

بررسی تحلیلی عددی ورق‌های نازک ایزوتروپ و ارتوتروپ به کمک روش

بدون شبکه گالرکین (EFG) با اشکال هندسی گوناگون

حامد عدالتی و بهزاد سلطانی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۴/۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱/۱۹)

چکیده - در مقاله حاضر به کمک یکی از روش‌های بدون المان به تحلیل استاتیکی ورق‌های نازک با اشکال هندسی گوناگون بر مبنای تئوری‌های کلاسیک میندلین پرداخته شده است. در این روش عددی، دامنه مسئله تنها توسط مجموعه‌ای از گره‌ها بیان می‌شود و به هیچ‌گونه شبکه بندی یا المان نیاز نیست. برای بیان دامنه مسائل با اشکال هندسی گوناگون ابتدا مجموعه‌ای از گره‌ها در یک دامنه مستطیلی استاندارد تعریف می‌شوند، سپس توسط یک نگاشت مرتبه سه این گره‌ها به دامنه مسئله اصلی انتقال می‌یابند، بنابراین می‌توان ورق‌های با اشکال هندسی مختلف را تحلیل کرد. از میان روش‌های عددی بدون شبکه، در اینجا از روش بدون شبکه گالرکین (EFG) استفاده می‌شود. روش مذکور از روش‌های انتگرالی فرم ضعیف می‌باشد که از توابع شکل MLS جهت تقریب استفاده می‌کند. با توجه به عدم خاصیت دلتا در توابع شکل MLS نمی‌توان شرایط مرزی را به صورت مستقیم اعمال کرد، لذا برای اعمال شرایط مرزی از روش لاگرانژ استفاده می‌شود. در پایان برای نشان دادن صحت روش حل، جواب‌های روش حاضر با جواب‌های حاصل از حل تحلیلی ورق‌ها و روش‌های المان محدود مقایسه خواهد شد و پس از تایید صحت روش حل به حل چند نمونه جدید پرداخته خواهد شد.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه گالرکین، تئوری ورق‌ها، حل عددی فرم ضعیف، روش اعمال مرزی لاگرانژ.

Analysis of Thin Isotropic and Orthotropic Plates with Element-Free Galerkin Method and Various Geometric Shapes

H. Edalati and B. Soltani

Department of Mechanical Engineering, Kashan University

Abstract: Utilizing one of the mesh free methods, the present paper concerns static analysis of thin plates with various geometric shapes based on the mindlin classical plate theories. In this numerical method, the domain of issue is solely expressed through a set of nodes and no gridding or element is required. To express the domain of issues with various geometric shapes, first a set of nodes are defined in a standard rectangular domain, then via a three-order map with, these nodes are transferred to the

* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: bsoltani@kashanu.ac.ir

main domain of the original issue; therefore plates of various geometric shapes can be analyzed. Among meshfree numerical methods, Element Free Galerkin method (EFG) is utilized here. The method is one of the weak form integral methods that uses MLS shape functions for approximation. Regarding the absence of Delta feature in MLS functions, boundary conditions cannot be imposed directly; hence the Lagrangian method is utilized to impose boundary conditions. At the end, our outputs are compared with those of analytic and finite element methods for plates, in order to validate the exactness of our solution method, and then after reliability is established, a few new examples will be solved.

Keywords: Element Free method of Galerkin (EFG), Plate's theory, weak form numerical solution, Lagrange method.

فهرست علائم

علائم یونانی	ابعاد ورق
U	b
جا به جایی یک نقطه در راستای محور X	C
V	ماتریس سختی
جا به جایی یک نقطه در راستای محور Y	D
W	ماتریس سختی خمشی
جا به جایی یک نقطه در راستای عمود بر صفحه ورق	E
α	مدول الاستیسیته
ضریب پنالتی	E_1
Γ	مدول الاستیسیته طولی
مرز دامنه مسئله	E_2
θ	مدول الاستیسیته عرضی
زاویه چینش الیاف در مواد کامپوزیت	G_{12}
λ	مدول الاستیسیته برشی
ضرایب لاگرانژ	h
ϵ	ضخامت ورق
بردار کرنش	n
σ	تعداد گره‌ها داخل دامنه محلی
بردار تنش	Q
ϕ	ماتریس سختی در مواد کامپوزیتی
تابع شکل	R
Ω	ماتریس تبدیل کرنش‌های اصلی و مهندسی
دامنه مسئله	T
	ماتریس انتقال

رفته‌اند.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین روش‌های حل عددی روش المان محدود^۱ در سال ۱۹۵۰ است [۱]. در این روش یک محیط پیوسته و پیچیده به المان‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شود که این المان‌ها توسط یک شبکه^۲ به هم متصل هستند. این روش علی‌رغم مزایای زیاد شامل ضعف‌هایی نیز هست که عبارتند از: الف) هزینه بالای شبکه‌بندی دامنه مسئله، ب) دقت پایین در محاسبه تنش‌ها، ج) مشکلات در حل مسائل تطابقی^۳، د) محدودیت در حل بعضی از مسائل (مسائل با تغییر شکل بزرگ و شکست). که ریشه اصلی این مشکلات ناشی از شبکه‌بندی دامنه مسئله است.

در طی سال‌های اخیر برای حل این مشکلات، روش‌های جدید محاسباتی ارائه شده است که بر خلاف روش المان

در چند دهه اخیر با توسعه و گسترش علوم و تکنولوژی محققین مواد جدیدی مانند کامپوزیت‌ها را ساخته‌اند. این مواد با مقاومت مکانیکی بالا و وزن کم همواره توجه مهندسين و محققين را به خود جلب کرده‌اند چرا که این مواد با این مشخصات نیاز روز افزون صنایع هستند. ورق‌ها، یکی از ساختارهایی هستند که به‌طور وسیع از مواد کامپوزیت در آنها استفاده می‌شود. با توجه به کاربرد وسیع ورق‌ها در صنایع مختلف از جمله هوافضا، دریایی و خودرو و غیره تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌ها با اشکال هندسی گوناگون از اهمیت زیادی برخوردار هستند. حل تحلیل ورق‌ها با اشکال هندسی پیچیده و گوناگون بسیار سخت است لذا محققین برای حل آنها به دنبال روش‌های عددی

محدود به شبکه‌بندی دامنه مسئله برای حل نیاز ندارند و آنها را روش‌های بدون المان یا بدون شبکه^۴ می‌نامند. در روش‌های بدون المان برای شبیه‌سازی و حل مسائل فیزیکی از مجموعه‌ای از گره‌ها استفاده می‌شود. فقدان المان در ساختار این روش‌های عددی ویژگی منحصر به فرد و قابل ملاحظه‌ای را به آن بخشیده است به گونه‌ای که بسیاری از مشکلات تولید المان در هندسه‌های پیچیده و یا در مسائلی که به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ نیازمند شبکه‌های متوالی در حین حل مسئله هستند از بین می‌رود.

ساده‌ترین روش بدون شبکه روش تفاضل محدود^۵ است که در سال ۱۹۳۷ و ۱۹۳۸ بیان شد [۲]. یکی از معروف‌ترین روش‌های حل بدون شبکه روش اس پی اچ^۶ (۱۹۷۷) است که در تحلیل پدیده‌های علم نجوم مانند انفجار ستاره‌ها، مدل‌سازی توده‌های غبار و مسائل بدون مرز استفاده می‌شده است [۱]. بعدها این روش در زمینه حل مسائل مکانیک سیالات و جامدات استفاده شد [۳ و ۴]. به دلیل ناپایدار بودن روش حل اس پی اچ، یک تابع تصحیح توسط لیو و همکارانش ارائه شد و آن را روش حل آر کی پی ام^۷ نامیدند [۵ و ۶]. تحقیق و توسعه روش‌های حل بدون شبکه از سال ۱۹۹۰ شروع و تعدادی روش بدون شبکه فرم ضعیف ارائه شد. در سال ۱۹۹۴ روش بدون شبکه EFG^۸، در سال ۱۹۹۹ روش MLPG^۹، در سال ۱۹۹۹ روش PIM^{۱۰}، در سال ۲۰۰۱ روش RPIM^{۱۱} [۱] ابداع گردیده‌اند و به نظر می‌رسد این روش‌ها با توجه به عمر کم‌شان توانایی رقابت با روش‌های المان محدود را خواهند داشت.

در زمینه تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌ها به کمک روش بدون شبکه تحقیقات زیادی انجام شده است. بلیچکو و همکارانش از روش بدون شبکه گالرکین EFG برای آنالیز ورق‌ها و پوسته‌های نازک استفاده کردند [۷]. این روش حل عددی همچنین برای آنالیز تیر اویلر-برنولی و ورق کیرششف [۸]، کمانش ورق‌های نازک [۹] و ورق‌های کامپوزیت مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰].

سلطانی و همکارانش از روش RKPM ورق‌های FGM تقویت شده تحت بارهای خمشی را تحلیل کردند [۱۱]، آنالیز ورق‌های دایره‌ای پیزوالکتریک با روش MLPG توسط سلادک و همکارانش انجام شد [۱۲]. لیو و همکارانش در مقاله‌ای به جمع‌آوری تحقیقات انجام شده در زمینه روش‌های بدون شبکه پرداختند [۱۳]. قاسمی و همکارش در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین EFG به تحلیل بهینه‌سازی ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک پرداختند. از تابع تقریب MLS در روش حل عددی استفاده کردند و برای اعمال شرایط مرزی روش مستقیم ارضاء نقطه‌ای به کار رفت [۱۴]. جبارزاده و همکارانش در سال ۲۰۱۳ به تحلیل کمانش ورق‌های متوازی الاضلاع و لوزی شکل به کمک روش بدون شبکه گالرکین EFG پرداختند. آنها در تحقیق‌شان از تابع تقریب MLS استفاده کردند و به دلیل اینکه این تابع تقریب خاصیت تابع دلتا را ندارد برای اعمال شرایط مرزی از روش لاگرانژ استفاده کردند. آنها همچنین در تحقیق دیگری به بررسی کمانش حرارتی در ورق‌های FGM به کمک روش بدون شبکه گالرکین پرداختند [۱۵ و ۱۶] در این مقاله روش حل بدون شبکه EFG جهت تحلیل ورق‌های ایزوتروپیک و کامپوزیت با هر شکل هندسه دلخواهی مورد استفاده قرار گرفته است، با استفاده از مجموعه‌ای از نگاشت‌ها شکل‌های هندسی گوناگون ورق‌ها را به شکل استاندارد مستطیلی شکل تبدیل کرده سپس به کمک روش EFG به تحلیل آن پرداخته می‌شود. برای تحلیل مورد نظر برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب^{۱۲} نوشته شد. نتایج مربوطه با نتایج حل‌های تحلیلی، نتایج روش حل عددی المان محدود و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس^{۱۳} مقایسه و برنامه نوشته شده از این طریق اعتبار بخشی شده است. سپس تحلیل چند شکل هندسی پیچیده انجام شده است.

در روش حل EFG با توجه به عدم خاصیت دلتای کرونگر در تابع تقریب نمی‌توان شرایط مرزی را به صورت مستقیم اعمال کرد لذا برای اعمال شرایط مرزی در این تحقیق از روش

لاگرانژ استفاده می شود.

و $A(x)$ ماتریس وزن^{۱۴} نامیده می شود:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i(x) P(x_i) P^T(x_i) \quad (7)$$

$$\hat{W}_i(x) = \hat{W}(x - x_i) \quad (8)$$

ماتریس $B(x)$ در رابطه (۵) به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(x) = [\hat{W}_1(x)P(x_1) \hat{W}_2(x)P(x_2) \dots \hat{W}_n(x)P(x_n)] \quad (9)$$

با حل رابطه (۵) برای $a(x)$ و جایگذاری در رابطه (۱) رابطه زیر حاصل می شود:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i = \boldsymbol{\varphi}^T(x) U_S \quad (10)$$

در اینجا $\boldsymbol{\varphi}(x)$ بردار تابع شکل MLS برای n گره داخل ناحیه محلی نقطه دلخواه x است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^T(x) &= \{\varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)\}_{(1 \times n)} \\ &= \mathbf{P}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) B(x) \end{aligned} \quad (11)$$

۳- تئوری ورقها

یک ورق با دامنه Ω را مطابق با شکل (۱) در نظر بگیرید. مقادیر جابه‌جایی در راستای محورهای x, y, z به ترتیب با u, v, w نشان داده می شود.

با توجه به فرضیات کیرشف مقادیر u, v را به صورت تابعی از z (فاصله تا صفحه میانی) می توان بیان کرد.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial}{\partial x} \\ -z \frac{\partial}{\partial y} \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{L}_u \mathbf{w} \quad (12)$$

با جایگذاری روابط جابه‌جایی در معادلات کرنش داریم:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{z} \mathbf{L}_d \mathbf{w} \quad (13)$$

روابط تنش‌ها نیز به صورت روابط زیر بیان می شود:

۲- تابع شکل MLS

روش بدون شبکه گالرکین از تابع تقریب MLS استفاده می کند. این تابع تقریب به صورت مجموعه‌ای از سری‌ها در سال ۱۹۹۳ ارائه شد. در این تابع شکل یک متغیر اسکالر مانند $u(x)$ در دامنه Ω و در نقطه x به صورت زیر بیان می شود [۱۷]:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

$P(x)$ تابع پایه و m تعداد توابع پایه می باشد. تابع پایه اغلب به صورت تک جمله‌ای از مثلث پاسکال ساخته می شود تا حداقل نیازها را ارضا کند. در بعضی مسائل خاص با بالا بردن درجه تابع پایه می توان عملکرد تابع تقریب MLS را بهتر کرد. $a(x)$ بردار ضرایب است.

$$\mathbf{a}^T(x) = \{a_1(x) \ a_2(x) \dots \ a_m(x)\} \quad (2)$$

توجه کنید بردار ضرایب مجهول $a(x)$ در رابطه (۲) تابعی از x هستند که این ضرایب به وسیله مینیمم کردن تابع زیر حاصل می شود:

$$J = \sum_{i=1}^n \hat{W}(x - x_i) [P^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (3)$$

n تعداد گره‌های داخل دامنه محلی برای نقطه دلخواه $x, \hat{W}(x - x_i) \neq 0$ ، u_i مقدار متغیر u در $x = x_i$ است. رابطه (۳) معادله باقی مانده وزن دار نامیده می شود. و به دلیل اینکه تعداد گره‌ها n که در معادله تقریب MLS استفاده می شود اغلب از تعداد مجهولات m بیشتر است لذا تابع تقریب u^h از تمام گره‌ها عبور نمی کند. از پایداری معادله J نسبت به $a(x)$ داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (4)$$

از ساده سازی رابطه بالا دستگاه معادلات زیر حاصل می شود:

$$\mathbf{A}(x) \mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x) U_S \quad (5)$$

$$U_S = \{u_1 \ u_2 \dots \ u_n\}^T \quad (6)$$

U_S بردار مقدار متغیرها در گره‌های داخل دامنه محلی است

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{\phi\phi} &= G_{12} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$$

از روابط بیان شده می‌توان نتیجه گرفت، که معادلات تنش، توابع خطی برحسب فاصله عمودی تا صفحه میانی (براساس فرضیات) می‌باشند.

در اینجا دو پارامتر شبه کرنش و شبه تنش^{۱۵} به صورت زیر تعریف می‌شوند که در مقطع ورق ثابت و مستقل از مقدار z هستند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{L}_d \mathbf{w} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{D}\mathbf{L}_d \mathbf{w} \quad (23)$$

ماتریس D در مواد ایزوتروپیک و کامپوزیت به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k [z_k^3 - z_{k-1}^3] \quad (25)$$

۴- اعمال شرایط مرزی اجباری

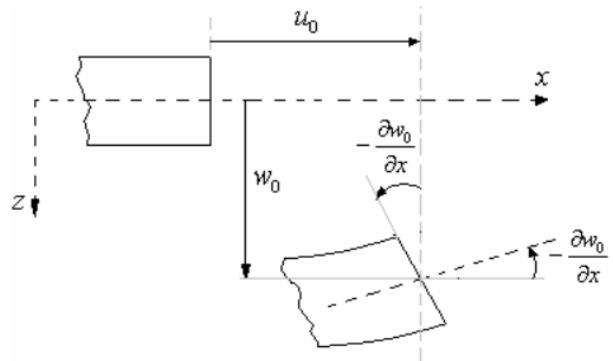
شرایط مرزی در ورق‌ها به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

$$\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_b \quad \Gamma_u = \Gamma_w \cup \Gamma_\theta \quad (26)$$

\mathbf{u}_b برداری شامل جابه‌جایی عرضی و چرخشی روی مرزهای شامل شرایط اجباری در ورق‌ها است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{L}_b \mathbf{W} \quad (27)$$

\mathbf{L}_b بردار عملگر دیفرانسیلی است که در شرایط تکیه‌گاهی مختلف به صورت زیر بیان می‌شود:
تکیه‌گاه ثابت



شکل ۱- نمای یک ورق و سیستم مختصات آن

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = z \mathbf{c} \mathbf{L}_d \mathbf{w} \quad (14)$$

ماتریس سختی به صورت زیر است [۱۸]:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در مواد کامپوزیت که به صورت مواد ارتوتروپیک مدل می‌شوند در حالت تنش صفحه‌ای ماتریس سختی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹]:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{1\phi} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{2\phi} \\ \bar{Q}_{1\phi} & \bar{Q}_{2\phi} & \bar{Q}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

که \bar{Q}_{ij} با استفاده از ماتریس انتقال زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \quad (19)$$

θ زاویه پیچش الیاف است، Q_{ij} مولفه‌های ماتریس سختی در دستگاه مختصات اصلی (در جهت الیاف و در جهت عمود بر الیاف) هستند. این ماتریس برحسب خواص فیزیکی ورق در جهات اصلی به صورت زیر بیان می‌شود:

تغییرات مورد استفاده در روش حل فرم ضعیف گالر کین به صورت زیر است [۱].

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_d \mathbf{w})^T (\mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{w})^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{w})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{\nu} (\mathbf{L}_b \mathbf{w} - \bar{\mathbf{u}})^T \alpha (\mathbf{L}_b \mathbf{w} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (31)$$

\mathbf{L}_b ماتریس اعمال شرایط مرزی، α ماتریس ضرایب پنهالی می باشد، ضرایب پنهالی می توانند تابعی از مختصات و با یکدیگر متفاوت باشند اما اغلب آنها را به صورت اعداد ثابت و بزرگ در نظر می گیرند. در این تحقیق جهت اعمال شرایط مرزی از روش لاگرانژ به جای روش پنهالی استفاده می شود لذا معادله (۳۱) به صورت زیر بیان می شود [۱].

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_d \mathbf{w})^T (\mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{w})^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{w})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (\mathbf{L}_b \mathbf{w} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta (\mathbf{L}_b \mathbf{w})^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (32)$$

با قرار دادن معادله تقریب (۳۰) در معادله تغییرات (تعداد) (۳۲) و ساده سازی فرم ماتریسی معادله تعادل به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

\mathbf{K} ماتریس سختی، \mathbf{U} بردار تغییر مکان، \mathbf{F} بردار نیرو، $\mathbf{\Lambda}$ بردار ضرایب لاگرانژ، \mathbf{Q} بردار نیروی مجازی و \mathbf{G} ماتریس سختی مجازی که ناشی از اعمال شرایط مرزی است. هر کدام از ماتریس ها به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\mathbf{K}_{II} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \quad (34)$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{L}_d \varphi_I = \begin{Bmatrix} -\varphi_{I,xx} \\ -\varphi_{I,yy} \\ -\varphi_{I,xy} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{B}_u^T \bar{\mathbf{t}}_I ds \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{Bmatrix} -\varphi_{I,x} \\ -\varphi_{I,y} \\ -\varphi_I \end{Bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

تکیه گاه مفصلی

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

۵- روش بدون شبکه گالر کین EFG

در سال ۱۹۹۴ روش حل بدون شبکه EFG بر مبنای تابع تقریب MLS توسط بلیچکو^{۱۶} و همکارانش ارائه شد [۲۰]. از تابع تقریب MLS در روش فرم ضعیف گالر کین برای ایجاد دستگاه معادلات جبری استفاده شد. در این روش دامنه مسئله توسط توزیع نقاط^{۱۷} (گره ها) مشخص می شود. در روش تقریب MLS، فقط از مجموعه نقاطی که داخل دامنه محلی است برای ایجاد تابع شکل استفاده می شود. یک سری سلول پس زمینه جهت انتگرال گیری عددی در روش فرم ضعیف گالر کین به کار می رود. بلیچکو و همکارانش ادعا کردند که روش حل EFG خیلی دقیق، سرعت همگرایی آن از دیگر روش های عددی مثلا المان محدود بیشتر و توزیع نامنظم گره ها در عملکرد روش EFG تاثیر نمی گذارد. روش EFG به طور موفق در تحلیل مسائل خطی، غیرخطی، دوبعدی، سه بعدی، شکست، رشد ترک، تحلیل میدان های الکترو مغناطیس به کار رفته است و اینها همه نشان می دهد که این روش، یک روش حل قوی در زمینه روش های حل عددی است. روش فرم ضعیف گالر کین در نتیجه استفاده از تابع تقریب MLS یک دستگاه معادلات جبری خوش فرم^{۱۸} و پایدار را تشکیل می دهد.

در این روش با استفاده از تابع شکل MLS تغییر مکان در هر نقطه از ورق را به صورت تقریبی بر حسب مقادیر جابه جایی گره های داخل دامنه محلی^{۱۹} آن نقطه به صورت زیر بیان می کند

$$w^h(x) = \sum_{i \in S_n} \varphi_i(x) W_i \quad (30)$$

در روش EFG چون از تابع تقریب MLS استفاده می شود، و از آنجا که این تابع تقریب خاصیت دلتای کرونکر را ندارد رابطه

مختصات x, y در نظر بگیرید که هر ضلع آن را با یک تابع درجه سه بتوان مدل کرد. حال این دامنه منحنی الخط توسط یک نگاشت به یک دامنه مستطیلی $(-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1)$ در مختصات طبیعی ξ, η انتقال داده می‌شود. شکل (۲) این نگاشت را توسط توابع شکل مرتبه سه بیان می‌کند:

$$x = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (40)$$

$$y = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (41)$$

x_i, y_i مختصات نقطه i ام روی مرز مسئله است:

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (42)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + 9\xi_i \xi) \quad (43)$$

$i = 5, 6, 7, 8$

$$N_i = \frac{1}{32} (1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + 9\eta_i \eta) \quad (44)$$

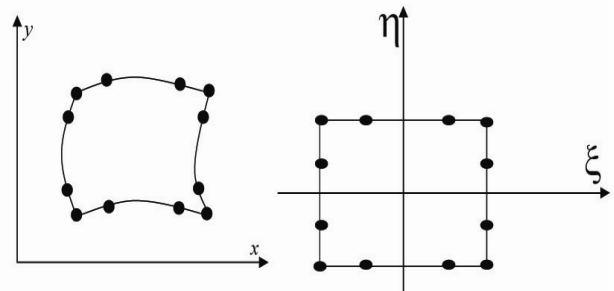
$i = 9, 10, 11, 12$

۷- نتایج عددی

پس از استخراج روابط و بیان چگونگی عملکرد روش بدون شبکه گالریکن، برنامه‌ای در نرم افزار متلب برای اجرایی کردن روش فوق نوشته شده است [۲۲]. برای نشان دادن صحت این برنامه کامپیوتری به مقایسه نتایج این نرم افزار با نتایج نرم افزار آباکوس و با نتایج حل دقیق مسائلی که حل تحلیلی آنها وجود دارد پرداخته می‌شود. پس از صحت سنجی برنامه کامپیوتری EFG، به تحلیل مسائلی جدید به کمک این نرم افزار پرداخته خواهد شد. برای نشان دادن صحت برنامه نوشته شده، یک ورق مستطیلی با مشخصات جدول (۱) که حل تحلیلی آن وجود دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای اینکه بتوان نتایج را عمومیت بخشید، خیزها بدون بعد می‌گردند که در هر قسمت رابطه مربوطه بیان می‌شود. همچنین در کلیه محاسبات فرمول خطا به صورت زیر است:

$$\text{Error} = \frac{(\varepsilon_{\text{exat}} - \varepsilon_p)}{\varepsilon_{\text{exat}}} \times 100 \quad (45)$$



شکل ۲- نگاشت از محیط منحنی الشكل به محیط مستطیلی شکل

$$G_{IJ} = \int_{\Gamma_u} N_I^T \varphi_J d\Gamma \quad (38)$$

$$Q_I = \int N_I^T \bar{u} d\Gamma \quad (39)$$

رابطه (۳۳)، دستگاه معادلات جبری حاصل از روش حل عددی EFG همراه با روش اعمال شرایط مرزی لاگرانژ است. از حل رابطه (۳۳) پارامترهای جابه‌جایی گره‌ها حاصل می‌شود و جابه‌جایی هر نقطه با توجه به این نتایج از رابطه (۳۰) محاسبه می‌شود. این روش در مقایسه با دیگر روش‌ها در اعمال شرایط مرزی دقیق‌تر است اما با توجه به اضافه شدن مجهولات Λ حجم محاسبات نیز افزایش می‌یابد.

روش بدون شبکه EFG بر اساس پروسه حل فرم ضعیف کلی گالریکن است. در این روش برای انتگرال‌گیری عددی به یک شبکه‌بندی پس زمینه نیاز است لذا این روش حل کاملاً بدون شبکه نیست.

۶- نگاشت انتقال

همان‌طور که ملاحظه شد معادلات دیفرانسیل حاکمه و معادلات شرایط مرزی برای ورق‌ها در مختصات کارتزین ارائه شده است، لذا ورق‌های با هندسه نامنظم را نمی‌توان به راحتی تحلیل کرد. به این دلیل توسط یک نگاشت محیط منحنی الخط را به محیط مستطیلی شکل نگاشته می‌شود. این نگاشت توسط توابع شکل که اغلب در المان محدود به کار می‌رود صورت می‌گیرد. هرچه درجه تابع شکل بالاتر باشد دقت نگاشت نیز بهتر است بنابراین در اینجا از توابع شکل درجه سه استفاده می‌شود یعنی می‌توان هر ضلع ورق مورد بررسی را با یک تابع درجه سه مدل کرد [۲۱].

در حالت کلی یک مسئله با دامنه منحنی الخط در صفحه

جدول ۱- مشخصات هندسی و فیزیکی ورق

ابعاد ورق (متر)	۰٫۶×۰٫۶
مدول یانگ (GPa)	۲۰۰
ضریب پواسن	۰٫۳
ضخامت ورق (متر)	۰٫۰۱

جدول ۲- خیز بدون بعد ورق مربعی شکل نازک با تکیه گاه ساده تحت بار یکنواخت

تعداد گره	۱۰×۱۰	۱۵×۱۵	۲۰×۲۰	۲۵×۲۵	Abaqus ۹۰۰ المان خطی	Abaqus ۹۰۰ المان مرتبه دو
خیز بدون بعد	۰٫۰۰۳۹۱	۰٫۰۰۴۰۶	۰٫۰۰۳۹۶	۰٫۰۰۴۰۶	۰٫۰۰۴۰۸	۰٫۰۰۴۱
خطا	۳٫۷۵	۰٫۰۲۲	۲٫۳۵	۰٫۰۴۷	۰٫۵	۰٫۹۸

جدول ۳- خیز بدون بعد ورق مربعی شکل نازک با تکیه گاه ثابت تحت بار یکنواخت

تعداد گره	۱۰×۱۰	۱۵×۱۵	۲۰×۲۰	۲۵×۲۵	Abaqus ۹۰۰ المان خطی	Abaqus ۹۰۰ المان غیرخطی
خیز بدون بعد	۰٫۰۰۱۲۲	۰٫۰۰۱۲۲	۰٫۰۰۱۲۴	۰٫۰۰۱۲۹	۰٫۰۰۱۲۵	۰٫۰۰۱۲۶
خطا	۲٫۷۲	۳٫۱۳	۱٫۶۵	۲٫۳	۰٫۸	۰٫۰۲

برابر ۰٫۰۰۱۲۸۳ حاصل گردیده است [۲۵].

همان طور که مشاهده می شود دقت نتایج در روش حل بدون شبکه گالریکین نسبت به نتایج المان محدود بیشتر است، و از آنجا در این روش دیگر نیاز به شبکه بندی دامنه مسئله نیست لذا حجم محاسبات نیز در حد قابل توجهی کاهش میابد.

شکل های فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی در دو حالت تکیه گاه ساده و گیردار به ترتیب در شکل های (۳) و (۴) نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشاهده می شود دامنه مسئله و فرم تغییر شکل ورق ها فقط توسط گره ها نشان داده می شود. همچنین با دقت به نوع تغییر شکل گره ها می توان به خوبی تاثیر شرایط مرزی را در نتایج حل مسئله دید.

ورق نازک مستطیلی با تکیه گاه های ساده و ثابت تحت بار گسترده در ادامه به بررسی ورق های مستطیلی با نسبت های مختلف طول و عرض پرداخته می شود و نتایج حاصل با نتایج حل های تحلیلی که در مرجع [۲۴] بیان شده مقایسه می شود. نتایج به صورت بی بعد شده طبق رابطه (۴۶) است. جداول (۴) و (۵) جابه جایی یک ورق مستطیلی شکل با تعداد ۱۵×۱۵ گره را تحت بار گسترده عرضی 10^6 N/m^2 به ترتیب با شرایط

ورق نازک مربعی با تکیه گاه های ساده و ثابت تحت بار گسترده ورقی به ضخامت 1 m تحت نیروی گسترده $10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ که از چهار طرف تحت تکیه گاه ساده (مفصلی) قرار دارد در نظر گرفته می شود. فرمول خیز بدون بعد شده در این حالت به صورت زیر است [۲۳]:

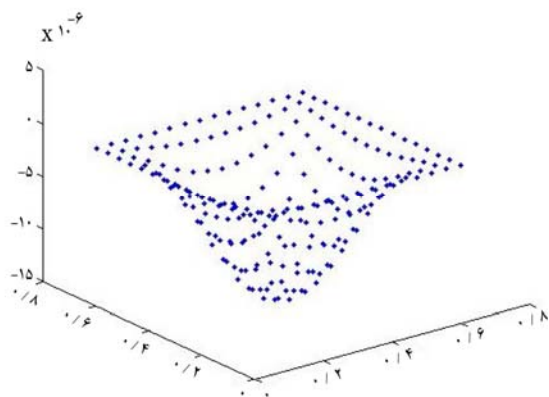
$$\bar{W} = \frac{W_{\max} D}{qb^4} \quad (46)$$

در رابطه فوق q نیرو، b ابعاد ورق می باشد:

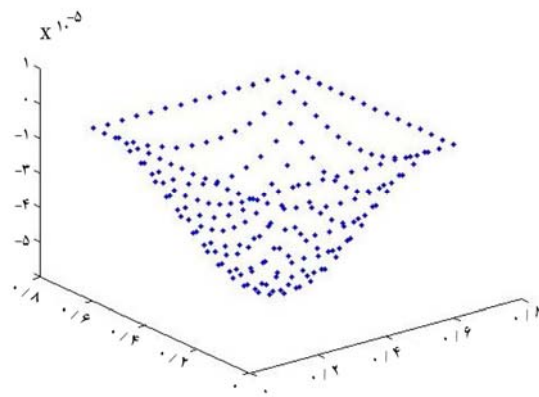
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (47)$$

نتایج حاصل در جدول (۲) آمده است. در حل دقیق این مثال که توسط تیموشنکو انجام شده است مقدار خیز بدون بعد برابر با 0.00406 است [۲۴]، همچنین نتایج حل این مسئله از روش المان محدود برابر 0.00405 می باشد [۲۵].

در جدول (۳) نتایج تحلیل ورق فوق که از چهار طرف تحت تکیه گاه ثابت قرار دارد را نشان می دهد. در حل دقیق این مثال که توسط تیموشنکو انجام شده است مقدار خیز بدون بعد برابر با 0.00126 است [۲۴] و در حل به روش المان محدود این مقدار



شکل ۴- فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی با تکیه‌گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی



شکل ۳- فرم تغییر شکل یافته ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

جدول ۴- جابه‌جایی بی‌بعد ورق مستطیلی شکل با تکیه‌گاه مفصلی

عرض / طول	۱/۵	۲	۳	۴
EFG	۰/۰۰۷۷۲	۰/۰۱۰۱۴	۰/۰۱۲۲۵	۰/۰۱۲۸۹
مرجع [۲۴]	۰/۰۰۷۷۲	۰/۰۱۰۱۳	۰/۰۱۲۲۳	۰/۰۱۲۸۲
Abaqus ۹۰۰ المان خطی	۰/۰۰۷۷۰	۰/۰۰۱۰۰۸	۰/۰۱۲۱۲	۰/۰۱۲۶۸

جدول ۵- جابه‌جایی بی‌بعد ورق مستطیلی شکل با تکیه‌گاه ثابت

عرض / طول	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
EFG	۰/۰۰۱۶۶	۰/۰۰۲۱۲	۰/۰۰۲۳۶	۰/۰۰۲۴۴
مرجع [۲۴]	۰/۰۰۱۷۲	۰/۰۰۲۲۰	۰/۰۰۲۴۵	۰/۰۰۲۵۴
Abaqus ۹۰۰ المان خطی	۰/۰۰۱۷۱۷	۰/۰۰۲۱۶	۰/۰۰۲۳۵	۰/۰۰۲۴۹

فیزیکی جدول (۱) و به شعاع یک متر که تحت بار گسترده 100N/m^2 است پرداخته می‌شود. نتایج به دست آمده از روش حل بدون شبکه گالریکین طبق رابطه زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\bar{w} = \frac{w_{\max} E h^3}{q a^4} \quad (48)$$

با توجه به مقایسه نتایج حاصل شده از برنامه کامپیوتری با نتایج حل تحلیلی مرجع [۲۴] در جدول (۶) دیده می‌شود که در حالتی که از 15×15 گره در دامنه مسئله استفاده می‌شود دقت نتایج بهتر است. باید به این نکته نیز توجه کرد که در شکل‌های منحنی شکل درصدی از خطای نتایج ناشی از نگاهی می‌باشد که دامنه دایره ای را به مستطیلی می‌نگارد لذا در این حالت ممکن است درصد ناچیزی خطا بیشتر باشد.

در شکل‌های (۵) و (۶)، به ترتیب فرم تغییر شکل یافته ورق

تکیه‌گاهی ساده و گیردار را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول (۴) و (۵) مشاهده می‌شود دقت نتایج برنامه نسبت به نرم‌افزار آباکوس بهتر می‌باشد و نکته دیگری که قابل توجه می‌باشد با بزرگ‌تر شدن نسبت a/b دقت نتایج کم می‌شود که آن به دلیل یکسان بودن تعداد گره‌ها در طول و عرض ورق می‌باشد لذا با بزرگ‌تر شدن نسبت a/b فاصله میان گره‌ها در طول و عرض یکسان نمی‌باشد که این باعث ایجاد خطا می‌شود.

به دلیل شبیه بدون فرم ورق تغییر شکل یافته ورق مستطیلی با ورق مربعی شکل، از نمایش فرم تغییر شکل یافته ورق مستطیلی شکل صرف نظر شده است.

ورق نازک دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه‌های ساده و ثابت تحت بار گسترده در اینجا به تحلیل یک ورق دایره ای شکل با مشخصات

جدول ۶- جابه‌جایی بی بعد ورق دایره‌ای شکل

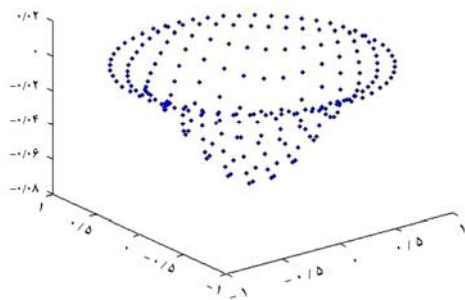
Abaqus ۹۲۵ المان غیرخطی	Abaqus ۹۲۵ المان خطی	مرجع [۲۴]	روش حل EFG		
			۲۰×۲۰	۱۵×۱۵	۱۰×۱۰
۰/۰۶۳۷	۰/۰۶۳۵	۰/۰۶۳۷۰	۰/۰۶۲۳۲	۰/۰۶۳۴۱	۰/۰۵۵۲۴
۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۶۲	۰/۰۱۵۳۵	۰/۰۱۵۳۲	۰/۰۱۴۳۱

جدول ۷- جابه‌جایی بی بعد ورق بیضی شکل با تکیه‌گاه مفصلی

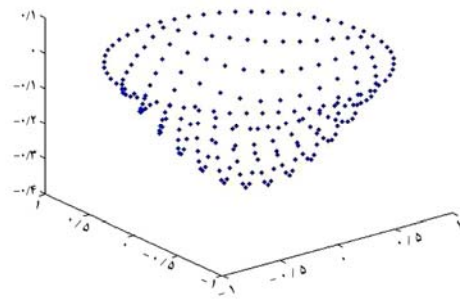
۴	۳	۲	۱/۵	a/b
۱/۹۹	۱/۸۴	۱/۵۵	۱/۲۴	EFG
۲/۰۲	۱/۸۸	۱/۵۸	۱/۲۶	مرجع [۲۴]
۲/۰۰	۱/۸۵۶	۱/۵۵	۱/۲۵	Abaqus ۱۳۵۰ المان خطی

جدول ۸- جابه‌جایی بی بعد ورق بیضی شکل با تکیه‌گاه ثابت

۴	۳	۲	۱/۵	a/b
۰/۴۲۲۴	۰/۳۹۷۶	۰/۳۴۱۲	۰/۲۹۳۱	EFG
۰/۴۳۵۲	۰/۴۱۸۸	۰/۳۷۰۱	۰/۳۰۴۶	مرجع [۲۴]
۰/۴۳۴	۰/۴۱۷۷	۰/۳۶۹۷	۰/۳۰۴	Abaqus ۱۳۵۰ المان خطی



شکل ۶- فرم تغییر شکل یافته ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی



شکل ۵- فرم تغییر شکل یافته ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی

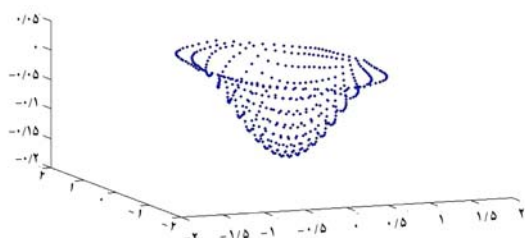
همچنین شکل‌های (۷) و (۸) فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی در حالت خاص $a/b = 2$ را برای دو شرایط تکیه‌گاهی مختلف نشان می‌دهد. در ادامه به بررسی رفتار ورق‌های ارتوتروپیک مستطیلی و مربعی شکل تحت بار گسترده یکنواخت با مشخصات $G_{12} = 0.5E_2$ ، $E_1 = 25E_2$ ، $\nu_{12} = 0.25$ ، و شرایط تکیه‌گاهی ساده و ثابت پرداخته خواهد شد. در ورق‌های ارتوتروپیک جابه‌جایی نقاط میانی به صورت رابطه (۴۹) بی‌بعد می‌شود:

$$\bar{w} = \frac{w_{\max} E_2 h^3}{qa^4} \quad (49)$$

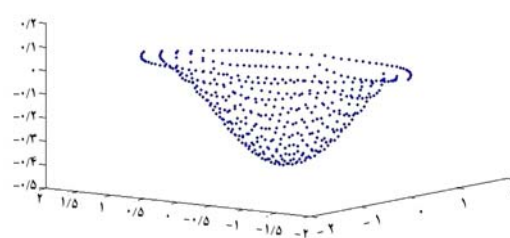
دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده و گیردار نشان داده می‌شود. اکنون ورق نازک بیضی شکل با تکیه‌گاه‌های ساده و ثابت تحت بار گسترده با مشخصات فیزیکی جدول (۱) بررسی می‌شود و نتایج حاصل از نرم‌افزار به کمک رابطه (۴۸) بی‌بعد می‌شود.

جداول (۷) و (۸) نتایج بی‌بعد شده حاصل از نرم‌افزار برای نسبت‌های مختلف قطرهای اصلی در حالتی که از 20×20 گره برای بیان دامنه مسئله استفاده شده است، را نشان می‌دهد.

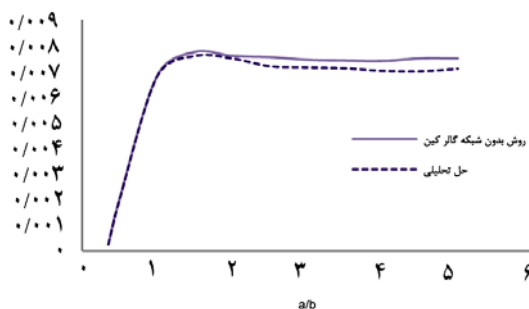
همان‌طور که در جدول‌ها دیده می‌شود روش EFG با 40° گره دقتی در حدود 1350 المان در نرم‌افزار آباکوس دارد که این نشان دهنده حجم محاسبات بسیار کم‌تر نسبت به روش المان محدود است.



شکل ۸- فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی شکل با تکیه‌گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی



شکل ۷- فرم تغییر شکل یافته ورق بیضی شکل با تکیه‌گاه گیردار تحت نیروی گسترده یکنواخت عرضی



شکل ۹- جابه‌جایی بی بعد ورق مستطیلی شکل کامپوزیت با تکیه‌گاه ثابت

جدول ۹- خیز بدون بعد ورق ارتوتروپیک مربعی شکل نازک با تکیه‌گاه ساده تحت بار یکنواخت

Abaqus	Abaqus	۲۵×۲۵	۲۰×۲۰	۱۵×۱۵	۱۰×۱۰	تعداد گره	نوع تکیه‌گاه
۹۲۵ المان خطی	۹۲۵ المان خطی						
۰/۶۸۸۱	۰/۶۸۶۱	۰/۶۵۷۷	۰/۶۳۱۳	۰/۶۵۴۷	۰/۶۶۰۲	خیز بدون بعد	تکیه‌گاه ساده
٪۵/۹	٪۵/۶	٪۱/۲	٪۲/۸	٪۰/۷۷	٪۱/۶	خطا	
۰/۱۳۰۷	۰/۱۲۸۶	۰/۱۳۵۷	۰/۱۲۹۰	۰/۱۲۷۰	۰/۱۴۵۱	خیز بدون بعد	تکیه‌گاه ثابت

جدول ۱۰- جابه‌جایی مرکز ورق دایره‌ای شکل (بر حسب میلی‌متر)

مرجع [۲۷]	روش حل EFG			
	۲۰×۲۰	۱۵×۱۵	۱۰×۱۰	تعداد گره‌ها
۱/۸۴	۱/۴	۱/۴	۱/۳	تکیه‌گاه ثابت

جدول (۹) نتایج حاصل از تحلیل ورق مربعی ارتوتروپیک تحت شرایط تکیه‌گاهی ثابت را نشان می‌دهد که با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است که نتایج نشان دهند دقت قابل قبول روش EFG است.

در شکل (۹) به مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش بدون شبکه گالرکین در یک ورق مستطیلی کامپوزیت چهار لایه با چینش (۰/۹۰/۹۰/۰) که خواص لایه‌های آن عبارت از $E_1 = 25E_2$, $G_{12} = 0.5E_2$ است، پرداخته شده است. جدول (۱۰) مقایسه نتایج جابه‌جایی یک ورق دایره‌ای

جدول (۹) نتایج حاصل از تحلیل ورق مربعی ارتوتروپیک تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده و ثابت را نشان می‌دهد. در حالت تکیه‌گاه ساده حل دقیق آن توسط ردی ارائه گردیده و مقدار ۰/۶۴۹۷، برای خیز بدون بعد به دست آورده است [۲۶]. نتایج المان محدود در حل این مسئله در دو حالت استفاده از المان‌های منطبق و غیرمنطبق به ترتیب برابر ۰/۶۵۵۱ و ۰/۶۵۳۵ است لذا خطای نتایج المان محدود ۲/۵٪ می‌باشد [۲۶].

در قسمت دوم جدول (۹) نتایج حاصل از تحلیل ورق مربعی

جدول ۱۱- جابه‌جایی مرکز ورق نیم‌دایره‌ای شکل (برحسب میلی‌متر)

نوع ورق	نوع تکیه‌گاه	روش بدون شبکه EFG با ۴۴۱ گره	نرم‌افزار Abaqus با ۸۱۷ المان
ایزوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۵/۶	۵/۵۳۸
	تکیه‌گاه ثابت	۱/۴۳	۱/۳۷۷
ارتوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۵۲/۲۳	۵۲/۱۵
	تکیه‌گاه ثابت	۱۳/۰۳	۱۳/۲۵

جدول ۱۲- جابه‌جایی مرکز ورق ربع‌دایره‌ای شکل (برحسب میلی‌متر)

نوع ورق	نوع تکیه‌گاه	روش بدون شبکه EFG با ۴۴۱ گره	نرم‌افزار Abaqus با ۸۱۷ المان
ایزوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۱/۷۲۶	۱/۶۴۲
	تکیه‌گاه ثابت	۰/۴۵۷	۰/۴۶۷
ارتوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۷/۸۵۷	۷/۹۹۸
	تکیه‌گاه ثابت	۱/۹۲۷	۱/۹۲۴

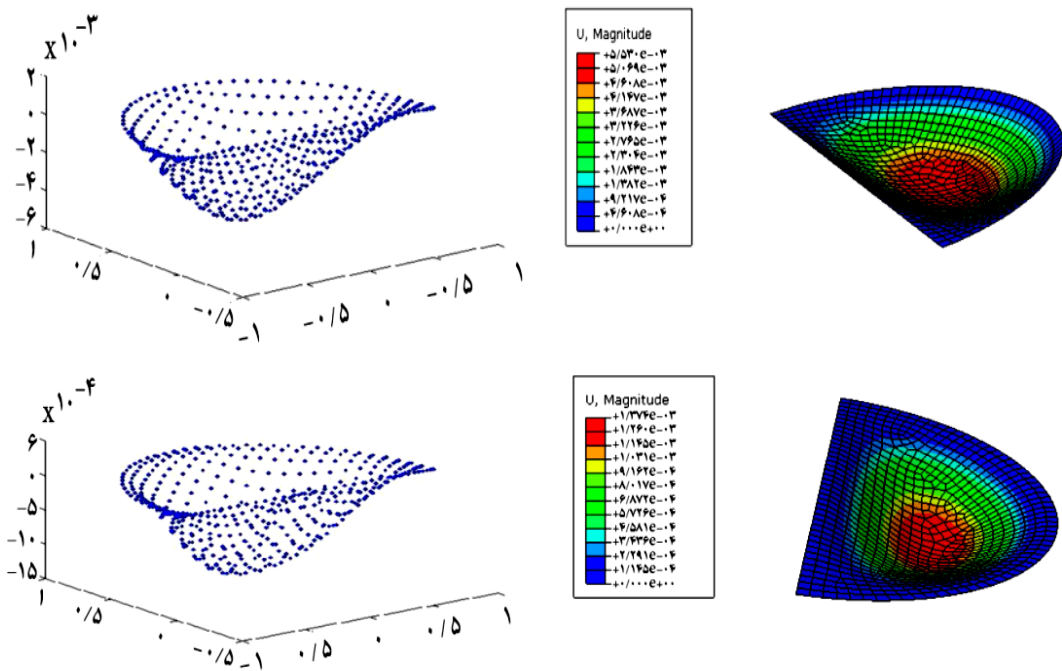
جدول ۱۳- جابه‌جایی مرکز ورق هلالی شکل (برحسب میلی‌متر)

نوع ورق	نوع تکیه‌گاه	روش بدون شبکه EFG با ۴۴۱ گره	نرم‌افزار Abaqus با ۱۰۸۸ المان
ایزوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۰/۴۸۳	۰/۴۶
	تکیه‌گاه ثابت	۰/۰۹۸	۰/۱۰۲
ارتوتروپیک	تکیه‌گاه مفصلی	۰/۷۰۵	۰/۸۹۸
	تکیه‌گاه ثابت	۰/۱۴	۰/۱۸

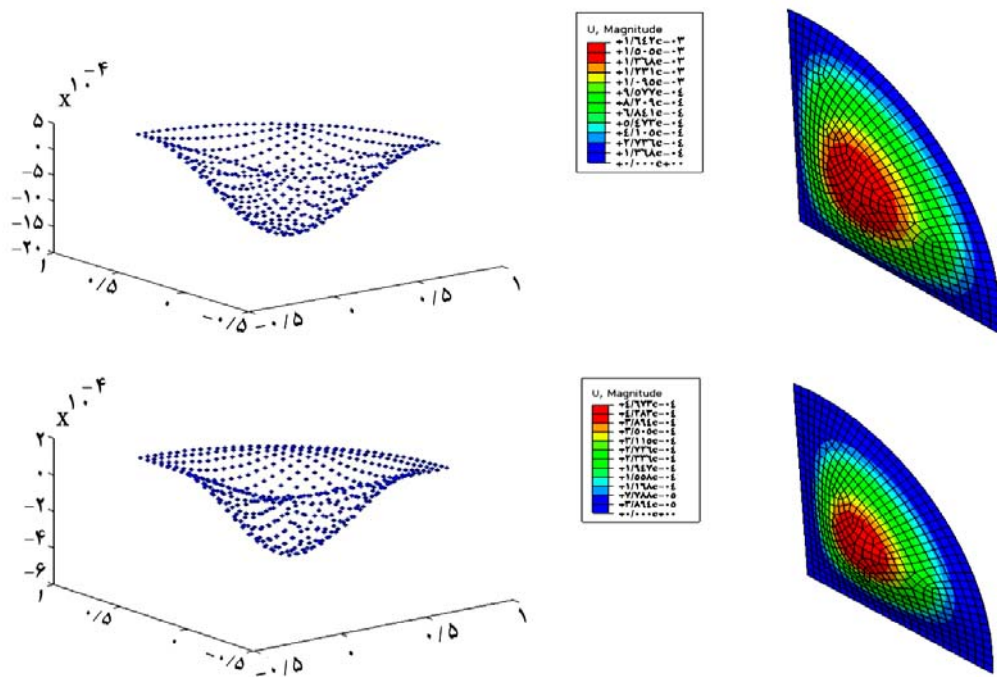
فیزیکی $(E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, R = 1 \text{ m}, h = 2 \text{ mm})$ و ارتوتروپیک (با مشخصات فیزیکی $h = 2 \text{ mm}$, $E_1 = 131 \text{ GPa}$, $E_2 = 13 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.34$, $R = 1 \text{ m}$, $E_1 = 131 \text{ GPa}$, $E_2 = 13 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.34$) است. برای نشان دادن دقت کلی نتایج مقایسه‌ای با جواب‌های نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. شکل‌های (۱۰) و (۱۱) فرم تغییر شکل یافته ورق‌ها از برنامه کامپیوتری و نرم‌افزار آباکوس را نشان و باهم مقایسه می‌کند.

با توجه به قابلیت برنامه در تحلیل اشکال مختلف اکنون تحلیل ورق‌های هلالی شکل که از برخورد یک دایره به شعاع 1 m یک متر و یک بیضی به معادله هندسی $x^2 + 4y^2 = 1$ ایجاد شده است، تحت نیروی گسترده 100 N/m^2 در دو شرایط تکیه‌گاهی ساده و ثابت، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جدول (۱۳) نتایج برای دو نوع ورق ایزوتروپیک و ارتوتروپیک مطابق با مشخصات

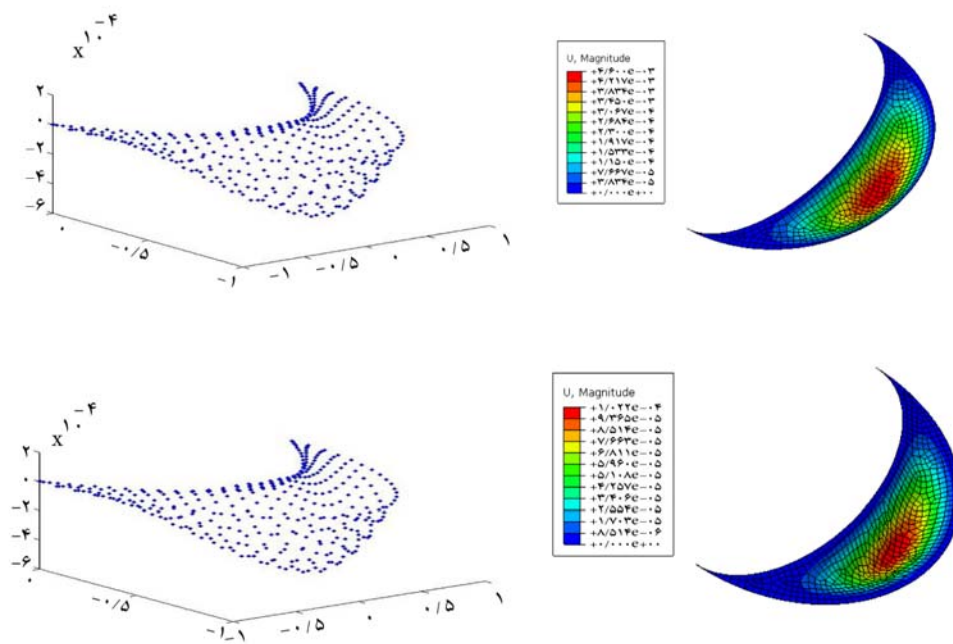
شکل ارتوتروپیک با مشخصات $R = 1 \text{ m}, h = 2 \text{ mm}$ که $E_1 = 131 \text{ GPa}$, $E_2 = 13 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.34$, $G_{12} = 6/4 \text{ GPa}$ تحت نیروی گسترده 100 N/m^2 است، از دو روش بدون شبکه گالرکین و المان محدود [۲۷] را نشان می‌دهد. چون در اینجا نتایج تحلیلی موجود نمی‌باشد نمی‌توان خطای دقیق روش حل عددی را بیان کرد ولی در مقایسه با نتایج المان محدود می‌توان به دقت روش پی برد. برای نشان دادن قابلیت‌های برنامه کامپیوتری در تحلیل اشکال مختلف و با توجه به اعتبارسنجی‌های انجام شده، در جدول (۱۱) نتایج حاصل از تغییر شکل ورق‌های نیم‌دایره‌ای و در جدول (۱۲) نتایج حاصل از تغییر شکل ورق‌های ربع‌دایره‌ای تحت نیروی گسترده 100 N/m^2 در دو شرایط تکیه‌گاهی ساده و ثابت آمده است. نتایج یاد شده برای دو نوع ورق ایزوتروپیک (با مشخصات



شکل ۱۰- فرم تغییر شکل یافته ورق نیم‌دایره‌ای، (الف) تکیه‌گاه ساده و (ب) تکیه‌گاه ثابت



شکل ۱۱- فرم تغییر شکل یافته ورق ربع‌دایره‌ای، (الف) تکیه‌گاه ساده و (ب) تکیه‌گاه ثابت



شکل ۱۲- فرم تغییر شکل یافته ورق هلالی شکل، (الف) تکیه گاه ساده و (ب) تکیه گاه ثابت

گره‌ها نسبتاً پایدار است و این از مزایای روش‌های فرم ضعیف است. از دیگر مزایای این روش می‌توان به عدم المان‌بندی ناحیه حل اشاره نمود که در روش المان محدود این فرایندی پیچیده است لذا در این روش به دلیل عدم شبکه‌بندی دامنه مسئله از حجم محاسبات کم‌تری برخوردار است. همچنین می‌توان در مقایسه با روش المان محدود به مزیت‌هایی از قبیل دقیق‌تر بودن نتایج، همگرایی سریع‌تر و تعداد گره‌های کم‌تر نسبت به تعداد المان‌ها اشاره کرد.

فیزیکی مثال قبل، ارائه شده است. شکل (۱۲) فرم تغییر شکل یافته ورق‌ها از برنامه کامپوتری و نرم‌افزار آباکوس را نشان می‌دهد و باهم مقایسه می‌کند.

۸- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی و تحلیل ورق‌های نازک ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با شکل‌های گوناگون تحت اثر بارگذاری عرضی براساس روش بدون شبکه گالرکین پرداخته شده است. همان‌طور که در نتایج دیده می‌شود جواب‌ها با تغییر تعداد

واژه نامه

1. finite element method
2. mesh
3. difficulty in adaptive analysis
4. mesh free or mesh less
5. finite difference method (FDM)
6. smoothed particle hydrodynamics (SPH)
7. reproducing kernel particle method (RKPM)
8. element free Galerkin
9. meshless local Petrov-Galerkin method
10. point interpolation method
11. radial point interpolation method
12. MATLAB
13. ABAQUS
14. weighted moment matrix
15. pseudo strain & pseudo stress
16. Belytschko
17. Node
18. symmetric and sparse
19. support domain

1. Liu, G. R., and Gu, Y. T., *An Introduction to Mesh Free Methods and their Programing*, Springer, 2005.
2. Szafrana, Z., "Elastic Analysis of Thin Fiber-Reinforced Plates", *Civil and Environmental Engineering Reports*, Vol. 1, 2005.
3. Colagrossi, A., and Landrini, M., "Numerical Simulation of Interfacial Flows by Smoothed Particle Hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 191, No. 2, pp. 448-475, 2003.
4. Johnson, G. R., Stryk, R. A., and Beissel, S. R., "SPH for High Velocity Impact Computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1-4, pp. 347-373, 1996.
5. Liu, W. K., Jun, S., Li, S., Adee, J., and Belytschko, T., "Reproducing Kernel Particle Method For Structural Dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38: pp. 1655-1679, 1995.
6. Liu, W. K., Jun, S., Zhang, Y. F., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20: pp. 1081-1106, 1995.
7. Krysl, P., and Belytschko, T., "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method", *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 25-36, 1996.
8. Ouatuati, A. E., and Johnson, D. A., "A New Approach for Numerical Modal Analysis Using the Elementfree Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 1-27, 1999.
9. Liu, G. R., and Chen, X. L., "Bucking of Symmetrically Laminated Composite Plates Using the Element-Free Galerkin Method", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 3, pp. 281-294, 2002.
10. Chen, X. L., Liu, G. R., and Lim, S. P., "An Element Free Galerkin Method for the Free Vibration Analysis of Composite Laminates of Complicated Shape", *Composite Structures*, Vol. 59, No. 2, pp. 279-289, 2003.
11. Memar Ardestani, M., Soltani, B., and Shams, Sh., "Analysis of Functionally Graded Stiffened Plates Based on FSDT utilizing Reproducing Kernel Particle Method", *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 231-240, 2014.
12. Sladek, J., Sladek, V., Stanak, P., Zhang, Ch., and Wünsche, M., "Analysis of the Bending of Circular Piezoelectric Plates with Functionally Graded Material Properties by a MLPG Method", *Engineering Structures*, Vol. 47, pp. 81-89, 2013.
13. Liew, K. M., Zhao, X. and Ferreira, A. J. M., "A Review Of Meshless Methods For Laminated And Functionally Graded Plates and Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2031-2041. 2011.
14. Ghasemi, M. R., and Behshad, A., "An Element-Free Galerkin-Based Multi-Objective Optimization of Laminated Composite Plates", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 156, No. 2, pp. 330-344, 2012.
15. Jaberzadeh, E., Azhari, M., and Boroomand, B., "Inelastic Buckling of Skew and Rhombic Thin Thickness-Tapered Plates with and without Intermediate Supports Using the Element-Free Galerkin Method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10-11, pp. 6838-6854, 2013.
16. Jaberzadeh, E., Azhari, M., and Boroomand, B., "Thermal Buckling of Functionally Graded Skew and Trapezoidal Plates with Different Boundary Conditions Using the Element-Free Galerkin Method", *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 42, pp. 18-26, 2013.
17. Lancaster, P., and Salkauskas, K., "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141-158, 1981
18. Krysl, P., and Belytschko, T., "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method", *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 26-35, 1996.
19. Autar K. K., *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006.
20. Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L., "Element-Free Galerkin Method", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
21. Shu, C., *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, Springer, 2000:
۲۲. کانون نشر علم، راهنمای جامع متلب، ام غیوری.
23. Liu, G. R., *Meshfree Methods Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2002.
24. Timoshenko, S., *Theory of plates and shells*, 2nd ed. McGRAW-HILL Book Company ,1959.
25. Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, 4rd ed. Vol. 2. Taylor, 1989.
26. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and shell theory and analysis*, 2rd ed., CRC Press, 2003.
27. Sridhar, C., and Rao, K. P., "Large Deformation Finite Element Analysis of Laminated Circular Composite Plates", *Computers and Structures*, Vol. 54, pp. 59-64, 1994.