، کنترل انتقال امواج برای کاهش صدا و ارتعاش، استفاده از امواج آلتراسونیک در ماشینکاری و کاربردهای پزشکی مانند سونوگرافی.

با توجه به گستردگی کاربرد انتشار امواج و نیاز به بررسی نحوه انتشار امواج در کاربردهای مهندسی، به‌منظور صرفه‌جویی در وقت و هزینه‌ها شبیه‌سازی مسائل انتشار موج امری ضروری است. برای مدل‌سازی مسائل انتشار امواج از تکنیک‌های مختلفی مانند روش‌های حل تحلیلی معادله انتشار موج، روش تفاضل محدود، روش حجم محدود، روش‌های بر پایه موجک، روش طیفی، روش گالرکین و ... استفاده می‌شود، از این میان روش اجزای محدود که بر پایه روش گالرکین ایجاد شده است، دارای عمومیت بیشتری است. روش اجزای محدود با توجه

به‌سادگی و قدرت تحلیل مسائل دارای پیچیدگی‌های هندسی و مواد غیر هم‌جنس، همواره یکی از تکنیک‌های مورد توجه بوده است. در تحقیق حاضراز روش اجزای محدود مرتبه بالا استفاده می‌شود. در مسائل انتشار امواج، گسسته‌سازی فضای پیوسته اجسام سبب تغییر سرعت و جهت انتشار موج هنگام عبور از یک جزء به جزء مجاور می‌گردد. مقدار این تغییر در بردار سرعت نسبت به سرعت موج واقعی در یک محیط مادی به‌عنوان پارامتر پراکندگی شبکه تعریف می‌شود.

پایداری حل و پراکندگی موج در شبکه دو معیار مهم در تشخیص توانایی روش به‌کار رفته در مدل‌سازی مساله انتشار موج هستند. با استفاده از معیار پایداری حل می‌توان محدوده مجاز تغییر گام زمان برای حصول پایداری را مشخص نمود. همچنین از معیار پراکندگی شبکه برای تعیین طول مناسب اجزا استفاده می‌شود.

از ابتدای دهه ۷۰ روش اجزای محدود برای مسائل گسترش امواج به‌کار گرفته شده است [۳-۵]. ولی تحلیل پایداری و پراکندگی امواج از اوایل دهه ۸۰ آغاز شد. در ابتدا مولن و بیلیچکو با استفاده از اجزای محدود دوبعدی به بررسی پایداری و پراکندگی امواج پرداختند [۶]. در این تحقیق انواع جزءهای محدود و ماتریس‌های متمرکز جرم بررسی شدند. نتیجه این تحقیق نشان داد که جزءهای چهار وجهی برای این کار بسیار مناسب هستند. از طرف دیگر مارفورت با استفاده از جزء چهار وجهی پراکندگی امواج صوتی و الاستیک را بررسی کرد (۱۹۸۴) و نتیجه گرفت برای حصول دقت کافی در نتایج باید نسبت حداقل ۱۰ گره در طول موج رعایت شود [۷].

در ادامه برای بهبود پراکندگی امواج در روش اجزای محدود، از روش‌های اجزای محدود مرتبهٔ بالا استفاده شد. یکی از روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا روش اجزای محدود طیفی است. این روش که در ابتدا برای دینامیک شاره‌ها پدید آمده بود، برای مساله انتشار امواج در جامدات نیز به‌کار رفت. نتایج حاکی از دقت بیشتر این روش نسبت به‌روش تفاضل محدود بود. در سال ۱۹۹۴ سریانی و همکارانش با استفاده از چند جمله‌ای لژاندر با مجموعه نقاط گاوس- لوباتو- چبیشو توابع شکلی را برای روش اجزای محدود طیفی ارائه و از این روش در تحلیل انتشار امواج صوتی استفاده کردند [۸]. توردجمن کار مشابهی را با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر با مجموعه نقاط گاوس- لوباتو- لژاندر انجام داد [۹]. کوهن با استفاده از روش اجزای محدود طیفی پراکندگی امواج صوتی را بررسی کرد [۱۰] و تحلیل انتشار امواج الاستیک توسط روش اجزای محدود طیفی نیز توسط کوماتیتش و چالجوب انجام شد [۱۱و ۱۲]. نکته قابل توجه در این روش امکان استفاده از نقاط انتگرال‌گیری یکسان با مجموعه نقاط استفاده شده در توابع شکل است که باعث قطری شدن ماتریس جرم می‌شود. بنابراین زمان مورد نیاز این روش در تحلیل مسائل انتشار موج به دلیل داشتن ماتریس جرم قطری بسیار کم است.

از جمله دیگر روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا، روش اجزای محدود p و hp هستند که در این روش‌ها از چندجمله‌ای لژاندر به عنوان تابع شکل استفاده می‌شود [۱۳]. همچنین روش اجزای محدود بی- اسپلاین و نربز نیز از روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا هستند. توابع شکل در این دو روش، بی- اسپلاین و نربز هستند که با توجه به شرایط تعریف‌شان می‌توانند پیوستگی بالاتر از درجهٔ صفر را در مرز جزءها ایجاد کنند [۱۴]. این دو روش برای بررسی اثر پیوستگی روی مرز جزء در مدل‌کردن ارتعاشات سازه‌ای به‌کار آمده‌اند [۱۵]. هیوز و همکاران با استفاده از روش اجزای محدودنربزو اجزای محدود p، اثرات پیوستگی درجه بالاتر از صفر در مرز جزء را روی خطای محاسبه فرکانس طبیعی تیر اویلر- برنولی بررسی کردند. آنها نشان دادند که با افزایش درجه توابع شکل، خطای فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده کاهش می‌یابد، در صورتی که این خطا با افزایش درجه توابع لژاندر در روش اجزای محدود p، افزایش می‌یابد [۱۶و ۱۷]. کلمن و همکارانش با به‌کارگیری روش اجزای محدود بی- اسپلاین، به بررسی پراکندگی امواج الاستیک در مدل یک بعدی پرداختند. همچنین تاثیر تعداد نقاط کنترل و بهینه‌سازی

مکان نقاط کنترل در جهت کاهش پراکندگی موج در مدل یک بعدی توسط آنها انجام شد [۱۸].

با توجه به پیشینهٔ تحقیقات انجام شده به شرح بالا، هدف از انجام این تحقیق بررسی پراکندگی امواج الاستیک در روش اجزای محدود بی- اسپلاین برای محیط دوبعدی با استفاده از روش فوریه است. برای این منظور از تفاوت سرعت واقعی موج در محیط مادی مورد نظر با سرعت محاسبه شده از روش اجزای محدود به عنوان معیار پراکندگی استفاده شده است. در بخش دوم در ابتدا معادلات مربوط به انتشار موج در محیط دوبعدی نامحدود آورده شده است. سپس سرعت فازی و گروهی برای موج طولی و عرضی تعریف شده‌اند. در بخش سوم گسسته‌سازی معادله حرکت موج توسط روش‌های اجزای محدود کلاسیک و بی- اسپلاین آورده شده‌اند. توابع شکل مورد استفاده در روش اجزای محدود بی-اسپلاین دارای درجه پیوستگی C^1 در مرز اجزای داخلی هستند. استراتژی تحلیل پراکندگی امواج با استفاده از روش فوریه برای جزء مربعی دو بعدی در روش‌های اجزای محدود بی- اسپلاین و کلاسیک بخش بعدی را تشکیل می‌دهند. همچنین رابطه پراکندگی برای هر دو روش محاسبه شده است. در بخش نتایج، خطای حاصل از روش اجزای محدود بی- اسپلاین و اجزای محدود کلاسیک در محاسبه بردار سرعت با جواب تحلیلی مساله انتشار موج الاستیک در صفحه مقایسه و طول مناسب هر جزء در طول موج مشخص تعیین شده است.

۲- معادلات انتشار موج

در این بخش معادلات انتشار امواج الاستیک در محیط دو بعدی بیان می‌شود. محیط مورد بررسی صفحهٔ نامحدودی است که به موازات صفحه x در دستگاه مختصات کارتزین است. بنابراین، بردار مکان در این حالت R^2 است.

۲-۱- موج الاستیک

معادله حرکت موج به‌فرم اندیسی برای محیط الاستیک چنین است [۱۹]:

$$\sigma_{ij,j}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i \qquad (1)$$

که در آن σ تنش، ρ چگالی، f_i نیروی بدنه و u جابه‌جایی است. بالانویس نقطه روی هر پارامتر به‌معنی مشتق نسبت به زمان آن پارامتر است. برای مسائل دو بعدی $i, j=1,2$ و برای مسائل سه‌بعدی $i,j=1,2,3$ است. در محیط الاستیک رابطه تنش و کرنش هوک به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \kappa\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

که در آن κ و μ ضرایب لامه هستند. در رابطه (۲)، به‌دلیل برشی نبودن امواج صوتی، ترم $2\mu\varepsilon_{ij}$ برابر صفر است. رابطه جابه‌جایی کرنش نیز به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (3)$$

حال با جای‌گذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) و صرف‌نظر کردن از نیروی بدنه، معادله حرکت به‌فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$(\kappa+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \rho\ddot{u}_i \qquad (4)$$

در محیط همگن ایزوتروپ، دو نوع موج صفحه‌ای وجود دارد. موج اول به‌نام موج فشاری یا طولی شناخته می‌شود. سرعت انتشار این موج در یک محیط ایزوتروپ و همگن چنین است [۲۰]:

$$c_L = \sqrt{\frac{\kappa+2\mu}{\rho}},\ \ \kappa = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (5)$$

موج دوم موج عرضی یا برشی نام دارد و سرعت انتشار آن به‌صورت زیر است:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (6)$$

اگر نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، پاسخ هارمونیک معادله حرکت را می‌توان به شکل زیر نوشت [۲۱]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)) \qquad (7)$$

که در آن بردار $A=(A_x,A_y)$ دامنه پاسخ، $k=(k_x,k_y)$ بردار موج، $i=\sqrt{-1}$، ω فرکانس زاویه‌ای و $\mathbf{u}=(u,v)$ بردار جابه‌جایی است. اندازه بردار موج $k=|\mathbf{k}|$ عدد موج نام دارد.

برای طول موج مشخص λ، عدد موج چنین است:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8)$$

با استفاده از فرکانس زاویه‌ای و عدد موج k می‌توان سرعت فازی c_p را به‌دست آورد:

$$c_p = \frac{\omega}{k} \quad (9)$$

و بردار سرعت گروهی c_g چنین است [۲۱]:

$$\mathbf{c}_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right) \quad (10)$$

برای محاسبه سرعت گروهی در صورت کوچک بودن اختلاف دو عدد موج می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد [۲۱]:

$$c_g = \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_{x2} - k_{x1}}, \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_{y2} - k_{y1}}\right) \quad (11)$$

در محیط مادی همگن، سرعت فازی و گروهی موج منتشر شده در همه جهات با هم برابراند. همچنین در محیط فاقد پراکنش موج، معادله پراکندگی موج به‌صورت $\omega = ck$ است. در این حالت نیز سرعت فازی و سرعت گروهی موج با هم برابرانـد. ولی در محیط دارای پراکنش، معادله پراکندگی موج غیرخطی است و جهت‌های موج گروهی و بردار موج یکسان نیستند.

۳- روش اجزای محدود

در روش اجزای محدود با استفاده از تکنیک میان‌یابی، به‌جای $\mathbf{u}$ پاسخ تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}$ محاسبه می‌شود. دامنه فیزیکی جسم مورد نظر به جزءهای محدود تقسیم شده و m گره برای میان-یابی انتخاب می‌شوند. هر جزء دارای n گره از m گره سراسری است که توسط همان تعداد توابع میان‌یابی (توابع شکل) $N_i(\xi),\ i = 1\ldots n$ در هر جزء به یکدیگر مرتبط می‌شوند و ξ مختصات محلی است. از اینرو، پاسخ تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}$ برای یک جزء به‌صورت زیر قابل محاسبه است [۱]:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (12)$$

که $\mathbf{u}_i(t)$ همان پاسخ تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}$ است که در گره‌ها محاسبه شده است. می‌توان با استفاده از نگاشت زیر مختصات x و ξ را به یکدیگر تبدیل کرد:

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\mathbf{x}_i(t) \quad (13)$$

پس ازگسسته‌سازی معادله حرکت با روش اجزای محدود، معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (14)$$

که $\mathbf{K}$ ماتریس سختی سراسری، $\mathbf{M}$ ماتریس جرم سراسری، $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی تمام گره‌ها، $\ddot{\mathbf{u}}$ شتاب گره‌ها و $\mathbf{F}$ بردار نیروی خارجی وارد بر سیستم است. ماتریس جرم و سختی سراسری از مونتاژ ماتریس جرم و سختی جزء‌ها به‌دست می‌آیند. ماتریس‌های جرم و سختی هر جزء از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{M}_{el} = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, d\Omega \quad (15)$$

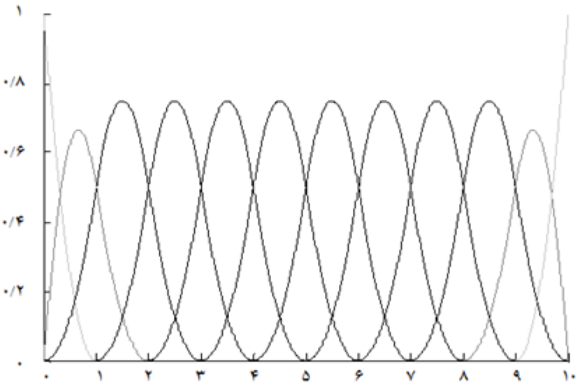
$$\mathbf{K}_{el} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, d\Omega \quad (16)$$

که $\mathbf{B}$ ماتریس کرنش- جابه‌جایی، $\mathbf{C}$ ماتریس الاستیسیته، $\mathbf{N}$ تابع شکل و Ω_e حجم جزء است. در حالت کرنش صفحه‌ای ماتریس الاستیسیته برابراست با:

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \quad (17)$$

همان‌گونه که در آغاز این بخش گفته شد، برای محاسبه پاسخ در کل دامنه جسم از میان‌یابی پاسخ با استفاده از توابع شکل استفاده می‌شود. از اینرو، انتخاب این توابع تاثیر به‌سزایی در دقت پاسخ‌ها خواهد داشت. تاکنون از توابع شکل مختلفی برای روش اجزای محدود استفاده شده است. در سال‌های اخیر استفاده از توابع شکل بی- اسپلاین و نربز گسترش یافته است.

استفاده از این توابع شکل معمولاً به افزایش دقت جواب‌ها



شکل۱- نمودار تابع شکل بی- اسپلاین درجه دو برای بردار گره $[I]=\{0,0,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,10,10\}$، تعداد توابع شکل: ۱۲

نسبت به دیگر توابع شکل، در درجات آزادی برابر، انجامیده است.

۳-۱- روش اجزای محدود کلاسیک

این روش یکی از روش‌های متداول در شبیه‌سازی مسائل مهندسی است. توابع شکل در روش اجزای محدود کلاسیک برای جزء دوخطی عبارتند از[۶]:

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= 0/25(1-\xi)(1-\eta)\\
N_2(\xi,\eta) &= 0/25(1+\xi)(1-\eta)\\
N_3(\xi,\eta) &= 0/25(1+\xi)(1+\eta)\\
N_4(\xi,\eta) &= 0/25(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

این توابع برروی جزء پایه تعریف می‌شوند. بنابراین برای محاسبه انتگرال‌های رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) باید جزء از مختصات فیزیکی به مختصات گوسی منتقل شود. جزئیات بیشتر در مورد این روش در مرجع [۱] قابل مشاهده است.

۳-۲- روش اجزای محدود بی-اسپلاین

در این روش فضای تعریف توابع شکل، مختصات گوسی نیست، بلکه توابع در مختصات جدیدی به نام مختصات پارامتری تعریف می‌شوند [۱۷]. برای تعریف توابع شکل بی- اسپلاین از درجه p، تعداد $p+2$ گره[1] در مختصات پارامتری نیاز است ($\zeta_1<\zeta_2<...<\zeta_{p+2}$). در نتیجه $p+1$ بازه وجود دارد که روی هر یک از بازه‌ها توابع شکل چندجمله‌ای از درجه p به دیگر توابع در بازه‌های مجاور، با درجه پیوستگی C^{p-1} متصل است[۱۷]. بنابراین برای n تابع شکل، بردار گره‌ها[2] برای یک بعد در مختصات پارامتری $\Xi=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{n+p+1}\}$ است که ζ_i، امین گره است. تکرار پذیری گره در بردار گره‌ها به اندازه $m<p+1$ امکان‌پذیر است که باعث کاهش درجه پیوستگی توابع شکل در آن گره به اندازه m خواهد شد. اگر اولین و آخرین عضو بردار گره‌ها $p+1$ بار تکرار شوند به آن بردار گره، بردار گره باز[3] می‌گویند [۱۷].

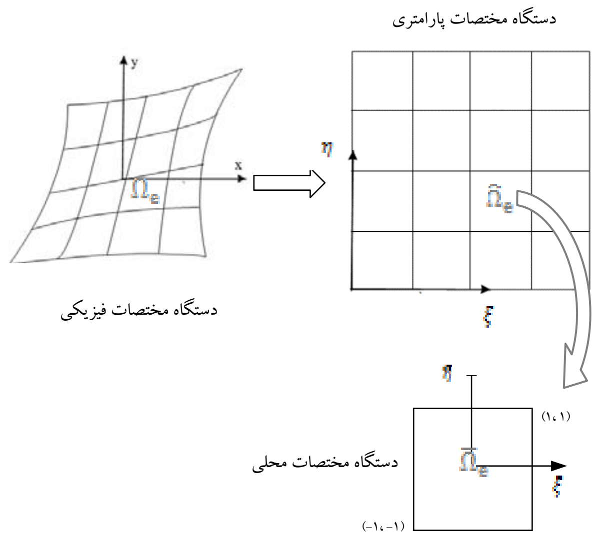
توابع شکل N_i^p از درجه p به‌صورت بازگشتی از N_i^0 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷]:

$$
N_i^0(\zeta)=\begin{cases}1 & \zeta_i<\zeta<\zeta_{i+1}\\ 0 & \text{else}\end{cases} \qquad (19)
$$

$$
N_i^p(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_i}{\zeta_{i+p}-\zeta_i}N_i^{p-1}(\zeta)+\frac{\zeta_{i+p+1}-\zeta}{\zeta_{i+p+1}-\zeta_{i+1}}N_{i+1}^{p-1}(\zeta) \qquad (20)
$$

در شکل (۱) توابع شکل بی- اسپلاین درجه دو در یک بعد با بردار گره باز ترسیم شده‌اند. مجموع مقدار توابع شکل بی- اسپلاین در هر یک از گره‌های بردار گره برابر یک است [۱۷]. در شکل (۲) دامنه فیزیکی و تصویر دامنه فیزیکی در مختصات پارامتری و شبکه‌بندی آنها در روش اجزای محدود بی- اسپلاین نشان داده شده است. دامنه هر جزء در مختصات فیزیکی Ω_e، در مختصات پارامتری $\widehat{\Omega}_e$ و در مختصات محلی $\overline{\Omega}_e$ است. برای محاسبه انتگرال‌های مربوط به ماتریس جرم و سختی، هر جزء از مختصات فیزیکی به مختصات محلی انتقال می‌یابد. به مجموعه جزء‌های ایجاد شده توسط بردار گره یا بردارهای گره در دریک-بعد یا چند بعد وصله[4] می‌گویند. لازم به‌ذکر است در روش اجزاء محدود بی- اسپلاین یا نربز توابع شکل با استفاده از بردار گره مناسب برای تقریب دامنه مورد نظر ایجاد و از همان توابع شکل برای گسسته‌سازی دامنه حل استفاده می‌شود.

جزئیات بیشتر از این توابع شکل و روش اجزای محدود مبتنی بر این توابع شکل در مرجع [۱۷] آمده‌است. دراین



شکل ۲- تصویر یک جزء در دستگاه‌های مختصات مختلف در روش اجزای محدود بی- اسپلاین

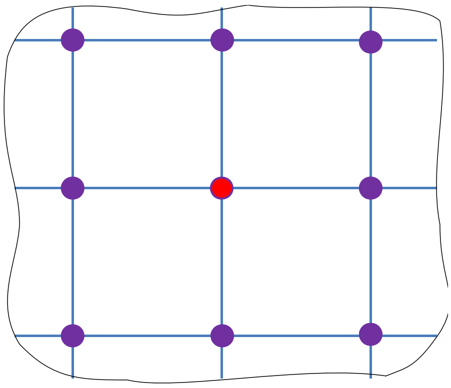
تحقیق از بردار گره باز با فواصل مساوی استفاده شده است.

۴- تحلیل پراکندگی امواج

در ادامه چگونگی محاسبه رابطه تعادل در یک نقطه کنترل و همچنین استفاده از روش فوریه برای محاسبه سرعت انتشار موج و تحلیل پراکندگی امواج به تفصیل آمده است.

۴-۱- تحلیل پراکندگی امواج برای جزء مربعی دو بعدی در روش اجزای محدود بی-اسپلاین و کلاسیک

در این تحلیل برای ساده‌سازی و تشخیص بهتر اثر پارامترها، فرض می‌شود که محیط مادی نامحدود، همگن، بدون نیروی خارجی و ایزوتروپ باشد. همچنین فرض می‌شود جزء مورد استفاده در تمام جسم، مربعی و دارای اضلاعی به موازات محورهای مختصات باشد. این فرضیات در مورد انتشار موج صفحه‌ای است و تحلیل در حالت کرنش صفحه‌ای انجام می‌شود. در روش اجزاء محدود کلاسیک، توابع شکل در تمام جزءها یکسان هستند. ولی در روش اجزاء محدود بی- اسپلاین و نربز توابع شکل در تمام جزءها یکسان نیستند. همان‌گونه



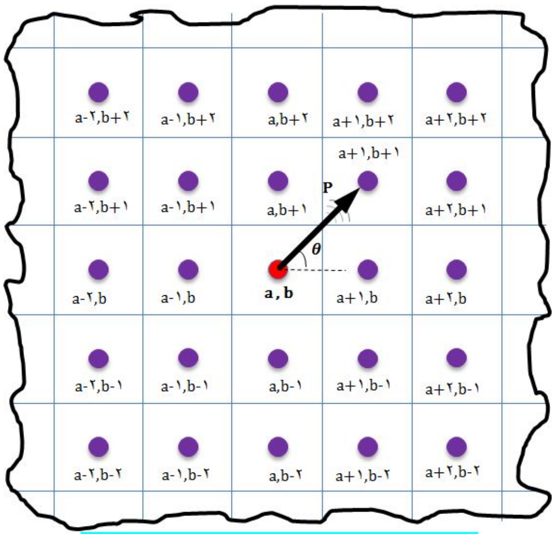
شکل ۳- گره انتخابی (گره مرکزی) و جزءهای مرتبط با آن

که در شکل (۱) مشاهده می‌شود در دو بازه اول و آخر، نمودار توابع شکل متفاوت از بازه‌های بعدی هستند. در این تحلیل از توابع شکل بی- اسپلاین یک بعدی درجه دو استفاده می‌شوند. با استفاده از ضرب تنسوری، توابع شکل برای حالت دوبعدی محاسبه می‌گردد.

در روش اجزای محدود کلاسیک، برای محاسبه معادله تعادل، هر گره غیرمرزی که در مرکز ۴ جزء مجاور قرار دارد را می‌توان انتخاب کرد. این گره با ۸ گره از جزءهای مجاور در ارتباط است. در این روش نیز جزءها مربعی هستند و از توابع شکل آورده شده در رابطه (۱۸) استفاده می‌شود. در شکل (۳) شبکه‌بندی، گرهٔ انتخابی، گره‌ها و جزءها مرتبط با آن نشان داده شده است.

در روش اجزاء محدود بی- اسپلاین، به دلیل پیوستگی C^{p-1} توابع شکل در تمام گره‌ها به‌جز گره‌های اول و آخر، توابع شکل در جزءهای دورتر از مرز تکرار می‌شوند. مثلا اگر توابع شکل درجه دو باشند، دو ردیف بعد از جزء اول و دو ردیف قبل از جزء آخر و همچنین دو ستون بعد از جزء اول و دو ستون قبل از جزء آخر دارای توابع شکل متفاوت هستند. بنابراین برای حذف اثرات توابع شکل غیریکسان در تحلیل پراکندگی موج باید گرهی انتخاب شود که متعلق به جزءهای دور از مرزها باشد تا از اثر مرزها بر جواب جلوگیری شود.

در این روش، گره‌های مربوط به شبکه‌بندی جسم در مختصات فیزیکی را نقاط کنترل می‌نامند [۱۷] که تعداد آنها



شکل ۴- نقطه کنترل انتخابی (گره مرکزی) و جزءهای مرتبط با آن

باتعداد توابع شکل n، برابر است و مکان آنها با استفاده از روش میانگین‌گیری گره‌ای[5] تعیین می‌شود. در این روش مکان نقطه کنترلiام با استفاده از میانگینp نقطه بعد از عضو iام بردار گره محاسبه می‌شود. استفاده از این روش برای تعیین مکان نقاط کنترل سبب می‌شود درون‌یابی توسط توابع بی- اسپلاین دارای تقریب بسیار خوبی باشد. همچنین دترمینان ژاکوبین تغییر شکل بین مختصات فیزیکی و مختصات پارامتری ثابت بماند [۱۷]. در دو بعد، برای توابع شکل بی- اسپلاین درجه دو با مرتبه پیوستگی C^1 مکان نقاط کنترل در وسط جزءهای دامنه فیزیکی قرار می‌گیرد. توابع شکل در جزءهای مرتبط با نقطه کنترل انتخابی یکسان هستند. به دلیل اینکه جزءها منظم و یک‌شکل هستند، فقط یک وصله مشخصه[6] که در شکل‌های (۳) و (۴) نشان داده شده، درنظر گرفته شده است و از معادلات تعادل در گره یا نقطه کنترل نشان داده شده جهت بررسی پراکندگی امواج در جسم استفاده شده است. جزءهای دامنه فیزیکی که تصویر جزءهادر مختصات پارامتری هستند نیز مربعی انتخاب شده‌اند تا تنها اثرات شبکه‌بندی در پراکندگی امواج وجود داشته باشد.

پس از انتخاب نقطه کنترل، معادله تعادل در این نقطه محاسبه می‌شود. اگر درجه تابع شکل (۲) فرض شود، ۲۴ گره یا نقطه‌ی کنترلی از جزءهای مجاور با نقطه کنترل انتخابی در ارتباط خواهندبود. اگر درجه تابع شکل (۳) باشد این تعداد به ۴۸ می‌رسد. در شکل (۴) جزءها و نقاط کنترل مرتبط با نقطه کنترل انتخابی نشان داده شده است. روش‌های مختلفی برای محاسبه پراکندگی وجود دارند ولی در همه آنها پاسخ در زمان و مکان متناوب است. عموما اساس این روش‌ها بر پایه روش فوریه است. در این روش پاسخ هارمونیک در معادله تعادل نقطه انتخابی قرار داده شده و حل‌پذیری آن بررسی می‌شود که معمولا به یک مساله مقدار ویژه می‌انجامد [۲۱].

۴-۲- محاسبه رابطه پراکندگی

در روش اجزای محدود بی- اسپلاین برخلاف دیگر روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا، پس از مونتاژ ماتریس‌های سراسری تنها یک معادله برای گره‌ها به‌دست می‌آید. بنابراین تنها دو معادله مشخصه (یکی در جهت x و دیگری در جهت y) برای مساله مقدار ویژه به‌دست خواهند آمد؛ نتیجه مشابه اجزای محدود کلاسیک با توابع شکل دوخطی است. بنابراین برای گره (a,b) معادلات تعادل را به‌صورت زیر می‌توان استخراج کرد:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{2a-1} \\ \mathbf{M}_{2a} \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}+\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{2a-1} \\ \mathbf{K}_{2a} \end{bmatrix}\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

که $\mathbf{M}_{2a-1}$ و $\mathbf{M}_{2a}$، سطر $2a-1$ و $2a$ ماتریس جرم سراسری

و $\mathbf{K}_{2a-1}$ و $\mathbf{K}_{2a}$، سطر $2a-1$ و $2a$ ماتریس سختی سراسری است. در روش فوریه در آغاز برای استخراج رابطه پراکندگی، پاسخ معادله انتشار موج در معادله فوق قرار داده می‌شود. در پاسخ معادله انتشار موج می‌توان بخش‌های مربوط به مکان و زمان را از یکدیگر به‌صورت زیر جدا نمود:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u_{i,j}}\left(x_i, y_j, t\right)=\\&\quad \mathbf{A}\exp\left(ik_x x_i\right)\exp(ik_y y_j)\exp\left(-i\omega t\right)=\\&\quad \mathbf{A}\Gamma_x^i\Gamma_y^j\exp\left(-i\omega t\right)\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن $k_x = k\cos\theta$ و $k_y = k\sin\theta$ تصویر عدد موج در راستای محورهای مختصات است. اگر فاصله دو نقطه کنترل مجاور h فرض شود، مختصات نقطه کنترل (a,b) عبارت است از:

$$\begin{aligned}&x_a = ha \quad \text{و} \quad y_b = hb\\&a = 0,1,\ldots,m-1\\&b = 0,1,\ldots,n-1\end{aligned} \tag{۲۳}$$

با توجه به روابط فوق می‌توان پاسخ موج در دیگر گره‌ها را برحسب پاسخ موج در گره (a,b)نوشت. رابطه بین گره $(a-2,b+1)$ با گره (a,b) چنین است:

$$\begin{aligned}&u_{a-2,b+1}\left(x_{a-2}, y_{b+1}, t\right) = \mathbf{A}\Gamma_x^{a-2}\Gamma_y^{b+1}\exp\left(\pm i\omega t\right)=\\&\quad \left(\Gamma_x^1\right)^{-2}\left(\Gamma_y^1\right)^{+1}u_{a,b}\left(x_a, y_b, t\right)\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که $\Gamma_x^1 = \exp(ihk_x)$ و $\Gamma_y^1 = \exp(ihk_y)$ است. حال با تعمیم رابطه فوق به دیگر گره‌ها، تمام گره‌ها مرتبط با گره مرکزی، با ضرایبی برحسب گره مرکزی نوشته می‌شوند. برای محاسبه شتاب گره‌ها، مشتق مرتبه دوم از رابطه (۲۲) برحسب زمان محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\ddot{\mathbf{u}}_{a,b}\left(x_{a-2}, y_{b+1}, t\right) = -\omega^2\mathbf{A}\Gamma_x^i\Gamma_y^j\exp\left(\pm i\omega t\right)=\\&\quad -\omega^2\mathbf{u}_{a,b}\left(x_s, y_b, t\right)\end{aligned} \tag{۲۵}$$

با جای‌گذاری روابط (۲۵) و (۲۲) در رابطه تعادل مربوط به گره مرکزی، رابطه (۲۱)، فرم نهایی رابطه پراکندگی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{2a-1}\\ \mathbf{M}_{2a}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\begin{bmatrix}\mathbf{u_a}\\ \mathbf{v_b}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{2a-1}\\ \mathbf{K}_{2a}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\begin{bmatrix}\mathbf{u_a}\\ \mathbf{v_b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

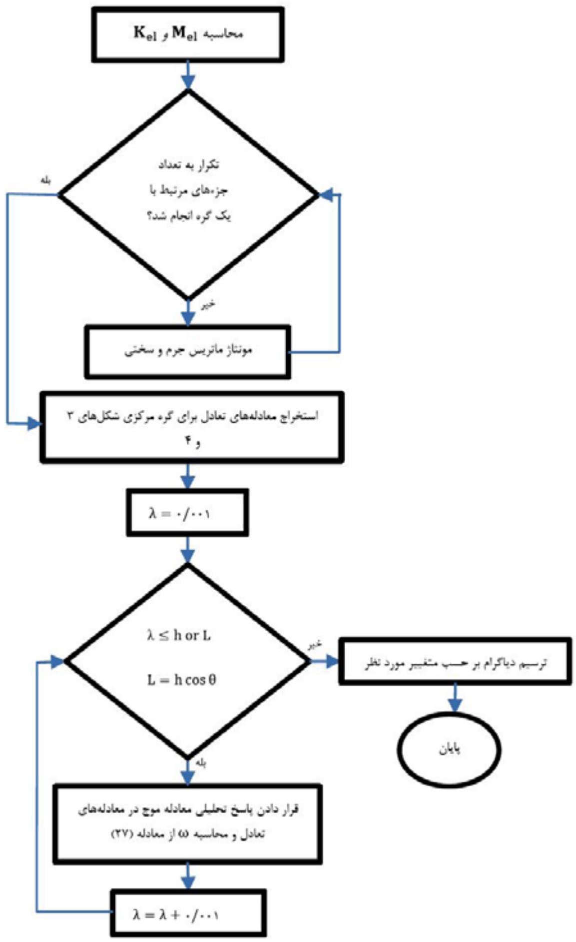
$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\vdots & \vdots\\ \left(\Gamma_x^1\right)^{-1}\left(\Gamma_y^1\right)^0 & \left(\Gamma_x^1\right)^{-1}\left(\Gamma_y^1\right)^0\\ \left(\Gamma_x^1\right)^0\left(\Gamma_y^1\right)^0 & \left(\Gamma_x^1\right)^0\left(\Gamma_y^1\right)^0\\ \left(\Gamma_x^1\right)^1\left(\Gamma_y^1\right)^0 & \left(\Gamma_x^1\right)^1\left(\Gamma_y^1\right)^0\\ \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

که Γ، ماتریس ضرایب برحسب Γ_x^1 و Γ_y^1 است. تعداد سطرهای Γ با تعداد درایه‌های بردار K_{2a-1} برابر است و دارای دو ستون است.شرط وجود جواب برای رابطه فوق این است که دترمینان ضرایب بردار $\begin{bmatrix}\mathbf{u_a}\\ \mathbf{v_b}\end{bmatrix}$ برابر صفر باشد. این معادله که معادله مشخصه نام دارد برای روش اجزای محدود بی- اسپلاین، معادله مرتبه دوم برحسب ω^2 است که شبیه معادله مشخصه اجزای محدود دوخطی است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{2a-1}\\ \mathbf{K}_{2a}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{2a-1}\\ \mathbf{M}_{2a}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\right)=0 \tag{۲۷}$$

با فرض عدم وجود میرایی در محیط مادی مورد نظر، با داشتن مقادیر Γ_x^1 و Γ_y^1 ماتریس ضرایب Γ محاسبه و فرکانس‌های انتشار موج محاسبه می‌شوند. با توجه به مثبت معین بودن ماتریس-های جرم و سختی در این روش [۱۷]، برای مقادیر حقیقی hk_x و hk_y، از معادلهٔ مشخصه (۲۷) دو مقدار ویژه ω^2 به‌دست خواهند آمد که مثبت و حقیقی هستند [۱۷]. در صورتی‌که برای دیگر روش‌های مرتبه بالای اجزای محدود تعداد مقادیر ویژه بیشتر است. طریقه محاسبه مقادیر ویژه در صورت وجود میرایی در مرجع [۱۷] آمده است.

اگراین روند برای روش اجزای محدود بی- اسپلاین با توابع شکل درجه ۳ انجام شود، بازهم معادله مشخصه مرتبهٔ دوم است. بنابراین در این روش فرکانس‌های اضافی به‌دست نخواهندآمد. در مقادیر ویژه محاسبه شده، عدد کوچکتر مربوط به فرکانس زاویه‌ای موج عرضی و عدد بزرگتر مربوط به فرکانس زاویه‌ای موج طولی است. با استفاده از فرکانس زاویه‌ای‌های به‌دست آمده می‌توان سرعت فازی موج منتشرشده در جهت‌های عرضی و طولی را از معادلهٔ (۹) یافت



شکل ۵- الگوریتم محاسبه مقدار خطای پراکندگی

$c_L^{FEM} = \omega_1^{FEM} / k, c_T^{FEM} = \omega_2 / k$). با استفاده از سرعت‌های به‌دست آمده می‌توان خطای پراکندگی شبکه را به‌صورت زیر تعریف نمود [۶]:

$$Er_L = 1 - c_L^{FEM} / c_L, \quad Er_T = 1 - c_T^{FEM} / c_T \qquad (۲۸)$$

۵- نتایج

در این بخش پراکندگی موج برای جزء مربعی در روش اجزای محدود بی- اسپلاین نمایش داده شده است. نمودارهای مختلف در این بخش با استفاده از برنامه نوشته شده در محیط متلب بر اساس الگوریتم شکل (۵) ترسیم شده‌اند.

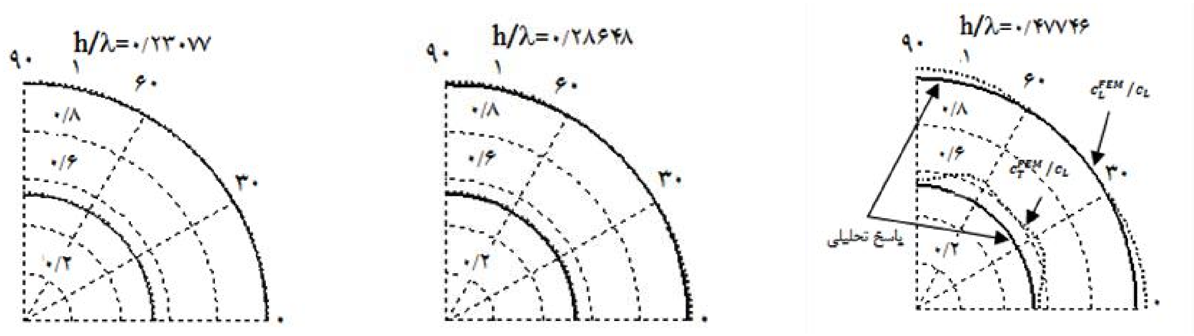
پارامتر h/λ نسبت طول جزء به طول موج است و برای مقادیر مختلف این نسبت، دیاگرام‌های قطبی c_L^{FEM} / c_L و c_T^{FEM} / c_L ترسیم شده است. پاسخ تحلیلی برای $c_L / c_L = 1$ است. برای محاسبه پاسخ تحلیلی c_T / c_L با استفاده از روابط (۵) و (۶) رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$c_T / c_L = \sqrt{(1 - 2\nu) / (2 - 2\nu)} \qquad (۲۹)$$

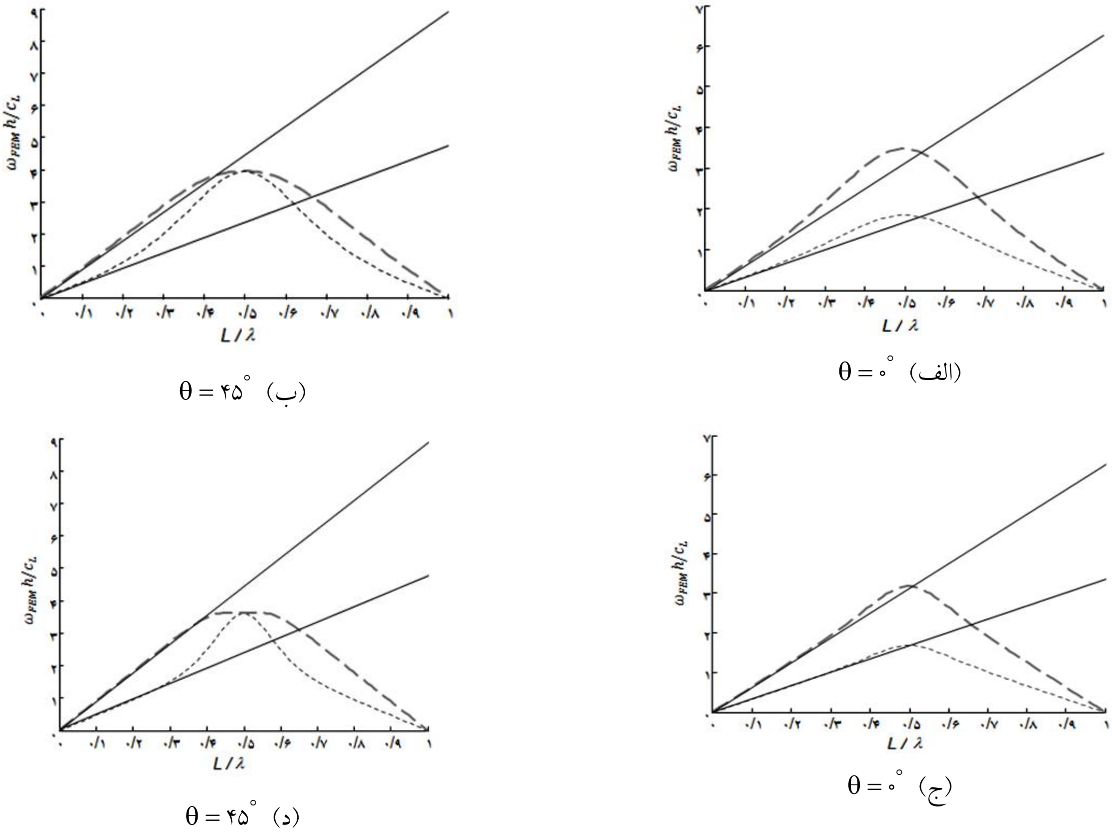
بنابراین پاسخ تحلیلی نسبت c_T / c_L فقط به ν وابسته است. برای $\nu = ۰/۳$ مقدار $c_T / c_L = ۰/۵۳۴۵$ به‌دست می‌آید. شکل (۶) برای نسبت‌های مختلف دیاگرام قطبی قابل مشاهده است. همان‌طور که در شکل ۶ مشخص است، برای $h/\lambda = ۰/۲۳$ مقدار خطا بسیار ناچیز است. در حالی‌که این مقدار برای جزء مربعی دوخطی در مرجع [۱۸] برابر $h/\lambda = ۰/۱$ است. یعنی برای دست‌یابی به دقت لازم در اجزای محدود کلاسیک با جزءهای دوخطی، باید جزءها به قدری کوچک باشند که در فاصله یک طول موج حداقل ۱۰ گره وجود داشته باشد.

در مورد استفاده از روش اجزای محدود بی- اسپلاین این مقدار به کمتر از ۵ گره می‌رسد. در این صورت تعداد جزءهای مورد نیاز نصف تعداد جزءها در اجزای محدود کلاسیک خواهد بود. همچنین با توجه به این که درجات آزادی گره‌های هر جزء در روش اجزای محدود بی-اسپلاین و روش اجزای محدود کلاسیک با یکدیگر برابر است، بنابراین درجه آزادی مدل ساخته شده در روش اجزای محدود بی- اسپلاین کمتر از نصف مدل ساخته شده در روش اجزای محدود کلاسیک خواهد بود. لازم به‌ذکر است کمتر بودن حجم حافظه مورد نیاز و نرخ محاسبات در دقت برابر با روش اجزای محدود کلاسیک برای روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا از جمله روش اجزای محدود بی- اسپلاین در مرجع [۲۲] آورده شده است.

زاویه $\theta = ۴۵^\circ$ محور تقارن نمودارهای شکل (۶) است. مشاهده می‌شود که در این زاویه، در مقایسه با زوایای دیگر، مقدار خطای پراکندگی مینیمم است. در نزدیکی $\theta = ۰^\circ$ یا $\theta = ۹۰^\circ$ مقدار خطا ماکزیمم است. بنابراین از زاویه‌های $\theta = ۰^\circ$ و $\theta = ۴۵^\circ$ جهت ترسیم شکل‌های بعدی استفاده خواهد شد.

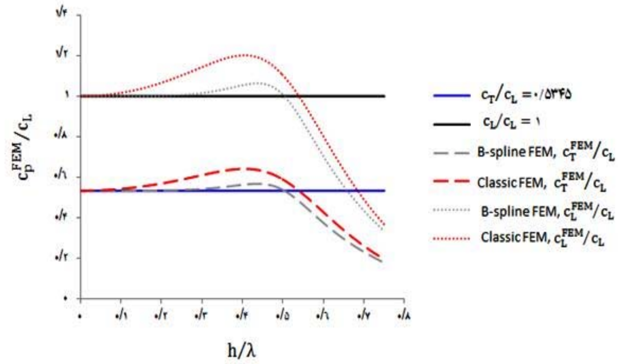


شکل ۶- دیاگرام قطبی c_T^{FEM} / c_L و c_L^{FEM} / c_L (اجزای محدود بی-اسپلاین -جزء مربعی)

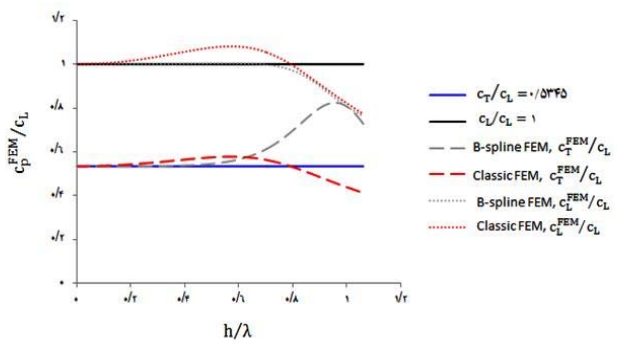


شکل ۷- نمودارطیف پراکندگی روش اجزای محدود کلاسیک با جزء دوخطی در زاویه‌های (الف) $\theta = ۰^o$ و (ب) $\theta = ۴۵^o$ و روش اجزای محدود بی- اسپلاین در زاویه‌های (ج) $\theta = ۰^o$ و (د) $\theta = ۴۵^o$، خط توپر: نمودار طیف موج طولی و عرضی در محیط پیوسته، خط چین: نمودار طیف موج طولی در روش اجزای محدود $\omega_۱^{FEM}h/c_L$، نقطه چین: نمودار طیف موج عرضی در روش اجزای محدود $\omega_۲^{FEM}h/c_L$

در شکل (۷) نمودار $\omega_۱^{FEM}h/c_L$ برحسب L/λ برای دو زاویه $\theta = ۰^o$ و $\theta = ۴۵^o$ ترسیم شده است که L تصویرطول جزء در راستای انتشار موج است، $L = h\cos\theta$. نمودارهای (الف) و (ب) مربوط به‌روش اجزای محدود کلاسیک با جزء نمودارهای (ج) و (د) مربوط به‌روش اجزای محدود بی- اسپلاین است. با مقایسه شکل‌های (الف) و (ج) و همچنین شکل‌های (ب) و (د) می‌توان نتیجه گرفت که در نمودارهای مربوط به‌روش اجزای محدود بی- اسپلاین انحراف از پاسخ

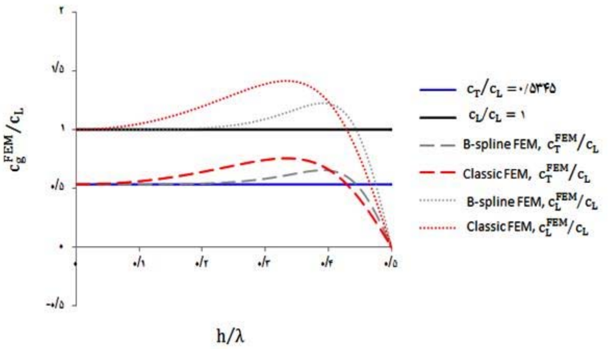


(الف)

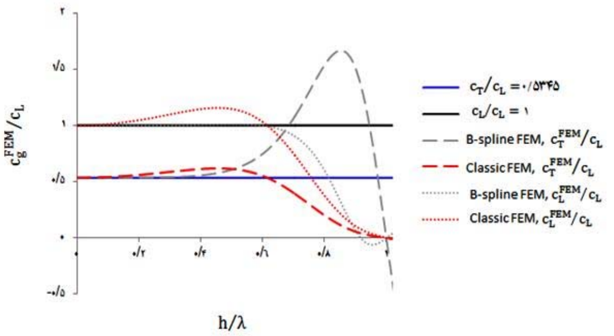


(ب)

شکل ۸- نمودارهای نسبت سرعت فازی موج به‌دست آمده از روش اجزای محدود بی- اسپلاین و کلاسیک به سرعت حقیقی طولی موج در زاویه‌های (الف) $\theta = 0^o$ و (ب) $\theta = 45^o$ برحسب h/λ، خطوط توپر مربوط به محیط پیوسته



(الف)



(ب)

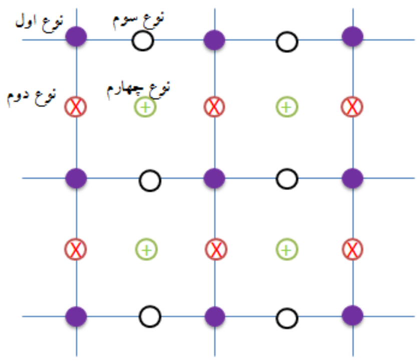
شکل ۹- نمودارهای نسبت سرعت گروهی موج‌به‌دست آمده از روش اجزای محدود بی- اسپلاین و کلاسیک به سرعت حقیقی طولی موج در زاویه‌های(الف) $\theta = 0^o$ و (ب) $\theta = 45^o$ برحسب h/λ، خطوط توپر مربوط به محیط پیوسته

محیط پیوسته یا به عبارت دیگر پاسخ مبنا در L/λ بزرگتری اتفاق می‌افتد.

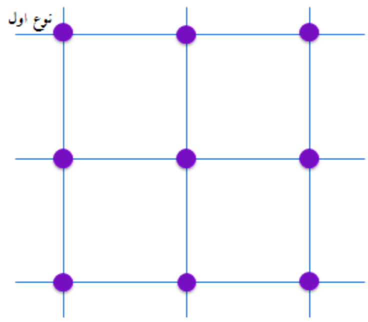
در شکل (۸) نمودارهای نسبت سرعت فازی محاسبه شده از دو روش اجزای محدود کلاسیک و بی- اسپلاین نسبت به دوخطی و سرعت طولی موج در محیط پیوسته آمده‌اند.

نمودار (الف) برای زاویه $\theta = 0^o$ و نمودار (ب) برای راستای $\theta = 45^o$ محاسبه شده است. در هر دو شکل (الف) و (ب) هم برای موج طولی و هم برای موج عرضی انحراف نتایج روش اجزای محدود کلاسیک از پاسخ تحلیلی در h/λ کوچکتری اتفاق می‌افتد. همچنین نمودارهای نسبت سرعت گروهی به سرعت واقعی موج در راستای طولی و عرضی برای دو روش اجزای محدود بی- اسپلاین و کلاسیک در شکل (۹) آمده‌اند. سرعت‌های فازی و گروهی به‌ترتیب با استفاده از رابطه‌های (۹) و (۱۰) محاسبه می‌شوند.

همان‌گونه که در این دو شکل مشاهده می‌شود، می‌توان محدوده تغییر مقدار h/λ را به‌گونه‌ای تعیین کرد که در آن مقدار خطای پراکندگی کمتر از مقدار مشخصی باشد. مرز این محدوده $(h/\lambda)_{cut}$ نامیده می‌شود [۲۱]. با توجه به رابطه (۲۶) در روش اجزای محدود خطی در بازه $h/\lambda \in \left[-(h/\lambda)_{cut}, (h/\lambda)_{cut}\right]$، مقدار دامنهٔ پاسخ مستقل از h/λ است و از طریق شرایط مرزی محاسبه می‌شود. این شرایط



شکل ۱۰- گره‌های جزءهای مجاور در روش اجزای محدود طیفی با توابع شکل درجه ۲ و انواع گره‌های مشخصه



شکل ۱۱- گره‌های جزءهای مجاور در روش اجزای محدود کلاسیک و گره مشخصه آن

به دلیل عدم وجود فرکانس‌های اضافی است که در اغلب روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا محاسبه شده و مودهای اضافی ایجاد می‌کنند.

برخلاف دیگر روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا، در روش اجزای محدود بی-اسپلاین در صورت استفاده از توابع شکل با درجه‌ی پیوستگی C^{p-1}، معادلات مستقل تکرار شونده تنها دو معادله هستند که یک معادله در جهت x و دیگری همان معادله اول ولی در جهت y است، زیرا تعداد معادلات با تعداد گره‌های مشخصه برابر هستند [۶] و در این روش همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، تنها یک گره مشخصه (گره گوشه) وجود دارد (p درجه چندجمله‌ای تابع شکل است).

بنابراین به دلیل عدم وجود فرکانس‌های اضافی و به تبع آن عدم وجود مودهای اضافی، در بازه $h/\lambda \in \left[-(h/\lambda)_{cut}, (h/\lambda)_{cut}\right]$ دامنه فاقد خطا است. اما در دیگر روش‌های اجزای محدود مرتبه بالا مانند روش اجزای محدود طیفی، تعداد گره‌های مشخصه بیشتر هستند (شکل (۱۰)). بنابراین با توجه به تحلیل فوریه، معادله مشخصه آنها دارای تعداد ریشه‌های بیشتر و در نتیجه فرکانس‌های اضافی است. در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) گره‌های مشخصه برای روش‌های اجزای محدود طیفی و کلاسیک نشان داده شده است.

۶- نتیجه‌گیری

با استفاده از روش‌های اجزای محدود کلاسیک و اجزای محدود بی- اسپلاین معادلات مربوط به پراکندگی موج الاستیک محاسبه و فرمول‌بندی شد. پیوستگی توابع شکل بی- اسپلاین از درجه C^1 انتخاب شدند. در ادامه با استفاده از روش فوریه خطای ناشی از این دو روش در محاسبهٔ سرعت فازی و گروهی به عنوان خطای پراکندگی شبکه محاسبه شد. برای مشخص شدن تاثیر زاویه انتشار بر این خطا، خطای پراکندگی به‌صورت قطبی ترسیم شد. تحلیل پراکندگی در مورد روش‌های اجزای محدود کلاسیک و اجزای محدود بی- اسپلاین نشان داد که استفاده از روش‌های مرتبه بالاتر در اجزای محدود باعث کاهش خطای پراکندگی موج خواهد شد. همچنین تعداد گره‌های لازم جهت مدل‌سازی موجی با طول موج λ در روش اجزای محدود بی- اسپلاین مشخص شد. نتایج نشان داد که تعداد جزءهای مورد نیاز و به تبع آن درجه آزادی سیستم مدل شده در این روش نسبت به‌روش اجزای محدود کلاسیک، در حدود نصف است. همچنین به دلیل وجود تنها یک گره مشخصه (گره گوشه)، فرکانس‌های اضافی محاسبه نمی‌شوند. بنابراین مودهای اضافی نیز حضور ندارند و در محاسبه دامنه خطایی وجود ندارد.

واژه‌نامه

1. knot
2. knot vector
3. open knot vector
4. patch
5. Greville abscissa
6. characteristic patch

مراجع

1. Bathe, K., *Finite Element Procedures*, Klaus-Jürgen Bathe, Cambridge, MA, 2006.
2. Duczek, S., Joulaian, M., Düster, A., and Gabbert, U., "Numerical Analysis of Lamb Waves Using the Finite and Spectral Cell Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 1, pp. 26-53, 2014.
3. Chakrabarti, P., and Chopra, A. K., "Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Hydrodynamic Interaction", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 2, pp. 143-160, 1973.
4. Lysmer, J., and Drake, L. A., "A Finite Element Method for Seismology", *Methods in Computational Physics*, Vol. 11, pp. 181-216, 1972.
5. Smith, W. D., "The Application of Finite Element Analysis to Body Wave Propagation Problems", *Geophysical Journal International*, Vol. 42, pp. 747-768, 1975.
6. Mullen, R., and Belytschko, T. "Dispersion Analysisof Finite Element Semidiscretizations of the Two Dimensional Wave Equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 11-29, 1982.
7. Marfurt, K. J. "Accuracy of Finite-Difference and Finite-Element Modeling of the Scalar and Elasticwave Equations", *Geophysics*, Vol. 49, pp. 533-549, 1984.
8. Seriani, G., and Priolo, E., "Spectral Element Method for Acoustic Wave Simulation in Heterogeneous Media", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 16, pp. 337-348, 1994.
9. DeBasabe Delgado, J. d. D., "High-order finite element methods for seismic wave propagation", Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 2009.
10. Cohen, G., Joly, P., and Tordjman, N., "Higher-Order Finite Elements with Mass-Lumping for the 1D Wave Equation", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 16. pp. 329-336, 1994.
11. Komatitsch, D., Ritsema, J., and Tromp, J., "The Spectral-Element Method, Beowulf Computing, and Global Seismology" *Science*, Vol. 298, pp. 1737-1742, 2002.
12. Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J. P., Capdeville, Y., Valette, B., and Festa, G., "Spectral-Element Analysis in Seismology", *Advances in Geophysics*, Vol. 48, pp. 365-419, 2007.
13. Düster, A., Demkowicz, L., and Rank, E., "High Order Finite Elements Applied to the Discrete Boltzmann Equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, pp. 1094-1121, 2006.
14. Hughes, T. J., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y "Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
15. Cottrell, J., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T. "Isogeometric Analysis of Structural Vibrations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257-5296, 2006.
16. Hughes, T. J., Reali, G. A., and Sangalli, G, "Duality and Unified Analysis of Discrete Approximations in Structural Dynamics and Wave Propagation: Comparison of p-Method Finite Elements with k-Method NURBS", *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 4104-4124, 2008.
17. Cottrell, J. A., Hughes, T. J., and Bazilevs, Y., *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA,* John Wiley & Sons, 2009.
18. Kolman, R., Plešek, J., Okrouhlík, M., and Gabriel, D., "Dispersion Errors of B-spline Based Finite Element Method in One-Dimensional Elastic Wave Propagation", *The 3rd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering.* Papadrakakis M. et al, pp. 1-12, 2011.
19. Aki, K., and Richards, P. G., *Quantitative Seismology*, University Science Books, Sausalito, USA, 2002.
20. Daryabor, P., Farzin, M. and Honarvar, F. "Calculating the Lamb Wave Modes in an Aluminum Sheet Bonded to a Composite Layer with FEM and Experiment", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 11, pp. 95-106, 2013.
21. Achenbach, J., *Wave Propagation in Elastic Solids*., Elsevier Science Ltd, 1984.
22. Willberg, C., Duczek, S., Perez, J. V., Schmicker, D., and Gabbert, U. "Comparison of Different Higher Order Finite Element Schemes for the Simulation of Lamb Waves", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 241, pp. 261-246, 2012.