

## یک روش جدید برای حل معادلات انتقال جرم و حرارت نانوسیال ویسکوالاستیک با کمک بهینه‌سازی هوشمند

امین‌رضا نقره‌آبادی<sup>۱</sup>، رضا میرزایی<sup>۱</sup> و محمد قلم‌باز<sup>۲\*</sup>

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

۲. دانشکده مهندسی مکانیک، واحد دزفول، دانشگاه آزاد اسلامی، دزفول

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱/۲۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۷/۱۶)

**چکیده** - رفتار بسیاری از سیالات را می‌توان با معادلات دیفرانسیل بیان کرد. راه‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل وجود دارد که شامل روش‌های تحلیلی و عددی می‌شود. با این وجود حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه بالای بد وضع هنوز یک چالش اساسی به‌شمار می‌آید. معادلات دیفرانسیل حاکم بر نانوسیالات ویسکوالاستیک در مرزهای سیستم به‌طور عمومی بد وضع بوده و حل عددی آنها با چالش‌های جدی مواجه است. از طرفی وجود نانوذرات در ابعاد بسیار ریز (زیر ۱۰۰ نانومتر) باعث ایجاد پدیده‌های انتقال حرارت و جرم جدید شده که بر پیچیدگی رفتار نانوسیالات ویسکوالاستیک می‌افزاید. بنابراین، ایجاد و یا گسترش روش‌های تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات حاکم بر این نوع نانوسیالات امری ضروری است. در پژوهش حاضر، در یک ایده جدید و با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی هوشمند، روش جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر نانوسیالات ویسکوالاستیک ارائه شده است. با استفاده از بهینه‌سازی هوشمند سعی بر آن است تا با تغییر یک ایده ابتدایی به‌سوی جواب بهینه حرکت کرد که هم معادلات حاکم و هم شرایط مرزی را به‌خوبی ارضا کند. نتایج به‌دست آمده حاکی از توانایی و دقت بسیار خوب روش ارائه شده در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالای حاکم بر نانوسیالات ویسکوالاستیک است.

واژه‌های کلیدی: نانوسیال ویسکوالاستیک، معادلات تشابهی، روش حل عددی، الگوریتم بهینه‌سازی، شبکه عصبی.

## A New Approach for Solving Heat and Mass Transfer Equations of Viscoelastic Nanofluids using Artificial Optimization Method

A. Noghrehabadi<sup>1</sup>, R. Mirzaei<sup>1</sup> and M. Ghalambaz<sup>2\*</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.

2. Department of Mechanical Engineering, Dezful Branch, Islamic Azad University, Dezful, Iran.

**Abstract:** The behavior of many types of fluids can be simulated using differential equations. There are many approaches to

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m.ghalambaz@iaud.ac.ir

solve differential equations, including analytical and numerical methods. However, solving an ill-posed high-order differential equation is still a major challenge. Generally, the governing differential equations of a viscoelastic nanofluid are ill-posed; hence, their solution is a challenging task. In addition, the presence of very tiny nanoparticles (lower than 100 nm) induces new heat and mass transfer mechanisms which can increase the complexity of the behavior of the viscoelastic nanofluids. Therefore, creating or developing new analytical or semi-analytical approaches to solve the governing equations of these types of nanofluids is highly demanded. In the present study, by using a new idea and utilizing an optimization approach, a new solution approach has been presented to solve the governing equations of viscoelastic nanofluids. By using the optimization method, a basic initial guess was changed toward an optimized solution satisfying all boundary conditions and the governing equations. The results indicate the robustness and accuracy of the presented method in dealing with the high-order ill-posed governing differential equations of viscoelastic nanofluids.

**Keywords:** Viscoelastic nanofluid, Similarity solution, Numerical approach, Optimization method, Neural network.

## فهرست علائم

سرعت سیال دور از دیوار	$U_{\infty}$	غلظت	C
مؤلفه سرعت در راستای محور $y$	$v$	غلظت دیواره	$C_w$
ضریب نفوذ حرارتی	$\alpha$	غلظت سیال دور از دیواره	$C_{\infty}$
متغیر تشابهی	$\eta$	ضریب نفوذ براونی	$D_B$
دمای بی بعد	$\theta$	ضریب نفوذ ترموفریسیس	$D_T$
دمای بی بعد دیواره	$\theta_w$	عدد ویزنبرگ (پارامتر ویسکوالاستیک)	K
دمای بی بعد سیال دور از دیواره	$\theta_{\infty}$	عدد لوئیس	Le
ویسکوزیته دینامیکی	$\mu$	پارامتر حرکت براونی	$N_b$
ویسکوزیته سینماتیکی	$\nu$	پارامتر ترموفریسیس	$N_t$
چگالی	$\rho$	عدد ناسلت	Nu
چگالی ذرات نانو	$\rho_p$	عدد ناسلت کاهش یافته	Nur
چگالی سیال پایه	$\rho_f$	عدد پراتل	Pr
ظرفیت حرارتی سیال پایه	$(\rho C)_f$	عدد رینولدز	Re
ظرفیت حرارتی نانوذرات	$(\rho C)_p$	عدد شروود	Sh
تنش برشی دیواره	$\tau_w$	عدد شروود کاهش یافته	$Sh_r$
غلظت بی بعد	$\varphi$	دما	T
غلظت بی بعد دیواره	$\varphi_w$	دمای دیواره	$T_w$
غلظت بی بعد سیال دور از دیواره	$\varphi_{\infty}$	دمای سیال دور از دیوار	$T_{\infty}$
		مؤلفه سرعت در راستای محور $x$	u

## ۱- مقدمه

این میان، با توجه به اینکه انتقال حرارت در نانوسیالها نسبت به سیالات متداول بیشتر است، افزایش انتقال حرارت نانوسیالات غیرنیوتنی و به خصوص سیالات ویسکوالاستیک مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است [۱ و ۲]. سیال نیوتنی، ماده‌ای است که در آن تنش برشی تنها تابعی

با توجه به کاربردهای متنوع سیالات غیرنیوتنی در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله روغن کاری، غلتک کاری و عملیات اکستروژن پلاستیک، توجه بسیاری از پژوهشگران به جریان و انتقال حرارت این سیالات جلب شده است [۱]. در

خطی از نرخ کرنش برشی است. بر این اساس، سیال غیرنیوتنی را می‌توان به‌سادگی به‌عنوان سیالی که فاقد رفتار نیوتنی است، تعریف کرد. یکی از انواع سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که هم خاصیت ویسکوز و هم خاصیت الاستیک را همزمان دارا هستند. سیالات ویسکوالاستیک نقش بسیار مهمی در شیمی، بیوشیمی و صنایع غذایی ایفا می‌کنند. همچنین از جمله کاربردهای جریان سیال ویسکوالاستیک می‌توان به خطوط انتقال این مواد در صنایع نفت و پتروشیمی، صنایع تولید مواد غذایی، تولید مواد شیمیایی و شوینده، تزریق مواد پلیمری، خنک‌کاری تیغه‌های توربین و نظایر آن اشاره کرد [۱-۳].

رفتار بسیاری از سیالات را می‌توان با معادلات دیفرانسیل بیان کرد. راه‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل به‌وجود آمده است که شامل روش‌های تحلیلی و عددی می‌شود. متأسفانه برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل، یافتن یک حل تحلیلی و دقیق کار ساده‌ای نیست و یا غیرممکن است که اغلب به‌دلیل غیرخطی بودن معادلات است.

معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت نانوسیالات ویسکوالاستیک از نوع معادلات دیفرانسیل غیرخطی است و این معادلات در مرزهای سیستم به‌طور عمومی بد وضع بوده و حل آنها با چالش‌های جدی مواجه است. در این معادلات، جمله مربوط به بالاترین مشتق در معادله دیفرانسیل در شرط مرزی صفر می‌شود. در این حالت استفاده از روش‌های عددی یا تحلیلی متداول، امکان‌پذیر نیست. بنابراین نیاز به روش‌هایی است که بتوان معادلات حاکم بر این سیالات را حل کرد.

چندین روش برای حل مسائل غیرخطی به‌دست آمده است که می‌توان به‌عنوان مثال به روش اغتشاشات<sup>۱</sup> [۴]، روش آنالیز هموتوپی (HAM) [۵] و روش تجزیه آدامین (ADM) [۶] اشاره کرد. عیب اصلی روش اغتشاشات این است که این روش به‌طور ذاتی بر اساس وجود پارامترهای کوچک و بزرگ موجود در مسئله که به مقادیر اغتشاشات معروف هستند، استوار است و غیرممکن است که تمام مسائل غیرخطی، دارای چنین مقادیر اغتشاشاتی باشد و همچنین این روش برای

مواردی کاربرد دارد که غیرخطی بودن معادله ضعیف است. در روش آدامین نیز تقریب‌هایی که انجام می‌شود در مواقعی دارای چند جمله توانی است. با توجه به اینکه ناحیه همگرایی سری‌های توانی معمولاً کوچک است؛ بنابراین به‌روش‌های تسریع‌دهنده نیاز است تا ناحیه همگرایی را بیشتر و بزرگ‌تر کند. بدین ترتیب، روش تجزیه آدامین به‌تنهایی نمی‌تواند یک روش ساده برای حل مسائل ارائه دهد. مهم‌ترین عیب روش آنالیز هموتوپی این است که این روش بسیار به انتخاب پارامتر کنترل‌کننده همگرایی<sup>۲</sup> (h) وابسته است. در صورت انتخاب نادرست پارامتر h، ممکن است جواب واگرا شود. به‌علاوه، برای رسیدن به جواب مناسب نیاز به تعداد بسیار زیادی جمله تحلیلی است.

در سال‌های اخیر تعدادی از پژوهشگران به بررسی معادلات نانوسیالات نیوتنی و سیالات ویسکوالاستیک در لایه مرزی پرداخته‌اند [۷-۱۰]. صادقی و شریفی [۱۱]، حل تشابهی معادلات لایه مرزی برای یک سیال ویسکوالاستیک از نوع مرتبه دوم در جریان بالای یک صفحه متحرک را ارائه دادند. کورتل [۱۲]، حل جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک را روی صفحه افقی نیمه بی‌نهایت متحرک مورد بررسی قرار داد. یکی از مهم‌ترین نتایج کورتل این بود که در یک عدد ویسکوالاستیک (K) مشخص (به‌طور تقریبی برابر با یک)، تغییراتی در رفتار سیال رخ می‌دهد که آن را عدد ویسکوالاستیک بحرانی (K<sub>c</sub>) می‌نامند. موناوار و همکاران [۱۳] توضیحی بر مطالعه قبل نوشتند. آنها اثبات کردند که معادله حاکم جریان استخراج شده توسط صادقی و شریفی که در مطالعه کورتل نیز استفاده شده است، اشتباه است و معادله صحیح را ارائه کرده‌اند و سپس آن را به روش آنالیز هوتوپی حل کرده‌اند. یکی از نتایج مهم حل آنها این بود که با تصحیح معادله حاکم، در  $K \approx 1$  تغییر زیادی در رفتار سیال رخ نمی‌دهد و در نتیجه عدد ویسکوالاستیک بحرانی وجود ندارد. مدنی تنکابنی و همکاران [۱۴] نیز جریان سیال ویسکوالاستیک در لایه مرزی را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حاکم نیز به‌روش تفاضل محدود پیش‌بینی‌کننده-

تصحیح‌کننده مرتبه چهار حل شده است.

اصطلاح نانوسیال توسط چون و ایستمن [۱۵] رایج شد و به نوع جدیدی از سیال گفته می‌شود که در آن ذرات فلزی یا غیرفلزی با اندازه کوچک‌تر از ۱۰۰ نانومتر در سیال پایه معلق شده باشد. افزایش خواص مکانیکی سیال حاصل مانند ضریب هدایت حرارتی، ویسکوزیته سیال و ضریب انتقال حرارت، از خواص منحصر به فرد این نوع سیال‌ها نسبت به سیال پایه است [۱۶]. بونجورنو [۱۷] با انجام آزمایش‌های مختلف، مکانیزم‌های مختلف انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیالات را مورد بررسی قرار داد. او به این نتیجه رسید که افزایش زیاد انتقال حرارت در نانوسیالات به‌طور عمده ناشی از حرکت براونی ذرات و اثر ترموفریسیس است. قابل ذکر است که اثر ترموفریسیس به‌صورت نیرویی که بر خلاف گرادیان دما بر ذرات موجود در محلول وارد می‌شود، تعریف می‌شود.

شبکه‌های عصبی مصنوعی، سیستم‌ها و روش‌های محاسباتی نوینی برای یادگیری ماشینی و اعمال آن برای پیش‌بینی پاسخ‌های خروجی از سامانه‌های پیچیده هستند. شبکه‌های عصبی مصنوعی در تخمین و تقریب توابع کارایی بسیار بالایی از خود نشان داده‌اند [۱۸].

به‌تازگی، روش‌های مصنوعی جدیدی ارائه شده است که می‌توان به کمک آنها معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مهندسی را حل کرد. مید و فرناندز [۱۹] و همچنین لاگاریس و همکاران [۲۰]، با اعمال شبکه عصبی به حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی پرداختند. مالک و شکاری بیدختی [۲۱] برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا، ترکیبی از شبکه عصبی و روش‌های بهینه‌سازی هوشمند را به کار بردند. آنها با استفاده از شبکه عصبی و روش بهینه‌سازی نلدر-مید معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا را حل کردند. روش ترکیبی شبکه عصبی و بهینه‌سازی هوشمند تاکنون در حل معادلات غیرخطی و مرتبه بالای حاکم بر نانوسویچ‌ها [۲۲]، پیچش نانولوله‌های کربنی [۲۳]، همرفت طبیعی سیال دارسی در نزدیکی یک مخروط [۲۴]، حرکت پاندول ساده [۲۵]، حل معادله وزینگر [۲۶] و

حل معادله بلازیوس [۲۷-۲۹] با موفقیت استفاده شده است. در تمامی کارهای گفته‌شده تا به حال روش شبکه عصبی-بهینه‌سازی هوشمند برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه بالا مورد استفاده قرار گرفته است.

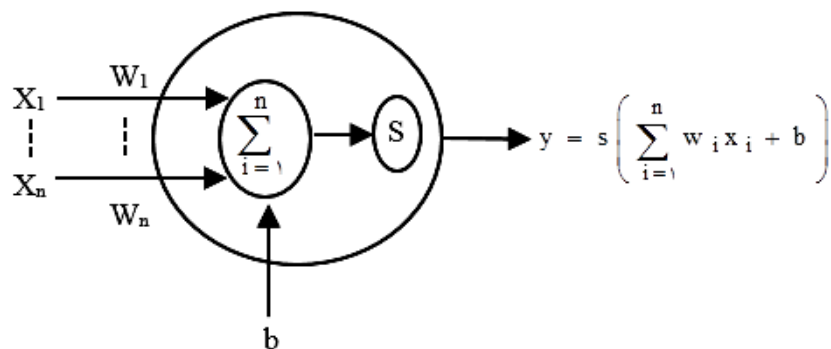
در پژوهش حاضر، در یک ایده جدید معادلات دیفرانسیل غیرخطی و بد وضع ممتوم، انرژی و بقای جرم نانوذرات در یک نانوسیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس برای اولین بار در جهان با استفاده از روش ترکیبی شبکه عصبی مصنوعی-بهینه‌سازی هوشمند برای یک دسته معادله بد وضع مرتبه بالا حل می‌شوند. روش ترکیبی شبکه عصبی-بهینه‌سازی هوشمند، مشکلات و محدودیت‌های روش‌های قبل را برطرف می‌کند. این روش برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه بالای بد وضع دیگر نیز قابل استفاده است و نیازی به پارامترهای کوچک، خطی‌سازی یا استفاده از پارامتر کنترل‌کننده همگرایی ندارد.

## ۲- شبکه عصبی مصنوعی

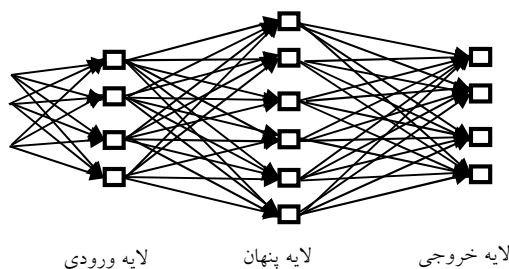
ایده اصلی این گونه شبکه‌ها از شیوه کارکرد سیستم عصبی زیستی الهام گرفته شده است. این سیستم از شمار بسیار زیادی عناصر پردازشی فوق‌العاده بهم‌پیوسته با نام نورون<sup>۳</sup> تشکیل شده است که هر نورون فقط یک دستور ساده را انجام می‌دهد [۱۸]. این ساختار که در سال ۱۹۶۲ میلادی توسط روزنبلات معرفی شد [۳۰]، در تخمین<sup>۴</sup> و تقریب<sup>۵</sup> توابع، کارایی بسیار بالایی از خود نشان داده است [۳۱]. شکل (۱) ساختار یک شبکه عصبی مصنوعی را نشان می‌دهد.

در شبکه‌های عصبی چند لایه، لایه ورودی اطلاعات را دریافت می‌کند، تعدادی لایه مخفی وجود دارد که اطلاعات را از لایه‌های قبلی می‌گیرند و در نهایت لایه خروجی نتیجه محاسبات را نشان می‌دهد. شکل (۲) نمونه‌ای از شبکه عصبی چند لایه را نشان می‌دهد.

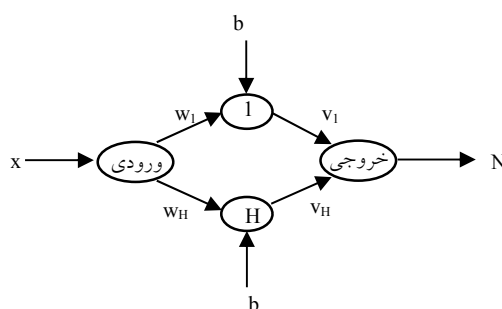
یکی از فاکتورهای مهم در شبکه عصبی، نحوه چیدمان شبکه است. یکی از ساده‌ترین و در عین حال کارآمدترین



شکل ۱- ساختار یک شبکه عصبی مصنوعی



شکل ۲- شبکه‌های عصبی چند لایه



شکل ۳- شبکه عصبی با سه لایه

دقت تقریب توابع به تعداد لایه‌های پنهان شبکه بستگی ندارد، بلکه به طور کامل به تعداد نورون‌های لایه پنهان وابسته است. شکل (۳)، شبکه عصبی با سه لایه (لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی)، یک ورودی (x)، یک لایه پنهان با H نورون و یک خروجی  $N(x, \bar{p})$  را نشان می‌دهد. در یک پرسپترون، خروجی برابر با  $N = \sum_{i=1}^H v_i s(z_i)$  است که  $z_i = w_i x + b_i$ ،  $w_i$ ،  $b_i$  و  $v_i$  ضرایب تنظیم شبکه عصبی هستند و s نیز یک تابع

چیدمان‌های شبکه عصبی، مدل پرسپترون چندلایه<sup>۶</sup> یا به اختصار MLP است که جزو شبکه‌های پیشرو<sup>۷</sup> به‌شمار می‌آید و از یک لایه ورودی، یک یا چند لایه پنهان و یک لایه خروجی تشکیل شده است [۱۸].

مهم‌ترین کاربرد شبکه‌های عصبی چند لایه، قابلیت آنها در تقریب توابع است. طبق قضیه کولموگوروف [۳۲]، می‌توان به کمک یک پرسپترون سه لایه با  $n(2n+1)$  گره، هر تابع پیوسته‌ای با n متغیر را تقریب زد. بنابراین، می‌توان بیان کرد که

اختیاری است.

جمعیت،  $T_1$  و  $T_2$  اعداد تصادفی بین [۰-۱] هستند که باعث می‌شوند روش حل از روش قطعی خارج شود،  $c_1$  و  $c_2$  ضرایب مثبت ثابتی به نام ضرایب شتاب هستند که سهم بخش‌های مربوط به اطلاعات شخصی و اطلاعات اجتماعی را مشخص می‌کنند. با فرض تغییر زمانی به اندازه واحد، موقعیت هر ذره در هر مرحله با اضافه کردن بردار سرعت به بردار موقعیت به‌روز می‌شود:

$$\bar{Z}_i = \bar{Z}_i + \bar{v}_i \quad (2)$$

از جمله پارامترهای مهم در الگوریتم PSO می‌توان به ضریب وزن  $\omega$ ، ماکزیمم تعداد تکرار ( $t$ ) و جمعیت اولیه ( $n$ ) اشاره کرد.

#### ۴- معادلات حاکم

در بیشتر موارد، معادلات اساسی سیالات ویسکوالاستیک به‌قدری پیچیده هستند که نمی‌توان از آنها در یک تحلیل تئوریک استفاده کرد. از میان انواع مختلف مدل‌های موجود، می‌توان سیال مرتبه دو را جزء ساده‌ترین مدل‌ها به‌شمار آورد. یکی از ویژگی‌های مهم سیال مرتبه دوم این است که ویسکوزیته آن همچون یک سیال نیوتنی ثابت است و در نتیجه از اثرات پیچیده آن بر ویسکوزیته صرف‌نظر می‌شود [۱۱].

جریان دویعدی، پایا، غیرقابل تراکم و آرام یک نانوسیال ویسکوالاستیک روی یک صفحه تخت را در نظر بگیرید. در جریان بلازیوس فرض می‌شود که صفحه تخت ساکن است و سیال با سرعت ثابت  $U_\infty$  به‌طور موازی با صفحه در جریان است. محور  $x$  در راستای صفحه و محور  $y$  عمود بر آن در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود دما و غلظت صفحه ( $T_w$  و  $C_w$ ) یکنواخت و ثابت هستند و از مقدار دما و غلظت فاصله دور از صفحه ( $T_\infty$  و  $C_\infty$ ) بیشتر فرض می‌شوند. به‌علاوه، فرض می‌شود نانوسیال تک‌فاز است و ذرات نانو و سیال ویسکوالاستیک در تعادل حرارتی هستند. خواص ترموفیزیکی نانوسیال ثابت و گرادیان فشار و نیروهای خارجی ناچیز فرض می‌شود. با توجه به فرضیات بونجورنو، دو مکانیزم حرکت براونی و ترموفریسیس برای انتقال حرارت نانوسیال لحاظ می‌شود. با توجه به فرضیات ذکر شده،

در پژوهش حاضر، از شبکه پرسپترون چند لایه برای تشکیل یک مدل (تابعی با متغیرهای زیاد) از داده‌های ورودی استفاده می‌شود. در اینجا، منظور از آموزش شبکه عصبی، کمینه‌سازی تابع خطا است. بدین ترتیب، به شبکه عصبی امکان داده می‌شود تا از تئوری معادلات دیفرانسیل برای تشکیل یک تابع شامل متغیرهای تنظیم شبکه عصبی استفاده کند [۲۱]. با کمینه‌سازی این تابع، متغیرهای تنظیم بهینه برای پرسپترون مورد نظر حاصل می‌شود. می‌توان از این تابع تحلیلی برای محاسبه جواب معادله دیفرانسیل استفاده کرد.

#### ۳- الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)

روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات که بر اساس جستجوی جمعی عمل می‌کند و بر اساس رفتار اجتماعی گروهی از پرندگان شبیه‌سازی شده است، توسط کندی و ابرهارت [۳۳] ارائه شده است. در این روش، گروهی از ذرات در فضایی که احتمال وجود جواب در آن است، به جستجوی گروهی پرداخته و در حین جستجو به تبادل اطلاعات محلی خود با دیگر ذرات می‌پردازند. طبیعتاً این جستجوی گروهی به جوابی بهتر از جستجوی فردی می‌انجامد. در این روش، گروهی از ذرات تشکیل شده و سپس این ذرات در فضای پاسخ حرکت می‌کنند. با گذشت زمان، ذرات به سمت ذراتی که مقادیر مطلوب‌تری دارند، شتاب می‌گیرند [۱۸].

در PSO، هر ذره دارای یک موقعیت و یک سرعت است و حرکت آن ذره در فضای جستجو با توجه به اطلاعات شخصی (بهترین موقعیتی که ذره تاکنون به‌دست آورده است) و اطلاعات اجتماعی (بهترین موقعیتی که توسط ذرات دیگر به‌دست آمده است) تنظیم می‌شود. در PSO، هر ذره  $i$  دارای موقعیت  $Z_i$  و سرعت  $v_i$  است که در تکرار به‌روز می‌شود:

$$v_i = \omega v_i + c_1 r_{1i} (\bar{p}_i - \bar{Z}_i) + c_2 r_{2i} (\bar{p}_g - \bar{Z}_i) \quad (1)$$

که در آن  $\omega$  ضریب وزن،  $\bar{p}_i$  بهترین موقعیتی است که ذره تاکنون به‌دست آورده است،  $\bar{p}_g$  بهترین موقعیت موجود در کل

معادلات حاکم به صورت زیر خواهد بود [۳۴، ۳۵]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_s}{\rho} \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \nabla^2 T + \tau \left[ D_B \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_T}{T_\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

که در این روابط،  $u$  و  $v$  مؤلفه‌های سرعت در راستای  $x$  و  $y$ ، ویسکوزیته سینماتیکی،  $k_s$  پارامتر ویسکوالاستیک (عدد ویزنبرگ<sup>۸</sup>)،  $\rho_f$  چگالی سیال پایه،  $\rho_p$  چگالی ذرات نانو،  $\alpha_m$  ضریب نفوذ حرارتی،  $\tau = (\rho C)_p / (\rho C)_f$  ظرفیت حرارتی مؤثر ذرات نانو نسبت به ظرفیت حرارتی سیال پایه،  $C$  غلظت ذرات نانو و  $D_B$  و  $D_T$  ضریب نفوذ براونی و ضریب نفوذ ترموفورسیس هستند. متغیرهای تشابهی برای این مسئله به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۵]:

$$u = U_\infty f'(\eta), \quad \eta(x, y) = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} y,$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \phi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty} \quad (4)$$

در رابطه (۴)  $\eta$  متغیر تشابهی است. با ترکیب روابط (۳) و (۴)، معادلات حاکم به صورت زیر خواهد شد:

$$f'''' + \frac{1}{\gamma} f f'' + \frac{K}{\gamma} (ff'' + \gamma f f'' - f''^2) = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{\gamma} f \theta' + Nb \theta' \phi' + Nt \theta'' = 0$$

$$\phi'' + \frac{1}{\gamma} Le f \phi' + \frac{Nt}{Nb} \theta'' = 0 \quad (5)$$

که در آن  $f^{iv}$  مشتق مرتبه چهارم است. شرایط مرزی این معادلات در جریان بلازیوس نیز به صورت زیر است:

$$f = 0, f' = 0, \theta = 1, \phi = 1 \quad : \eta = 0$$

$$f' = 1, \theta = 0, \phi = 0 \quad : \eta \rightarrow \infty \quad (6)$$

که در آن علامت پریم معرف مشتق نسبت به  $\eta$  است و پارامترهای موجود به صورت زیر هستند:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_m}, \quad Le = \frac{\nu}{D_B}, \quad Nb = \frac{(\rho C)_p D_B (C_w - C_\infty)}{(\rho C)_f \nu},$$

$$Nt = \frac{(\rho C)_p D_T (T_w - T_\infty)}{(\rho C)_f T_\infty \nu} \quad (7)$$

که به ترتیب معرف عدد پرانتل، عدد لوئیس، پارامتر حرکت براونی و پارامتر ترموفورسیس هستند. مقدار تنش برشی روی دیواره و همچنین مقادیر عدد ناسلت و عدد شرود از جمله مقادیر مهم در تحلیل جریان و انتقال حرارت نانو سیالات است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۴]:

$$Nu = \frac{x q_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad Sh = \frac{x q_m}{D_B(C_w - C_\infty)} \quad (8)$$

که در این رابطه  $q_w$  و  $q_m$  به ترتیب شار حرارتی و شار جرمی روی دیواره و  $k$  ضریب رسانندگی حرارتی است. با استفاده از رابطه (۴) و به کارگیری متغیرهای تشابهی، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \mu_\infty U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(0), \quad Re_x^{-\frac{1}{2}} Nu_x = -\theta'(0),$$

$$Re_x^{-\frac{1}{2}} Sh_x = -\phi'(0) \quad (9)$$

قابل ذکر است که کوزنتسف و نیلد [۳۴]  $Re_x^{-\frac{1}{2}} Nu_x$  و  $Re_x^{-\frac{1}{2}} Sh_x$  را عدد ناسلت کاهیده<sup>۹</sup> ( $Nur = -\theta'(0)$ ) و عدد شرود کاهیده<sup>۱۰</sup> ( $Shr = -\phi'(0)$ ) نامیدند.

## ۵- روش حل

معادلات حاکم نانو سیال ویسکوالاستیک مرتبه دوم در جریان بلازیوس که در رابطه (۵) بیان شد را در نظر بگیرید. این معادله به همراه شرایط مرزی رابطه (۶) توسط روش ترکیبی شبکه عصبی - بهینه‌سازی هوشمند قابل حل است. در اینجا، به تبعیت از روش شبکه عصبی - بهینه‌سازی هوشمند [۲۱]، دامنه  $D$  مسئله با  $m=61$  نقطه با فاصله مساوی گسسته‌سازی می‌شود. در این صورت، مسئله به معادلات زیر تبدیل می‌شود:

شرایط مرزی نیز در رابطه (۶) ارائه شده است. فرض می‌شود  $\phi_T(\eta, \bar{p}_r)$  و  $\theta_T(\eta, \bar{p}_r)$ ،  $f_T(\eta, \bar{p}_r)$  جواب تقریبی معادلات بالا باشد. برای هر یک از معادلات بالا یک تابع حدس در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، معادله خطا برای هر یک از معادلات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_r(\bar{p}) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d^r f_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} + \frac{1}{\gamma} f_T(\eta_i, \bar{p}_r) \frac{d^r f_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} + \frac{K}{\gamma} \left( f_T(\eta_i, \bar{p}_r) \frac{d^r f_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} + \gamma \frac{df_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} \frac{d^r f_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} - \left( \frac{d^r f_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} \right)^2 \right) \right] = 0$$

$$E_r(\bar{p}) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{Pr} \frac{d^r \theta_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} + \frac{1}{\gamma} f_T(\eta_i, \bar{p}_r) \frac{d\theta_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} + Nb \frac{d\theta_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} \frac{d\phi_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} + Nt \left( \frac{d\theta_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} \right)^2 \right] = 0$$

$$E_r(\bar{p}) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d^r \phi_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} + \frac{Le}{\gamma} f_T(\eta_i, \bar{p}_r) \frac{d\phi_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta} + \frac{Nt}{Nb} \frac{d^r \theta_T(\eta_i, \bar{p}_r)}{d\eta^r} \right] = 0 \quad (11)$$

$$\phi_T = \theta_T = a_r \eta^r + a_\gamma \eta^\gamma - \left( \frac{1 + a_r b^r + a_\gamma b^\gamma}{b} \right) \eta + \eta(\eta - b) N(\eta, \bar{p}_r) \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)،  $a$  پارامتر تنظیم جواب حدس تابع جریان،  $a_1$  و  $a_2$  پارامترهای تنظیم جواب حدس تابع دما و  $a_3$  و  $a_4$  پارامترهای تنظیم جواب حدس تابع غلظت هستند و به کمک بهینه‌سازی تعیین می‌شوند.  $N(\eta, \bar{p}_r)$ ،  $N(\eta, \bar{p}_r)$  و  $N(\eta, \bar{p}_r)$  نیز معرف شبکه عصبی پرسپترون سه لایه هستند که شامل پارامترهای تنظیم شبکه عصبی هستند، به صورتی که:

$$N(\eta, \bar{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{1 + \exp(v_i + b_i)} \quad (13)$$

رابطه (۱۳) تمامی شرایط مرزی مسئله در جریان بلازیوس (رابطه ۶) را کاملاً ارضا می‌کند. سپس با اعمال یک روش بهینه‌سازی می‌توان پارامترهای تنظیم را به دست آورد. در این پژوهش از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات استفاده شده است.

$$f'''(\eta) + \frac{1}{\gamma} f(\eta) f''(\eta) + \frac{K}{\gamma} \left( f(\eta) f^{iv}(\eta) + \gamma f'(\eta) f'''(\eta) - f''^2(\eta) \right) = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \theta''(\eta) + \frac{1}{\gamma} f(\eta) \theta'(\eta) + Nb \theta'(\eta) \phi'(\eta) + Nt \theta''(\eta) = 0$$

$$\phi''(\eta) + \frac{1}{\gamma} Le f(\eta) \phi'(\eta) + \frac{Nt}{Nb} \theta''(\eta) = 0 \quad (10)$$

برای تبدیل معادله حاکم به مسئله بهینه‌سازی نامقید، جواب حدس به صورت مجموعی از دو قسمت در نظر گرفته می‌شود. قسمت اول جواب آزمایشی شرایط مرزی / اولیه را ارضا می‌کند. قسمت دوم این جواب، شامل پارامترهای تنظیم شبکه عصبی است که با بهینه‌سازی به دست می‌آیند. به منظور محاسبه تابع خطا، به مشتقات جواب آزمایشی نسبت به  $\eta$  نیاز است. از میان توابع مختلفی که در شبکه‌های عصبی به کار برده می‌شود، از تابع تبدیل سیگموئید  $(1/(1+\exp(-\eta)))$  در این پژوهش استفاده شده است. با توجه به شرایط مرزی مسئله در جریان بلازیوس که در رابطه (۶) ارائه شد، جواب‌های حدس به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f_T = a_r \eta^r + \left( \frac{1 - \gamma a_r b^r}{\gamma b} \right) \eta^\gamma + \eta^\gamma (\eta - b) N(\eta, \bar{p}_r)$$

$$\theta_T = a_r \eta^r + a_\gamma \eta^\gamma - \left( \frac{1 + a_r b^r + a_\gamma b^\gamma}{b} \right) \eta + \eta(\eta - b) N(\eta, \bar{p}_r)$$



جدول ۱- پارامترهای تنظیم شبکه عصبی برای تابع جریان نانوسیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس

شاخص i	W <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	V <sub>i</sub>
۱	-۰/۴۶۴۹	-۵/۵۵۲۱	۰/۵۲۱۸
۲	۰/۲۹۲۰	۱/۰۷۹۰	-۰/۳۹۴۸
۳	-۰/۰۰۲۰	-۰/۴۰۶۰	-۰/۱۲۸۶
۴	۰/۲۸۰۷	۱/۲۳۴۶	۰/۴۶۵۹
۵	۰/۰۱۱۳	-۱/۳۵۳۲	-۰/۰۸۶۰

## ۶- نتایج و بحث

الگوریتم روش ترکیبی شبکه عصبی - بهینه‌سازی هوشمند در قالب چند زیربرنامه جداگانه شامل زیربرنامه محاسبه مقدار توابع شبکه، زیربرنامه محاسبه خطا و زیربرنامه بهینه‌سازی هوشمند در محیط نرم‌افزار متلب ۲۰۰۹ کدنویسی شد. سپس، با استفاده از تابع خطا برای  $H=5$  نوروں در لایه پنهان شبکه عصبی و برای  $m=61$  نقطه هم‌فاصله در بازه حل مسئله، آموزش داده شد. مقدار بی‌نهایت فیزیکی که در روابط با  $b$  نشان داده شده است، به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شده است تا شرایط مرزی ارضا شود ( $b=6$ ). در مسئله حاضر، پارامترهای جمعیت اولیه، ۱۵۰، ضریب وزنی، ۰/۹، فاکتور شتاب، ۲/۵ و ماکزیمم تعداد تکرار، ۱۵۰ برای بهینه‌سازی ازدحام ذرات به کار برده شده‌اند. تابع خطا (رابطه ۱۱) برای مقادیر  $K=0/8$ ،  $Le = Pr = 10$  و

$Nt = Nb = 0/1$  حل شده است و پارامترهای تنظیم شبکه عصبی به دست آمده از بهینه‌سازی تابع خطا (ضرایب برای رابطه ۱۲) در جدول (۱) نشان داده شده است. این جدول پارامترهای شبکه عصبی که توسط روش بهینه‌سازی محاسبه شده را نشان می‌دهد. با قراردادن این مقادیر در رابطه (۱۳) و سپس در رابطه (۱۲)، پاسخ تحلیلی مسئله به دست می‌آید.

پارامتر تنظیم جواب حدس تابع جریان (پارامتر  $a$ )  $a_0 = -0/0065$ ، پارامترهای تنظیم جواب حدس تابع دما (پارامتر  $a_1$  و  $a_2$ )  $a_1 = 0/0052$  و  $a_2 = -0/0741$  و پارامترهای تنظیم جواب حدس تابع غلظت (پارامتر  $a_3$  و  $a_4$ )  $a_3 = 0/0298$  و  $a_4 = 0/05648$  به دست آمده است. مقادیر خطا نیز  $E_1(\bar{p}) = 1/28 \times 10^{-3}$ ،  $E_2(\bar{p}) = 3/83 \times 10^{-2}$  و  $E_3(\bar{p}) = 1/10 \times 10^{-2}$  حاصل شده است. با جای‌گذاری پارامترهای شبکه در رابطه (۱۲)، تابع جریان به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$y_T(\eta, \bar{p}_1) = -0/0065\eta^3 + 0/1418\eta^2 + \eta^2(\eta-6)^2 \left( \frac{0/5218}{1+e^{0/4649\eta+5/5521}} + \frac{-0/3948}{1+e^{-0/2920\eta-1/0790}} + \frac{-0/1286}{1+e^{0/0020\eta+0/4060}} + \frac{0/4659}{1+e^{-0/2807\eta-1/2346}} + \frac{-0/0860}{1+e^{-0/0113\eta+1/3532}} \right) \quad (14)$$

نوروں در جدول (۲) نشان داده شده است. با افزایش تعداد نوروں لایه پنهان شبکه عصبی از سه نوروں به پنج نوروں، نتایج بهتری حاصل می‌شود.

جدول (۳) نتایج حل معادله با استفاده از روش تفاضل محدود پیش‌بینی‌کننده - تصحیح‌کننده مرتبه چهار [۱۴] و روش

قابل ذکر است که معادلات جریان و غلظت نیز به کمک روش ترکیبی حل شده است و با توجه به پارامترهای تنظیم شبکه عصبی حاصل شده، تابع دما و غلظت حاصل می‌شود.

نتایج حل جریان بلازیوس سیال ویسکوالاستیک با استفاده از روش شبکه عصبی - بهینه‌سازی هوشمند به‌زای سه، چهار و پنج

جدول ۲- مقایسه نتایج حل جریان بلازیوس سیال ویسکوالاستیک با استفاده از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات به‌ازای سه، چهار و پنج نورون

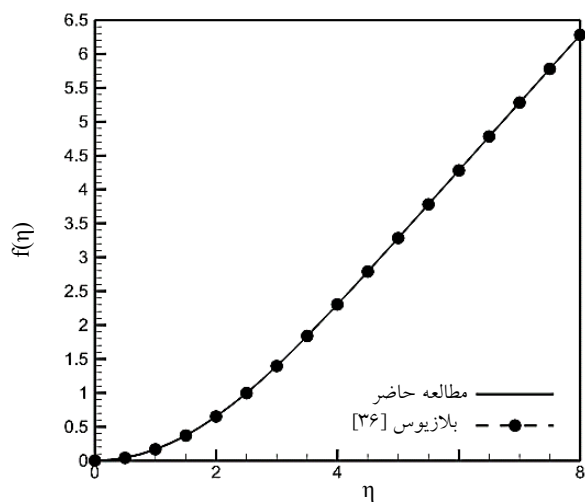
عدد ویزنبرگ (K)	f'(0)		
	روش ترکیبی شبکه عصبی - بهینه‌سازی ازدحام ذرات	روش تفاضل محدود پیش‌بینی‌کننده - تصحیح‌کننده	
	سه نورون	چهار نورون	پنج نورون
0/0	0/33428	0/33354	0/33265
0/4	0/26411	0/26530	0/26604
0/8	0/21670	0/21881	0/22100
1/2	0/19014	0/19129	0/19173
1/6	0/17290	0/17242	0/17207
2/0	0/15788	0/15783	0/15778

جدول ۳- نتایج حل معادله جریان بلازیوس سیال ویسکوالاستیک

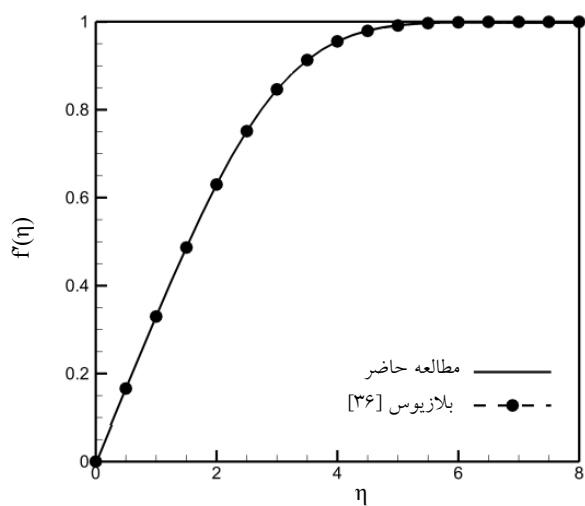
عدد ویزنبرگ (K)	f''(0)		خطا (%)
	روش تفاضل محدود پیش‌بینی‌کننده - تصحیح‌کننده	روش ترکیبی شبکه عصبی - بهینه‌سازی ازدحام ذرات	
0/0	0/33205	0/33265	0/18
0/2	0/29707	0/29669	0/12
0/4	0/26832	0/26604	0/84
0/6	0/24440	0/24091	1/43
0/8	0/22446	0/22100	1/54
1/0	0/20688	0/20471	1/04
1/2	0/19237	0/19173	0/33
1/4	0/18043	0/18101	0/32
1/6	0/16982	0/17207	1/32
1/8	0/15988	0/16440	2/82
2/0	0/15057	0/15778	4/78

نتایج ارائه شده در جدول (۳)، مشخص است که در جریان بلازیوس با افزایش الاستیسیت سیال (افزایش K)، مقدار  $f''(0)$  و در نتیجه مقدار تنش برشی روی دیواره کاهش می‌یابد. این مقایسه در شکل‌های (۴) تا (۶) نیز انجام شده است. شکل (۴) نتایج به‌دست آمده  $f$ ، شکل (۵) نتایج به‌دست آمده  $f'$  و شکل (۶) نتایج به‌دست آمده  $f''$  از حل بلازیوس و حل روش ترکیبی را نشان می‌دهد.

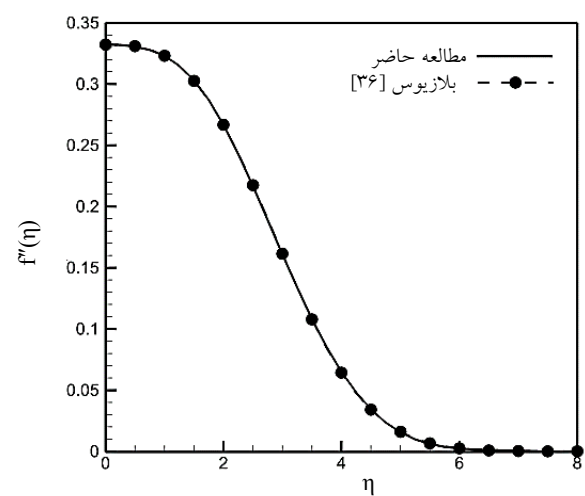
شبکه عصبی - بهینه‌سازی هوشمند (پنج نورون) را نشان می‌دهد. نتایج حاکی از دقت بسیار خوب روش بهینه‌سازی هوشمند در حل معادلات دیفرانسیل است. با توجه به نتایج ارائه شده، مشخص است که روش ترکیبی ارائه شده دقت بسیار بالایی در حل معادلات دیفرانسیل دارد. به‌علاوه، مزیت این روش نسبت به روش عددی در این است که این روش یک تابع برای جواب معادله ارائه می‌دهد. با توجه به



شکل ۴- مقایسه نتایج به دست آمده  $f$  از حل بلازیوس و حل روش ترکیبی



شکل ۵- مقایسه نتایج به دست آمده  $f'$  از حل بلازیوس و حل روش ترکیبی



شکل ۶- مقایسه نتایج به دست آمده  $f''$  از حل بلازیوس و حل روش ترکیبی

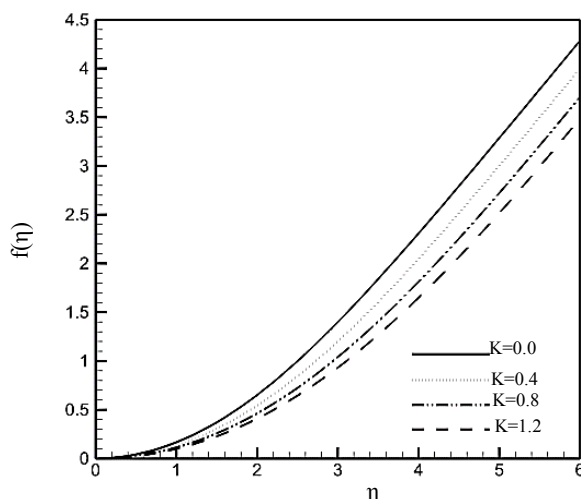
جدول ۴- مقایسه نتایج حل بلازیوس و روش ترکیبی شبکه عصبی- بهینه‌سازی هوشمند در جریان بلازیوس برای  $K=0$

روش ترکیبی شبکه عصبی- بهینه‌سازی			حل بلازیوس [۳۶]			$\eta$
f	f'	f''	f	f'	f''	
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۳۳۲۶۵۱	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۳۳۲۰۶۰	۰/۰۰
۰/۰۱۰۳۸۵	۰/۰۸۳۰۶۴	۰/۳۳۱۹۳۲	۰/۰۱۰۳۷۷	۰/۰۸۳۰۰۶	۰/۳۳۱۹۱۶	۰/۲۵
۰/۰۴۱۵۱۱	۰/۱۶۵۸۸۷	۰/۳۳۰۴۹۵	۰/۰۴۱۴۹۴	۰/۱۶۵۸۸۷	۰/۳۳۰۹۱۴	۰/۵۰
۰/۰۹۳۲۸۷	۰/۲۴۸۲۱۲	۰/۳۲۷۸۳۸	۰/۰۹۳۲۸۴	۰/۲۴۸۳۲۱	۰/۳۲۸۲۰۸	۰/۷۵
۰/۱۶۵۵۴۳	۰/۳۲۹۶۲۹	۰/۳۲۳۰۴۹	۰/۱۶۵۵۷۵	۰/۳۲۹۷۸۲	۰/۳۲۳۰۱۰	۱/۰۰
۰/۲۵۷۹۷۱	۰/۴۰۹۴۷۱	۰/۳۱۵۰۸۷	۰/۲۵۸۰۳۷	۰/۴۰۹۵۶۰	۰/۳۱۴۶۴۶	۱/۲۵
۰/۳۷۰۰۷۳	۰/۴۸۶۸۴۲	۰/۳۰۳۱۷۲	۰/۳۷۰۱۴۴	۰/۴۸۶۷۹۳	۰/۳۰۲۵۸۳	۱/۵۰
۰/۵۰۱۱۰۰	۰/۵۶۰۶۹۹	۰/۲۸۶۹۷۷	۰/۵۰۱۱۴۲	۰/۵۶۰۵۲۳	۰/۲۸۶۶۰۱	۱/۷۵
۰/۶۵۰۰۴۱	۰/۶۲۹۹۸۷	۰/۲۶۶۶۸۰	۰/۶۵۰۰۳۲	۰/۶۲۹۷۷۰	۰/۲۶۶۷۵۴	۲/۰۰
۱/۳۹۶۷۶۸	۰/۸۴۵۶۲۳	۰/۱۶۰۸۳۸	۱/۳۹۶۸۲۱	۰/۸۴۶۰۴۹	۰/۱۶۱۳۶۱	۳/۰۰
۲/۳۰۵۳۳۰	۰/۹۵۵۴۴۵	۰/۰۶۵۱۱۷	۲/۳۰۵۷۶۶	۰/۹۵۵۵۲۲	۰/۰۶۴۲۳۶	۴/۰۰
۳/۲۸۳۰۷۵	۰/۹۹۱۸۲۱	۰/۰۱۵۵۴۵	۳/۲۸۳۲۹۹	۰/۹۹۱۵۴۴	۰/۰۱۵۹۱۱	۵/۰۰
۴/۲۷۹۴۴۵	۰/۹۹۸۷۸۶	۰/۰۰۲۲۷۰	۴/۲۷۹۶۵۱	۰/۹۹۸۹۷۶	۰/۰۰۲۴۰۶	۶/۰۰
۵/۲۷۸۹۸۳	۱/۰۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۵۹۲	۵/۲۷۹۲۷۳	۰/۹۹۹۹۹۶	۰/۰۰۰۲۲۱	۷/۰۰
۶/۲۷۹۰۸۴	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱	۶/۲۷۹۲۵۲	۱/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱۲	۸/۰۰

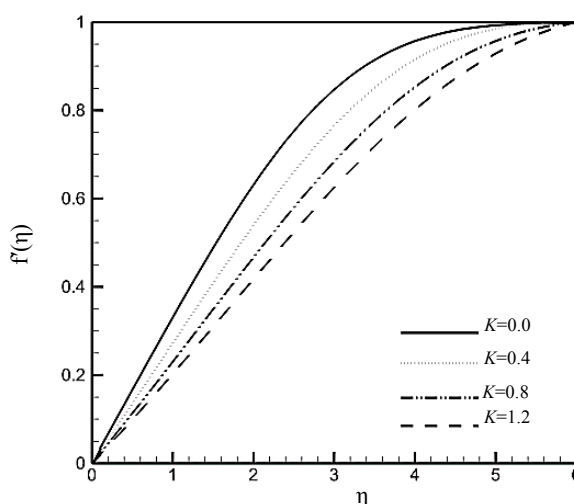
جدول ۵- نتایج حل معادلات حاکم نانوسیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس برای مقادیر  $Le=Pr=10$  و  $Nt=Nb=0.1$

روش ترکیبی شبکه عصبی- بهینه‌سازی هوشمند		عدد ویزنبرگ (K)
Shr	Nur	
۰/۸۰۲۵	۰/۲۷۷۹	۰/۰
۰/۸۰۴۶	۰/۲۶۹۶	۰/۲
۰/۷۸۵۰	۰/۲۶۰۹	۰/۴
۰/۷۵۴۰	۰/۲۵۷۰	۰/۶
۰/۷۴۲۲	۰/۲۴۸۳	۰/۸
۰/۷۲۶۷	۰/۲۴۳۰	۱/۰

اگر در رابطه (۵) مقدار  $K$  برابر با صفر در نظر گرفته شود، معادله حاکم سیال نیوتنی در جریان بلازیوس به دست می‌آید. در جدول (۴) با فرض  $K=0$ ، نتایج حل بلازیوس [۳۶] و حل به روش ترکیبی شبکه عصبی- بهینه‌سازی هوشمند ارائه و مقایسه شده است. عدد ناسلت کاهشده و عدد شرود کاهیده در جدول (۵) ارائه شده است. با توجه به نتایج ارائه شده، مشخص است که در جریان بلازیوس نانوسیال ویسکوالاستیک با افزایش



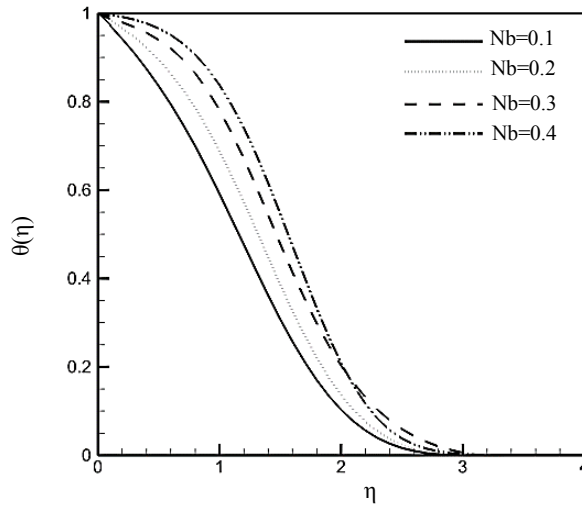
شکل ۷- تابع جریان سیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس



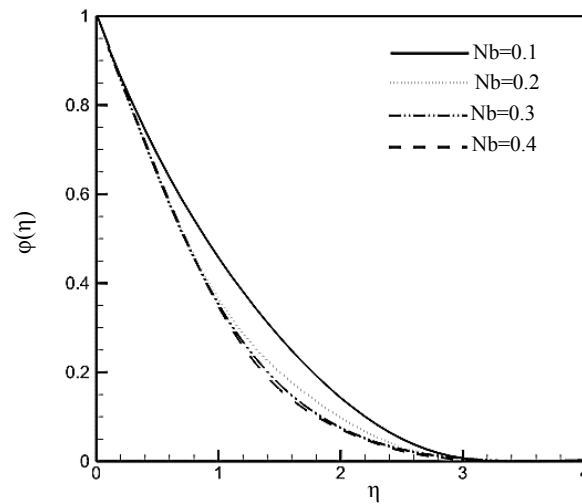
شکل ۸- سرعت افقی بی بعد سیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس

بی بعد سیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس برای پارامتر حرکت براونی مختلف را نشان می دهند. همان گونه که ملاحظه می شود با افزایش پارامتر حرکت براونی ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش و ضخامت لایه مرزی غلظت کاهش می یابد. شکل های (۱۱) و (۱۲) به ترتیب توزیع دما و غلظت بی بعد سیال ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس برای اعداد ویزنبرگ مختلف را نشان می دهند. همان گونه که ملاحظه می شود افزایش الاستیسیته سیال در جریان بلازیوس، موجب افزایش غلظت سیال در لایه مرزی می شود و با افزایش عدد ویسکوالاستیک، ضخامت لایه مرزی حرارت و غلظت هر دو افزایش می یابد.

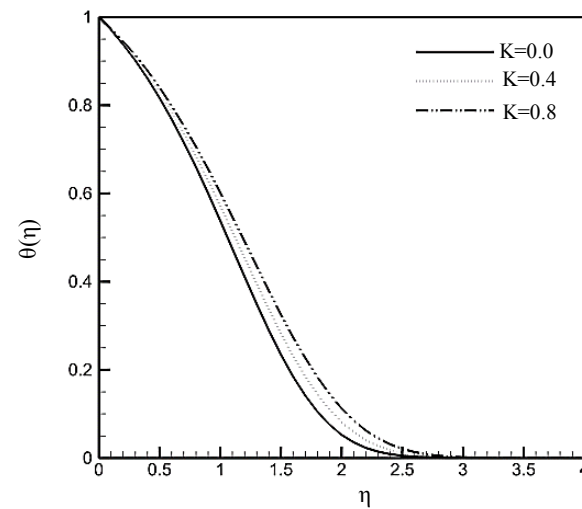
الاستیسیته سیال (افزایش  $K$ )، مقدار عدد ناسلت کاهشدهنده و عدد شروود کاهشدهنده اندکی کاهش می یابد. در نتیجه برای جریان بلازیوس نانوسیال ویسکوالاستیک با افزایش الاستیسیته سیال میزان انتقال حرارت و انتقال جرم اندکی کاهش می یابد. شکل های (۷) تا (۱۲) تأثیر تغییر پارامترها را بر جریان، انتقال حرارت و غلظت نانوسیال نشان می دهند. با توجه به شکل های (۷) و (۸)، که نشان دهنده تأثیر عدد ویزنبرگ بر جریان سیال هستند، می توان بیان کرد که ضخامت لایه مرزی سرعت با افزایش الاستیسیته سیال کاهش می یابد. شکل های (۹) و (۱۰)، به ترتیب نمودار توزیع دما و غلظت



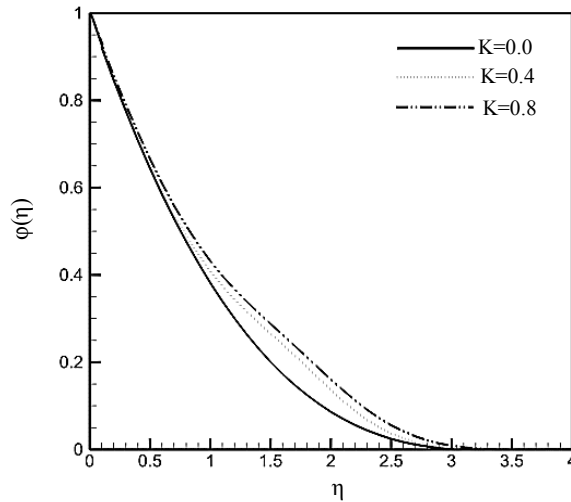
شکل ۹- دمای بی بعد سیال برای مقادیر  $K=0.593$ ،  $Le=Pr=1$  و  $Nt=0.1$



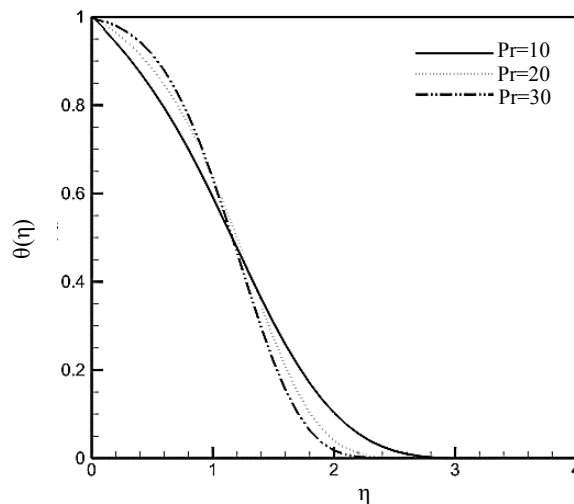
شکل ۱۰- غلظت بی بعد سیال برای مقادیر  $K=0.593$ ،  $Le=Pr=1$  و  $Nt=0.1$



شکل ۱۱- دمای بی بعد سیال برای مقادیر  $Le=Pr=1$  و  $Nt=Nb=0.1$



شکل ۱۲- غلظت بی بعد سیال برای مقادیر  $Le=Pr=10$  و  $Nt=Nb=0/1$



شکل ۱۳- دمای بی بعد سیال برای مقادیر  $K=0/5930$ ،  $Le=10$  و  $Nt=Nb=0/1$

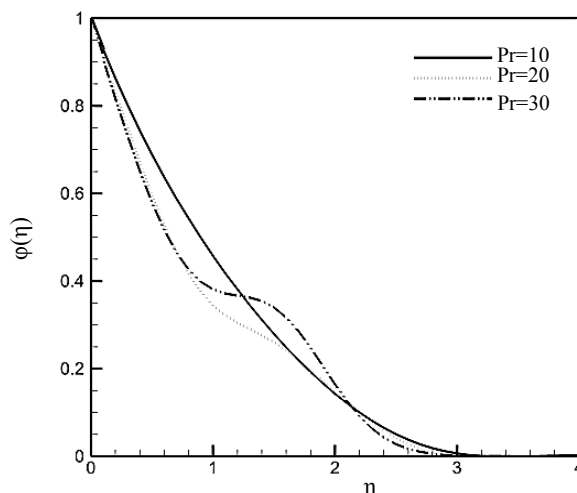
شد و سپس با استفاده از روش ترکیبی شبکه عصبی مصنوعی- بهینه‌سازی هوشمند با موفقیت حل شد. نتایج حل با روش تفاضل محدود پیش‌بینی‌کننده- تصحیح‌کننده مرتبه چهار و روش بلازیوس مقایسه شد. نتایج به دست آمده حاکی از دقت بسیار خوب روش ترکیبی در حل دسته معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مقادیر مرزی است. نتایج به دست آمده حاکی از این است که با افزایش تعداد نورون لایه پنهان شبکه عصبی پرسپترون سه لایه مورد استفاده در این مقاله از سه نورون به پنج نورون، نتایج بهتری حاصل می‌شود. همچنین، در جریان بلازیوس با افزایش الاستیسیته سیال (افزایش  $K$ )، مقدار  $f''(0)$

شکل‌های (۱۳) و (۱۴) به ترتیب تأثیر تغییر عدد پراتل بر توزیع دما و غلظت بی بعد را نشان می‌دهند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش عدد پراتل، دمای سیال در لایه مرزی حرارتی و همچنین غلظت سیال روند ثابتی را طی نمی‌کند.

#### ۷- نتیجه گیری

معادلات حاکم نانوسیالات ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس ارائه شد. سپس با استفاده از حل تشابهی، معادلات حاکم به سه دسته معادله معمولی غیرخطی با مقادیر مرزی مرتبه بالا تبدیل

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۸



شکل ۱۴- غلظت بی بعد سیال برای مقادیر  $Le=Pr=10$  و  $Nt=Nb=0/1$

همچنین غلظت سیال روند ثابتی را طی نمی کند.

## ۸- تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران ناشناس محترم نشریه که با نظرات سازنده خود موجب بهبود کیفیت مقاله حاضر شدند کمال تشکر و قدردانی را دارند.

و در نتیجه مقدار تنش برشی روی دیواره کاهش می یابد. از سوی دیگر، با افزایش پارامتر حرکت براونی ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش و ضخامت لایه مرزی غلظت کاهش می یابد. از طرفی، افزایش الاستیسیته سیال در جریان بلازیوس، موجب افزایش غلظت سیال در لایه مرزی می شود و ضخامت لایه مرزی حرارت و غلظت هر دو افزایش می یابد. به علاوه، با افزایش عدد پرانتل، دمای سیال در لایه مرزی حرارتی و

## واژه نامه

- |                                  |                           |                             |
|----------------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1. Perturbation                  | 5. approximation          | 9. reduced Nusselt number   |
| 2. convergence-parameter control | 6. multi-layer perceptron | 10. reduced Sherwood number |
| 3. neuron                        | 7. feedforward networks   | 11. sigmoid                 |
| 4. estimation                    | 8. Weissenburg number     |                             |

## مراجع

- Barnes, H. A., *A Handbook of Elementary Rheology*, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics: University of Wales, 2000.
- Sheu, L. J., Chiou, H. S., Weng, W. T., and Lee, S. R., "The Onset of Convection in a Viscoelastic Nanofluid Layer", *International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology*, Vol. 2011, pp. 2044-2047, 2011.
- Chhabra, R. P., and Richardson, J. F., *Non-Newtonian Flow in the Process Industries*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999.
- Kevorkian, J., and Cole, J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1981.
- Liao, S., "Proposed Homotopy Analysis Techniques for the Solution of Nonlinear Problems", Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- Adomian, G., *Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Noghrehabadi, A., Ghalambaz, M., and Ghanbarzadeh, A., "Heat Transfer of Magnetohydrodynamic Viscous Nanofluids Over an Isothermal Stretching Sheet", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 26, pp. 686-689, 2012.
- Noghrehabadi, A., Pourrajab, R., and Ghalambaz,



- M., "Effect of Partial Slip Boundary Condition on the Flow and Heat Transfer of Nanofluids Past Stretching Sheet Prescribed Constant Wall Temperature", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 54, pp. 253-261, 2012.
9. Noghrehabadi, A., Pourrajab, R., and Ghalambaz, M., "Flow and Heat Transfer of Nanofluids Over Stretching Sheet Taking Into Account Partial Slip and Thermal Convective Boundary Conditions", *Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 1357-1366, 2013.
  10. Noghrehabadi, A., Izadpanahi, E., and Ghalambaz, M., "Analyze of Fluid Flow and Heat Transfer of Nanofluids Over a Stretching Sheet Near the Extrusion Slit", *Computers & Fluids*, Vol. 100, pp. 227-236, 2014.
  11. Sadeghy, K., and Sharifi, M., "Local Similarity Solution for the Flow of a Second-grade Viscoelastic Fluid Above a Moving Plate", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, pp. 1265-1273, 2004.
  12. Cortell, R., "Analysing Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid over a Semi-infinite Horizontal Moving Flat Plate", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, pp. 772-778, 2008.
  13. Munawar, S., Mehmood, A., and Ali, A., "Comment on "Analysing Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid over a Semi-infinite Horizontal Moving Flat Plate", *IJNLM*, 43 (2008) 772", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 1280-1282, 2011.
  14. Madani Tonekaboni, S. A., Abkar, R., and Khoelilar, R., "On the Study of Viscoelastic Walters' B Fluid in Boundary Layer Flows", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2012, pp. 1-18, 2012.
  15. Choi, S. U. S., and Eastman, J. A., "Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles", *American Society of Mechanical Engineers*, pp. 99-105, 1995.
  16. Das, S. K., Choi, S. U. S., Yu, W., and Pradeep, T., *Nanofluids: Science and Technology*, John Wiley & Sons Inc, 2007.
  17. Buongiorno, J., 2005. "Convective Transport in Nanofluids", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 240-250, 2005.
  18. Cavuto, D. J., "An Exploration and Development of Current Artificial Neural Network Theory and Applications with Emphasis on Artificial Life", Ms.C. Thesis, A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements, 1997.
  19. Meade Jr, A. J., and Fernandez, A. A., "The Numerical Solution of Linear Ordinary Differential Equations by Feed-forward Neural Networks", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 19, pp. 1-25, 1994.
  20. Lagaris, I. E., Likas, A., and Fotiadis, D. I., "Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations", *Neural Networks, IEEE Transactions on*, Vol. 9, pp. 987-1000, 1998.
  21. Malek, A., and Shekari Beidokhti, R. "Numerical Solution for High Order Differential Equations using a Hybrid Neural Network-optimization Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 183, pp. 260-271, 2006.
  22. Noghrehabadi, A., Ghalambaz, M., Ghalambaz, M., and Vosough, A., "A Hybrid Power Series-Cuckoo Search Optimization Algorithm to Electrostatic Deflection of Micro Fixed-fixed Actuators", *International Journal of Multidisciplinary Sciences and Engineering*, Vol. 2, pp. 22-26, 2011.
  23. Noghrehabadi, A., Ghalambaz, M., and Ghanbarzadeh, A., "A Hybrid Power Series Artificial Bee Colony Algorithm to Obtain a Solution for Buckling of Multiwall Carbon Nanotube Cantilevers Near Small Layers of Graphite Sheets", *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, Vol. 2012, pp. 1-6, 2012.
  24. Behrang, M. A., Ghalambaz, M., Assareh, E., and Noghrehabadi, A., "A New Solution for Natural Convection of Darcian Fluid About a Vertical Full Cone Embedded in Porous Media Prescribed Wall", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 49, pp. 871-876, 2011.
  25. Yekrangi, A., Ghalambaz, M., Noghrehabadi, A., Beni, Y. T., Abadyan, M., and Abadi, M. N., "An Approximate Solution for a Simple Pendulum Beyond the Small Angles Regimes using Hybrid Artificial Neural Network and Particle Swarm Optimization Algorithm", *Procedia Engineering*, Vol. 10, pp. 3734-3740, 2011.
  26. Ghalambaz, M., Noghrehabadi, A., Behrang, M. A., Assareh, E., Ghanbarzadeh, A., and Hedayat, N., "A Hybrid Neural Network and Gravitational Search Algorithm (HNNGSA) Method to Solve Well Known Wessinger's Equation", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 5, pp. 609-614, 2011.
  27. Biglari, M., Assareh, E., Poultangari, I., and Nedaei, M., "Solving Blasius Differential Equation by using Hybrid Neural Network and Gravitational Search Algorithm (HNNGSA)", *Global Journal of Science, Engineering and Technology*, Vol. 11, pp. 29-36, 2013.
  28. Ahmad, I., and Bilal, M., "Numerical Solution of Blasius Equation Through Neural Networks Algorithm", *American Journal of Computational Mathematics*, Vol. 4, No. 03, p. 223, 2014.
  29. Assareh, E., Behrang, M., Ghalambaz, M., Noghrehabadi, A., and Ghanbarzadeh, M. A., "A New Approach to Solve Blasius Equation using Parameter Identification of Nonlinear Functions Based on the Bees Algorithm (BA)", *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, Vol. 5, pp. 255-257, 2011.

30. Minsky, M., and Papert, A., *Perceptrons: an Introduction to Computational Geometry*, Expanded edition, M.I.T. Press, Cambridge, 1997.
31. El-Bouri, A., Balakrishnan, S., and Popplewell, N., Sequencing Jobs on a Single Machine: A Neural Network Approach, *European Journal of Operational Research*, Vol. 126, pp. 474-490, 2000.
32. Hornik, K., Stinchcombe, M., and White, H., "Multilayer Feedforward Networks Are Universal Approximators", *Neural Networks*, Vol. 2, pp. 359-366, 1984.
33. Kennedy, J., and Eberhart, R., "Particle Swarm Optimization", *IEEE International Conference*, Vol. 4, pp. 1942-1948, 1995.
34. Kuznetsov, A. V., and Nield, D. A., "Natural Convective Boundary-layer Flow of a Nanofluid Past a Vertical Plate", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, pp. 243-247, 2010.
35. Goyal, M., and Bhargava, R., "Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Viscoelastic Nanofluids Past a Stretching Sheet with Partial Slip Conditions", *Applied Nanoscience*, Vol. 4, pp. 761-767, 2014.
36. Papanastasiou, T., Georgiou, G., and Alexandrou, A. N., *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton. 2000.