نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

شناسایی تعاملات مودال غیرخطی در سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر بر اساس پاسخ ارتعاشی تک فرکانسی

مرتضی همایون صادقی* و سعید لطفان
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۲/۶ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۷/۱۸)

چکیده– در این پژوهش، تعاملات مودال غیرخطی ناشی از تشدید داخلی یک به سه در سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر بر اساس روش شناسایی سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی تیر و جرم متمرکز بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل قرار گرفته و پاسخ ارتعاشات سیستم تحت تشدید اصلی استخراج شده است. سپس رفتار فرکانسی پاسخ ارتعاشی با استفاده از تبدیل‌های فوریه و موجک مورلت بررسی شده است. به‌منظور شناسایی غیرپارامتریک پاسخ زمانی، توابع مود ذاتی تک فرکانسی با استفاده از روش تجزیه مود تجربی پیشرفته به‌دست آمده است. در این روش برای جلوگیری از اختلاط مود ناشی از تعامل مودال از سیگنال‌های پوششی استفاده شده است. پس از تحلیل رفتار فرکانسی هر یک از توابع مود، دینامیک جریان آهسته سیستم تشکیل شده و نوسانگرهای مودال اصلی برای بازسازی مود ذاتی متناظر استخراج شده است. درنهایت با تحلیل پدیده ضربان در یک سیستم یک درجه آزادی ساده نشان داده شده است که تشدید داخلی تنها در شرایطی باعث به‌وجود آمدن پدیده ضربان در پاسخ زمانی می‌شود که شیب دامنه لگاریتمی نیروی نوسان‌گر غیرصفر باشد. نتایج نشان می‌دهد که بر اساس متناوب، شبه متناوب و آشفته بودن پاسخ، تعاملات مودال می‌تواند پایا یا ناپایا باشد. همچنین رفتار آشوبناک بیشتر در مود ارتعاشی رخ می‌دهد که توسط مکانیزم تشدید داخلی تحریک شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر، تعاملات مودال غیرخطی، شناسایی سیستم غیرخطی، تجزیه مود تجربی پیشرفته.

Identification of Nonlinear Modal Interactions in a Beam-Mass-Spring-Damper System based on Mono-Frequency Vibration Response

M. H. Sadeghi* **and S. Lotfan**

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Abstract: ***In this paper, nonlinear modal interactions caused by one-to-three internal resonance in a beam-mass-spring-damper system are investigated based on nonlinear system identification. For this purpose, the equations governing the transverse***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: morteza@tabrizu.ac.ir

vibrations of the beam and mass are analyzed via the multiple scale method and the vibration response of the system under primary resonance is extracted. Then, the frequency behavior of the vibration response is studied by Fourier and Morlet wavelet transforms. In order to perform the nonparametric identification of the time response, mono-frequency intrinsic mode functions are derived by the advanced empirical mode decomposition. In this approach, masking signals are utilized in order to avoid mode mixing caused by modal interaction. After analyzing the frequency behavior of each mode function, slow flow dynamics of the system is established and intrinsic modal oscillators for reconstructing the corresponding intrinsic mode are extracted. Finally, by analyzing the beating phenomenon in a simple one-degree-of-freedom system, it is shown that the internal resonance causes beating only under the circumstance that the slope of the logarithmic amplitude of oscillator force is nonzero. The results, therefore, show that depending on the periodic, pseudo-periodic, and chaotic behavior of the response, modal interactions might be stationary or non-stationary. Moreover, the chaotic behavior occurs mostly in the vibration mode excited by the internal resonance mechanism.

Keywords: *Beam-mass-spring-damper system, Nonlinear modal interactions, Nonlinear system identification, Advanced empirical mode decomposition.*

فهرست علائم

A	سطح مقطع (m^2)	S_n^i	تابع تکین iام در مود ارتعاشی nام
A_n	بخشی از دامنه ارتعاشی مود nام تیر	s	مکان بی‌بعد
B_n	بخشی از دامنه ارتعاشی مود nام جرم	s^*	محل بی‌بعد اتصال تیر و جرم
C_d	ثابت میراگر ویسکوز خطی $(N.s.m^{-1})$	T_0	مقیاس زمانی سریع
c_i	تابع مود ذاتی	T_1	مقیاس زمانی آهسته
D_n	اپراتور مشتق نسبت به مقیاس زمانی nام	t	زمان (s)
E	مدول یانگ $(N.m^{-2})$	tol	حداقل مقدار معین R_{m+1}
e_{max}	منحنی برازش شده از بیشینه نسبی	U_n	تابع شکل مود مختلط در مود ارتعاشی nام
e_{min}	منحنی برازش شده از کمینه نسبی	u	حرکت عرضی بی‌بعد
F	نیروی هارمونیک خارجی (N)	u^*	پاسخ زمانی تیر در محل اتصال تیر و جرم
$\tilde{F}$	نیروی خارجی نوسان‌گر	v	حرکت جرم متمرکز
f	نیروی هارمونیک خارجی بی‌بعد	w	حرکت عرضی (m)
f_0	دامنه نیروی هارمونیک خارجی	x	مکان (m)
h	تابع غیرخطی	x^*	محل اتصال تیر و جرم (m)
I	ممان اینرسی سطح (m^4)	y	پاسخ زمانی تیر در محل $s = ۰/۲۵$
k_d	ضریب فنر خطی $(N.m^{-1})$	y_i	مؤلفه اصلی پاسخ زمانی سیستم
L	طول (m)	$y_{masking}$	سیگنال پوششی
M_i	بیشینه نسبی	y_{mirror}	سیگنال تصویر آینه‌ای
m	جرم متمرکز بی‌بعد	z	محور عرضی
m_d	جرم متمرکز (kg)	α_m	ضرایب مختلط
m_i	کمینه نسبی	α_{mi}	بخش موهومی ضرایب مختلط
N_0	نیروی محوری اولیه (N)	α_{mr}	بخش حقیقی ضرایب مختلط
p_n	بخشی از دامنه پاسخ مود nام	β	جریان آهسته
q_n	بخشی از دامنه پاسخ مود nام	γ	ضریب بی‌بعد میرایی خطی تیر
R_{m+1}	باقیمانده سیگنال	γ_d	ضریب بی‌بعد میرایی میراگر

δ	تابع دلتای دیراک	ς_1	اینرسی دورانی بی‌بعد
ε	پارامتر اغتشاشات	ς_2	نیروی محوری بی‌بعد
ζ	نسبت میرایی	τ	زمان بی‌بعد
η	ضریب کلوین-وویت	φ_0	اختلاف فاز ناشی از میرایی
κ	ضریب بی‌بعد سفتی فنر	χ_i	تابع مختلط
Λ_i	دامنه مختلط نیروی نوسان‌گر	Ω	فرکانس تحریک
λ_i	ضریب میرایی نوسان‌گر	ω	فرکانس اصلی سیگنال
μ	ضریب بی‌بعد میرایی غیرخطی تیر	ω_0	فرکانس طبیعی سیستم جرم- فنر- میراگر
ν_i	تابع پارامتر تنظیم‌کننده	ω_n	فرکانس طبیعی سیستم
ρ	چگالی جرمی ($kg.m^{-3}$)	ω_{ni}	بخش موهومی فرکانس طبیعی سیستم
σ_i	پارامتر تنظیم‌کننده	ω_{nr}	بخش حقیقی فرکانس طبیعی سیستم

۱- مقدمه

ارتعاشات مکانیکی در بسیاری از سازه‌ها اتفاق می‌افتد و می‌تواند عملکرد سیستم را به‌شکل نامطلوب تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین برای جلوگیری از ارتعاشات ناخواسته، مطالعه رفتار سیستم‌های دینامیکی مقید و غیرمقید از اهمیت بالایی برخوردار است. در این میان رفتار ارتعاشی تیرها بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد، چرا که علاوه بر کاربردهای وسیع این نوع عضو در زمینه‌های مهندسی و راحتی تحلیل معادلات حاکم بر آن، بسیاری از سیستم‌های مکانیکی رفتار مشابه تیر دارند و بررسی رفتار ارتعاشی آن می‌تواند به روشن ساختن رفتار دینامیکی رده گسترده‌تری از سیستم‌ها کمک کند. از طرفی، متناسب با کاربرد، بسیاری از اجزای ماشین‌آلات مهندسی می‌تواند شامل اجزای گوناگون همچون جرم متمرکز، فنر، میراگر، اتصالات داخلی، تکیه‌گاه غیرایده‌آل و جاذب ارتعاشی باشد. برای مثال قرارگیری یک موتور به‌واسطه فنربندی روی پایه را می‌توان به‌صورت سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر درنظر گرفت [۱]. همچنین کابل‌های تحت کشش حامل میراگرهای جرمی تنظیم شده به‌صورت تیر- جرم- فنر- میراگر مدل‌سازی می‌شود [۲]. بیشتر این مدل‌سازی‌های ریاضی برای بیان رفتار سیستم واقعی در طبیعت و فهم بهتر ویژگی‌های آن انجام می‌شود [۳].

یکی از فرض‌های ساده‌کننده برای مدل‌سازی سیستم و تحلیل آن، خطی درنظر گرفتن مدل و یا خطی‌سازی است. ارتعاشات سیستم تیر حامل جرم- فنر- میراگر بر اساس مدل‌های خطی به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که ارتعاشات آزاد [۴] و اجباری [۵ و ۶] این سیستم بر اساس مدل‌های اویلر برنولی [۷]، تیموشنکو [۸ و ۹] و ردی- بیکفورد [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین بسیاری از این مدل‌ها شامل تیر یکنواخت و غیریکنواخت [۱۱]، یا یک‌دهانه و چنددهانه [۱۲ و ۱۳] است. در تمامی این مطالعات، جرم متمرکز به‌صورت معلق [۷] و غیرمعلق [۱۴] درنظر گرفته شده است. سیستم جرم- فنر- میراگر معلق، کاربردی مانند جاذب ارتعاشی دارد درحالی که حالت غیرمعلق کاربردی مانند تکیه‌گاه میانی کشسان دارد.

با وجود فرض خطی بودن سیستم در بسیاری از سیستم‌های واقعی رفتار غیرخطی غیرقابل اجتناب است. برای مثال اگر سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر دارای دامنه نوسانات محدودی باشد و به‌عبارتی تغییرات نیروی محوری تیر درنظر گرفته شود، لازم است تا سیستم به‌صورت غیرخطی مدل‌سازی شود. البته بر اساس مدل‌سازی خطی حتی در شرایطی که دامنه نوسانات محدود و کوچک است، می‌توان پاسخ دینامیکی قابل قبولی در بسیاری از شرایط استخراج کرد. درحالی که در این شرایط

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]

تعاملات مودال غیرخطی از فیزیک مسئله حذف می‌شود. در حضور تعاملات مودال، تبادل انرژی در بین مودها به‌خصوص از مودهای پایین به مودهای بالا رخ می‌دهد. بنابراین با استفاده از مدل غیرخطی علاوه بر دستیابی به‌دقت بیشتر در پاسخ، می‌توان پدیده‌های فیزیکی ناشی از تعاملات مودال همچون تقابل انرژی سیستم اصلی و زیرسیستم، را مورد بررسی قرار داد.

در مورد سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر غیرخطی مطالعات اندکی انجام شده است. پاک‌میرلی و نایفه [۱۵] به بررسی ارتعاشات عرضی تیر خطی حامل سیستم جرم- فنر غیرمعلق غیرخطی در حضور نیروی کشش، میرایی و نیروی خارجی پرداختند. آنها معادلات حاکم را بر اساس روش اغتشاشات مورد تحلیل قرار دادند و رفتار سیستم را تحت تشدید اصلی بررسی کردند. غایش و همکاران [۱۶] روش مقیاس‌های چندگانه را برای بررسی ارتعاشات تیر دارای اتصالات داخلی دلخواه مانند جرم متمرکز و فنر خطی تعمیم دادند و پاسخ فرکانسی را در مود اول بررسی کردند. افتخاری و همکاران [۱۷] ارتعاشات غیرخطی تیر کامپوزیتی یک‌سر گیردار حامل سیستم جرم- فنر در انتها، تحت تحریک پایه را مورد تحلیل قرار دادند. آنها معادلات حاکم را بر اساس اصل همیلتون استخراج کردند و رفتار سیستم را تحت تشدید داخلی مطالعه کردند و نشان دادند که پارامترهای زیرسیستم می‌توانند باعث پدیده اشباع در ارتعاش عرضی سیستم اصلی شود. بری و همکاران [۱۸] نیز ارتعاشات غیرخطی تیر حامل چندین سیستم جرم- فنر- میراگر غیرمعلق را بررسی کردند. ونگ و لیانگ [۱۹] کاربرد جرم متمرکز به‌عنوان جاذب ارتعاشی روی تیر را در شرایط ارتعاش غیرخطی و وقوع تشدید داخلی بررسی کردند. در سال‌های اخیر ابراهیمی و اسماعیل‌زاده خادم [۲۰] ارتعاشات تیر خطی دو سرگیردار متصل به سیستم جرم- فنر- میراگر غیرخطی را تحت تحریک هارمونیک بررسی کردند. همچنین صادقی و لطفان [۲۱ و ۲۲] ارتعاشات سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر را در حضور تشدید اصلی و داخلی یک به سه بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه بررسی کردند و نشان دادند که این سیستم می‌تواند تحت ویژگی‌های خاص از سیستم جرم- فنر- میراگر تعاملات مودال متناوب، شبه متناوب و آشوبناک را تجربه کند. با بررسی دقیق این مطالعات مشخص می‌شود که ارتعاشات و شناسایی سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر دارای جرم معلق با نوسانات محدود و مدل غیرخطی مورد تحلیل قرار نگرفته است. یکی از اهداف پژوهش حاضر بررسی رفتار ارتعاشی این سیستم است.

در کنار این مدل‌سازی‌ها، نیاز به شناسایی سیستم‌های دینامیکی نیز ناشی از این واقعیت است که تحلیل‌گران اغلب از جزئیات فیزیکی سیستم اطلاعات دقیقی در اختیار ندارند. در شرایطی که از مدل خطی استفاده شود و پاسخ ارتعاشی سیستم به‌صورت پایا باشد می‌توان از تبدیل فوریه عددی و روش آنالیز مودال تجربی استفاده کرد. درحالی که برای سیستم‌های غیرخطی استفاده از روش‌های شناسایی غیرخطی ضروری است. این روش‌ها برای سیستم‌های چند درجه آزادی تنها در طول ۲۰ سال گذشته توسعه یافته است. از مهم‌ترین نمونه‌های روش شناسایی غیرخطی می‌توان به‌روش حوزه زمان هیلبرت- هوانگ[1] [۲۳]، روش نارمکس[2] [۲۴]، روش حوزه فرکانس شناسایی غیرخطی از طریق پس‌خوراند خروجی [۲۵]، آنالیز زمان- فرکانس تبدیل موجک [۲۶] و مدل‌های جعبه سیاه شبکه‌های عصبی مصنوعی [۲۷] اشاره کرد. مرور کامل روش های موجود در این زمینه را می‌توان در مقالات مروری کرسچن و همکاران یافت [۲۸ و ۲۹].

در دهه اخیر لی و همکاران [۳۰ و ۳۱] روش جدید شناسایی غیرپارامتریک در حوزه زمان مبتنی بر ارتباط یا هم‌ارزی بین دینامیک جریان آهسته تجربی و تئوری ارائه دادند. در این روش فرض می‌شود که پاسخ زمانی سیستم دارای نوسانات سریع با فرکانس‌های اصلی و تغییرات آهسته در دامنه است. بر اساس این فرض با به‌کارگیری روش تجزیه مود تجربی توابع مود ذاتی سیستم استخراج می‌شود و مدل تعاملی غیرخطی شامل نوسان‌گرهای مودال اصلی تشکیل می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]

[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]

ساکیرتزیس و همکاران [۳۲] بر اساس روش لی و همکاران به مدل‌سازی و شناسایی تعاملات غیرخطی مودال در سیستم میله خطی یک‌سر گیردار حامل سیستم به‌شدت غیرخطی جرم- فنر- میراگر در انتها پرداختند. کورت و همکاران [۳۳] نیز برای بررسی ضربه ارتعاشی[۳] در یک تیر یک‌سر گیردار خطی از روش گفته شده استفاده کردند. آنها نتایج شناسایی خود را با نتایج تجربی مقایسه و تطابق خوبی بین این دو مشاهده کردند. اریتن و همکاران [۳۴] اثر اصطکاک موجود در اتصال پیچ و مهره بین دو تیر را با استفاده از این روش شناسایی کردند. آنها اثر اصطکاک در اتصال را بر دامنه لگاریتمی نیروی معادل در هریک از نوسان‌گرها بررسی کردند و نشان دادند که اثر غیرخطی اتصال باعث می‌شود که این دامنه لگاریتمی از حالت خط صاف خارج شود. در سال‌های اخیر، چن و همکاران [۳۵] شناسایی تجربی ارتعاشات تیر خطی تحت ضربه ارتعاشی را با رویکرد پایش وضعیت انجام دادند، همچنین کورت و همکاران [۳۶] پدیده تشدید داخلی در تیر یک‌سر گیردار با اتصال فنر به‌شدت غیرخطی در انتها را با استفاده از این روش بررسی کردند. در همه این مطالعات شناسایی بر اساس پاسخ ضربه سیستم انجام شده است.

بررسی پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که دینامیک غیرخطی تیر حامل سیستم جرم- فنر- میراگر معلق کمتر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته و بیشتر این مطالعات در زمینه سیستم کوپل با جرم غیرمعلق است. بر این اساس در مقاله حاضر ارتعاشات و تعاملات مودال غیرخطی سیستم کوپل تیر- جرم- فنر- میراگر با استفاده از روش لی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است. این تعاملات ناشی از تشدید داخلی یک به سه در سیستم است که منجر به پاسخ زمانی به‌شدت ناپایا[۴] می‌شود. در بیشتر مطالعات برای بررسی رفتار پایا و ناپایا در سیستم غیرخطی از نمودارهای فاز و پوانکاره استفاده می‌شود. درحالی که در این مطالعه با استفاده از رویکرد شناسایی سیستم تلاش شده است تا ارتباط تشدید داخلی، رفتار آشوبناک و رخ دادن پدیده ضربان بررسی شود. ضربان پدیده‌ای است که در سیستم‌های یک درجه آزادی رخ می‌دهد و برای بررسی آن در سیستم پیوسته حاضر از پاسخ تک فرکانسی استفاده شده است. این رویکرد از تحلیل برای رفتارشناسی سیستم و پی بردن به پدیده‌های فیزیکی در سیستم‌های غیرخطی صورت گرفته که در پژوهش‌های پیشین انجام نشده است. در بخش بعد، مدل ریاضی تیر ویسکوالاستیک ریلی حامل سیستم خطی یک درجه آزادی با فرض ارتعاش با دامنه محدود استخراج شده و مورد تحلیل زمان- فرکانس قرار گرفته است. در بخش (۳) دینامیک جریان آهسته سیستم تشکیل شده و در بخش (۴) توابع مود ذاتی سیستم بر اساس روش تجزیه مود تجربی پیشرفته استخراج شده است. درنهایت در بخش (۵) تأثیر ضربان ناشی از تعاملات مودال غیرخطی بر نوسان‌گرهای مودال اصلی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

۲- مدل ریاضی سیستم

سیستم کوپل دینامیکی متشکل از تیر ویسکوالاستیک ریلی با تکیه‌گاه ساده در دو انتها حامل سیستم یک درجه آزادی جرم- فنر- میراگر مطابق شکل (۱) به‌عنوان سیستم خطی درنظر گرفته شده است. تیر دارای طول L، سطح مقطع A، ممان اینرسی سطح I، چگالی جرمی ρ، مدول یانگ E و حرکت عرضی $w(x,t)$ است. جرم m_d به‌وسیله فنر k_d و میراگر ویسکوز c_d در محل x^* به تیر متصل و دارای حرکت $v(t)$ است. همچنین سیستم تحت نیروی هارمونیک یکنواخت F در طول تیر است.

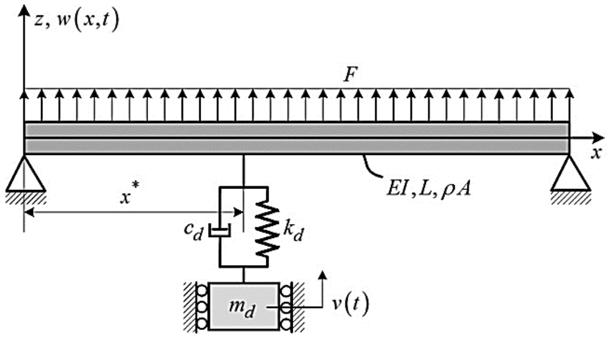
با درنظر گرفتن اتلاف انرژی در تیر توسط مدل ویسکوالاستیک کلوین-وویت با ضریب η، نیروی محوری اولیه N_0 و تعریف پارامترهای بی‌بعد زیر:

$$u = \frac{w}{L} \tag{۱}$$

$$s = \frac{x}{L} \tag{۲}$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \tag{۳}$$

$$\varsigma_1 = \frac{I}{AL^2} \tag{۴}$$



شکل ۱- تیر دو سر ساده حامل سیستم جرم- فنر- میراگر

$$\varsigma_2 = \frac{N_0 L^2}{EI} \tag{۵}$$

$$\gamma = \frac{\eta}{EL^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{۶}$$

$$\mu = \frac{\eta A}{EI}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{۷}$$

$$\gamma_d = \frac{c_d L^2}{EI}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}} \tag{۸}$$

$$\kappa = \frac{k_d L^3}{EI} \tag{۹}$$

$$m = \frac{m_d}{\rho A L} \tag{۱۰}$$

معادلات بی‌بعد حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر ریلی و حرکت جرم متمرکز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۲۱]:

$$\begin{aligned} & u_{,\tau\tau} - \varsigma_1 u_{,ss\tau\tau} + u_{,ssss} + \gamma u_{,ssss\tau} - \\ & \varsigma_2 u_{,ss} - 1/5\varsigma_1^{-1} u_{,s}^2 u_{,ss} - \mu\left(2u_{,s}u_{,s\tau}u_{,ss} + u_{,s}^2 u_{,ss\tau}\right) = \\ & \left[\gamma_d\left(\dot{v} - u_{,\tau}^*\right) + \kappa\left(v - u^*\right)\right]\delta\left(s - s^*\right) + f(s,\tau) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$m\ddot{v} + \gamma_d\left(\dot{v} - u_{,\tau}^*\right) + \kappa\left(v - u^*\right) = 0 \tag{۱۲}$$

این معادلات مدل غیرخطی سیستم است که تغییرات نیروی محوری ناشی از حرکت تیر باعث اثر غیرخطی شده است. در معادلات فوق زیرنویس‌های s و τ به‌ترتیب نشان‌دهنده مشتق نسبت به مکان و زمان است، همچنین در معادلات (۱) تا (۱۲)، u پارامتر بدون بعد حرکت عرضی تیر، s مختصه افقی بدون بعد، τ زمان بدون بعد، ς_1 اینرسی دورانی بدون بعد، ς_2 نیروی محوری بدون بعد، γ پارامتر بدون بعد میرایی خطی تیر، μ پارامتر بدون بعد میرایی غیرخطی تیر، γ_d میرایی بی‌بعد میراگر، k سفتی بی‌بعد فنر، m جرم بی‌بعد متمرکز و f نیروی خارجی بدون بعد است. بر این اساس فرکانس طبیعی بی‌بعد سیستم جرم- فنر- میراگر به‌صورت $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ تعریف می‌شود. همچنین δ نشان دهنده تابع دلتای دیراک بوده و $u^* = u\left(s^*, \tau\right)$ است.

مطابق روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات تغییر متغیرهای $u = \sqrt{\varepsilon}u$، $v = \sqrt{\varepsilon}v$ و $\eta = \sqrt{\varepsilon}\hat{\eta}$ در روابط (۱۱) و (۱۲) اعمال شده و پاسخ معادلات به‌دست آمده به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(s,\tau;\varepsilon) = u_0\left(s, T_0, T_1\right) + \varepsilon u_1\left(s, T_0, T_1\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{۱۳}$$

$$v(\tau;\varepsilon) = v_0\left(T_0, T_1\right) + \varepsilon v_1\left(T_0, T_1\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{۱۴}$$

در این روابط $T_0 = \tau$ مقیاس زمانی سریع و $T_1 = \varepsilon\tau$ مقیاس زمانی آهسته بوده و پارامتر اغتشاشات به‌صورت $0 < \varepsilon << 1$ است. با درنظر گرفتن $D_n = d/dT_n$ و نیروی تحریک $f = \varepsilon f_0 \sin\Omega\tau$، معادلات مرتبه ε^0 به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$\begin{aligned} & D_0^2 u_0 - \varsigma_1 D_0^2 u_{0,ss} + u_{0,ssss} - \varsigma_2 u_{0,ss} = \\ & \left[\gamma_d D_0\left(v_0 - u_0^*\right) + \kappa\left(v_0 - u_0^*\right)\right]\delta\left(s - s^*\right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$mD_0^2 v_0 + \gamma_d D_0\left(v_0 - u_0^*\right) + \kappa\left(v_0 - u_0^*\right) = 0 \tag{۱۶}$$

همچنین معادلات مرتبه ε^1 به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & D_0^2 u_1 - \varsigma_1 D_0^2 u_{1,ss} + u_{1,ssss} - \varsigma_2 u_{1,ss} = \\ & -2D_0 D_1 u_0 + 2\varsigma_1 D_0 D_1 u_{0,ss} - \hat{\gamma} D_0 u_{0,ssss} + \\ & 1/5\varsigma_1^{-1} u_{0,s}^2 u_{0,ss} + \gamma_d D_1\left(v_0 - u_0^*\right)\delta\left(s - s^*\right) + \\ & \left[\gamma_d D_0\left(v_1 - u_1^*\right) + \kappa\left(v_1 - u_1^*\right)\right]\delta\left(s - s^*\right) + f_0 \cos\Omega\tau \end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$mD_0^2 v_1 + \gamma_d D_0 \left(v_1 - u_1^*\right) + \kappa \left(v_1 - u_1^*\right) = -2mD_0 D_1 v_0 - \gamma_d D_1 \left(v_0 - u_0^*\right) \qquad (۱۸)$$

پاسخ معادلات (۱۵) و (۱۶) به‌صورت روابط زیر درنظر گرفته می‌شود [۳۷]:

$$u_0\left(s, T_0, T_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(T_1\right) e^{i\omega_n T_0} U_n\left(s\right) + cc\right] \qquad (۱۹)$$

$$v_0\left(T_0, T_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\left(T_1\right) e^{i\omega_n T_0} + cc\right] \qquad (۲۰)$$

با توجه به حضور ضریب میرایی میراگر در معادلات مرتبه ε^0، در روابط فوق U_n تابع شکل مود مختلط، $i=\sqrt{-1}$ ،$\omega_n = \omega_{nr} + i\omega_{ni}$ فرکانس طبیعی مختلط، A_n بخشی از دامنه ارتعاشی تیر و B_n بخشی از دامنه ارتعاشی جرم متمرکز در مود ارتعاشی n ام است. همچنین cc نشان‌دهنده جملات مزدوج مختلط است.

با درنظر گرفتن نیروی خارجی دارای فرکانس تحریک در حوالی فرکانس مود اول ارتعاشی و لحاظ کردن تعاملات مودال غیرخطی از طریق مکانیزم تشدید داخلی یک به سه بین مودهای اول و دوم، داریم:

$$\Omega = \omega_{1r} + \varepsilon\sigma_0 \qquad (۲۱)$$

$$\omega_{2r} = 3\omega_{1r} + \varepsilon\sigma_1 \qquad (۲۲)$$

که در آن σ_i پارامتر تنظیم‌کننده است. با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۰) در روابط (۱۷) و (۱۸) و با استفاده از روابط فوق، معادلات مرتبه ε^1 به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} & D_0^2 u_1 - \varsigma_1 D_0^2 u_{1,ss} + u_{1,ssss} - \varsigma_2 u_{1,ss} - \\ & \left[\gamma_d D_0\left(v_1 - u_1^*\right) + \kappa\left(v_1 - u_1^*\right)\right]\delta\left(s - s^*\right) = \\ & S_1^1\left(s, T_0, T_1\right) e^{i\omega_{1r} T_0} + S_2^2\left(s, T_0, T_1\right) e^{i\omega_{2r} T_0} + \\ & cc + NST \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} & mD_0^2 v_1 + \gamma_d D_0\left(v_1 - u_1^*\right) + \kappa\left(v_1 - u_1^*\right) = \\ & S_1^3\left(T_0, T_1\right) e^{i\omega_{1r} T_0} + S_2^4\left(T_0, T_1\right) e^{i\omega_{2r} T_0} + cc \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

در روابط فوق S_n^i تابع تکین iام متناظر با مود nام و NST جملات غیرتکین است. با استفاده از شرایط حل‌پذیری [۳۸]، معادلات حاکم بر دامنه ارتعاشی تیر در مود اول و دوم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left\langle S_1^1, U_1 \right\rangle + \left\langle S_1^3, U_1 \right\rangle = \dot{A}_1 + \alpha_1 A_1 + \\ & \alpha_2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{-2\omega_{1i} T_0} + \alpha_3 \bar{A}_1^2 A_2 e^{-\left(\omega_{1i} + \omega_{2i} - i\varepsilon\sigma_1\right) T_0} + \\ & \alpha_4 A_1 \left|A_2\right|^2 e^{-2\omega_{2i} T_0} + \alpha_5 e^{\left(\omega_{1i} + i\varepsilon\sigma_0\right) T_0} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle S_2^2, U_2 \right\rangle + \left\langle S_2^4, U_2 \right\rangle = \dot{A}_2 + \alpha_6 A_2 + \\ & \alpha_7 A_2^2 \bar{A}_2 e^{-2\omega_{2i} T_0} + \alpha_8 A_1^3 e^{\left(-3\omega_{1i} + \omega_{2i} - i\varepsilon\sigma_1\right) T_0} + \\ & \alpha_9 A_2 \left|A_1\right|^2 e^{-2\omega_{1i} T_0} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

در روابط فوق α_m ضرایب مختلط ثابت به‌صورت $\alpha_m = \alpha_{mr} + i\alpha_{mi}$ هستند که تابع پارامترها و شکل مودهای سیستم هستند. همچنین علامت — (بار) نشان‌دهنده مزدوج مختلط پارامتر مربوط است. به‌منظور استخراج معادلات خودگردان و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی معادلات فوق، پاسخ زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$A_n\left(T_1\right) = \frac{1}{2}\left[p_n\left(T_1\right) + iq_n\left(T_1\right)\right] e^{\left(\hat{\omega}_{ni} + i\nu_n\right) T_1}, \quad n = 1, 2 \qquad (۲۷)$$

که در آن $\omega_{ni} = \varepsilon\hat{\omega}_{ni}$ بوده:

$$\nu_1 = \sigma_0 \qquad (۲۸)$$

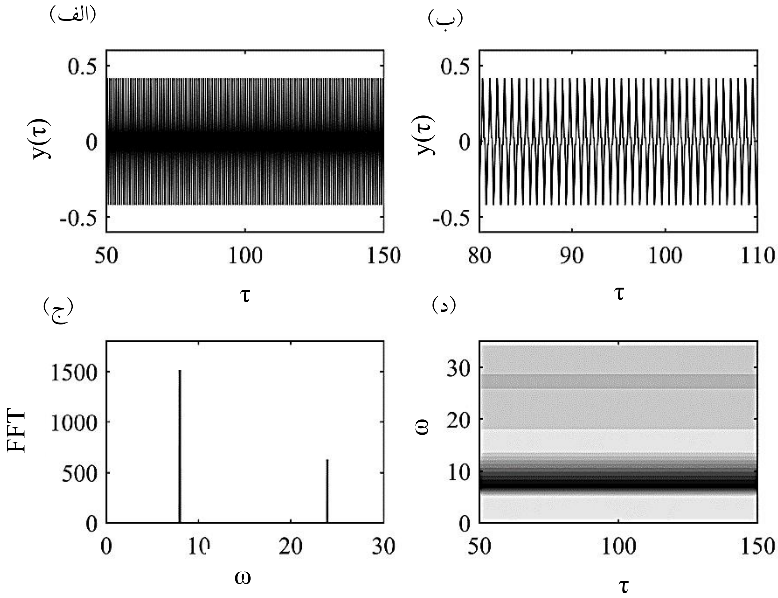
$$\nu_2 = 3\sigma_0 - \sigma_1 \qquad (۲۹)$$

با به‌کارگیری پاسخ (۲۷) و استفاده از تغییر متغیرهای فوق، معادلات مرتبه اول خودگردان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{p}_m + h_{1m}\left(p_1, p_2, q_1, q_2\right) = 0, & m = 1, 2 \\ \dot{q}_m + h_{2m}\left(p_1, p_2, q_1, q_2\right) = 0, & m = 1, 2 \end{cases} \qquad (۳۰)$$

در معادلات فوق h توابع غیرخطی از p، q و پارامترهای سیستم است. با انتگرال‌گیری عددی از معادلات فوق، پاسخ زمانی سیستم قابل استخراج است.

در ادامه شناسایی غیرپارامتریک پاسخ زمانی یک سیستم فرضی تحت تشدید داخلی یک به سه و اصلی مطابق روابط (۱۵) تا (۱۸)، مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعه پارامترهای این تیر و سیستم یک درجه به‌صورت $\{m = 0.8, \kappa = 72, \gamma_d = 0.01, s^* = 0.4, \varsigma_1 = 0.0025, \varsigma_2 = 0\}$ درنظر گرفته شده است. سیستم مورد نظر دارای فرکانس‌های طبیعی به‌صورت $\omega_1 = 5.4775+0.0005i$ و $\omega_2 = 16.4702+0.0129i$ است که بخش حقیقی آنها دارای تناسب یک به سه است [۲۱]. در پژوهش حاضر پاسخ زمانی سیستم به‌ازای اعمال نیرو با



شکل ۲- الف) پاسخ زمانی، ب) پاسخ زمانی بزرگنمایی شده، ج) تبدیل فوریه و د) تبدیل موجک مورلت پاسخ زمانی تیر حامل جرم- فنر- میراگر به‌ازای ۲/۵ = $\varepsilon\sigma_0$.

دامنه ۳۰۰ = f_0، فرکانس تحریک در حوالی فرکانس طبیعی اول، ضریب میرایی تیر ۰/۰۰۱ = γ و شرایط اولیه ۰ = $p_n = q_n$ استخراج شده است.

آنالیز زمان- فرکانس

در پژوهش‌های متعدد نشان داده شده است سیستم تحت تشدید اصلی و داخلی می‌تواند پاسخ زمانی متناوب، شبه متناوب و آشوبناک داشته باشد [۳۹ و ۴۰]. در میان پارامترهای متعدد که بر رفتار این پاسخ تأثیر می‌گذارند و باعث گذار این پاسخ از حالت متناوب به شبه متناوب و سپس آشوبناک می‌شود، فرکانس تحریک مهم‌ترین پارامتر به‌شمار می‌رود. بر این اساس با تغییر پارامتر تنظیم فرکانس تحریک، پاسخ زمانی پایای سیستم برای پنج حالت متفاوت استخراج شده است. لازم به‌ذکر است برای استخراج پاسخ ناپایدار لازم است که شرایط اولیه معادلات (۳۰) بر اساس روش سعی و خطا، با اغتشاش بسیار جزئی درنظر گرفته شود [۴۱]. در شکل‌های (۲) تا (۶) پاسخ زمانی محل ۰/۲۵ = s، $y(\tau) = u(۰/۲۵,\tau)$، در دو بازه زمانی متفاوت به‌همراه تبدیل فوریه و تبدیل موجک مورلت آن نشان داده شده است. این تبدیل برای آنالیز زمان- فرکانس و درک بهتر رفتار فرکانسی سیستم به‌خصوص در حالت غیرخطی سودمند است.

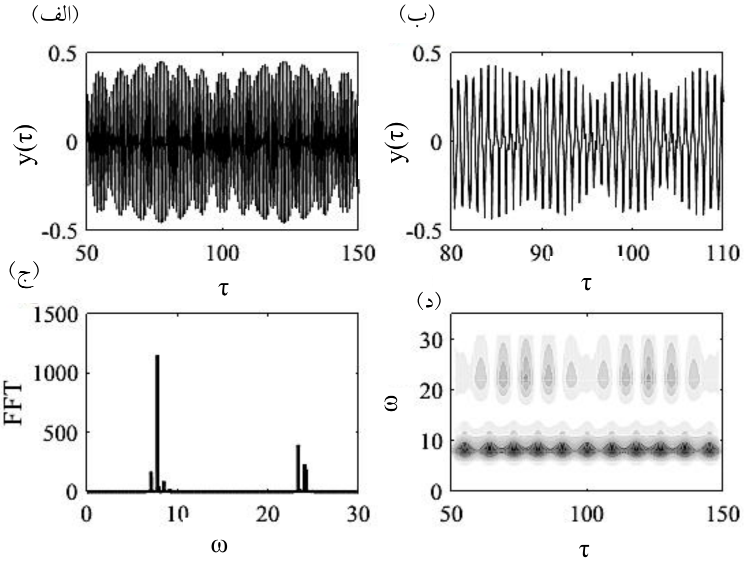
با توجه به شکل (۲)، پاسخ زمانی پایا، متناوب بوده و دارای دامنه ارتعاشی پایدار است. پاسخ فرکانسی نیز نشان می‌دهد که با وجود تحریک فرکانس اول، به‌سبب وجود تشدید داخلی در سیستم، فرکانس دوم نیز در پاسخ حضور دارد. همچنین با توجه به تبدیل موجک مورلت مشخص می‌شود که میزان قدرت فرکانس های تشدید و انرژی متناظر با آنها در طول زمان ثابت است.

با کاهش پارامتر تنظیم، در شکل‌های (۳) تا (۵) مشاهده می‌شود که پاسخ زمانی شبه متناوب بوده و دامنه آن پایدار نیست. همچنین از پاسخ فرکانسی و تبدیل موجک می‌توان نتیجه گرفت که سطح انرژی فرکانس اول و دوم به‌صورت شبه متناوب در حال تغییر است. لازم به‌ذکر است در حضور تعاملات مودال با تغییر سطح انرژی پی‌درپی، پاسخ زمانی ماهیت ناپایا دارد و تبدیل فوریه برابر با میانگین زمانی رفتار فرکانسی سیستم است. با کاهش بیشتر پارامتر تنظیم در شکل (۶)، دامنه پاسخ به‌شدت ناپایدار شده و رفتار پاسخ زمانی آشوبناک می‌شود. در این شرایط با وجود دو فرکانس اصلی

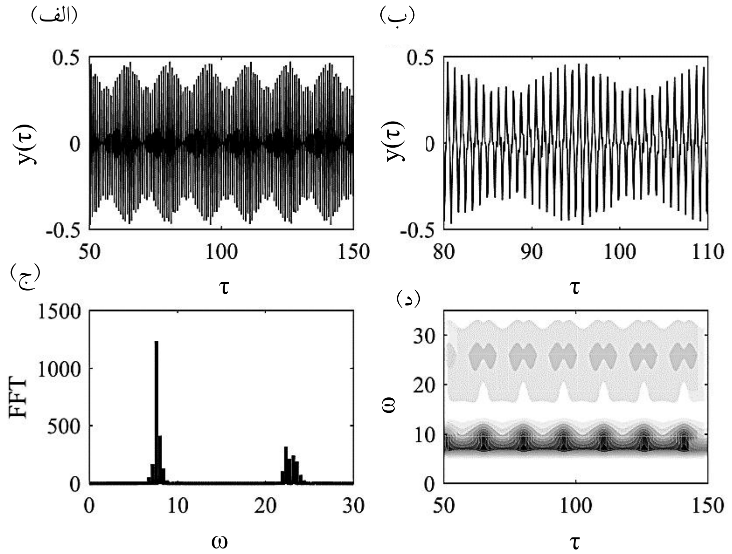
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]

[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]



شکل ۳- الف) پاسخ زمانی، ب) پاسخ زمانی بزرگنمایی شده، ج) تبدیل فوریه و د) تبدیل موجک مورلت پاسخ زمانی تیر حامل جرم- فنر- میراگر به‌ازای $\varepsilon\sigma_\circ = ۲/۳$

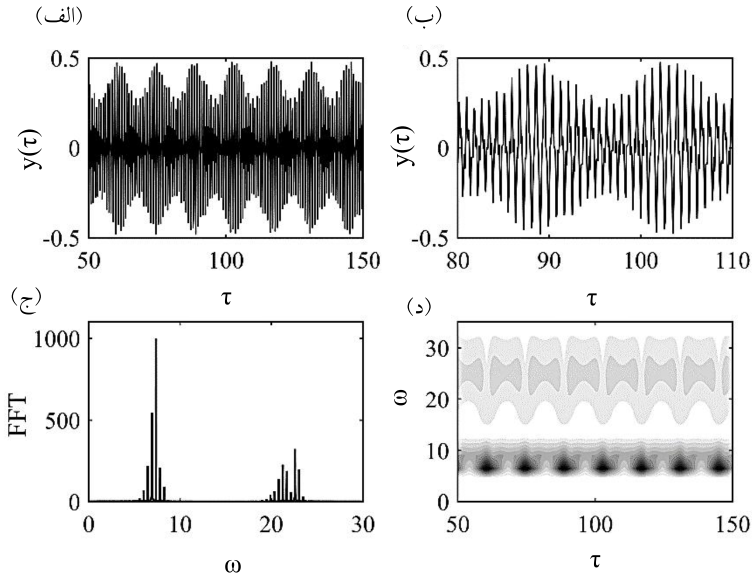


شکل ۴- الف) پاسخ زمانی، ب) پاسخ زمانی بزرگنمایی شده، ج) تبدیل فوریه و د) تبدیل موجک مورلت پاسخ زمانی تیر حامل جرم-فنر-میراگر به‌ازای $\varepsilon\sigma_\circ = ۲/۱$

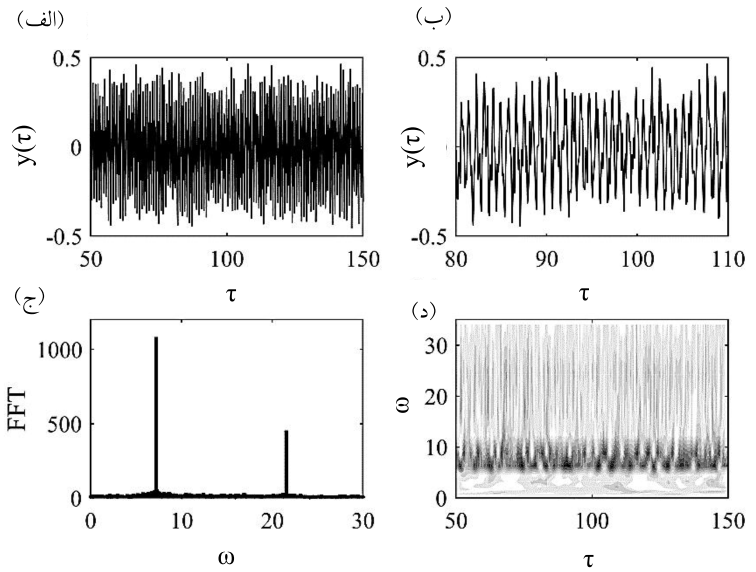
قدرتمند در تبدیل فوریه، در تمامی بازه مؤلفه‌های فرکانسی وجود دارد. این مسئله در تبدیل موجک به‌راحتی قابل مشاهده است و به‌عبارتی تعاملات مودال شدیدتر می‌شود. تبدیل فوریه نشان داده شده در شکل (۶) میانگین زمانی از تبدیل موجک است و نتایج عددی آن به لحاظ رفتار دقیق فرکانسی به‌علت ناپایا بودن سیگنال قابل اعتماد نیست.

علاوه بر نکات فوق، لازم به‌ذکر است که به‌ازای برخی از مقادیر پارامتر تنظیم، پدیده مشابه به ضربان رخ می‌دهد. این پدیده در شرایط تشدید داخلی با پاسخ زمانی شبه متناوب و دامنه ارتعاشی ناپایدار اتفاق می‌افتد. در ادامه با شناسایی

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]



شکل ۵- الف) پاسخ زمانی، ب) پاسخ زمانی بزرگنمایی شده، ج) تبدیل فوریه و د) تبدیل موجک مورلت پاسخ زمانی تیر حامل جرم- فنر- میراگر به ازای $\varepsilon\sigma_0 =$ ۱/۹



شکل ۶- الف) پاسخ زمانی، ب) پاسخ زمانی بزرگنمایی شده، ج) تبدیل فوریه و د) تبدیل موجک مورلت پاسخ زمانی تیر حامل جرم- فنر- میراگر به‌ازای $\varepsilon\sigma_0 =$ ۱/۷

غیرپارامتریک سیستم، تعامل مودال همراه با ضربان بر اساس مؤلفه‌های اصلی پاسخ زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳- دینامیک جریان آهسته سیستم

در بخش قبل، پاسخ زمانی و مکانی تیر به‌صورت $u(s, \tau)$ استخراج شد، برای شناسایی غیرپارامتریک سیستم از پاسخ زمانی تیر در محل s = ۰/۲۵، به‌صورت $y(\tau) = u($۰/۲۵$,\tau)$، استفاده شده است. این تغییر متغیر برای خلاصه‌نویسی به‌کار گرفته شده و در این بخش و بخش‌های بعد از $y(\tau)$ به‌عنوان پاسخ زمانی سیستم استفاده شده است. به‌منظور شناسایی

غیرخطی سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر تحت تشدید داخلی از هم‌ارزی دینامیک جریان آهسته تئوری و تجربی استفاده شده است. با توجه به اینکه پاسخ ارتعاشی هر نقطه از سیستم دارای دو فرکانس اصلی به‌صورت $\omega_1>\omega_2$ است لذا می‌توان پاسخ ارتعاشی را به‌صورت رابطه (۳۱) نوشت. لازم به‌ذکر است که فرکانس اصلی اول و دوم به‌ترتیب با فرکانس تشدید غیرخطی دوم و اول متناظر است:

$$y(\tau)=y_1(\tau)+y_2(\tau) \tag{۳۱}$$

در رابطه فوق $y_i(\tau)$ مؤلفه‌ای از پاسخ است که در آن تنها فرکانس ω_i موجود باشد. مطابق روش مختلط‌سازی [۴۲ و ۴۳]، برای هر مؤلفه از پاسخ، تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_i(\tau)=\dot{y}_i(\tau)+j\omega_i y_i(\tau)\equiv\beta_i(\tau)e^{j\omega_i\tau} \quad j=\sqrt{-1} \tag{۳۲}$$

در رابطه (۳۲) β_i و $e^{j\omega_i\tau}$ به‌ترتیب اجزای جریان آهسته و سریع پاسخ دینامیکی هستند. برای استفاده از این مفاهیم لازم است توابع مود ذاتی سیستم به‌عنوان مؤلفه‌های تک فرکانسی پاسخ استخراج شود که در بخش بعد با به‌کارگیری روش تجزیه مود تجربی پیشرفته انجام می‌گیرد.

۴- استخراج توابع مود ذاتی

مرحله اول و اساسی شناسایی غیرخطی سیستم، استخراج توابع مود ذاتی با به‌کارگیری روش تجزیه مود تجربی است. این توابع به‌عنوان مؤلفه تک فرکانسی پاسخ در دینامیک جریان آهسته استفاده می‌شود [۳].

روش تجزیه مود تجربی سیگنال موجود، $y(\tau)$، را به مؤلفه‌های تک جزئی، $c_j(\tau)$، تجزیه می‌کند [۲۳]:

$$y(\tau)=\sum_{i=1}^{m}c_i(\tau)+R_{m+1}(\tau) \qquad R_{m+1}(\tau)<tol \tag{۳۳}$$

که در آن R_{m+1} باقیمانده سیگنال پس از استخراج m تعداد مؤلفه است. مؤلفه‌های به‌دست آمده از این روش به‌عنوان توابع مود ذاتی شناخته می‌شوند و دارای دو ویژگی ضروری هستند:

- باید مجموع تعداد کمینه‌ها و بیشینه‌ها با تعداد صفرهای این توابع برابر و یا تنها یک اختلاف بین آنها وجود داشته باشد.
- میانگین منحنی‌های پوش گذرنده از نقاط بیشینه و کمینه نسبی باید برابر صفر باشد.

مراحل الگوریتم روش تجزیه مود تجربی که به فرایند غربال نیز معروف است به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

۱- استخراج تمام نقاط بیشینه نسبی، M_i، و کمینه نسبی، m_i، سیگنال

۲- برازش منحنی‌های $e_{max}(\tau)$ و $e_{min}(\tau)$ گذرنده از این نقاط

۳- محاسبه $R_i(\tau)=(e_{max}(\tau)+e_{min}(\tau))/2$

۴- کم‌کردن $R_i(\tau)$ از سیگنال و به‌دست آوردن $r(\tau)$

۵- تکرار مراحل ۱ تا ۴ تا زمانی‌که مقدار $R_i(\tau)$ کمتر از حداقل مقدار معین tol شود.

۶- با برقراری شرط موجود در ۵، سیگنال $r(\tau)$ به‌عنوان تابع مود ذاتی $c(\tau)$ متناظر با بیشترین فرکانس موجود در سیگنال درنظر گرفته می‌شود.

۷- تابع مود ذاتی به‌دست آمده از سیگنال کم می‌شود و تا زمانی که باقیمانده از مقدار tol بیشتر باشد، مراحل ۱ تا ۶ تکرار می‌شود.

پس از استخراج این توابع، لازم است که رفتار فرکانسی هریک به‌منظور بررسی صحت فرایند غربال مطالعه شود. بر این اساس اگر هر یک از این توابع دارای یک فرکانس اصلی باشد، می‌توان پاسخ دینامیکی سیستم حاضر را به‌صورت زیر بسط داد:

$$y(\tau)\approx c_1(\tau)+c_2(\tau) \tag{۳۴}$$

با مقایسه دو رابطه (۳۱) و (۳۴) مشخص می‌شود که می‌توان در تئوری دینامیک جریان آهسته مطابق رابطه (۳۲) از مقادیر تجربی $c(\tau)$ استفاده کرد.

روش تجزیه مود تجربی در عین سادگی می‌تواند منجر به استخراج توابع غیرمتعامد و جعلی شود، به‌خصوص در شرایطی که سیستم غیرخطی و پاسخ زمانی ناپایا باشد [۴۴]. مطالعات متعددی برای رفع مشکلات این روش ارائه شده است که یکی از آنها استفاده از روش تجزیه مود تجربی پیشرفته است [۴۵]. در این مطالعه نیز به‌علت حضور تشدید داخلی و اختلاط مودهای ارتعاشی که باعث پاسخ زمانی به‌شدت غیرخطی در

سیستم می‌شود، از رویکرد پیشرفته استفاده شده است. بنابراین در ادامه توضیحات پیرامون این روش ارائه می‌شود.

۴-۱- روش تجزیه مود تجربی پیشرفته

حضور اثر ناپایا در سیگنال که ناشی از غیرخطی بودن سیستم است می‌تواند سبب استخراج توابع مود جعلی، اختلاط مودها، پدیده گیبس و عدم تعامد شود. برای جلوگیری از این مشکلات در رویکرد پیشرفته، دو روش سیگنال‌های تصویر آینه‌ای و پوششی به فرایند تجزیه مود که در بخش قبل توضیح داده شد اضافه می‌شود [۳۰، ۳۲، ۴۶ و ۴۷].

ایده اصلی اضافه‌کردن تصویر آینه‌ای از سیگنال به سیگنال اصلی برای جلوگیری از تأثیر شرایط اولیه بر توابع مود ذاتی و پدید آمدن اثر گیبس است. درصورتی که سیگنال اصلی به‌صورت $y(\tau),\ \tau \in [0, \tau_f]$ فرض شود، سیگنال تصویر آینه‌ای آن به‌صورت $y_{mirror}(\tau),\ \tau \in [-\tau_f, 0]$ درنظر گرفته می‌شود و عملیات تجزیه مود تجربی مطابق بخش قبل برای سیگنال $\hat{y} = \{y_{mirror}, y\}^T, \tau \in [-\tau_f, \tau_f]$ انجام می‌شود. لازم به‌ذکر است که سیگنال تصویر آینه‌ای به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$y_{mirror}(\tau) = \begin{cases} y(-\tau), & |\dot{y}(0)| \simeq 0 \\ -y(-\tau), & |\dot{y}(0)| \neq 0 \end{cases} \tag{۳۵}$$

در رویکرد پیشرفته علاوه بر ایده فوق، از سیگنال‌های پوششی، $y_{masking}(\tau)$، نیز استفاده می‌شود. هدف اصلی استفاده از این سیگنال‌ها جلوگیری از اختلاط مودها و عدم تعامد ناشی از غیرخطی بودن رفتار سیستم است. مطابق این روش، آنالیز تجزیه مود تجربی برای سیگنال‌های $\hat{y}^+$ و $\hat{y}^-$ انجام می‌شود و توابع c^+ و c^- به‌دست می‌آید. این سیگنال‌ها از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$\hat{y}^+(\tau) = \hat{y}(\tau) + y_{masking}(\tau) \tag{۳۶}$$

$$\hat{y}^-(\tau) = \hat{y}(\tau) - y_{masking}(\tau) \tag{۳۷}$$

با استخراج توابع c^+ و c^- توابع مود ذاتی نهایی بر اساس رابطه (۳۸) به‌دست می‌آید:

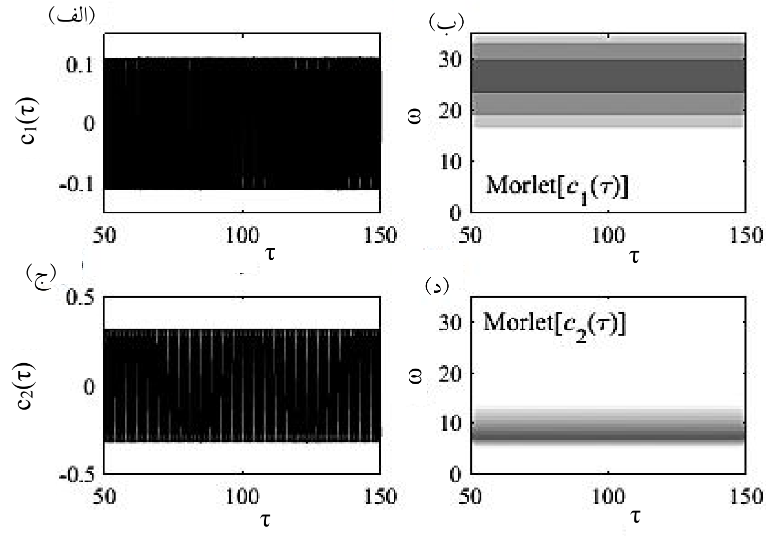
$$c(\tau) = \left[c^+(\tau) + c^-(\tau)\right] / 2 \tag{۳۸}$$

لازم به‌ذکر است که نحوه استفاده از این رویکرد را می‌توان به‌صورت مفصل در مرجع [۳۲] یافت. در این مطالعه پارامترهای سیگنال‌های پوششی به‌کار گرفته شده برای استخراج هر یک از توابع مود ذاتی با استفاده از روش سعی و خطا، به گونه‌ای تعیین شده است که نتایج مطالعه رفتار فرکانسی توابع نهایی به‌دست آمده، قابل قبول باشد. در ادامه با استفاده از رویکرد توضیح داده شده، توابع مود ذاتی پاسخ ارتعاشی سیستم استخراج شده است.

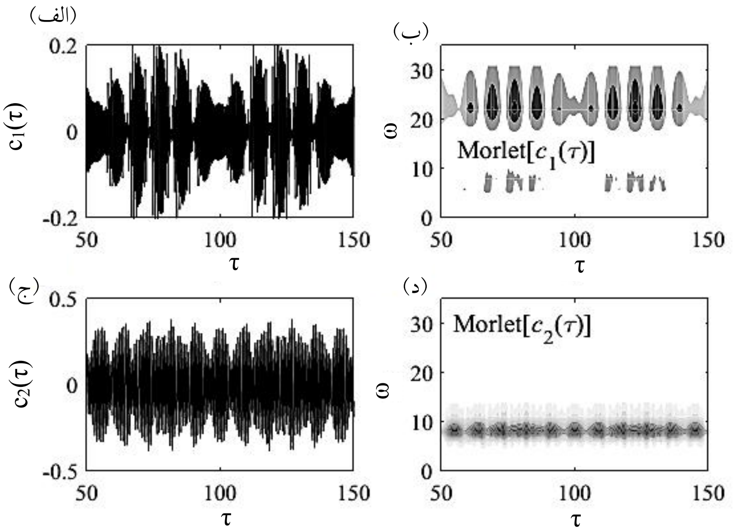
شکل‌های (۷) تا (۱۱) دو تابع مود ذاتی به‌همراه تبدیل موجک مورلت را برای پاسخ زمانی شکل‌های (۲) تا (۶)، نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها مشاهده می‌شود که میزان اختلاط مودهای ارتعاشی وابسته به پارامتر تنظیم است و با وجود تک‌جزئی بودن توابع مود، اختلاط مود در شرایط دامنه ناپایدار کاملاً برطرف نمی‌شود. با توجه به شکل (۷) مشخص می‌شود که پاسخ ارتعاشی با دامنه پایدار، حتی در حضور تشدید داخلی، شامل توابع مود ذاتی پایدار است؛ به‌عبارتی تعاملات مودال غیرخطی به‌شکل پایا رخ می‌دهد. درحالی که در شکل‌های (۸) تا (۱۱) توابع مود ذاتی همانند پاسخ ارتعاشی ناپایدار هستند. در شرایطی که پاسخ زمانی ناپایدار و شبه متناوب باشد (شکل‌های ۸ تا ۱۰)، تشدید داخلی و تعامل مودال از طریق تغییرات پی‌درپی سطح انرژی توابع مود ذاتی و پدیده ضربان رخ می‌دهد. درحالی که در مورد پاسخ زمانی آشوبناک (شکل ۱۱) تعامل مودال غیرخطی و ناپایا بوده و تغییرات سطح انرژی تبدیل موجک مورلت به‌صورت آشوبناک اتفاق می‌افتد. نکته جالب توجه در شکل‌های (۸) تا (۱۱) این است که با کاهش پارامتر تنظیم و گذر پاسخ ارتعاشی از حالت شبه متناوب به آشوبناک، تابع مود ذاتی اول بیشتر از تابع مود ذاتی دوم تحت تأثیر قرار می‌گیرد. به‌عبارتی پدیده ضربان در فرکانس تشدید بالاتر، سریع‌تر به رفتار غیرمتناوب و آشوبناک تبدیل می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]



شکل ۷- الف) تابع مود ذاتی اول، ب) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی اول، ج) تابع مود ذاتی دوم و د) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی دوم از پاسخ زمانی پایدار به‌ازای $\varepsilon\sigma_{\circ} = ۲/۵$



شکل ۸- الف) تابع مود ذاتی اول، ب) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی اول، ج) تابع مود ذاتی دوم و د) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی دوم از پاسخ زمانی ناپایدار به‌ازای $\varepsilon\sigma_{\circ} = ۲/۳$

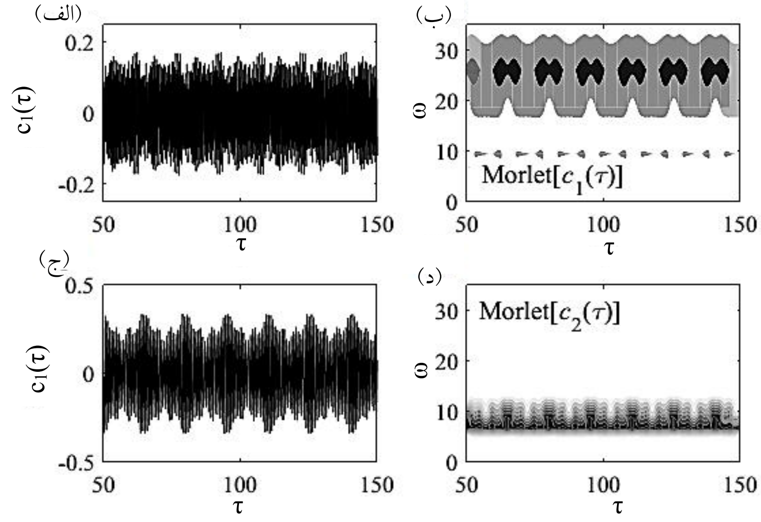
۵- شناسایی ضربان ناشی از تشدید داخلی

نوسان‌گرهای مودال اصلی که سیستم‌های یک درجه آزادی خطی میرا تحت نیروی خارجی هستند، مدل تعاملی غیرخطی سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر را تشکیل می‌دهند. پاسخ هر یک از این نوسان‌گرها مؤلفه‌های اصلی متناظر با فرکانس ω_m است؛ بنابراین هر یک از نوسان‌گرها را برای سیستم حاضر می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

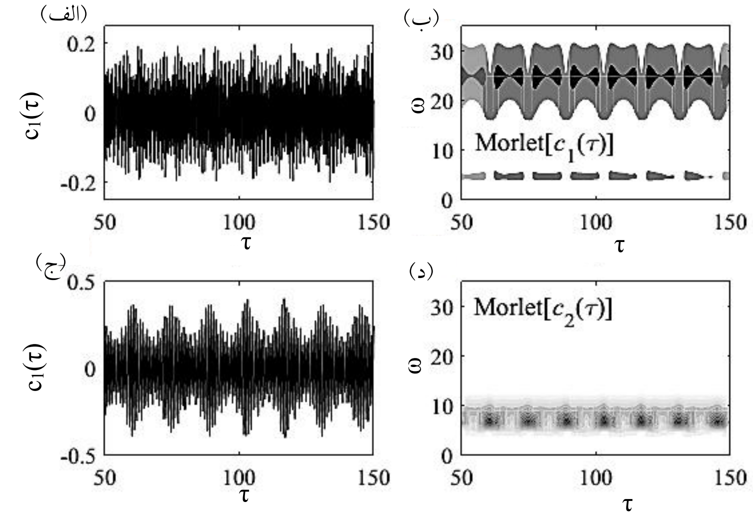
$$\ddot{y}_i(\tau)+۲\lambda_i\omega_i\dot{y}_i(\tau)+\omega_i^۲y_i(\tau)=\tilde{F}_i(\tau), \quad i=۱,۲ \qquad (۳۹)$$

با توجه به هم‌ارزی ارائه شده در دینامیک جریان آهسته سیستم، رابطه (۳۹) برای هر یک از توابع مود ذاتی نیز می‌تواند برقرار

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]



شکل ۹- الف) تابع مود ذاتی اول، ب) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی اول، ج) تابع مود ذاتی دوم و د) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی دوم از پاسخ زمانی ناپایدار به ازای $\varepsilon\sigma_\circ =$ ۲/۱



شکل ۱۰- الف) تابع مود ذاتی اول، ب) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی اول، ج) تابع مود ذاتی دوم و د) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی دوم از پاسخ زمانی ناپایدار به‌ازای $\varepsilon\sigma_\circ =$ ۱/۹

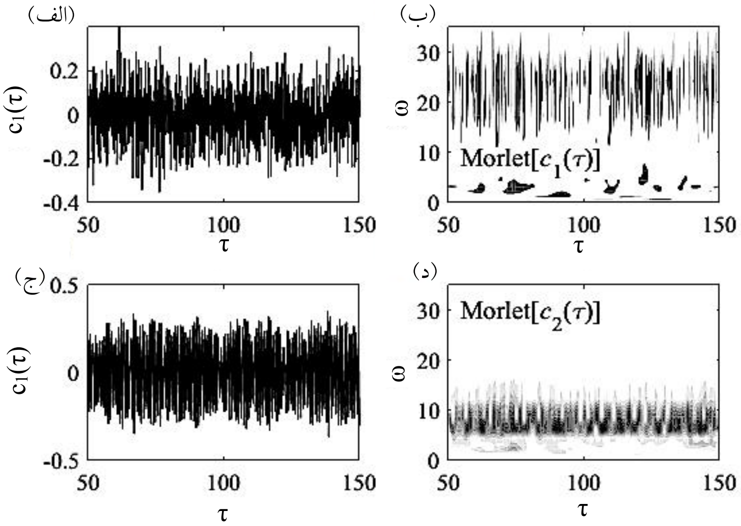
باشد. در رابطه (۳۹)، ω_i فرکانس اصلی تابع مود ذاتی i ام است و λ_i نسبت میرایی نوسان‌گر است که بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات [۴۸] به‌گونه‌ای انتخاب شده است که خطای پیش‌بینی کمینه شود. نیروی $\tilde{F}$ نیز دارای بخش دینامیک سریع با فرکانس ω_i به‌صورت زیر است [۳۶]:

$$\tilde{F}_i(\tau) = \mathrm{Re}\left\{\Lambda_i(\tau) e^{j\omega_i t}\right\}, \quad i = ۱,۲ \qquad (۴۰)$$

در این رابطه Λ_i دامنه مختلط و وابسته به نیروی نوسان‌گر مودال اصلی است. حال می‌توان با به‌کارگیری هم‌ارزی (۳۲) و روابط (۳۹) و (۴۰)، دامنه نیرو را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\Lambda_i(\tau) = ۲\left[\ddot{\beta}_i(\tau) + \lambda_i\omega_i\beta_i(\tau)\right] - j\left[\frac{\ddot{\beta}_i(\tau)}{\omega_i} + ۲\lambda_i\dot{\beta}_i(\tau)\right] \qquad (۴۱)$$

به‌منظور شناسایی اثر ضربان ناشی از تشدید داخلی بر



شکل ۱۱- الف) تابع مود ذاتی اول، ب) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی اول، ج) تابع مود ذاتی دوم و د) تبدیل موجک مورلت تابع مود ذاتی دوم از پاسخ زمانی ناپایدار به‌ازای $\varepsilon\sigma_0 = 1/7$

ویژگی‌های نوسان‌گرهای مودال اصلی، در ادامه پدیده ضربان در یک سیستم یک درجه آزادی تحلیل شده است.

ساده‌ترین سیستم که در آن پدیده ضربان را می‌توان مورد تحلیل قرار داد، به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\ddot{y}(\tau)+2\zeta\omega\dot{y}(\tau)+\omega^2 y(\tau)=\cos\Omega\tau \qquad (۴۲)$$

در شرایط بدون ضربان ($\Omega\neq\omega$)، پاسخ پایای سیستم یک درجه آزادی (۴۲) به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$y(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\cos\left(\Omega\tau+\varphi_0\right) \qquad (۴۳)$$

که در آن φ_0 اختلاف فاز ناشی از حضور میرایی در سیستم است. با مختلط‌سازی پاسخ فوق بر اساس رابطه (۳۲)، جزء جریان آهسته به‌دست می‌آید که با جایگذاری آن در رابطه (۴۱)، لگاریتم قدر مطلق دامنه مختلط نیرو به شکل زیر استخراج می‌شود:

$$\ln\left(\left|\Lambda\right|(\tau)\right)=\ln\left(\frac{2\lambda\omega\Omega}{\sqrt{\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega\Omega\right)^2}}\right) \qquad (۴۴)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که دامنه مختلط نیروی نوسان‌گرهای مودال اصلی در عدم حضور پدیده ضربان مقدار ثابتی بوده و دارای تغییرات زمانی صفر است.

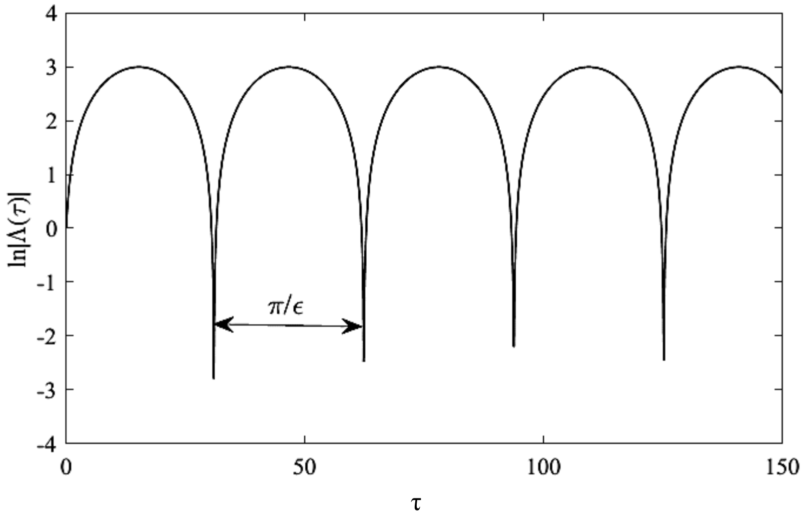
در شرایطی که سیستم ارتعاشی در حال تجربه پدیده ضربان باشد ($\Omega=\omega+2\varepsilon$)، لازم است که پاسخ پایا به‌شکل زیر فرض شود:

$$y(\tau)=\frac{2}{\Omega^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\Omega+\omega}{2}\tau\right)\sin\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\tau\right) \qquad (۴۵)$$

در رابطه فوق برای سادگی عملیات ریاضی، از اثر میرایی صرف نظر شده است. با مختلط‌سازی پاسخ فوق بر اساس رابطه (۳۲)، جزء جریان آهسته به‌دست می‌آید که با جایگذاری آن در رابطه (۴۱)، لگاریتم قدر مطلق دامنه مختلط نیرو در حضور ضربان، به‌شکل زیر استخراج می‌شود:

$$\ln\left(\left|\Lambda\right|(\tau)\right)\approx \ln\left(\frac{\sqrt{2\lambda^2\omega^2\left(1-\cos 2\varepsilon\tau\right)+4\varepsilon\left(\lambda\omega\sin 2\varepsilon\tau+\varepsilon\right)}}{2\varepsilon}\right) \qquad (۴۶)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که دامنه لگاریتمی نیروی نوسان‌گر مودال در حضور پدیده ضربان تابع زمان بوده و نوع تغییرات زمانی آن می‌تواند نشان‌دهنده رفتار تشدید داخلی ناپایدار در سیستم باشد. برای بررسی تأثیر ضربان بر تغییرات این پارامتر،



شکل ۱۲- تغییرات لگاریتم دامنه مختلط نیروی نوسان‌گر مودال در حضور پدیده ضربان به‌ازای $\varepsilon = ۰/۱$، $\lambda = ۰/۱$ و $\omega = ۲۰$.

دامنه لگاریتمی در شکل (۱۲) نشان داده شده است. با توجه به این شکل مشخص می‌شود که در محل دور از گره در پاسخ زمانی، شیب این نمودار صفر است و رفتار دامنه نیرو شبیه به حالت بدون ضربان است. درحالی که در محل گره در پاسخ زمانی، شیب نمودار بی‌نهایت است.

با توجه به تحلیل ارائه شده، پارامتر لگاریتمی دامنه مختلط برای نوسان‌گرهای مودال اصلی برای پنج حالت پایداری در شکل (۱۳) رسم شده است. برای هر پاسخ ارتعاشی، دو نوسان‌گر مودال اصلی استخراج شده و در شکل (۱۳) نیز n نشان‌دهنده نوسان‌گر متناظر با تابع مود ذاتی n ام است. با توجه به این شکل، مشخص می‌شود که حضور تشدید داخلی در شرایط پاسخ زمانی پایدار سبب به‌وجود آمدن پدیده ضربان نمی‌شود و تنها در شرایط دامنه ناپایدار، پدیده ضربان ناشی از تشدید داخلی رخ می‌دهد. حضور شیب نزدیک به بی‌نهایت که نشان‌دهنده ضربان است در شرایط پاسخ شبه متناوب و آشوبناک اتفاق می‌افتد؛ رفتار این پارامتر نیز متناسب با رفتار پاسخ زمانی متناوب و غیرمتناوب است و با نزدیک شدن به رفتار آشوبناک مقدار دوره تناوب کاهش می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که در شرایط پاسخ زمانی کاملاً آشوبناک، دامنه مختلط نیز متناوب نیست. همچنین مشاهده می‌شود که دامنه مختلط نیرو برای دو نوسان‌گر مودال متفاوت، رفتار مشابهی دارند و تنها مقدار دامنه آن متفاوت است. به‌عبارتی وجود یک منبع خارجی مشخص در حضور تشدید داخلی، تنها با سطح انرژی متفاوت هریک از مودهای درگیر را تحریک می‌کند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه تعاملات مودال غیرخطی در سیستم تیر- جرم- فنر- میراگر بر اساس روش غیرپارامتریک شناسایی شده است. پس از استخراج پاسخ مدل تحت تشدیدهای داخلی یک به سه و اصلی، رفتار پایداری مؤلفه‌های تک فرکانسی پاسخ سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. مهم‌ترین مشاهدات و نتایج این پژوهش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

۱- قدرت فرکانسی مودهای ارتعاشی سیستم در شرایط پاسخ زمانی پایدار ثابت است و تعامل مودال به‌شکل پایا رخ می‌دهد.

۲- قدرت فرکانسی مودهای ارتعاشی سیستم در شرایط پاسخ زمانی ناپایدار به شکل شبه متناوب در حال کاهش و افزایش است؛ به‌عبارتی تعامل مودال به‌صورت ناپایا رخ می‌دهد.

۳- رفتار آشوبناک در سیستم بیشتر ناشی از تابع مودی است که به‌طور مستقیم توسط نیروی خارجی تحریک نشده است. به‌عبارتی آشوب در مودی اتفاق می‌افتد که از طریق مکانیزم تشدید داخلی تحریک می‌شود.

۴- حضور تشدید داخلی در شرایط پاسخ زمانی پایدار سبب

به‌وجود آمدن پدیده ضربان نمی‌شـود و تنهـا در شـرایط دامنـه ناپایدار، پدیده ضربان ناشی از تشدید داخلی رخ می‌دهد.

۵- تابع دامنه مختلط هر یک از نوسان‌گرهای مـودال اصـلی در مدل تعاملی غیرخطی می‌تواند نوع تعامـل را بـه‌لحـاظ پایـا یـا ناپایابودن مشخص کند.

۶- محدودیت اساسی رویکرد حاضر، لزوم حضور فرکانس‌های اصلی قابل تشخیص در پاسخ فرکانسی سیستم است بـه‌طـوری که توابع مود ذاتی تک فرکانسی قابل استخراج باشد.

واژه‌نامه

1. Hilbert-Huang
2. nonlinear auto-regressive moving average with exogeneous input
3. vibro-impact
4. non-stationary

مراجع

1. Laura, P., Susemihl, E., Pombo, J., Luisoni, L., and Gelos, R., “On the Dynamic Behaviour of Structural Elements Carrying Elastically Mounted, Concentrated Masses”, *Applied Acoustics,* Vol. 10, No. 2, pp. 121-145, 1977.
2. Hijmissen, J., Van den Heuvel, N., and Van Horssen, W., “On the Effect of the Bending Stiffness on the Damping Properties of a Tensioned Cable with an Attached Tuned-Mass-Damper”, *Engineering Structures,* Vol. 31, No. 5, pp. 1276-1285, 2009.
3. Sadeghi, M. H., and Lotfan, S., “Nonparametric System Identification of a Cantilever Beam Model with Local Nonlinearity in the Presence of Artificial Noise”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 177-186, 2017.
4. Wu, J.-S., and Chen, D.-W., “Dynamic Analysis of a Uniform Cantilever Beam Carrying a Number of Elastically Mounted Point Masses with Dampers”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 229, No. 3, pp. 549-578, 2000.
5. Hamdan, M., and Jubran, B., “Free and Forced Vibrations of a Restrained Uniform Beam Carrying an Intermediate Lumped Mass and a Rotary Inertia”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 150, No. 2, pp. 203-216, 1991.
6. Bambill, D., and Rossit, C., “Forced Vibrations of a Beam Elastically Restrained Against Rotation and Carrying a Spring-Mass System”, *Ocean Engineering,* Vol. 29, No. 6, pp. 605-626, 2002.
7. Kukla, S., and Posiadala, B., “Free Vibrations of Beams with Elastically Mounted Masses”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 175, No. 4, pp. 557-564, 1994.
8. Wu, J.-S., and Chen, D.-W. “Free Vibration Analysis of a Timoshenko Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems by using the Numerical Assembly Technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 50, No. 5, pp. 1039-1058, 2001.
9. Yesilce, Y., and Demirdag, O., “Effect of Axial Force on Free Vibration of Timoshenko Multi-Span Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems”, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 50, No. 6, pp. 995-1003, 2008.
10. Yesilce, Y., “Effect of Axial Force on the Free Vibration of Reddy-Bickford Multi-Span Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems”, *Journal of Vibration and Control*, 2009.
11. Zhang, Z., Chen, F., Zhang, Z., and Hua, H., “Vibration Analysis of Non-uniform Timoshenko Beams Coupled with Flexible Attachments and Multiple Discontinuities”, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 80, pp. 131-143, 2014.
12. Yesilce, Y., Demirdag, O., and Catal, S., “Free Vibrations of a Multi-Span Timoshenko Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems”, *Sadhana,* Vol. 33, No. 4, pp. 385-401, 2008.
13. Lin, H. -Y., and Tsai, Y.-C., “Free Vibration Analysis of a Uniform Multi-Span Beam Carrying Multiple Spring-Mass Systems”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 302, No. 3, pp. 442-456, 2007.
14. Nicholson, J. W., and Bergman, L. A., “Free Vibration of Combined Dynamical Systems”, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 112, No. 1, pp. 1-13, 1986.
15. Pakdemirli, M., and Nayfeh, A., “Nonlinear Vibrations of a Beam-Spring-Mass System”, *Journal of Vibration and Acoustics,* Vol. 116, No. 4, pp. 433-439, 1994.
16. Ghayesh, M. H., Kazemirad, S., and Darabi, M. A., “A General Solution Procedure for Vibrations of Systems with Cubic Nonlinearities and Nonlinear/Time-Dependent Internal Boundary Conditions, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 330, No. 22, pp. 5382-5400, 2011.
17. Eftekhari, M., Ziaei-Rad, S., and Mahzoon, M., “Vibration Suppression of a Symmetrically Cantilever Composite Beam using Internal Resonance under Chordwise Base Excitation”, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 48, pp. 86-100, 2013.
18. Barry, O., Oguamanam, D., and Zu, J., “Nonlinear Vibration of an Axially Loaded Beam Carrying Multiple Mass-Spring-Damper Systems”, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 77, No. 4, pp. 1597-1608, 2014.
19. Wang, Y. -R., and Liang, T. -W., Application of Lumped-Mass Vibration Absorber on the Vibration Reduction of a Nonlinear Beam-Spring-Mass System with Internal Resonances”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 350, pp. 140-170, 2015.
20. Ebrahimi Mamaghani, A., and Esameilzadeh Khadem, S., “Vibration Analysis of a Beam under External Periodic Excitation using a Nonlinear Energy Sink”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp.186-194, 2016
21. Sadeghi M. H., and Lotfan S., “Stability and Bifurcation Analysis of a Beam-Mass-Spring-Damper System under Primary and One-to-Three Internal Resonances”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp.166-176, 2017.

22. Lotfan, S., and Sadeghi, M. H., “Large Amplitude Free Vibration of a Viscoelastic Beam Carrying a Lumped Mass-Spring-Damper”, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 90, No. 2, pp. 1053-1075, 2017.
23. Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N.-C., Tung, C. C., and Liu, H. H., “The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-stationary Time Series Analysis”, *Proceeding of The Royal Society*, pp. 903-995, 1998.
24. Yan, J., and Deller, J., “NARMAX Model Identification using a Set-Theoretic Evolutionary Approach, *Signal Processing,* Vol. 123, pp. 30-41, 2016.
25. De Filippis, G., Noël, J.-P., Kerschen, G., Soria, L. and Stephan, C., *Experimental Nonlinear Identification of an Aircraft with Bolted Connections*, *in: Nonlinear Dynamics, Volume 1*, Eds., Springer, pp. 263-278, 2016.
26. Staszewski, W., “Analysis of Non-linear Systems using Wavelets”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 214, No. 11, pp. 1339-1353, 2000.
27. Billings, S., Jamaluddin, H., and Chen, S., “Properties of Neural Networks with Applications to Modelling Non-Linear Dynamical Systems”, *International Journal of Control,* Vol. 55, No. 1, pp. 193-224, 1992.
28. Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., and Golinval, J. -C., “Past, Present and Future of Nonlinear System Identification in Structural Dynamics”, *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 20, No. 3, pp. 505-592, 2006.
29. Noël, J. -P., and Kerschen, G., “Nonlinear System Identification in Structural Dynamics: 10 More Years of Progress”, *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 83, pp. 2-35, 2017.
30. Lee, Y. S., Tsakirtzis, S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., and McFarland, D. M., “Physics-Based Foundation for Empirical Mode Decomposition”, *AIAA Journal,* Vol. 47, No. 12, pp. 2938-2963, 2009.
31. Lee, Y. S., Tsakirtzis, S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., and McFarland, D. M., “A Time-Domain Nonlinear System Identification Method Based on Multiscale Dynamic Partitions”, *Meccanica,* Vol. 46, No. 4, pp. 625-649, 2011.
32. Tsakirtzis, S., Lee, Y., Vakakis, A., Bergman, L., and McFarland, D., “Modelling of Nonlinear Modal Interactions in the Transient Dynamics of an Elastic Rod with an Essentially Nonlinear Attachment, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* Vol. 15, No. 9, pp. 2617-2633, 2010.
33. Kurt, M., Chen, H., Lee, Y. S., McFarland, D. M., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., “Nonlinear System Identification of the Dynamics of a Vibro-Impact Beam: Numerical Results, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 82, No. 10-11, pp. 1461-1479, 2012.
34. Eriten, M., Kurt, M., Luo, G., McFarland, D. M., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., “Nonlinear System Identification of Frictional Effects in a Beam with a Bolted Joint Connection”, *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 39, No. 1, pp. 245-264, 2013.
35. Chen, H., Kurt, M., Lee, Y. S., McFarland, D. M., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., “Experimental System Identification of the Dynamics of a Vibro-Impact Beam with a View Towards Structural Health Monitoring and Damage Detection”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 46, No. 1, pp. 91-113, 2014.
36. Kurt, M., Eriten, M., McFarland, D. M., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., “Strongly Nonlinear Beats in the Dynamics of an Elastic System with a Strong Local Stiffness Nonlinearity: Analysis and Identification”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 333, No. 7, pp. 2054-2072, 2014.
37. Ghayesh, M. H., Kazemirad, S., Darabi, M. A., and Woo, P., “Thermo-Mechanical Nonlinear Vibration Analysis of a Spring-Mass-Beam System”, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 82, No. 3, pp. 317-331, 2012.
38. Rezaee, M., and Lotfan, S., “Non-Linear Nonlocal Vibration and Stability Analysis of Axially Moving Nanoscale Beams with Time-Dependent Velocity”, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 96, pp. 36-46, 2015.
39. Huang, J., Su, R., Li, W., and Chen, S., “Stability and Bifurcation of an Axially Moving Beam Tuned to Three-to-One Internal Resonances”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 330, No. 3, pp. 471-485, 2011.
40. Chen, L. -Q., Zhang, G. -C., and Ding, H., “Internal Resonance in Forced Vibration of Coupled Cantilevers Subjected to Magnetic Interaction”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 354, pp. 196-218, 2015.
41. Hoover, W. G., Sprott, J. C., and Hoover, C. G., “Adaptive Runge-Kutta Integration for Stiff Systems: Comparing Nosé and Nosé–Hoover Dynamics for the Harmonic Oscillator”, *American Journal of Physics*, Vol. 84, No. 10, pp. 786-794, 2016.
42. Manevitch, L. I., *Complex Representation of Dynamics of Coupled Nonlinear Oscillators*, *in: Mathematical Models of Non-linear Excitations, Ttransfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and other Media*, Eds., Springer, pp. 269-300, 1999.
43. Manevitch, L., “The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators using Complex Variables”, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 25, No. 1-3, pp. 95-109, 2001.
44. Chen, Y., and Feng, M. Q., “A Technique to Improve the Empirical Mode Decomposition in the Hilbert-Huang Transform”, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration,* Vol. 2, No. 1, pp. 75-85, 2003.
45. Rato, R., Ortigueira, M., and Batista, A., “On the HHT, Its Problems, and Some Solutions”, *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 22, No. 6, pp. 1374-1394, 2008.
46. Vakakis, A., Bergman, L., McFarland, D., Lee, Y., and Kurt, M., “Current Efforts Towards a Non-linear System Identification Methodology of Broad Applicability”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, p. 0954406211417217, 2011.
47. Sadeghi, M. H., and Lotfan, S., “Identification of Non-Linear Parameter of a Cantilever Beam Model with Boundary Condition Non-linearity in the Presence of Noise: an NSI-and ANN-Based Approach”, *Acta Mechanica,* Vol. 228, No. 12, pp. 4451-4469, 2017.
48. Eberhart, R. C., and Shi, Y., “Particle Swarm Optimization: Developments, Applications and Resources, *Proceeding of, IEEE,* pp. 81-86, 2001.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.2.3]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.19]