

## بهبود روش انتگرال گیری دقیق مرتبه اول برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها با معکوس سازی ماتریس حالت

سمانه میرزایی و جلال اکبری\*  
گروه مهندسی عمران، دانشگاه ملایر

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۴/۰۸)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.35.2.159

**چکیده** - روش‌های عددی مرتبه دوم متعددی برای حل معادله تعادل دینامیکی سازه‌ها تا به حال پیشنهاد شده‌اند. پایداری مشروط، خطای کشیدگی دوره تناوب، خطای وجود فرکانس‌های جعلی و وابستگی این روش‌ها به اندازه گام زمانی از مهمترین مشکلات این روش‌ها هستند. از بین روش‌های مرتبه دوم، روش شتاب متوسط نیومارک علی‌رغم دارا بودن خطای وجود فرکانس‌های جعلی، به دلیل پایداری نامشروط از بقیه روش‌ها کاربردی تر است. در سال‌های اخیر روش‌های مرتبه اول زیادی برای غلبه بر مشکلات فوق پیشنهاد شده است. لیکن این روش‌ها دارای مشکلات پایداری، دقت و خطای معکوس ماتریس حالت هستند. اگر ماتریس حالت منفرد یا بدحالت باشد، خطاهای عددی در محاسبات وارد می‌شود. هدف روش‌های مرتبه اول پیشنهاد شده بهبود پایداری، دقت و حذف اثر معکوس ماتریس حالت بوده است. لیکن این روش‌ها دارای پایداری مشروط بوده و بررسی خطاها برای بارگذاری دینامیکی در آنها مسکوت مانده است. هدف اصلی این مقاله، به‌کارگیری روش تجزیه ماتریس حالت براساس مقادیر ویژه منفرد SVD برای اصلاح روش PIM است. با به‌کارگیری روش معکوس سازی SVD مشکل این روش برطرف شده است. روش اصلاح شده در این تحقیق به نام PIMS شناخته می‌شود. همچنین، با روش پیشنهادی برای بارگذاری‌های مختلف خطای پاسخ‌های دینامیکی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش ارائه شده PIMS پایدار بوده و در مقایسه با روش مرتبه دوم نیومارک و روش‌های مرتبه اول موجود از دقت بالاتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: انتگرال‌گیری دقیق مرتبه اول، روش عددی مرتبه دوم نیومارک، ماتریس فضای حالت، روش معکوس سازی مقادیر ویژه منفرد، خطای پایداری.

---

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Jalal.akbari@gmail.com

# Enhancement of Precise Integration Method for Dynamic Structural Analysis using Inversion of State Matrix

S. Mirzaei and J. Akbari\*

Department of Civil Engineering, Malayer University

**Abstract:** For solving the dynamic equilibrium equation of structures, several second-order numerical methods have so far been proposed. In these algorithms, conditional stability, period elongation, amplitude error, appearance of spurious frequencies and dependency of the algorithms to the time steps are the crucial problems. Among the numerical methods, Newmark average acceleration algorithm, regardless of existence of spurious frequencies, is very popular in the structural dynamics due to its unconditionally stability status of the method. Recently, several first-order methods have been introduced for resolving the accuracy and stability issues. However, in these methods stability, accuracy and error in inversion of the state matrix are known as major issues. When the state matrix became singular or ill conditioned, numerical errors will occur in the computational process. Many of the available first-order methods were to improve the stability and accuracy and also to remove the error of inversion. Even though the introduced methods are conditionally stable, no investigation on errors, occurring during dynamic loading, has been reported for them. The main purpose of this paper is to utilize a specific decomposition method based on Singular Value Decomposition (SVD) for modifying PIM algorithm. Using the SVD inversion technique, the singularity problem of the state matrix has been resolved. In this paper, the modified method is called PIMS. As well, by applying the developed method for dynamic loading, the error of responses has been investigated. The results show that PIMS algorithm is stable and, comparing with second order Newmark and other available first order methods, has more accuracy.

**Keywords:** First-order Precise Integration Method (PIM), Second-order Newmark method, State matrix, Singular Value Decomposition (SVD), Stability error.

## فهرست علائم

T	خطای کاهش دامنه	AD
T( $\Delta t$ )	ماتریس میرایی	C
$\Delta t$	ماتریس کوپلینگ ورودی-خروجی	D
X	بردار نیروی خارجی	F
$\dot{X}$	ماتریس حالت	H
$\ddot{X}$	ماتریس تابع انتقال جابه‌جایی	$H_u$
$\alpha$	ماتریس تابع انتقال سرعت	$H_v$
$\beta$	ماتریس تابع انتقال جابه‌جایی روش عددی	$\bar{H}_u$
$\xi$	ماتریس تابع انتقال سرعت روش عددی	$\bar{H}_v$
$\bar{\xi}$	ماتریس یکپه	I
v	ماتریس سختی	K
$\omega_n$	ماتریس جرم	M
$\bar{\omega}_n$	خطای کشیدگی دوره تناوب	PE
T	پریود اصلی سازه	
T( $\Delta t$ )	ماتریس انتقال حالت	
$\Delta t$	گام زمانی	
X	بردار جابه‌جایی	
$\dot{X}$	بردار سرعت	
$\ddot{X}$	بردار شتاب	
$\alpha$	جزء حقیقی مقدار ویژه	
$\beta$	جزء موهومی مقدار ویژه	
$\xi$	میرایی	
$\bar{\xi}$	میرایی جعلی روش عددی	
v	ماتریس متغیر حالت	
$\omega_n$	فرکانس طبیعی سازه	
$\bar{\omega}_n$	فرکانس عددی	

روش‌های عددی انتگرال‌گیری مستقیم برای محاسبه پاسخ‌های دینامیکی سازه‌ها از دهه ۷۰ میلادی توسعه داده شده‌اند و معمولاً در دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند. یکی براساس حل مستقیم معادلات تعادل مرتبه دوم و دیگری تبدیل معادله مرتبه دوم به مرتبه اول و انتقال آن به فضای حالت. روش‌های مرتبه دوم به دو نوع صریح و ضمنی تقسیم‌بندی می‌شوند که هرکدام نیز می‌توانند در قالب تک‌گامی و یا چندگامی قرار گیرند [۱]. پایداری مشروط، خطای کشیدگی دوره تناوب، خطای کاهش دامنه، خطای وجود فرکانس‌های جعلی و وابستگی این روش‌ها به اندازه گام زمانی از مشکلات این روش‌ها است. لیکن، روش‌های مرتبه دوم به‌صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند و در بین آنها تعدادی دارای کاربرد بیشتر هستند. محققین مختلف در گذشته تحقیقات جامعی را در زمینه روش‌های مرتبه دوم انجام داده‌اند. بته و ویلسون [۲]، وود [۳] و هیوز [۴] تعدادی از روش‌های عددی را معرفی نمودند. دوکانیش و سابراج [۵] بررسی دقیقی از روش‌های عددی قبل از زمان خود را ارائه دادند. از میان روش‌های مرتبه دوم، روش شتاب متوسط نیومارک، علیرغم دقت مناسب پایداری نامشروط، دارای خطای فرکانس‌های جعلی بوده و توانایی حذف اثر نامطلوب مدهای بالا را ندارد. با این وجود، این روش پرکاربردتر از بقیه روش‌ها است. برای دستیابی به دقتی بالاتر و فائق آمدن بر مشکل پایداری و دقت در روش‌های مرتبه دوم، با کاهش مرتبه و تبدیل معادلات به فضای حالت، روش‌های عددی مرتبه اول به‌وجود می‌آیند. این روش‌ها نیز دارای مشکلات پایداری، دقت و خطای معکوس ماتریس حالت هستند. اگر ماتریس حالت منفرد و یا بدحالت باشد، خطای بزرگی در محاسبات وارد می‌شود. محققین مختلف در سال‌های اخیر تحقیقات جامعی را در زمینه تحلیل دینامیکی در فضای حالت انجام داده‌اند. در سال ۱۹۹۴ توسط زانگ و ویلیام روش مرتبه اولی معرفی شد که در آن

با یک تغییر متغیر، معادله مرتبه دوم به‌روش مرتبه اول تبدیل می‌شود [۶]. روش آنها به HPD-L معروف شد. این روش براساس معادله تعادل دینامیکی تحت اثر بار خطی استوار بوده و در نقاط انتگرال‌گیری جواب دقیقی را به‌دست می‌دهد. لیکن دقت این روش به‌دلیل خطای ذاتی ماتریس معکوس و معادل‌سازی نیرو، به‌ویژه زمانی که سیستم غیرهمگن است، بسیار کاهش می‌یابد. شن و همکاران [۷] روش HPD-F<sup>۲</sup> را برای معادله تعادل غیرهمگن ارائه نمودند؛ لیکن دقت آن نیز با معادل‌سازی بار و خطای معکوس‌سازی ماتریس حالت کاهش می‌یافت. گوانژیان و همکاران [۸] نسخه جدیدی از PIM<sup>۳</sup> را با استفاده از روش بسط ابعادی ارائه کردند که معادله غیرهمگن را به معادله همگن تبدیل می‌کند. محاسبات این روش نیازمند فضای زیادی برای ذخیره‌سازی بوده و با وجود اینکه نیازی به محاسبه معکوس ماتریس حالت ندارد، لیکن استفاده از آن غیرکاربردی است. ونگ و ژو [۹] با بررسی جزئیات پایداری مدل گوانژیان نشان دادند که این روش دارای پایداری مشروط است. ونگ و آوو [۱۰] روش PTSIM<sup>۴</sup> را ارائه نمودند که در آن از روش گوس برای حل معادلات استفاده شده است. دقت این روش تنها به تعداد نقاط گوسی و اندازه گام زمانی وابسته است؛ لیکن این روش دارای پایداری مشروط است. ونگ و آوو [۱۰] روش NICPIM<sup>۵</sup> را ارائه نمودند که با استفاده از روش تجزیه ماتریس، نیاز به محاسبه معکوس ماتریس را برطرف ساخته و پایداری آن را نامشروط گزارش کردند. لیکن، این روش نیز در صورت منفرد بودن و یا بدحالت بودن ماتریس حالت، دارای خطای بالایی است.

هدف روش‌های مرتبه اول پیشنهاد شده تا به امروز بهبود روش پایداری، دقت و حذف اثر معکوس ماتریس بوده است. در نهایت وو و چوانگ [۱۱] مدل جدیدی از روش PIM را ارائه دادند که با استفاده از اثر بازخورد دقت و پایداری روش PIM را بهبود بخشید؛ لیکن این روش نیز دارای خطای معکوس‌سازی ماتریس حالت است.

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_c \mathbf{v} + \mathbf{E}_c \mathbf{F} \\ \mathbf{X} = \mathbf{D} \mathbf{v} \end{cases},$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \circ & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} \circ \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [\mathbf{I} \ \circ], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

که در آن  $\bar{\mathbf{v}}$  متغیر حالت،  $\mathbf{A}_c$  ماتریس حالت،  $\mathbf{D}$  ماتریس کوپلینگ ورودی-خروجی،  $\mathbf{E}_c$  ماتریس ورودی نامیده می‌شود و کنترل کننده  $\mathbf{F}$  است. اگر  $\mathbf{E}_c$  صفر باشد کنترلی روی  $\mathbf{F}$  وجود نداشته و مستقل از زمان خواهد بود [۱۲]. فرم گسسته شده معادله (۲) به صورت معادله (۳) نوشته می‌شود:

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{v}_0 + e^{\mathbf{A}_c t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}_c s} \mathbf{E}_c \mathbf{F}(s) ds,$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{T} \mathbf{v}_n + \mathbf{E}_0 \mathbf{F}_n + \mathbf{E}_1 \mathbf{F}_{n-1}$$

$$\mathbf{E}_0 = \left( \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{T} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \right) \mathbf{E}_c,$$

$$\mathbf{E}_1 = \left( -\mathbf{A}_c^{-1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{T} - \mathbf{I}) \right) \mathbf{E}_c \quad (3)$$

که در آن  $e^{\mathbf{A}_c t}$ ، ماتریس انتقال حالت نامیده می‌شود و دقت روش وابسته به دقت محاسبه ماتریس انتقال حالت است. در معادله (۳) ماتریس  $\mathbf{T}(\Delta t)$  به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$\mathbf{T}(\Delta t) = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \left( e^{\mathbf{A}_c \frac{\Delta t}{m}} \right)^m = \left( e^{\mathbf{A}_c \tau} \right)^m = (\mathbf{T}(\tau))^m \quad (4)$$

در این مقاله بنا بر پیشنهاد مولار و لشن [۱۳]  $m = 2^N$  و بنا بر پیشنهاد وو و چوانگ [۱۱]  $N=4$  یا  $5$  در نظر گرفته شده است.  $\mathbf{T}(\tau)$  با استفاده از بسط سری تیلور به صورت رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a_0}, \quad \mathbf{T}_{a_0} = \mathbf{A}_c \tau$$

$$+ \frac{(\mathbf{A}_c)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}_c)^3}{3!} + \dots + \frac{(\mathbf{A}_c)^L}{L!} \quad (5)$$

که در آن  $\mathbf{I}$  ماتریس واحد است و به دلیل دقت مناسب چند جمله نخست سری تیلور از محاسبه جملات بالاتر صرف نظر شده و بنا بر پیشنهاد ونگ و آوو، محاسبات برای  $L=4$  صورت می‌گیرد [۱۰] و به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$\mathbf{T}(\Delta t) \cong \left( \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a_0} \right)^{2^N} \quad (6)$$

با توجه به مشکلات ذکر شده فوق در تحقیقات پیشین، در این مقاله روش مرتبه اول برای معادلات ناهمگن تحت بارگذاری دینامیکی در نظر گرفته شده است. از آنجا که این روش دارای دقت و پایداری مطلوب است، در این تحقیق سعی شده است تا خطای محاسبه ماتریس معکوس برطرف شود از اینرو با به کارگیری روش محاسبه ماتریس معکوس با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A}_c$  (SVD) این خطا حذف شده است. نتایج بیانگر آن است که دقت روش پیشنهاد شده به مراتب بهتر از روش‌های مرتبه اول پیشین و مرتبه دوم رایج نیومارک است.

## ۲- فرمول‌بندی روش به کار رفته در تحقیق

در این بخش به معرفی الگوریتم به کار گرفته شده و توسعه داده شده در مقاله پرداخته می‌شود. این بخش شامل چندین زیربخش اصلی است که شامل تئوری روش انتگرال‌گیری دقیق مرتبه اول PIM، بررسی پایداری روش، فیلتر کردن پاسخ‌های جعلی و روابط مورد نیاز برای دقت روش هستند.

### ۲-۱- تئوری روش انتگرال‌گیری دقیق (PIM)

این روش برخلاف تمام روش‌های مرتبه دوم قبل از خود به اندازه گام زمانی حساس نبوده و در مقایسه با آنها دارای دقت بالاتری است. معادله تعادل دینامیکی مرتبه دوم را به صورت رابطه (۱) در نظر بگیرد:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F} \quad (1)$$

که در آن معادله  $\mathbf{M}$  ماتریس جرم،  $\mathbf{C}$  ماتریس میرایی،  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی و  $\mathbf{F}$  بردار نیروهای خارجی را نشان می‌دهد و  $\mathbf{X}$ ،  $\dot{\mathbf{X}}$  و  $\ddot{\mathbf{X}}$  به ترتیب بیانگر جابه‌جایی، سرعت و شتاب درجات آزادی سازه هستند. در روش PIM با انتقال معادله مرتبه دوم (۱) به معادلات مرتبه اول در فضای حالت، معادله (۲) به دست می‌آید:

و  $R(s)$  ریشه‌های  $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c]$  معرف لاپلاس خروجی است. ریشه‌های  $R(s)$  معادله‌ی مشخصه سیستم حالت نامیده می‌شود و این ریشه‌ها را قطب‌های تابع تبدیل می‌نامند. نوع پاسخ زمانی و پایداری روش توسط قطب‌های تابع تبدیل بیان می‌شوند. گاهی برخی از قطب‌ها حذف می‌شوند که اصطلاحاً به آن حذف صفر-قطب گویند. در این صورت برخی از مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A}_c$  جزء قطب‌های تابع تبدیل نخواهد بود. در روش PIM مقادیر ویژه ماتریس به صورت زیر است:

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c] = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & s + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0, \quad (9)$$

$$s = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm i\sqrt{1 - \xi^2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$s$  مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A}_c$  و  $\mathbf{M}$  ماتریس جرم،  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی،  $\omega$  فرکانس سازه و  $\xi$  میرایی سازه است. در حالت کلی قطب‌ها را به صورت  $s = \alpha \pm i\beta$  نمایش می‌دهند که  $\alpha$  بیانگر شیب میرایی و  $\beta$  نیز فرکانس نوسان را نشان می‌دهد. در مختصات قطبی با نزدیک شدن به محور مجازی ( $j\omega$ ) میرایی کم و فرکانس میرایی افزایش می‌یابد و در سمت چپ با نزدیک شدن به محور افقی شیب میرایی افزایش پیدا می‌کند و چنانچه نزدیک شدن به محور افقی از سمت راست محور باشد شیب نامیرایی افزایش می‌یابد [۱۴]: این مفهوم در شکل (۱) نشان داده شده است.

با توجه به قرارگیری قطب‌ها، می‌توان در مورد شرایط پایداری سازه اظهار نظر نمود. انواع پایداری که در فضای حالت تعریف می‌شود تحت عنوان پایداری BIBO، پایداری داخلی و پایداری مرزی است. اگر حذف صفر-قطب اتفاق افتد سیستم پایداری داخلی نخواهد داشت [۱۴]. برای تعیین این موضوع، یعنی اتفاق و یا عدم اتفاق حذف صفر-قطب، دو معیار رؤیت‌پذیری<sup>۷</sup> و کنترل‌پذیری<sup>۸</sup> تعیین می‌شود. با انجام آزمون کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری برای روش PIM، این روش کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر بوده و نیز حذف صفر-قطب صورت

بر اساس روابط بازگشتی ماتریس  $\mathbf{T}_{ai}$  به صورت رابطه (۷) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0})^2 &= \mathbf{I} + 2 \times \mathbf{T}_{a0} + \mathbf{T}_{a0} \times \mathbf{T}_{a0} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1} \\ (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1})^2 &= \mathbf{I} + 2 \times \mathbf{T}_{a1} + \mathbf{T}_{a1} \times \mathbf{T}_{a1} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a2} \\ (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a(N-1)})^2 &= \mathbf{I} + 2 \times \mathbf{T}_{a(N-1)} + \mathbf{T}_{a(N-1)} \times \mathbf{T}_{a(N-1)} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{aN} \\ \mathbf{I} + \mathbf{T}_{aN} &= (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a(N-1)})^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a(N-2)})^4 = \dots = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0})^{2^N} \end{aligned} \quad (7)$$

مقدار  $\mathbf{T}_{ai}$ ها بسیار کوچک هستند و برای اجتناب از گرد شدن و حذف مقادیر در خلال محاسبات کامپیوتری، مقادیر آنها محاسبه و با ماتریس یکه جمع می‌شود. بدین صورت، دقت محاسباتی ماتریس  $\mathbf{T}(\Delta t)$  افزایش می‌یابد [۱۱]. مطابق رابطه (۳) محاسبه پاسخ سازه در روش PIM نیازمند محاسبه معکوس ماتریس حالت  $\mathbf{A}_c$  است؛ بنابراین زمانی که ماتریس حالت منفرد و یا بد حالت باشد محاسبات دارای خطا خواهد بود. در این مقاله برای اجتناب از این خطا از روش معکوس ماتریس SVD استفاده شده است.

## ۲-۲- پایداری روش PIM

در معادلات فضای حالت، تابع تبدیل بیان کننده مشخصات سیستم است و در این حالت به صورت کلی تابع تبدیل به صورت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی و در شرایط اولیه صفر بیان می‌شود؛ بنابراین با گرفتن لاپلاس از طرفین رابطه (۲) تابع تبدیل به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \mathbf{sv}(s) - \mathbf{y}(s) = \mathbf{A}_c \mathbf{v}(s) + \mathbf{E}_c \mathbf{F}(s) \rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \mathbf{v}(s) = \mathbf{E}_c \mathbf{F}(s) \\ \mathbf{X}(s) = \mathbf{C} \mathbf{v}(s) \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{E}_c \mathbf{F}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{F}(s) \Rightarrow \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c]} \quad (8)$$

$\mathbf{G}(s)$  بیانگر تابع تبدیل است. با توجه به رابطه ۸، تابع تبدیل  $\mathbf{G}(s)$  همواره به صورت یک تبدیل کسری به صورت  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{Y}(s) / \mathbf{R}(s)$  است که  $\mathbf{Y}(s)$  معرف لاپلاس ورودی

### ۲-۳- فیلتر کردن پاسخ‌های جعلی فرکانس‌های مرتبه بالا

در مسائل دینامیکی موده‌های اول بیشترین تأثیر را در پاسخ‌ها داشته و پاسخ فرکانس‌های مرتبه بالاتر گاهی جعلی و نادرست بوده، دقت محاسبات را کاهش داده و گاهی سبب ناپایداری عددی می‌شوند؛ بنابراین این فرکانس‌ها مطلوب نبوده و بهتر است فیلتر شوند. در سیستم‌های خطی در صورت کنترل‌پذیری بودن، می‌توان با طراحی کردن کنترل کننده‌ای مبتنی بر بازخورد سیستم، پایداری داخلی سیستم را تضمین نمود که باعث کاهش حساسیت مدل و حذف اثر اغتشاشات می‌شود. در سیستم‌های خطی مستقل از زمان<sup>۹</sup> (LTI) این کنترل کننده تابعی خطی از  $v(t)$  در نظر گرفته می‌شود [۱۴].

$$F(t) = -Kv(t) \quad (11)$$

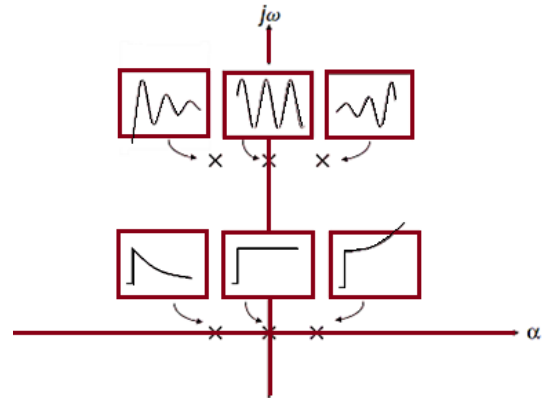
$K$  در این روابط کنترل کننده‌ای شامل ترکیبات خطی متغیرهای حالت سیستم است و ماتریس بهره حالت نامیده می‌شود. علامت منفی تنها در اینجا اشاره به مفهوم بازخورد منفی داشته و بسته به تحقق‌های مختلف  $K$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد. تنها به دلیل پایداری سیستم در بازخورد منفی در پایدارسازی سیستم از علامت منفی استفاده شده است. با جایگزینی رابطه (۱۱) در رابطه (۱۲)، رابطه (۱۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = A_c v(t) - k E_c v(t) = (A_c - k E_c) v(t) = \bar{A}_c v(t) \\ \bar{X}(t) = D v(t) \end{cases} \quad (12)$$

اگر خاصیت پایداری داخلی مدنظر باشد، کافی است  $K$  به گونه‌ای انتخاب شود که مقادیر ویژه  $\bar{A}_c$  همگی در صفحه سمت چپ محور  $j\omega$  قرار گیرند. با محاسبه بازخورد سیستم و یا جایابی مطلوب قطب‌ها از اثر اغتشاشات بر سیستم و اثر پاسخ‌های جعلی فرکانس‌های مراتب بالا کاسته می‌شود. در روش PIM با محاسبه بازخورد سیستم ماتریس میرایی تحت عنوان  $C_a$  به ماتریس میرایی  $C$  اضافه می‌شود [۱۱]. طبق معادله (۱۳) پارامتر  $C_a$  ترکیب خطی از ماتریس سختی  $K$  و  $\Delta t$  است:

$$C' = C + C_a = C + \gamma K \Delta t \quad (13)$$

با توجه به بازخورد سیستم، مقدار شعاع طیفی به صورت



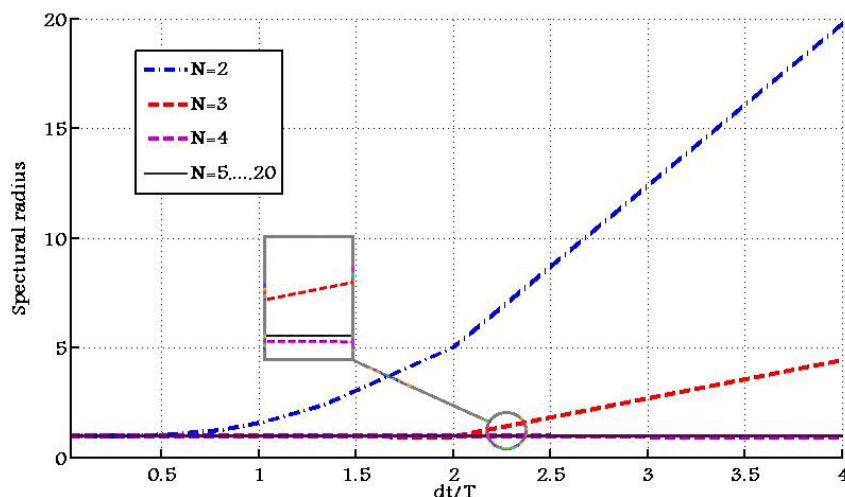
شکل ۱- جانمایی قطب‌ها در مختصات قطبی

نگرفته و بنابراین سیستم دارای پایداری داخلی است. در روش PIM تمامی قطب‌ها سمت چپ محور  $j\omega$  حادث شده و قطب‌های مکرر نیز وجود ندارد، بنابراین سیستم دارای پایداری BIBO و پایداری مرزی است. در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس  $A_c$  را می‌توان به عنوان قطب‌های تابع تبدیل در نظر گرفت. برای پایدار بودن یک روش باید شعاع طیفی  $\rho(A_c)$  کوچکتر از یک باشد. شعاع طیفی بیشترین مقدار مقادیر ویژه ماتریس  $A_c$  است. در روش PIM مقادیر ویژه ماتریس  $A_c$  به صورت رابطه (۱۰) است:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta = e^{-\zeta\omega\Delta t} (\cos \bar{\omega}\Delta t \pm i \sin \bar{\omega}\Delta t), \\ \rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \end{aligned} \quad (10)$$

برای بررسی پایداری روش ذکر شده، یک سازه یک درجه آزادی برای تحلیل تحت ارتعاش آزاد در نظر گرفته شده است. در سیستم مورد مطالعه  $M = 5 \times 10^5$  (kg) و  $K = 3 \times 10^5$  (kN/m) است. توسط برنامه تهیه شده در محیط MATLAB تغییرات شعاع طیفی روش PIM در برابر  $dt/T$  که  $T$  پریود اصلی سازه است، به صورت شکل (۲) به دست آمده است.

با توجه به شکل (۲) این روش به ازای  $N \geq 4$  پایدار است و پیشنهاد  $N = 4-5$  توسط وو و چوانگ را تأیید می‌کند [۱۱]. شکل (۲) نشان می‌دهد که برای  $dt/T \leq 0.5 \times 10^{-6}$  به ازای تمام مقادیر  $N$  روش PIM به صورت نامشروط پایدار است. لیکن اگر  $dt/T \geq 0.5 \times 10^{-6}$  باشد مقادیر  $N$  تعیین کننده بوده و به ازای  $N \geq 4$  روش PIM نامشروط است.



شکل ۲- تغییرات شعاع طیفی روش PIMS در برابر  $dt/T$  برای سازه یک درجه آزادی میرا

رابطه (۱۴) به دست می آید:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \begin{cases} \exp(-\xi^* \omega_n \Delta t \pm i \omega_n \Delta t \sqrt{1 - \xi^{*2}}) & 0 \leq \xi^* \leq 1 \\ \exp(-\xi^* \omega_n \Delta t \pm i \omega_n \Delta t \sqrt{1 - \xi^{*2}}) & \xi^* \geq 1 \end{cases}, \quad \rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \quad (14)$$

همواره کوچکتر از یک است. با محاسبه بازخورد مقدار شعاع طیفی اصلاح شده و همان طور که نشان داده شده است به ازای تمام مقادیر  $N$  و در تمام حالات  $dt/T$  پایدار خواهد بود؛ بنابراین با محاسبه بازخورد روش ارائه شده در این مقاله دارای پایداری نامشروط است.

#### ۲-۴- بررسی دقت روش

همانند روش های مرتبه دوم، در روش PIM مقدار خطای محاسباتی کاهش دامنه (AD) و کشیدگی دوره تناوب (PE) نیز برای سیستم یک درجه آزادی تحت ارتعاش آزاد محاسبه می شود. فرکانس سازه در این روش با توجه به رابطه (۱۷) محاسبه می شود:

$$\omega_n \Delta t = \begin{cases} \tan^{-1} \left( \frac{|\beta|}{\alpha} \right) & \alpha > 0 \\ \tan^{-1} \left( \frac{|\beta|}{\alpha} \right) + \pi & \alpha < 0 \end{cases} \quad (17)$$

خطای کشیدگی دوره تناوب با مقایسه فرکانس طبیعی سازه ( $\omega_n$ ) و فرکانس محاسبه شده از روش PIM ( $\bar{\omega}_n \Delta t$ )، مطابق

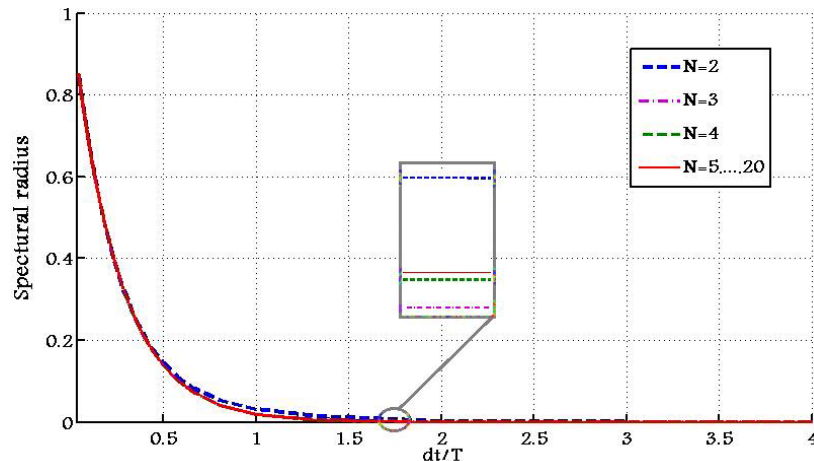
که در آن فرکانس طبیعی سازه بوده و ضریب میرایی سیستم باید به مقدار  $\xi^*$  که با رابطه (۱۵) تعریف می شود، اصلاح شود:

$$\xi^* = \frac{C + 2\alpha K \Delta t}{2M \omega_n} = \xi + 2\gamma \pi \frac{\Delta t}{T} \quad (15)$$

$\alpha$  برای یک سیستم یک درجه آزادی تحت ارتعاش آزاد ( $\xi = 0$ ) به صورت رابطه (۱۶) است:

$$\gamma = \begin{cases} -\frac{\ln \rho}{(\omega_n \Delta t)^2} & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln \rho}{\omega_n \Delta t} & \xi^* \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

برای سازه با مشخصات داده شده در اواخر بخش (۲-۲) تغییرات شعاع طیفی برای روش PIM با اثر بازخورد نیز محاسبه شد. تغییرات شعاع طیفی روش PIM در برابر  $dt/T$  که  $T$  پریود اصلی سازه است، به صورت نمودار شکل (۳) به دست آمده است. با توجه به شکل (۳)، روش PIM با اثر بازخورد دارای پایداری نامشروط بوده و شعاع طیفی آن برای  $N$  های مختلف



شکل ۳- اصلاح تغییرات شعاع طیفی (p) با اعمال بازخورد

دوره تناوب وابسته به دقت محاسبه فرکانس سازه است؛ بنابراین، این روش قادر به محاسبه فرکانس سازه با دقت بالا است. خطای کاهش دامنه روش نیز در شکل نشان داده شده است. خطای دامنه روش PIM نیز به ازای  $N$ های بزرگتر از ۴ بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است. این روش برای  $N=2$  نیز به ازای گام‌های زمانی بسیار کوچک خطای دامنه‌ای نداشته و به ازای  $dt/T \geq 1/5$  دارای خطای کاهش دامنه خواهد بود.

#### ۲-۵- ارزیابی ماتریس حالت با روش معکوس سازی

یکی از مشکلات روش‌های مرتبه اول محاسبه معکوس ماتریس حالت است که اگر این ماتریس بدحالت یا منفرد باشد، خطای بسیار زیادی در محاسبات وارد می‌شود. در این مقاله با استفاده از روش محاسبه معکوس ماتریس بر پایه مقادیر ویژه (SVD) این ضعف برطرف شده و حتی در صورت منفرد و یا بدحالت بودن ماتریس حالت نیز محاسبات دارای دقت مناسب است. در روش SVD، ماتریس  $A_{m \times n}$  با مرتبه  $K$  را می‌توان به صورت  $A=U\Sigma V^T$  تجزیه نمود. پارامترهای  $U_{m \times m}=[u_1 \dots u_m]$  و  $V_{n \times n}=[v_1 \dots v_n]$  ماتریس‌های متعامدی هستند که ستون‌های ماتریس  $U_{m \times m}$  از بردارهای ویژه ماتریس  $AA^T$  و ستون‌های ماتریس  $V_{n \times n}$  از بردارهای ویژه ماتریس  $A^T A$  تشکیل می‌شوند و  $\Sigma_{m \times n}$  یک ماتریس قطری

رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$PE = \frac{\omega_n \Delta t}{\bar{\omega}_n \Delta t} - 1 \quad (18)$$

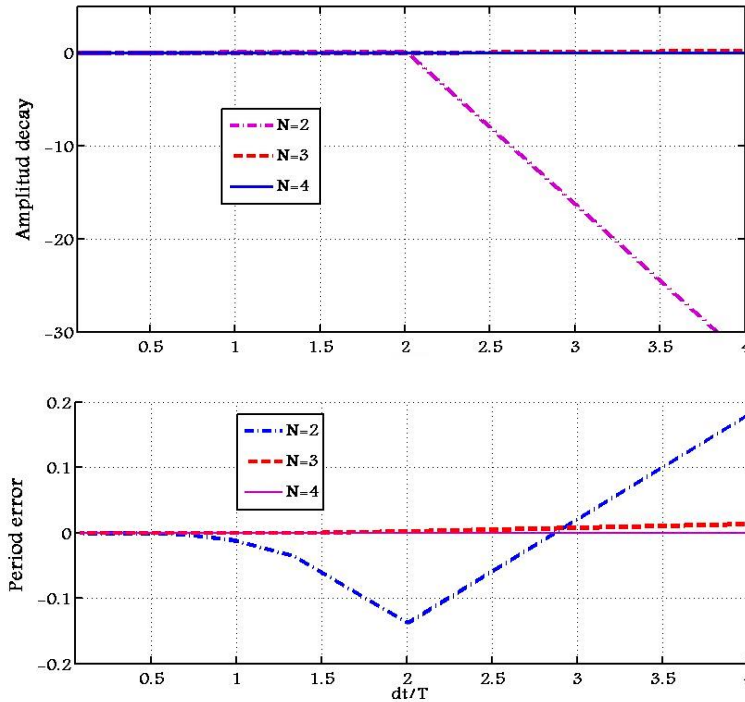
همچنین در این روش خطای کاهش دامنه (AD) نیز مانند رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\bar{\xi} = \frac{-\ln(\alpha^2 + \beta^2)}{\sqrt{\bar{\omega}_n \Delta t}}, \quad AD = 2\pi \bar{\xi} \quad (19)$$

برای بررسی دقت این روش، سازه‌ای یک درجه آزادی نامیرا برای تحلیل ارتعاش آزاد در نظر گرفته شده است. برای سازه یک درجه آزادی، با مشخصات داده شده در انتهای بخش (۲-۲) خطای کشیدگی دوره تناوب و خطای کاهش دامنه روش مورد بحث نیز مورد بررسی قرار گرفته و در شکل (۴) خطای کشیدگی دوره تناوب و خطای کاهش دامنه روش نشان داده شده است. خطای کاهش دامنه از رابطه (۱۹) و خطای کشیدگی دوره تناوب برای روش PIM از رابطه (۱۸) محاسبه شده است که نسبت فرکانس طبیعی سازه به دست آمده از حل تحلیلی به فرکانس به دست آمده از حل عددی است.

با توجه به شکل (۴)، روش‌های مرتبه اول برای  $N=2$  دارای خطای کشیدگی دوره تناوب است و با افزایش مقدار  $N$  خطای کاهش می‌یابد و به ازای  $N=4$  خطا بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. با توجه به رابطه (۱۸) خطای کشیدگی





شکل ۴- خطای کشیدگی دوره تناوب (الف) و خطای کاهش دامنه (پایین) روش PIMS در برابر dt/T

است که عناصر روی قطر آن مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  یا  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  هستند:

سازه برای روش‌های PIM بدون استفاده از روش معکوس SVD و PIM با استفاده از روش معکوس SVD برنامه‌ای در محیط MATLAB با نتایج حاصل از پاسخ تحلیلی مقایسه شده است. برای این منظور معادله تعادل حرکت یک سیستم یک درجه آزادی با شرایط مرزی به صورت معادله (۲۲) در نظر گرفته شده است:

$$\ddot{X} + 2\xi\dot{X} + p^2 X = f(t) \quad X(0) = 0, \dot{X}(0) = 0 \quad (22)$$

جابه‌جایی‌های سیستم در زمان‌های ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴ و ۰/۵ ثانیه در جدول (۱) آورده شده است. پاسخ دقیق سازه از حل معادله (۲۲) به صورت زیر به دست می‌آید. گام زمانی در تحلیل عددی ۰/۰۵ ثانیه است:

$$X(t) = \frac{P_0}{rK\xi} \times ((\pi \exp(-\xi t) [\cos(\omega_D t)] - \pi \cos(\pi t)) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t)) \quad (23)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$$

با توجه به داده‌های جدول (۱) مشاهده می‌شود که منفرد و یا

در اینجا  $\sigma_1$  و  $\sigma_k$  به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس  $\mathbf{A}$  هستند. برای ماتریس مربعی  $\mathbf{A}_{n \times n}$  معکوس ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma^{m \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad , \quad p = \min\{m, n\} \quad (20)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0 \quad , \quad \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

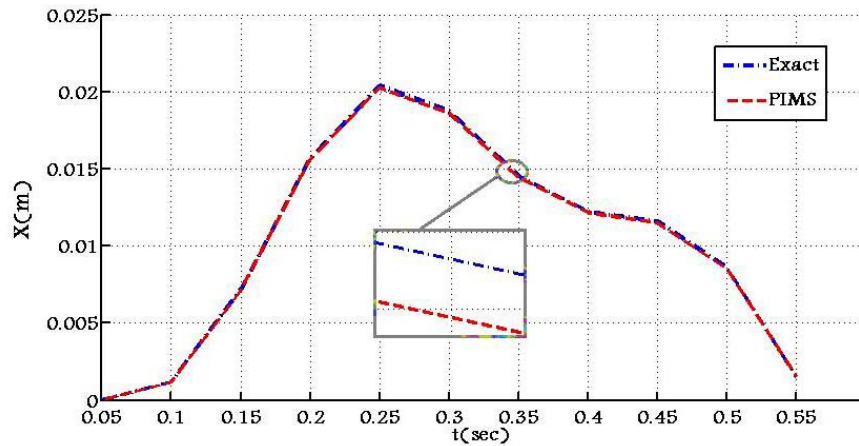
که در آن  $\Sigma^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_n)$  است.

دقت روش بهبود یافته برای سازه یک درجه آزادی میرا نیز در این مقاله بررسی شده است. برای این منظور، یک سازه یک درجه آزادی با جرم  $5 \times 10^5$  kg سختی  $3 \times 10^5$  (kN/m) و نسبت میرایی بحرانی و بارگذاری  $\bar{\omega} = 2\pi$  با فرکانس بار  $P_0 = 5000$  (kN) ،  $P(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} t)$  ،  $0 \leq t \leq 1$  در نظر گرفته می‌شود. برای مقایسه دقت روش پیشنهاد شده، مشخصات سازه با مرجع [۲۱] یکسان است. پاسخ دینامیکی

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۵، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۵

جدول ۱- پاسخ سازه یک درجه آزادی میرا برحسب (mm)

حد اکثر درصد خطا	زمان (ثانیه)					روش محاسبه پاسخ
	۰/۵۰	۰/۴۰	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۱۰	
۰	۰/۰۰۸۶	۰/۰۱۲۳	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۵۷	۰/۰۰۱۱۷	پاسخ دقیق
۱/۶	۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۲۱	۰/۰۱۸۶	۰/۰۱۵۶	۰/۰۰۱۱۶	مرتبه اول این تحقیق
∞	۲۳۳۲/۸۶	۵۷۹۹/۶	۷۸۷۸/۲	۹۴۲۳/۹	۲۰۱۴	مرتبه اول تحقیق قبلی



شکل ۵- پاسخ ارتعاش آزاد سازه یک درجه آزادی میرا برای روش PIMS و حل تحلیلی

انتقال معادلات مجزا معرفی می‌شود و با مقایسه بین تابع انتقال محاسبه شده از روش تحلیلی و تابع انتقال روش عددی اطلاعات جامعی از دقت عملکرد روش و ایجاد فرکانس‌های جعلی به دست می‌دهد. تابع انتقال تحلیلی از رابطه (۲۴) محاسبه می‌شود [۱۶].

$$H_u = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2 + \eta i \xi \omega \Omega} \quad (24)$$

رابطه بین بار خارجی و پاسخ سیستم در زمان خاص  $t$  را مانند رابطه (۲۵) در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_u \\ \bar{\mathbf{H}}_v \end{bmatrix} \exp(i\bar{\omega}_n \Delta t) \quad (25)$$

$\mathbf{H}_u$  تابع انتقال جابه‌جایی و  $\mathbf{H}_v$  تابع انتقال سرعت است. در یک سازه یک درجه آزادی با جایگزینی رابطه (۲۵) در معادله (۳) رابطه (۲۶) به دست می‌آید:

بدحالت بودن ماتریس ضرایب موجب خطای بسیار زیادی در محاسبات می‌شود. با حذف روش PIM بدون معکوس SVD، محاسبات نتایج در شکل (۵) نشان داده شده است. در ادامه تحقیق، روش PIM با استفاده از معکوس SVD، به اختصار PIMS<sup>۱</sup> نامیده شده است. از شکل (۵) مشاهده می‌شود روش PIMS پیشنهاد شده دقت بالایی داشته و نتایج به پاسخ تحلیلی بسیار نزدیک است.

## ۲-۶- فرکانس‌های جعلی در روش PIMS

تاکنون دقت روش بیشتر با در نظر گرفتن قسمت همگن معادلات تعادل مورد مطالعه قرار گرفته است [۴ و ۱۷]؛ تحقیقاتی که رفتار الگوریتم مورد نظر را تحت بارگذاری خارجی بررسی کرده باشند، اندک هستند [۱۸ و ۱۹]. پرامونت [۲۰] روش جدیدی برای بررسی روش‌های عددی با در نظر گرفتن بار خارجی پیشنهاد نمود؛ که در این روش یک تابع

### ۳- نتایج تحقیق

در این بخش به ارزیابی دقت، صحت و اعتبار روش بهبود داده شده روش انتگرالگیری دقیق با روش پیشنهادی SVD پرداخته می شود. برای این منظور سه مسأله مورد بررسی قرار گرفته است. اولین مسأله یک سازه یک درجه آزادی میرا است که تحت بارگذاری های هارمونیک و بار ضربه پله، پاسخ دینامیکی آن با روش های دقیق، روش PIMS و روش مرتبه دوم نیومارک ارائه شده است. مسأله دوم مربوط به یک سازه دو درجه آزادی نامیرا برای بررسی قابلیت روش برای فیلتر کردن فرکانس های مرتبه بالا است. مسأله سوم یک سازه دوبعدی محیط پیوسته است. پاسخ سازه ای این سد برای یک تحریک هارمونیک به روش های مرتبه دوم و روش پیشنهاد شده بررسی شده است. همچنین پاسخ لرزه ای سد برای زلزله طبس نیز به روش های نیومارک و روش پیشنهاد شده مقایسه شده است.

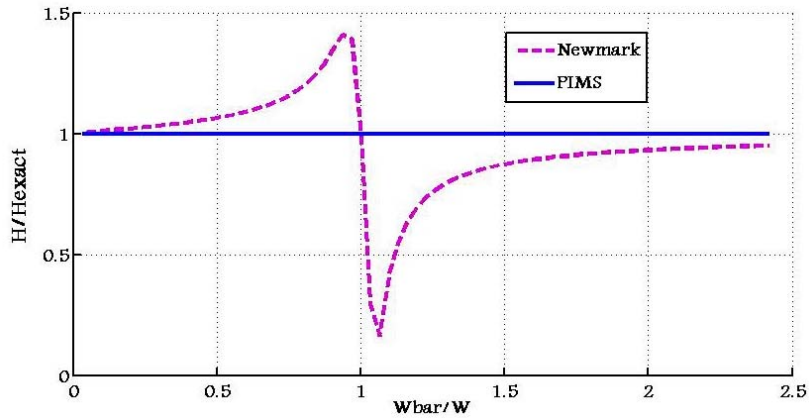
#### ۳-۱- مسأله اول: سازه یک درجه آزادی

هدف از ارائه این مثال بررسی تغییر مکان لرزه ای سازه یک درجه آزادی با  $K=300$  (MN/m)،  $M=5 \times 10^5$  (kg) و بارگذاری خارجی  $P(t)=5000 \sin(\omega t)$  در محل جرم متمرکز برحسب کیلو نیوتن با فرکانس بار  $\omega = 22/5$  است. پاسخ این سازه با روش های دقیق، روش شتاب متوسط نیومارک و روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ سازه با این روش در شکل (۷) ارائه شده است. مقایسه روش ها و محاسبه میزان خطای آنها در گام زمانی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثانیه در جدول (۲) آورده شده است. همان طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، هنگامی که فرکانس بار به فرکانس سازه نزدیک باشد، نتایج روش نیومارک دارای خطا است. براساس نتایج شکل (۷) و جدول (۲) مشاهده می شود که پاسخ روش PIMS بسیار نزدیک به حل تحلیلی است، درحالی که به دلیل وجود فرکانس های جعلی، نتایج روش نیومارک همراه با خطا است. بنابراین روش ارائه شده به خوبی توانسته است.

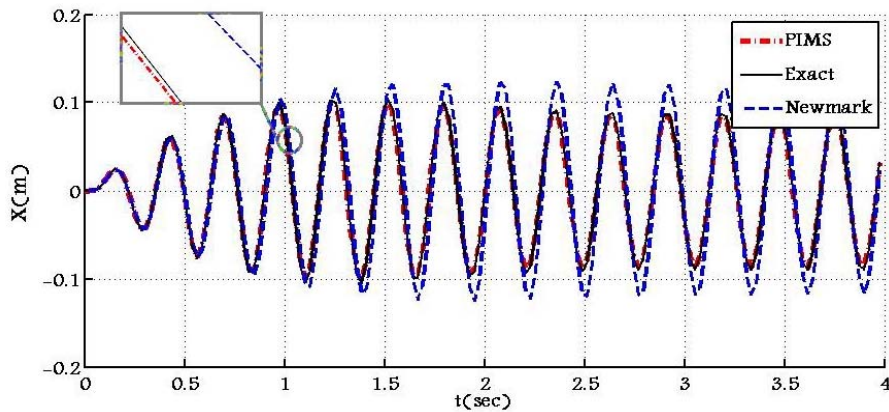
$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_u \\ \bar{\mathbf{H}}_v \end{bmatrix} = [\exp(i\bar{\omega}_n \Delta t) \times \mathbf{I} - \mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{E}_u \quad \mathbf{E}_v] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \exp(i\bar{\omega}_n \Delta t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

با استفاده از رابطه (۲۶)، تابع انتقال روش PIM که با  $\bar{\mathbf{H}}_u$  نشان داده شده است، محاسبه می شود. مقدار  $|\frac{\bar{\mathbf{H}}_u}{\mathbf{H}_u}| = 1$  نشان می دهد که روش عددی کاملاً مانند روش تحلیلی دقیق بوده و فرکانس های جعلی در روش ایجاد نمی شود. در حالتی که بارگذاری خارجی وجود داشته باشد، خطای کشیدگی دوره تناوب و خطای کاهش دامنه بیان کننده دقت روش نبوده و باید براساس روش پیشنهادی پرامونت [۲۰] با مقایسه تابع انتقال روش تحلیلی و تابع انتقال عددی، دقت عملکرد روش مورد بررسی قرار گیرد. برابر یک بودن نسبت تابع انتقال تحلیلی به تابع انتقال عددی، نشان می دهد که حل عددی و حل تحلیلی یکسان بوده و روش دارای دقت بالایی است. با استفاده از رابطه (۲۴)  $\mathbf{H}_u$ ، تابع انتقال تحلیلی و از رابطه (۲۶)  $\bar{\mathbf{H}}_u$ ، تابع انتقال روش PIM مقادیر  $|\frac{\bar{\mathbf{H}}_u}{\mathbf{H}_u}|$  در برابر  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n}$  برای روش های PIMS و نیومارک در بازه  $0 \leq \frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n} \leq 1/5$  مطابق شکل (۶) ارائه شده است. برای سیستم یک درجه آزادی با مشخصات داده شده در بخش (۲-۲) با گام زمانی  $\Delta t = 0/1T$  در نظر گرفته شده است. در روش نیومارک  $\beta = 10/25$  و  $\gamma = 0/1$  در نظر گرفته شده که بیانگر روش نیومارک شتاب متوسط است.

شکل (۶) نشان می دهد روش PIM پیشنهادی دارای فرکانس جعلی نیست و هنگامی که  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n} < 1$  یا به طور دقیق تر کوچکتر از  $0/6$  باشد، پاسخ روش بسیار نزدیک به روش تحلیلی است. لیکن در روش شتاب متوسط نیومارک هنگامی که  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n} = 1$  است یک جهش اتفاق می افتد که نشان دهنده فرکانس جعلی است. روش نیومارک در بازه  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n} \leq 0/6$  دارای دقت محاسباتی بیشتری است. روش PIM فرکانس جعلی ایجاد نمی کند و در تمام مقادیر  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n}$  مقدار آن  $|\frac{\bar{\mathbf{H}}_x}{\mathbf{H}_x}| \approx 1$  است.



شکل ۶- نمودار  $\frac{H_x}{H_x}$  در برابر  $\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n}$  برای روش‌های PIMS و روش نیومارک



شکل ۷- پاسخ سازه یک درجه آزادی میرا برای روش‌های نیومارک، PIMS و حل تحلیلی تحت بار هارمونیک

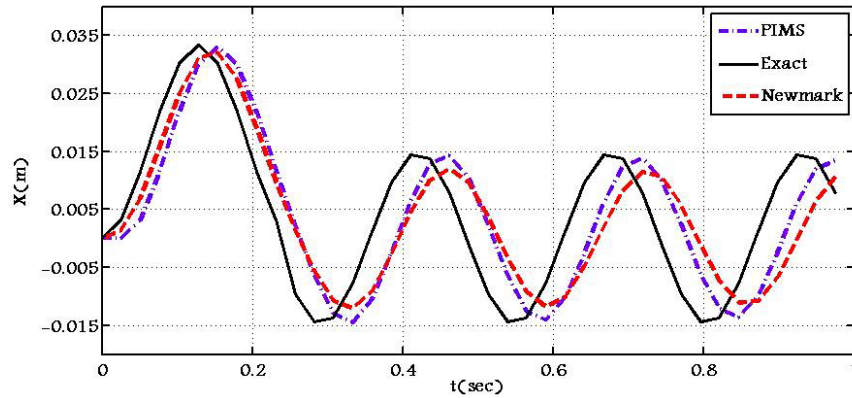
جدول ۲- مقایسه پاسخ به دست آمده از سازه یک درجه آزادی میرا برای

روش‌های نیومارک، PIMS و حل تحلیلی تحت بار هارمونیک

حداکثر درصد خطا	زمان (ثانیه)					روش محاسبه پاسخ
	۴	۳	۲	۱	۰	
۰	۰/۰۳۲۱	-۰/۰۳۸۳	-۰/۰۰۳۲	۰/۰۷۵۸	۰	Exact
۳۳/۰۲	۰/۰۲۱۵	-۰/۰۰۳	-۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۹۵	۰	Newmark
۳/۱۳	۰/۰۳۱۲	-۰/۰۰۳۷۳	-۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۷۳۸	۰	PIMS

روش‌های نیومارک، PIMS با حل تحلیلی نیز در گام زمانی ۰، ۰/۲، ۰/۴، ۰/۶، ۰/۸، ۱ ثانیه در جدول (۳) آورده شده است. با توجه به شکل (۸) و جدول (۳) مشاهده می‌شود که

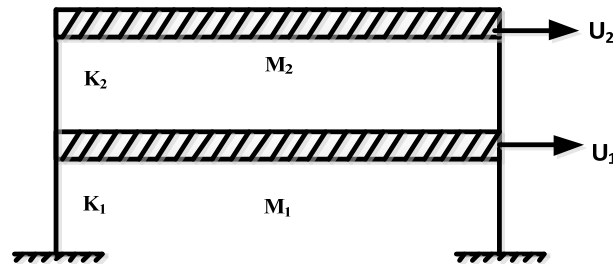
فرکانس‌های جعلی را فیلتر نماید. همچنین پاسخ سازه تحت بارگذاری پله‌ای با شدت  $P(t)=5000$  (kN) در مدت زمان ۰/۲ ثانیه نیز در شکل (۸) نشان داده شده است. مقایسه میان



شکل ۸- پاسخ سازه یک درجه آزادی میرا برای روش‌های نیومارک، PIMS و حل تحلیلی تحت بار پله

جدول ۳- مقایسه پاسخ به دست آمده از سازه یک درجه آزادی میرا برای روش‌های نیومارک، PIMS و حل تحلیلی تحت بار پله

حداکثر درصد خطا	زمان (ثانیه)					روش محاسبه پاسخ
	۱	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۲	
۰	-۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۱۸۶	۰/۰۰۱۳	پاسخ دقیق
۴۴	۰/۰۰۳۷	-۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۱۶۸	۰/۱۵۰۰	Newmark
۲۴	-۰/۰۰۸۱	-۰/۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۲۰۵	۰/۰۰۱۳	PIMS



شکل ۹- قاب برشی دو درجه آزادی نامیرا

صحت روش پیشنهاد شده همانند مرجع [۲۱] است. ماتریس جرم و سختی به صورت زیر و سازه نامیرا در نظر گرفته شده است:

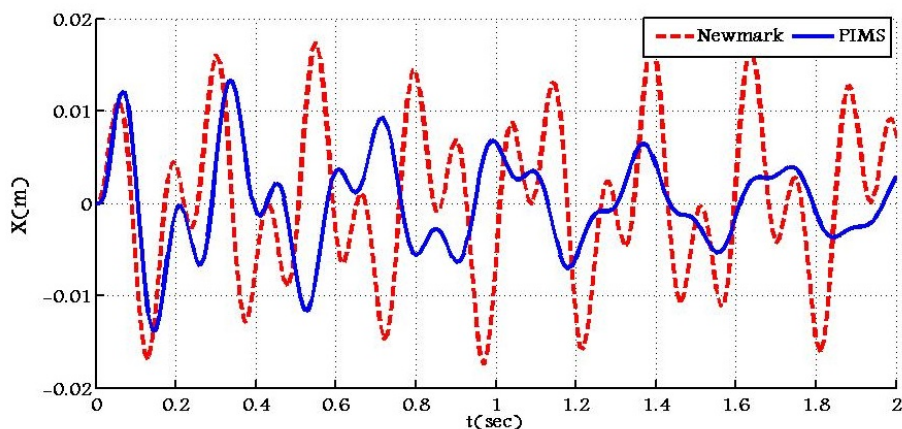
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} ۳۶ & -۱۸ \\ -۱۸ & ۱۸ \end{bmatrix} \times ۱۰^۶ \text{ (kN/m)}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} ۲۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix} \times ۱۰^۳ \text{ (kg)}$$

در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) پاسخ‌های درجات آزادی مختلف سازه ارائه شده است. در شکل (۱۰) پاسخ درجه آزادی اول و

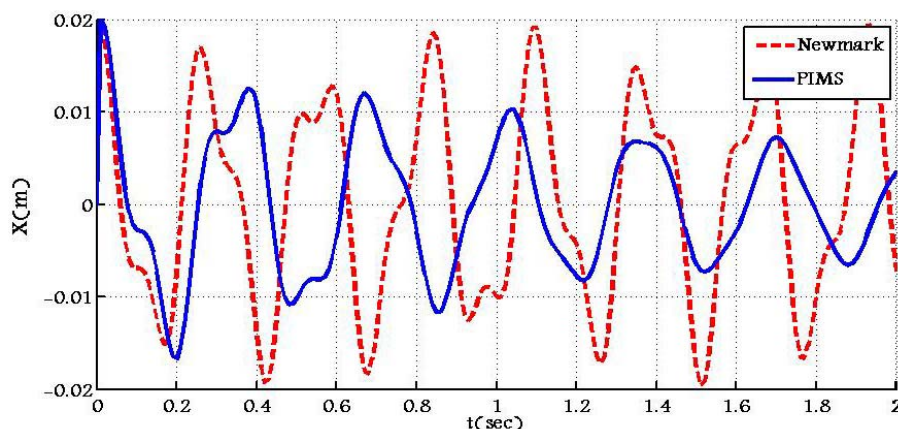
روش PIMS به نسبت در بارگذاری پله نیز پاسخی نزدیکتر به حل تحلیلی را ارائه می‌دهد

### ۳-۲- مسأله دوم: سازه چند درجه آزادی

در سازه دو درجه آزادی شکل (۹) مود اول به عنوان مود مطلوب و مود دوم به عنوان مود مرتبه بالا و ناخواسته در نظر گرفته می‌شود که باید فیلتر شود. مشخصات مسأله برای بررسی



شکل ۱۰- پاسخ درجه آزادی اول قاب برشی و اثر فیلتر کردن مودهای بالا



شکل ۱۱- پاسخ درجه آزادی دوم قاب برشی و اثر فیلتر کردن مودهای بالا

می‌شود، روش PIMS با فیلتر کردن مودهای مراتب بالا پاسخ دقیق‌تری به دست می‌دهد که این موضوع در مسأله سوم بررسی شده است.

### ۳-۳- مسأله سوم: سازه پیوسته دوبعدی

هدف بررسی جابه‌جایی لرزه‌ای سازه دوبعدی کرنش مسطح سد پایین فلت<sup>۱۱</sup> با روش‌های نیومارک شتاب متوسط و روش پیشنهادی است. مدل عددی سد از المان‌های چهارگره‌ای چهارضلعی است که شامل ۱۳۶ المان و ۱۶۲ گره و در مجموع ۳۲۴ درجه آزادی است. برای تحلیل دینامیکی از  $C=\alpha M+\beta K$  یا میرایی متناسب رایلی استفاده شده است که ضرایب

اثر فیلتر کردن مودهای بالا ارائه شده است. در شکل (۱۱) پاسخ درجه آزادی دوم و اثر فیلتر کردن مودهای بالا ارائه شده است.

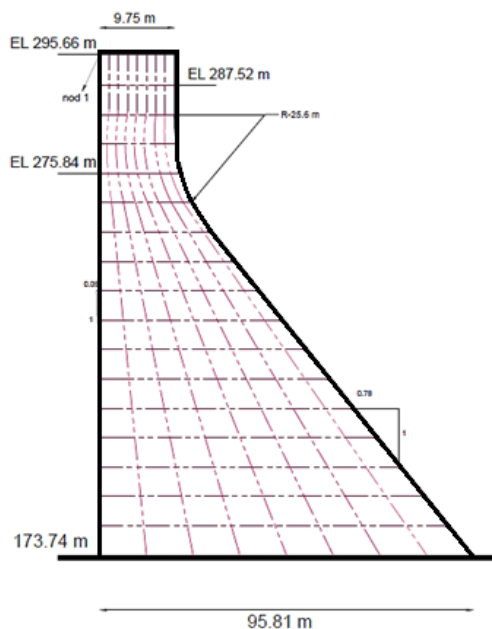
با توجه به شکل مشاهده می‌شود چه در درجه آزادی اول و چه در درجه آزادی دوم، پس از گذشت یک ثانیه در روش PIMS به خوبی اثر مود بالاتر حذف شده است. در حالی که در تمام زمان لحاظ شده برای مسأله، اثر مود بالاتر در پاسخ روش نیومارک دیده می‌شود. از میان روش‌های مرتبه دوم نیومارک و روش پیشنهادی، روش PIMS است که توانایی مطلوبی در حذف فرکانس‌های مراتب بالا دارد. در سازه‌های پیوسته با درجات آزادی بالا که مودهای مرتبه بالا نیز وارد محاسبات

جدول ۴- مشخصات مصالح به کار رفته در مدل عددی سازه

E(GPa)	$\nu$	p (Kg/m <sup>3</sup> )	$\xi(\%)$
۲۲/۴	۰/۲	۲۴۴۰	۴/۵

جدول ۵- مقایسه پریودهای به دست آمده از برنامه تهیه شده و تحقیقات قبل (برحسب ثانیه)

مود	۱	۲	۳	۴	۵
این تحقیق	۰/۳۰۵	۰/۱۴۹	۰/۱۱۱	۰/۰۸۶	۰/۰۵۷
تحقیقات پیشین [۲۲]	۰/۳۰۵	۰/۱۴۷	۰/۱۱۱	۰/۰۸۵	۰/۰۵۵



شکل ۱۲- مدل المان محدود سد پایین فلت

پاسخ‌ها خطای مربوط به کاهش دامنه و کشیدگی دوره تناوب است. با توجه به اینکه در پاسخ‌های مسائلی که حل دقیق آنها موجود است، روش پیشنهاد شده مرتبه اول دقیق‌تر از روش مرتبه دوم نیومارک است. بنابراین روش نیومارک دارای خطا بوده و پاسخ روش PIMS دقیق‌تر است.

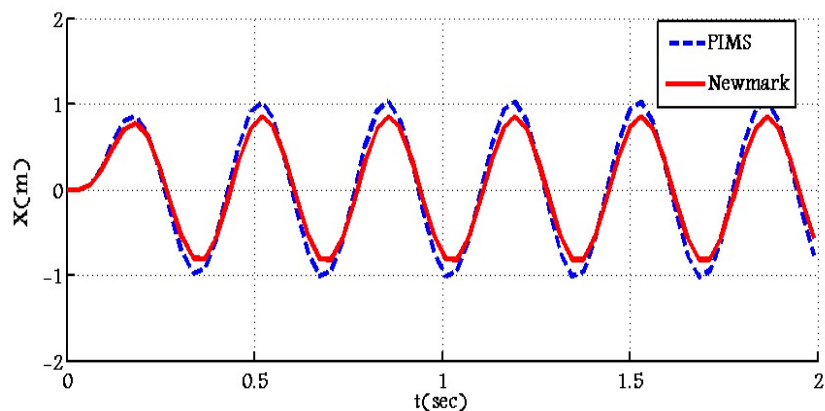
برنامه کامپیوتری نوشته شده برای تحلیل اجزای محدود از مدل‌سازی پی صرف‌نظر شده است. در ابتدا بارگذاری هارمونیک به صورت  $P(t) = 5000 \sin(18/7 t)$  برحسب کیلو نیوتن در تاج سد اعمال شده است. فرکانس بارگذاری طوری انتخاب شده است که به اولین فرکانس ارتعاش سد یعنی  $\omega_1 = 18/7$  رادیان بر ثانیه نزدیک باشد. در جدول (۴) مشخصات مکانیکی مصالح به کار رفته در بدنه سد ارائه شده است. برای صحت سنجی برنامه المان محدود توسعه داده شده، نتایج فرکانس‌های ارتعاش سازه با مرجع [۲۲] مقایسه شده است.

در جدول (۵) نتایج پریود ارتعاش برنامه نوشته شده با مرجع [۲۲] مقایسه شده است. همان‌طور که در جدول نشان داده شده است. دقت پریودهای ارتعاش برنامه نوشته شده قابل قبول است.

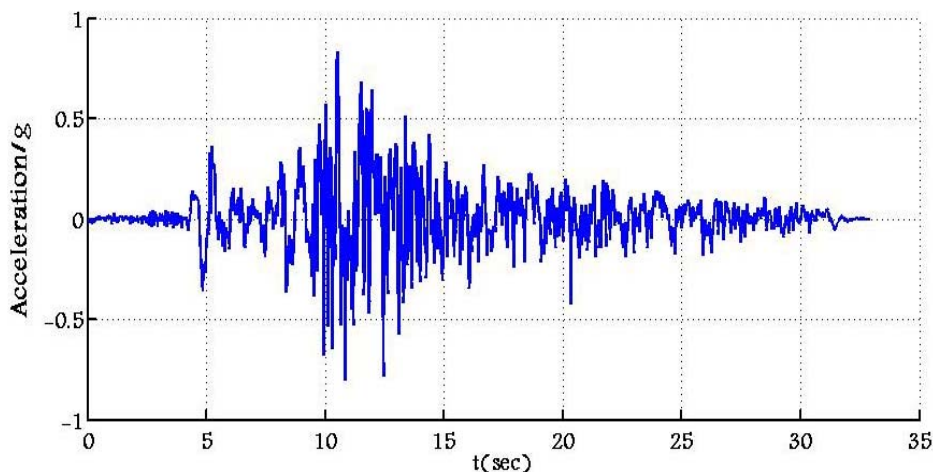
پاسخ سیستم برای گره نشان داده شده در شکل (۱۲) برای دو روش نیومارک و PIMS در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

از روی نتایج شکل (۱۳) پاسخ سد پایین فلت در روش نیومارک و PIMS تحت بار هارمونیک، نشان می‌دهد که در سازه‌های پیوسته هنگامی که فرکانس بار به فرکانس سازه نزدیک می‌شود نیز پاسخ روش نیومارک با روش PIMS متفاوت است. از آنجایی که در سازه یک درجه آزادی پاسخ روش PIMS به حل تحلیلی بسیار نزدیک بوده در سازه پیوسته نیز شکل (۱۳) نشان می‌دهد که پاسخ روش PIMS دقیق‌تر است. مؤلفه افقی زلزله طیس در شکل (۱۴) و پاسخ‌های سد پایین فلت تحت مؤلفه افقی زلزله طیس در شکل (۱۵) نشان داده شده است.

با توجه به شکل (۱۵) مشاهده می‌شود که برای یک مدل المان محدود سیستم محیط پیوسته نیز پاسخ‌های متفاوتی به دست آمده است. با توجه به اینکه روش نیومارک از انتگرال‌گیری مستقیم استفاده می‌کند و تأثیر فرکانس‌های مرتبه بالاتر در این قسمت مطرح نیست بلکه دلیل اصلی تفاوت در



شکل ۱۳- پاسخ گره ۱ به بار هارمونیک سد پایین فلت میرا برای روش‌های نیومارک و PIMS



شکل ۱۴- مؤلفه افقی زلزله طیس اعمال شده به مدل المان محدود

#### ۴- بحث و نتیجه‌گیری

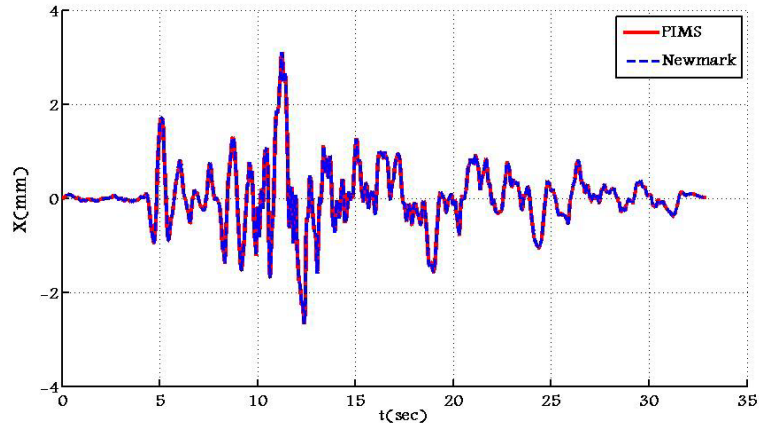
است.

- روش PIM با اثر بازخورد دارای پایداری نامشروط بوده و شعاع طیفی آن برای  $N$ های مختلف همواره کوچکتر از یک است. با محاسبه بازخورد مقدار شعاع طیفی اصلاح شده به‌ازای تمام مقادیر  $N$  و در تمام حالات  $dt/T$  پایدار خواهد بود.
- روش‌های مرتبه اول برای  $N=2$  دارای خطای کشیدگی دوره تناوب است و به‌ازای  $N=4$  خطا بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. بنابراین، این روش قادر به محاسبه فرکانس سازه با دقت بالا است. خطای دامنه روش PIM

هدف مقاله به‌کارگیری روش تجزیه ماتریس حالت براساس مقادیر ویژه منفرد برای اصلاح آخرین روش مرتبه اول موجود در تحقیقات است. با به‌کارگیری روش معکوس‌سازی به‌کار گرفته شده در این مقاله مشکل روش موجود برطرف شد که در این مقاله PIMS نامیده می‌شود. با توجه مطالعات صورت گرفته نتایج حاصل این تحقیق به‌صورت زیر است.

- پایداری روش‌های مرتبه اول وابسته به تعداد جملات  $N$  برای تقریب ماتریس حالت است و مقادیر  $N$  تعیین‌کننده است به‌ازای  $N \geq 4$  روش PIM به‌صورت نامشروط پایدار





شکل ۱۵- پاسخ درجه آزادی افقی گره اول به زلزله طبس

می‌شود. بنابراین در بین روش‌های موجود روش پیشنهادی است که توانایی مطلوبی در حذف فرکانس‌های مراتب بالا دارد.

- به نظر می‌رسد در سازه‌های محیط پیوسته مانند سدها، دیوارهای حائل که مودهای مرتبه بالا نیز وارد محاسبات می‌شود، روش پیشنهادی با فیلتر کردن مودهای مراتب بالا پاسخ دقیق‌تری به دست می‌دهد.
- با توجه به اینکه روش نیومارک از روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی استفاده می‌کند و فرکانس‌های ارتعاش در پاسخ‌های عددی حضور ندارند، دلیل اصلی اختلاف در پاسخ‌های روش‌های مرتبه اول و دوم بیشتر مربوط به خطای کاهش دامنه و کشیدگی دوره تناوب است.

نیز به‌ازای Nهای بزرگتر از ۴ بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است.

- منفرد بودن ماتریس حالت برای روش مرتبه اول تحقیقات پیشین، موجب بروز خطای بسیاری در محاسبات می‌شود. درحالی‌که با روش ارائه شده در این مقاله، خطاهای عددی در صورت منفرد بودن ماتریس ناچیز است.
- در روش شتاب متوسط نیومارک فرکانس جعلی موجب جهش غیرواقعی در پاسخ‌ها در حالت تشدید است. درحالی‌که نتایج نشان می‌دهد روش پیشنهادی دارای فرکانس جعلی نیست.
- در سازه‌های چند درجه آزادی روش پیشنهادی به‌خوبی توانسته است اثر مودهای بالاتر را حذف کند. زیرا وجود مودهای بالاتر منجر به اعمال میرایی جعلی در سیستم می‌شود. در حالی‌که در تمام زمان‌های تحلیل دینامیکی، مشکل اثر فرکانس جعلی در پاسخ روش نیومارک دیده

## واژه‌نامه

1. higher precision direct integration with linear loading form (HPD-L)
2. higher precision direct integration with Fourier expansion of loading form (HPD-F)
3. precise integration method (PIM)
4. precise time step integration method (PTSIM)
5. no inverse matrix calculation in precise integration method
6. singular value decomposition
7. observability
8. controllability
9. linear time invariant
10. precise time step integration method with singular value decomposition (PIMS)
11. pine flat dam

1. Hart, G. C., and Wong, K., *Structural Dynamic for Structural Engineering*, John Wily & Sons, New York, 1975.
2. Bathe, K. J., and Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, New York, 1976.
3. Wood, W. L., *Practical Time-Stepping Schemes*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
4. Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1978.
5. Dokainish, M. A., and Subbaraj, K., "A Survey of Direct Time Integration Methods in Computational Structural Dynamics. II. Implicit methods", *Computer & Structures*, Vol. 32, No. 6, pp. 1387-1401, 1989.
6. Zhong, W. X., and Williams, F. W., "A Precise Time Step Integration Method". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 208, No. 6, pp. 427-430, 1994.
7. Shen, W., Lin, J., and Williams, F. W., "Parallel Computing for High Precision Direct Integration Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 26, pp. 315-331, 1995.
8. Yuanxian, G., Biaosong, C., and Hongwu, Z. "Precise Time-Integration with Dimension Expanding Method", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 32, No. 4, pp. 447, 2000.
9. Wang, M., and Zhou, X., "Modified Precise Time Step Integration Method of Structural Dynamic Analysis", *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 4, No. 2, pp. 287-293, 2005.
10. Wang, M., and Au, F. T. K., "Assessment and Improvement of Precise Time Step Integration Method", *Computer & Structures*, Vol. 84, No. 12, pp. 779-786, 2006.
11. Wu, C. L., and Chuang, C. C., "Application of an Innovative Precise Integration Method in Solving Equilibrium Equation of Motion for Structural Dynamic Problems", *15<sup>th</sup> World Congress of Earthquake Engineering (15WCEE)*, Lisbon, Portugal, 2012.
12. Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, New York, 1999.
13. Molar, C., and Loan, C. V., "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-five Years Later", *SIAM Review*, Vol. 45, No. 1, pp. 1-46, 2003.
14. Drof, C. T., and Bishop, R. H., *Modern Control System Solution Manual*, Prentice Hall, New Jersey, 2008.
15. Franklin, G. F., Da Powell, J., and Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, Vol. 3. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
16. Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamic of Structure*, McGraw-Hill, New York, 1975.
17. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 2006.
18. Wood, W. L., "Numerical Integration of Structural Dynamics Equations Including Natural Damping and Periodic Forcing Terms", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 281-289, 1981.
19. Penry, S. N., and Wood, W. L., "Comparison of Some Single-Step Methods for Numerical Solution of the Structural Dynamics Equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 11, pp. 1941-1955, 1985.
20. Preumont, A., "Frequency Domain Analysis of Time Integration Operator", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 10, No. 5, PP. 691-697, 1982.
21. Paultre, P., *Dynamics of Structure*, John Wiley & Sons, New York, 2006.
22. Menun, C., "A Response-Spectrum-Based Envelop for Mohr's Circle", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 32, pp. 1917-1935, 2003.