

## تعیین تئوری- تجربی پارامترهای ترک غیرخطی در تیر ترک‌دار تحت ارتعاشات غیرخطی کم

دامنه

موسی رضائی\* و شیوا امیری جاهد  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۳/۰۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۱/۲۹)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.97

**چکیده-** در ارتعاش یک سازه ترک‌دار با دامنه نوسان اندک، الزاماً دهانه ترک به‌طور کامل باز و بسته نمی‌شود. در نتیجه به‌منظور ارائه مدل واقع بینانه از ترک باید ویژگی‌های ترک از جمله سفتی و میرایی وابسته به وضعیت باز و بسته شدن دهانه ترک در نظر گرفته شود. در این تحقیق مدل پیوسته‌ای برای ارتعاشات تیر با ترک خستگی در نوسانات کم دامنه ارائه شده است که در آن دهانه ترک هرگز به مرحله باز و بسته شدن کامل نمی‌رسد. با ارائه یک مدل غیرخطی از ترک، معادله ارتعاش تیر ترک‌دار استخراج شده است. برای لحاظ کردن رفتار غیرخطی و منظور کردن اتلاف انرژی در محل ترک، گشتاور خمشی در محل ترک به‌صورت یک تابع غیرخطی از اختلاف شیب و نرخ تغییرات زمانی اختلاف شیب در طرفین ترک در نظر گرفته شده است. با حل معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از تئوری اغتشاشات، اثر تغییر فرکانس ارتعاشات تیر برحسب دامنه استخراج شده و رابطه تحلیلی و صریح برای ضریب سفتی غیرخطی در محل ترک و ضریب میرایی در محل ترک ارائه شده است. سپس با استفاده از رابطه تحلیلی و نتایج آزمون تجربی به‌دست آمده از ارتعاش تیر ترک‌دار، ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میرایی در محل ترک به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: تیر یک‌سر گیردار ترک‌دار، ارتعاشات کم دامنه، ترک غیرخطی، روش مقیاس‌های چندگانه، اتلاف انرژی محلی.

## Theoretical-experimental Determination of Nonlinear Crack Parameters in the Cracked Beam under Nonlinear Low Amplitude Vibration

M. Rezaee\* and Sh. Amiri Jahed

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

**Abstract:** In the vibration of a cracked structure with small amplitude oscillations, the crack necessarily is not fully open or fully closed. Therefore, in order to provide a realistic model for the crack, one should relate the stiffness and damping at the crack location to the amount of the opening of the crack. In this study, a continuous model for vibration of a beam with a fatigue crack under low amplitude oscillations is presented in which the crack is not fully open or fully closed. By introducing a nonlinear model for the crack, the equation governing the vibration of the cracked beam is extracted. In order to consider the nonlinear behavior of the crack and to take into account the energy loss at the crack during the vibration, the bending moment at the crack location was considered as a nonlinear function of the angle of crack opening and its variations with respect to the

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

time. The governing nonlinear equation is solved using the perturbation method. The solution reveals the dependency of the resonance frequency on the vibration amplitude. Analytical and explicit expressions are also derived for the nonlinear stiffness coefficient and the damping coefficient of the crack at the crack location. Finally, using the derived expressions for the crack parameters and experimental tests results for cracked beam, the nonlinear stiffness coefficient and the damping coefficient at the crack location is obtained.

**Keywords:** Cracked cantilever beam, Low amplitude vibration, Nonlinear crack, Multiple scales method, Local energy loss.

#### فهرست علائم

$u_1(x, t)$	جابه‌جایی عرضی تیر در سمت چپ ترک	a	دامنه غیرخطی در حالت پاسخ پایا
$u_2(x, t)$	جابه‌جایی عرضی تیر در سمت راست ترک	C	ضریب میرایی پیچشی مدل‌سازی شده در محل ترک
$u_1^0$	تابع جابه‌جایی در سمت چپ ترک در مرتبه $\varepsilon^0$	$C_S$	ضریب میرایی سازه‌ای تیر
$u_2^0$	تابع جابه‌جایی در سمت راست ترک در مرتبه $\varepsilon^0$	E	مدول یانگ تیر
$u_{11}$	تابع جابه‌جایی در سمت چپ ترک در مرتبه $\varepsilon^1$	$f_0(t)$	نیروی تحریک در انتهای آزاد تیر
$u_{21}$	تابع جابه‌جایی در سمت راست ترک در مرتبه $\varepsilon^1$	I	ممان اینرسی سطح مقطع تیر
$V_i$	جمله غیرسکولار حل ارائه شده	J	ممان اینرسی جرمی ناشی از ملحقات متصل به تحریک کننده
$\varepsilon$	پارامتر اغتشاشات	$K_1$	ضریب سختی خطی مدل‌سازی شده در محل ترک
$\varphi_i$	جمله سکولار حل ارائه شده	$K_2$	ضریب سختی مکعبی مدل‌سازی شده در محل ترک
$\omega$	فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر	L	جرم واحد طول تیر
$\omega_i$	فرکانس طبیعی خطی حاصل از تست تجربی	$l_0$	فاصله ترک خستگی از انتهای گیردار تیر
$\bar{\omega}_i$	فرکانس پیش‌بینی شده از سیستم خطی مدل شده	M	جرم ملحقات متصل به تحریک کننده
$\Sigma$	پارامتر تنظیم	m	جرم واحد طول تیر
$\Omega$	فرکانس تحریک	$T_0$	مقیاس زمانی تند
		$T_1$	مقیاس زمانی کند

ظهور سوپرهارمونیک‌های فرکانس اصلی، اعوجاج در دیاگرام صفحه فاز و ایجاد پدیده انحراف سمتی می‌شود که با استفاده از این تغییرات می‌توان به حضور ترک در سازه پی برد. حضور ترک خستگی<sup>۱</sup> در یک سازه موجب بروز رفتار دینامیکی غیرخطی و نیز پیچیدگی‌های اساسی در استخراج حل تحلیلی می‌شود. حساسیت اثرات غیرخطی نسبت به حضور ترک بیشتر از حساسیت تغییرات فرکانس طبیعی و شکل مود نسبت به حضور ترک است. میزان اثرات غیرخطی وابسته به پارامترهای محل ترک (عمق و موقعیت) است [۱].

#### ۱- مقدمه

ترک یکی از مهم‌ترین آسیب‌های پنهانی است که باعث شکست ناگهانی سازه می‌شود. بنابراین شناسایی ترک در سازه‌های تیر مانند به وسیله آزمون‌های غیرمخرب و آنالیز رفتار دینامیکی آنها، یک چالش در حوزه عیب‌یابی سیستم‌های دینامیکی است. در اثر ایجاد ترک در سازه، انعطاف‌پذیری محلی آن افزایش می‌یابد. این پدیده منجر به ایجاد تغییراتی در خواص دینامیکی سازه از جمله تغییر فرکانس طبیعی، شکستگی در شکل مود، افزایش میرایی،

به دلیل کاهش سفتی در محل ترک برخی از محققان ترک را با یک فنر پیچشی بدون جرم معادل کرده‌اند. ایده فنر معادل اولین بار توسط ایروین [۲] به منظور بیان ارتباط بین بار و تمرکز انرژی کرنشی در حوالی نوک ترک در مقیاس میکروسکوپی ارائه شد. اغلب پژوهشگران در تحقیقات خود برای سادگی فرض کرده‌اند که دهانه ترک در حین ارتعاش همواره باز باقی می‌ماند که به این نوع مدل ارائه شده از ترک، مدل ترک باز می‌گویند. اغلب این مدل‌ها برای نشان دادن کاهش فرکانس طبیعی سازه‌های ترک‌دار و استفاده از آنها جهت عیب‌یابی به کار برده شده است. چنین مدل‌هایی قادر به پیش‌بینی سایر اثرات غیرخطی ناشی از حضور ترک نظیر افزایش میرایی در سیستم ارتعاشی نیست. مقصودی و همکاران [۳] ترک‌های موجود در تیر پله‌ای را با فنرهای پیچشی بدون جرم مدل‌سازی کرده و با استفاده از روش انرژی و شاخص آسیب به شناسایی محل و عمق ترک پرداختند. لو و همکاران [۴] با ارائه یک معادله ارتعاشی برای تیر ترک‌دار ماتریس جرم میرایی و سفتی را استخراج کردند. آنها ماتریس سفتی را به صورت اختلاف ماتریس المان سالم و ماتریس کاهش سفتی در المان سالم به دلیل حضور ترک باز استخراج کردند. افت فرکانس در ترک خستگی بسیار کمتر از ترک باز است. در نتیجه با ارائه مدل خطی از یک ترک خستگی، میزان حساسیت رفتار دینامیکی سازه نسبت به حضور ترک از مدل واقعی ترک کمتر بوده و در حوزه عیب‌یابی سازه مقدار شدت ترک کمتر از مقدار واقعی محاسبه خواهد شد.

از آنجا که اثرات بسته شدن ترک مشخصه‌های ارتعاشی سازه را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد، از این‌رو محققان در صدد ارائه مدل‌هایی که این اثرات را نشان دهد برآمدند. در این راستا فریسول و پنی [۵] رفتار غیرخطی یک تیر یک‌سر گیردار تحت تحریک هارمونیک را بررسی کردند. آنها تیر ترک‌دار را به صورت یک سیستم یک درجه آزادی با یک ترک دوخطی مدل کردند. طبق این فرض ترک دارای دو مقدار سفتی است، مقدار بیشتر مربوط به وضعیت بسته بودن و مقدار کمتر مربوط به وضعیت باز

بودن کامل ترک است. پونو و همکاران [۶] پاسخ دینامیکی تیر ترک‌دار با ترک‌های باز و بسته شونده متعدد به تحریک هارمونیک را استخراج کردند. مدل مورد استفاده برای محل ترک در پژوهش آنها مدل دوخطی ترک بود که سفتی محل ترک در حالت بسته با مدل تیر سالم معادل در نظر گرفته شد. آنها در تحلیل خود از روش توازن هارمونیک استفاده کردند. در تحقیق دیگری سوریس و همکاران [۷] یک تیر یک‌سر گیردار ترک‌دار را با یک سیستم یک درجه آزادی با سفتی دوخطی مدل کردند. سفتی تیر در حالت ترک بسته با سفتی تیر سالم و سفتی تیر در حالت ترک باز با استفاده از تغییرات مقدار ویژه مود اول که ناشی از وجود ترک است، معادل شد. آنها به منظور استخراج پاسخ از سری ولترآ استفاده کردند. آنها چندین تیر با عمق‌ها و موقعیت‌های مختلف ترک را یک بار تحت تحریک هارمونیک تک فرکانسی و بار دیگر تحت تحریک هارمونیک با دو فرکانس که مجموع آنها با فرکانس طبیعی اول تیر برابر بود قرار دادند و نتایج پژوهش خود را با حل عددی المان محدود مقایسه کردند. چنین مدل‌هایی فقط حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک را منظور می‌کند و موقعیت‌های جزئی و بینابین باز و بسته شدن ترک را نادیده می‌گیرد. همچنین در این مدل‌ها فرض بر این است که ترک به صورت آبی باز و بسته می‌شود در حالی که شواهد تجربی حاکی از این است که انتقال از حالت ترک کاملاً باز به حالت ترک کاملاً بسته و بالعکس همراه با صرف زمان است. این پدیده توسط کلارک و همکاران [۸] هنگام مطالعه اثر بسته شدن ترک بر دقت آزمون‌های غیرمخرب در پیش‌بینی اندازه ترک نشان داده شد.

آبراهام و براندون [۹] برای مدل کردن دقیق اثر بسته شدن ترک در مدل ارتعاشی تیر، تغییرات پیوسته سفتی تیر در هنگام باز و بسته شدن کامل ترک را با به کارگیری جملات بیشتری از سری فوریه شبیه‌سازی کردند. در این حالت تغییرات سفتی تیر، بین دو مقدار سفتی متناظر با ترک کاملاً باز و سفتی تیر سالم در نظر گرفته می‌شود. چنگ و همکاران [۱۰] برای مطالعه رفتار غیرخطی تیر یک‌سر گیردار با ترک خستگی از یک مدل یک

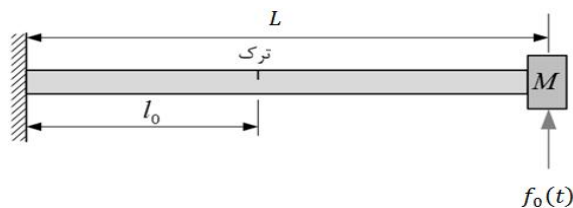
درجه آزادی با سفتی متغیر با زمان به صورت یک تابع هارمونیک ساده استفاده کرده و پاسخ ارتعاشات اجباری تیر را با فرض نسبت میرایی ۰/۰۱ برای تیر، با روش عددی رانگ-کوتا<sup>۳</sup> به دست آوردند. همچنین آنها دریافتند که شناسایی ترک براساس مدل باز منجر به نتایج غیردقیق شده و شدت ترک را کمتر از مقدار واقعی آن پیش بینی می کند. گرچه در مدل مذکور نقیصه ناپوستگی تابع سفتی محل ترک برطرف شده است ولی در این مدل نیز سفتی در حالت ترک کاملاً بسته، با سفتی موضعی تیر سالم یکسان در نظر گرفته شده است در حالی که نتایج تجربی نشان می دهد که در هنگام بسته شدن کامل دهانه ترک، سفتی موضعی تیر در محل ترک با سفتی موضعی تیر سالم یکسان نیست. رضائی و حسن نژاد [۱۱] با استفاده از تعادل انرژی مکانیکی، پاسخ ارتعاش آزاد تیر یک سر گیردار ترک دار را تعیین کردند. در تحلیل آنها، سفتی محل ترک یک تابع غیرخطی وابسته به دامنه است و بین دو مقدار حدی متناظر با سفتی مدل ترک باز و سفتی مدل ترک بسته تغییر می کند. رضائی و فکرمندی [۱۲] رفتار دینامیکی تیر یک سر گیردار ترک دار در حوالی مود اول ارتعاشی را با یک سیستم یک درجه آزادی با جرم و نسبت میرایی ثابت معادل سازی کردند. آنها سفتی را متغیر با زمان و به صورت یک تابع هارمونیک مدل کرده و معادله ارتعاشی حاکم را با استفاده از روش مقیاس های چندگانه حل کردند.

در تحقیق دیگری، بوسونسکی و سوریس [۱] ارتعاشات تیر یک سر گیردار ترک دار را در حضور اثرات غیرخطی ناشی از بسته شدن ترک بررسی کردند. آنها اظهار داشتند که اثرات غیرخطی باعث ایجاد پیچیدگی هایی در حل تحلیلی مسأله می شود. بنابراین از یک مدل المان محدود استفاده کردند که پیش بینی تغییرات ایجاد شده در میرایی تیر ترک دار را امکان پذیر می ساخت. آنها با استفاده از نتایج آزمون تجربی نشان دادند که حضور اثرات غیرخطی در پاسخ ارتعاشی تیر علاوه بر وابستگی به پارامترهای ترک، به میرایی در سیستم ارتعاشی نیز بستگی دارد. در واقع دو مکانیزم

عمده منجر به اتلاف انرژی در محل ترک و افزایش میرایی سیستم ارتعاشی می شوند: اصطکاک بین سطوح ترک در حین باز و بسته شدن ترک و ناحیه پلاستیک در اطراف نوک ترک [۱۳]. بنابراین تأثیر پارامترهای ترک بر اثرات غیرخطی باید در شرایطی که تغییرات میرایی در سیستم ارتعاشی لحاظ می شود تعیین شود و اگر در تحلیل سیستم های ارتعاشی اثر افزایش میرایی نادیده گرفته شود، پیش بینی شدت عیب با خطا همراه خواهد بود.

استفاده از مدل های اخیر برای حالتی که دامنه ارتعاش تیر اندک باشد، به طوری که دهانه ترک به طور کامل باز و بسته نشود، به تحلیل دینامیکی نادرست سیستم منجر می شود. در ارتعاش یک سازه ترک دار با دامنه نوسان اندک الزاماً دهانه ترک به طور کامل باز و بسته نمی شود. در این صورت باید اثرات جزئی باز و بسته شدن ترک در مدل ریاضی ارائه شده منظور شود. در واقع، مدلی از ترک واقع بینانه خواهد بود که ویژگی های ترک از جمله سفتی و میرایی وابسته به وضعیت باز و بسته شدن دهانه ترک، که به دامنه ارتعاش تیر وابسته است، لحاظ شده باشد. در بسیاری از حالت های عملی دامنه ارتعاشات سازه آنقدر زیاد نیست که باعث باز و بسته شدن کامل دهانه ترک شود. لذا هدف از این تحقیق ارائه مدلی برای شناسایی اثرات غیرخطی تیر ناشی از وجود ترک است که در آن دهانه ترک هرگز به طور کامل باز و بسته نمی شود و همواره حالت جزئی باز و بسته شدن ترک وجود دارد. در این حالت رابطه بین ممان خمشی و اختلاف شیب در طرفین ترک، خطی نخواهد بود. بنابراین مدل های خطی و دوخطی ارائه شده برای تحلیل ارتعاشات تیرهای ترک دار با دامنه نوسانات کوچک قابل استفاده نیست.

در این تحقیق ابتدا با در نظر گرفتن فرضیات مذکور و اعمال شرایط بین مرزی غیرخطی، معادلات غیرخطی حاکم بر تیر ترک دار استخراج شده است. با حل معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از تئوری اغتشاشات، اثرات تغییر فرکانس ارتعاشات تیر بر حسب دامنه استخراج شده و رابطه تحلیلی و صریح برای محاسبه ضریب سفتی غیرخطی در محل ترک و



شکل ۱- شماتیک تیر ترک‌دار یک سر گیردار

میرایی ناشی از ترک ارائه شده است. با توجه به لزوم تعیین تجربی تعدادی از پارامترهای به‌کار رفته در مدل، با استفاده از دستگاه آزمون خستگی در یک تیر، نمونه ترکی در موقعیت مشخص ایجاد شد و تحت آزمون ارتعاشی قرار گرفت و به‌منظور نشان دادن اثرات غیرخطی به‌دلیل حضور ترک، منحنی پاسخ فرکانسی استخراج شد.

## ۲- مدل‌سازی تیر ترک‌دار

تیر یکنواخت یک سر گیردار به طول  $L$  و جرم واحد طول  $m$  که دارای ترک خستگی به فاصله  $l_0$  از انتهای گیردار است، در شکل (۱) نشان داده شده است. تیر در انتهای آزاد تحت تحریک اجباری قرار دارد. به‌دلیل باز و بسته شدن ترک در حین ارتعاش، رفتار آن غیرخطی است. در پژوهش‌های پیشین فرض شده است که همواره در حین ارتعاش، دهانه ترک از حالت کاملاً باز به حالت کاملاً بسته و برعکس تغییر وضعیت می‌دهد و هیچ‌گاه حالت بینابین یا جزئی باز و بسته شدن ترک در ارتعاش اجباری بررسی نشده است. هدف از این پژوهش استخراج مدلی برای ترک است که پاسخگوی رفتار غیرخطی آن به‌هنگام ارتعاش سیستم با دامنه اندک باشد.

تیر به‌دلیل حضور ترک به دو قسمت تقسیم می‌شود که در محل ترک به یکدیگر پیوسته هستند و به‌دلیل دامنه ارتعاش اندک رفتار تیر در طرفین ترک خطی فرض می‌شود و میرایی سازه‌ای در نظر گرفته شده در طول تیر از نوع میرایی کلوین-ویت خواهد بود. بنابراین معادلات ارتعاشی حاکم بر سیستم در طرفین ترک به‌صورت زیر است:

$$EI \frac{\partial^4 u_1(x, t)}{\partial x^4} + C_s I \frac{\partial^3 u_1(x, t)}{\partial x^3 \partial t} + m \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq l_0$$

$$EI \frac{\partial^4 u_2(x, t)}{\partial x^4} + C_s I \frac{\partial^3 u_2(x, t)}{\partial x^3 \partial t} + m \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = f_0(t) \cdot \delta(x - L), \quad l_0 \leq x \leq L \quad (2)$$

در معادلات فوق،  $EI$  صلبیت خمشی تیر و  $C_s$  ضریب میرایی سازه‌ای و  $u_1(x, t)$  و  $u_2(x, t)$  جابه‌جایی عرضی طرفین ترک است و نیروی تحریک که در انتهای آزاد تیر اعمال می‌شود به‌صورت زیر است:

$$f_0(t) = F \cos \Omega t \quad (3)$$

برای تحریک تیر در آزمایش‌های تجربی، تحریک کننده و شتاب‌سنج به تیر متصل می‌شوند. بنابراین به‌منظور دقت بیشتر در مدل‌سازی، اثرات جرم متمرکز و ممان اینرسی ملحقات تحریک کننده و شتاب‌سنج در معادلات حاکم بر سیستم منظور می‌شود و شرایط مرزی در دو انتهای تیر به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$u_1(0, t) = 0 \quad (4-الف)$$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (4-ب)$$

$$EI \frac{\partial^3 u_1(L, t)}{\partial x^3} + C_s I \frac{\partial^2 u_1(L, t)}{\partial x^2 \partial t} = J \frac{\partial^2 u_2(L, t)}{\partial x \partial t^2} \quad (4-ج)$$

$$EI \frac{\partial^3 u_2(L, t)}{\partial x^3} + C_s I \frac{\partial^2 u_2(L, t)}{\partial x^2 \partial t} = M \frac{\partial^2 u_2(L, t)}{\partial t^2} \quad (4-د)$$

به‌طوری‌که  $M$  و  $J$  به‌ترتیب جرم و ممان اینرسی جرمی ناشی از ملحقات متصل به تحریک کننده است.

دو قسمت تیر در محل ترک به‌دلیل پیوستگی دارای مقدار جابه‌جایی، گشتاور و نیروی برشی یکسان است. بنابراین سه شرط بین مرزی در محل ترک را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$u_1(l_0, t) = u_2(l_0, t) \quad (5-الف)$$

$$EI \frac{\partial^2 u_1(l_0, t)}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^2 u_2(l_0, t)}{\partial x^2} \quad (5-ب)$$

$$EI \frac{\partial^3 u_1(l_0, t)}{\partial x^3} = EI \frac{\partial^3 u_2(l_0, t)}{\partial x^3} \quad (5-ج)$$

به دلیل وجود ترک، شیب منحنی الاستیک تیر در طرفین ترک متفاوت خواهد بود. با باز و بسته شدن دهانه ترک در هنگام ارتعاش تیر و در نتیجه تغییر پیوسته سفتی در محل ترک، رابطه میان گشتاور خمشی و اختلاف شیب طرفین ترک یک رابطه غیرخطی می‌شود. رضایی و حسن‌نژاد [۱۴] با استخراج منحنی تغییرات گشتاور خمشی در برابر اختلاف شیب در محل ترک به‌ازای بارهای مختلف اعمال شده در انتهای آزاد چند تیر نمونه با استفاده از نتایج آزمایش ارتعاشی نشان دادند که رفتار ارتعاشی تیر با یک ترک خستگی وابسته به میزان بازشدگی دهانه ترک است و مقدار باز و بسته شدن ترک به دامنه ارتعاشی تیر بستگی دارد.

همچنین مطالعات و نتایج تجربی برخی از محققان از جمله بوسونسکی [۱۵] حاکی از آن است که در محل ترک باز و بسته شونده علاوه بر تغییر سفتی موضعی شاهد اتلاف انرژی خواهیم بود. حسن‌نژاد [۱۶] با استخراج پاسخ ارتعاش آزاد تیر سالم و تیر ترک‌دار و عبور دادن یک تابع نمایی نزولی از نقاط ماکزیمم موضعی پاسخ‌های تجربی، نرخ کاهش دامنه پاسخ آزاد در تیر سالم و تیر ترک‌دار را مشخص کرد. او با استفاده از نتایج آزمون تجربی نشان داد که میرایی در پاسخ ارتعاش آزاد تیر ترک‌دار در مقایسه با تیر سالم به دلیل وجود ترک افزایش می‌یابد.

بنابراین به منظور ارائه یک مدل واقعی و مستدل از رفتار ترک در حین ارتعاش با دامنه کوچک، ترک توسط فنر غیرخطی میراگر پیچشی مدل‌سازی می‌شود و رابطه بین ممان خمشی در محل ترک و اختلاف شیب طرفین ترک به صورت زیر مدل می‌شود:

$$EI \frac{\partial^2 u_T(l, t)}{\partial x^2} + C_s I \frac{\partial^3 u_T(l, t)}{\partial x^2 \partial t} = K_1 \left( \frac{\partial u_T(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(l, t)}{\partial x} \right) + K_3 \left( \frac{\partial u_T(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(l, t)}{\partial x} \right)^3 + C \left( \frac{\partial^2 u_T(l, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_1(l, t)}{\partial x \partial t} \right) \quad (5-d)$$

در رابطه (5-d)،  $K_1$  و  $K_3$  به ترتیب ضریب سفتی خطی و

ضریب سفتی مکعبی و  $C$  ضریب میرایی پیچشی مدل‌سازی شده در محل ترک است. همان‌طور که از عبارت (5-d) مشخص است رابطه بین ممان خمشی در محل ترک و اختلاف شیب خط عمود بر سطوح ترک یک رابطه غیرخطی است که به دلیل باز و بسته شدن ترک و اتلاف انرژی در محل ترک است.

### ۳- حل تحلیلی

با توجه به اینکه دامنه ارتعاش تیر کوچک در نظر گرفته می‌شود، فرض بر این است که ترک به صورت جزئی باز و بسته می‌شود و سیستم ارتعاشی تیر، یک سیستم غیرخطی ضعیف است. بنابراین مسأله با استفاده از روش حل مخصوص اغتشاشات، به نام روش مقیاس‌های چندگانه مستقیم، قابل حل است. برای حل سیستم معادلات ارتعاشی بیان شده در معادلات (۱) و (۲) که شرایط مرزی (۴) و پیوستگی (۵) را ارضا نماید، پاسخ ارتعاشات عرضی تیر در دو طرف ترک به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$u_1(x, t; \varepsilon) = u_{10}(x, T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(x, T_0, T_1) \quad (6)$$

$$u_2(x, t; \varepsilon) = u_{20}(x, T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(x, T_0, T_1) \quad (7)$$

در روابط (۶) و (۷)،  $\varepsilon$  پارامتر کوچک اغتشاشات است و بیانگر این است که دامنه ارتعاشات اندک است.  $T_0 = t$  و  $T_1 = \varepsilon t$  به ترتیب بیانگر مقیاس‌های تند و کند زمانی و  $u_{10}$  و  $u_{20}$  توابع جابه‌جایی در مرتبه  $\varepsilon^0$  و  $u_{11}$  و  $u_{21}$  توابع جابه‌جایی در مرتبه  $\varepsilon^1$  است.

رفتار سیستم در حوالی فرکانس تشدید اول سازه بررسی می‌شود. تئوری نامیرای خطی دامنه ارتعاش سازه را در حالت تشدید حتی با فرض دامنه نیروی اندک، بیکران پیش‌بینی می‌کند. در سیستم ارتعاشی در نظر گرفته شده وجود میرایی و اثرات غیرخطی باعث محدود شدن دامنه ارتعاش می‌شود [۱۷] و [۱۸]. بنابراین جهت ارائه یک روش حل تخمینی صحیح، دامنه نیروی تحریک هم مرتبه با میزان غیرخطی بودن و میرایی، منظور می‌شود. بدین ترتیب دامنه تحریک، ضریب میرایی و ضریب سفتی فنر غیرخطی و ضریب میرایی سازه‌ای از مرتبه  $\varepsilon^1$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

در روابط فوق  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر،  $\bar{A}(T_1)$  مزدوج مختلط  $A(T_1)$  و  $i = \sqrt{-1}$  است. بعد از جداسازی متغیرها، بخش مکانی معادلات حاکم به صورت زیر استخراج می شود:

$$Y_1^{(*)}(x) - \lambda^* Y_1(x) = 0 \quad (16)$$

$$Y_r^{(*)}(x) - \lambda^* Y_r(x) = 0 \quad (17)$$

در روابط (16) و (17)،  $\lambda^* = \frac{m\omega^2}{EI}$  است. همچنین شرایط مرزی به فرم زیر هستند:

$$Y_1(0) = 0 \quad (18-الف)$$

$$Y_1^{(1)}(0) = 0 \quad (18-ب)$$

$$EIY_1^{(*)}(L) = -J\omega^2 Y_1^{(1)}(L) \quad (18-ج)$$

$$EIY_r^{(*)}(L) = -M\omega^2 Y_r(L) \quad (18-د)$$

و شرایط پیوستگی در محل ترک به شکل زیر حاصل می شود:

$$Y_1(l_0) = Y_r(l_0) \quad (19-الف)$$

$$Y_1^{(*)}(l_0) = Y_r^{(*)}(l_0) \quad (19-ب)$$

$$Y_1^{(*)}(l_0) = Y_r^{(*)}(l_0) \quad (19-ج)$$

$$EIY_r^{(*)}(l_0) = K_1 \left( Y_1^{(1)}(l_0) - Y_1^{(1)}(l_0) \right) \quad (19-د)$$

حل عمومی معادلات (16) و (17) در طرف راست و چپ ترک به صورت زیر ارائه می شود:

$$Y_1(x) = A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x + C_1 \sinh \lambda x + D_1 \cosh \lambda x \quad (20)$$

$$Y_r(x) = A_r \sin \lambda x + B_r \cos \lambda x + C_r \sinh \lambda x + D_r \cosh \lambda x \quad (21)$$

با یکه کردن شکل مودها به صورت  $\int_0^{l_0} Y_1^{(*)}(x) dx + \int_{l_0}^L Y_r^{(*)}(x) dx = 1$

مقادیر  $A_i, B_i, C_i, D_i$ ،  $i=1,2$  با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی به دست می آید. با جای گذاری روابط (20) و (21) در معادلات (18) تا (19)، دستگاه معادلات همگنی به فرم زیر حاصل می شود:

$$[A][B] = \{0\} \quad (22)$$

در رابطه (22)،  $[A]$  ماتریس ضرایب است و  $\{B\}$  بردار ستونی ضرایب مجهول مسئله است. شکل نهایی ماتریس  $[A]$

$$\frac{F}{m} = \varepsilon f, \quad \frac{C}{m} = \varepsilon \mu, \quad \frac{K_r}{m} = \varepsilon K_N, \quad \frac{C_s}{m} = \varepsilon \mu_s \quad (8)$$

مشتق نسبت به مقیاس های جدید زمانی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (9)$$

با جای گذاری متغیرهای جدید و مقیاس های زمانی جدید در دستگاه معادلات و با جداسازی دستگاه معادلات براساس توان های مختلف  $\varepsilon$ ، دستگاه معادلات به صورت زیر حاصل می شود:

رتبه  $\varepsilon^0$ :

$$D_0^2 u_{1_0}(x, T_0, T_1) + \frac{EI}{m} u_{1_0}^{(*)}(x, T_0, T_1) = 0 \quad (10)$$

$$D_0^2 u_{r_0}(x, T_0, T_1) + \frac{EI}{m} u_{r_0}^{(*)}(x, T_0, T_1) = 0 \quad (11)$$

در معادلات فوق اعداد داخل پرانتز در بالا نویس ها معرف مرتبه مشتق گیری تابع نسبت به متغیر مکانی  $x$  است.

شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می شود:

$$u_{1_0}(0, T_0, T_1) = 0 \quad (12-الف)$$

$$u_{1_0}^{(1)}(0, T_0, T_1) = 0 \quad (12-ب)$$

$$EIu_{r_0}^{(*)}(L, T_0, T_1) = JD_0^2 u_{r_0}^{(1)}(L, T_0, T_1) \quad (12-ج)$$

$$EIu_{r_0}^{(*)}(L, T_0, T_1) = MD_0^2 u_{r_0}(L, T_0, T_1) \quad (12-د)$$

همچنین شرایط پیوستگی به فرم زیر حاصل می شود:

$$u_{1_0}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_0}(l_0, T_0, T_1) \quad (13-الف)$$

$$u_{1_0}^{(*)}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_0}^{(*)}(l_0, T_0, T_1) \quad (13-ب)$$

$$u_{1_0}^{(*)}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_0}^{(*)}(l_0, T_0, T_1) \quad (13-ج)$$

$$EIu_{r_0}^{(*)}(l_0, T_0, T_1) = K_1 \left( u_{r_0}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) - u_{1_0}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) \right) \quad (13-د)$$

دستگاه معادلات فوق یک دستگاه معادلات خطی است که شامل پاسخ خطی ارتعاش است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و در نظر گرفتن یک مود ارتعاشی، حل فرضی زیر ارائه می شود:

$$u_{1_0}(x, T_0, T_1) = \left[ A(T_1) e^{i\omega T_1} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_1} \right] Y_1(x) \quad (14)$$

$$u_{r_0}(x, T_0, T_1) = \left[ A(T_1) e^{i\omega T_1} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_1} \right] Y_r(x) \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \circ & \backslash & \circ & \backslash \\ \backslash & \circ & \backslash & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \sin \lambda l_0 & \cos \lambda l_0 & \sinh \lambda l_0 & \cosh \lambda l_0 \\ -\sin \lambda l_0 & -\cos \lambda l_0 & \sinh \lambda l_0 & \cosh \lambda l_0 \\ -\cos \lambda l_0 & \sin \lambda l_0 & \cosh \lambda l_0 & \sinh \lambda l_0 \\ -K_1 \cos \lambda l_0 & K_1 \sin \lambda l_0 & -K_1 \cosh \lambda l_0 & -K_1 \sinh \lambda l_0 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{-J\lambda^r}{m} \cos \lambda L + \sin \lambda L & \frac{J\lambda^r}{m} \sin \lambda L + \cos \lambda L & \frac{-J\lambda^r}{m} \cosh \lambda L - \sinh \lambda L & \frac{-J\lambda^r}{m} \sinh \lambda L - \cosh \lambda L \\ \frac{M\lambda}{m} \sin \lambda L - \cos \lambda L & \frac{M\lambda}{m} \cos \lambda L + \sin \lambda L & \frac{M\lambda}{m} \sinh \lambda L + \cosh \lambda L & \frac{M\lambda}{m} \cosh \lambda L + \sinh \lambda L \\ -\sin \lambda l_0 & -\cos \lambda l_0 & -\sinh \lambda l_0 & -\cosh \lambda l_0 \\ \sin \lambda l_0 & \cos \lambda l_0 & -\sinh \lambda l_0 & -\cosh \lambda l_0 \\ \cos \lambda l_0 & -\sin \lambda l_0 & -\cosh \lambda l_0 & -\sinh \lambda l_0 \\ EI\lambda \sin \lambda l_0 + K_1 \cos \lambda l_0 & EI\lambda \cos \lambda l_0 - K_1 \sin \lambda l_0 & -EI\lambda \sinh \lambda l_0 + K_1 \cosh \lambda l_0 & -EI\lambda \cosh \lambda l_0 + K_1 \sinh \lambda l_0 \end{bmatrix}$$

$$EIu_{r_1}^{(r)}(L, T_0, T_1) + m\mu_s ID_0 u_{r_0}^{(r)}(L, T_0, T_1) = M(D_0^r u_{r_1}(L, T_0, T_1) + r D_0 D_1 u_{r_0}(L, T_0, T_1)) \quad (26-د)$$

همچنین شرایط پیوستگی به فرم زیر استخراج می شود:

$$u_{11}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_1}(l_0, T_0, T_1) \quad (27-الف)$$

$$u_{11}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_1}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) \quad (27-ب)$$

$$u_{11}^{(r)}(l_0, T_0, T_1) = u_{r_1}^{(r)}(l_0, T_0, T_1) \quad (27-ج)$$

$$EIu_{r_1}^{(r)}(l_0, T_0, T_1) + m\mu_s ID_0 u_{r_0}^{(r)}(l_0, T_0, T_1) = K_1 \left( u_{r_1}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) - u_{11}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) \right) + mK_N \left( u_{r_0}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) - u_{10}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) \right)^r + m\mu D_0 \left( u_{r_0}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) - u_{10}^{(1)}(l_0, T_0, T_1) \right) \quad (27-د)$$

از آنجایی که معادلات همگن (۱۶) تا (۱۹) دارای حل غیربدیهی است، معادلات ناهمگن (۲۴) و (۲۵) تحت شرایط (۲۶) و (۲۷) در صورتی دارای حل خواهند بود که شرایط حل پذیری ارضا شود. به منظور تعیین این شرایط جملات سکولار<sup>۵</sup>  $\phi_i$  و جملات غیرسکولار<sup>۶</sup>  $V_i$  با فرض حل زیر از هم جدا می شوند:

برای داشتن حل غیربدیهی باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود:

$$\text{Det}[A] = 0 \quad (23)$$

مرتبه<sup>۱</sup>:

معادلات حاکم در مرتبه اول به صورت زیر استخراج می شود:

$$D_0^r u_{11}(x, T_0, T_1) + \frac{EI}{m} u_{11}^{(r)}(x, T_0, T_1) = -r D_0 D_1 u_{10}(x, T_0, T_1) - \mu_s ID_0 u_{10}^{(r)}(x, T_0, T_1) \quad (24)$$

$$D_0^r u_{r_1}(x, T_0, T_1) + \frac{EI}{m} u_{r_1}^{(r)}(x, T_0, T_1) = r D_0 D_1 u_{r_0}(x, T_0, T_1) - \mu_s ID_0 u_{r_0}^{(r)}(x, T_0, T_1) + f \cos \Omega T_0 \delta(x-L) \quad (25)$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می شود:

$$u_{11}(0, T_0, T_1) = 0 \quad (26-الف)$$

$$u_{11}^{(1)}(0, T_0, T_1) = 0 \quad (26-ب)$$

$$EIu_{r_1}^{(r)}(L, T_0, T_1) + m\mu_s ID_0 u_{r_0}^{(r)}(L, T_0, T_1) = J \left( D_0^r u_{r_1}^{(1)}(L, T_0, T_1) + r D_0 D_1 u_{r_0}^{(1)}(L, T_0, T_1) \right) \quad (26-ج)$$



در رابطه (۳۳) فرم قطبی  $A(T_1)$  به شکل زیر است:

$$A(T_1) = \frac{1}{\gamma} a e^{i\sigma T_1} \quad (34)$$

به هنگام استخراج شرایط حل پذیری فقط جملات سکولار یعنی ضرایب مربوط به  $e^{i\omega T_1}$  و مزدوج مختلط آن منظور می شود و ضرایب مربوط به هارمونیک های بالاتر مانند سوپرهارمونیک سوم،  $e^{3i\omega T_1}$  و مزدوج آن حذف می شود. در حالت پاسخ پایا مقدار دامنه غیرخطی  $a$  ثابت خواهد بود. با جای گذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) و جداسازی قسمت های حقیقی و موهومی، رابطه زیر به دست می آید:

$$\left( \frac{\mu b}{\gamma r} - \frac{J\mu_s \omega^2}{\gamma E r} (Y_r^{(1)}(L))^2 + \frac{M\mu_s \omega^2}{\gamma E r} (Y_r(L))^2 + \frac{I\mu_s \lambda^4}{\gamma r} - \frac{\mu_s K_N p}{\gamma E r} \right)^2 + \left( -\sigma + \frac{\gamma a^2 K_N b^2}{\lambda \omega r} \right)^2 = \left( \frac{f Y_r(L)}{\gamma \omega r a} \right)^2 \quad (35)$$

در رابطه (۳۵)،  $b$  و  $r$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$b = \left( Y_r^{(1)}(L_0) - Y_r^{(1)}(L_0) \right)^2$$

$$r = 1 + \frac{M}{m} Y_r^2(L) - \frac{J}{m} Y_r^{(1)2}(L) \quad (36)$$

رابطه (۳۵) که معرف تابع پاسخ فرکانسی است بیانگر رابطه غیرخطی بین فرکانس و دامنه نوسان است. در ادامه با انجام آزمون تجربی بر روی یک تیر و با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی، مقادیر پارامترهای مدل سازی شده در محل ترک استخراج خواهد شد.

#### ۴- تست تجربی

به منظور ایجاد ترک خستگی، تیر بین دو فک دستگاه آزمون خستگی با مدل Amsler HA۲۵۰ ساخت شرکت Zwick/Roll آلمان مطابق شکل (۲) تحت بار تناوبی کششی قرار گرفت.

برای انجام آزمون ارتعاشی، تیر فولادی ترک دار با سطح مقطع  $3/9 \times 6/4$  میلی متر مربع و عمق نسبی ترک  $0/6$  مطابق شکل (۳) به یک پایه فولادی به صورت یک سر گیردار بسته شده و در انتهای آزاد به لرزاننده مدل B&K (TYPE ۴۸۰۹) متصل شد. سپس تیر تحت تحریک قرار گرفت و پاسخ توسط شتاب سنج

$$u_{r1}(x, T_0, T_1) = \varphi_1(x, T_1) e^{i\omega T_1} + V_1(x, T_0, T_1) + cc \quad (28)$$

$$u_{r1}(x, T_0, T_1) = \varphi_r(x, T_1) e^{i\omega T_1} + V_r(x, T_0, T_1) + cc \quad (29)$$

به منظور استخراج پارامترهای ترک و برای تحریک سیستم در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر، از پارامتر تنظیم  $\sigma$  که مشخص کننده میزان نزدیکی فرکانس تحریک  $\Omega$  به فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر است استفاده می شود:

$$\Omega = \omega + \varepsilon \sigma \quad (30)$$

با جای گذاری معادلات (۲۸) تا (۳۰) در معادلات مرتبه اول (۲۴) و (۲۵)، معادلات مربوط به جملات قسمت سکولار به شکل زیر استخراج می شود:

$$\varphi_1^{(*)}(x, T_1) - \lambda^4 \varphi_1(x, T_1) = \frac{m}{EI} \left( -\gamma \omega Y_1(x) D_1 A - \mu_s I \omega Y_1^{(*)}(x) A \right) i \quad (31)$$

$$\varphi_r^{(*)}(x, T_1) - \lambda^4 \varphi_r(x, T_1) = \frac{m}{EI} \left( \left( -\gamma \omega Y_r(x) D_1 A - \mu_s I \omega Y_r^{(*)}(x) A \right) i \right) + \frac{m}{EI} \left( f \delta(x-L) \frac{e^{i\sigma T_1}}{\gamma} \right) \quad (32)$$

با استفاده از مفهوم اپراتور الحاقی و ارضا شرایط مرزی و پیوستگی، شرایط حل پذیری مسأله استخراج می شود [۱۷]. بدین منظور رابطه (۳۱) در حل الحاقی  $Y_1(x)$  و رابطه (۳۲) در حل الحاقی  $Y_r(x)$  ضرب می شود و سپس با انتگرال گیری از رابطه اول حاصله در بازه  $x: [0, L_0]$  و از رابطه دوم در بازه  $x: [L_0, L]$  و جمع روابط حاصل شده شرایط حل پذیری مسأله به دست می آید:

$$\frac{\gamma M i \omega D_1 A}{EI} Y_r^2(L) - \frac{\gamma J i \omega D_1 A}{EI} \left( Y_r^{(1)}(L) \right)^2 - \frac{m i \omega \mu_s I A}{EI} \left( Y_r^{(*)}(L) \right)^2 + \frac{J \omega^2}{m i \omega \mu_s I A} \left( Y_r^{(*)}(L) \right)^2 - \frac{M \omega^2}{m i \omega \mu_s I A} \left( Y_r^{(*)}(L_0) \right)^2 + \frac{K_N}{EI} \left( Y_r^{(1)}(L_0) - Y_r^{(1)}(L_0) \right)^2 + \frac{r m K_N A^2 \bar{A}}{EI} \left( Y_r^{(1)}(L_0) - Y_r^{(1)}(L_0) \right)^2 = \frac{m}{EI} \left( -\gamma i \omega D_1 A - \mu_s i \omega I A \lambda^4 + \frac{f}{\gamma} Y_r(L) e^{i\sigma T_1} \right) \quad (33)$$



شکل ۲- دستگاه آزمون خستگی مورد استفاده برای ایجاد ترک در تیر



شکل ۳- تیر یک سر گیردار تحت آزمایش

است، بنابراین در رابطه (۵-د) می‌توان از توان سوم اختلاف شیب در طرفین ترک در مقابل توان اول آن صرف‌نظر کرد. تحت این شرایط سیستم دارای رفتار تقریباً خطی است. با مینیمم کردن اختلاف فرکانس‌های طبیعی خطی حاصل از آزمون تجربی و فرکانس‌های پیش‌بینی شده توسط سیستم خطی یعنی روابط (۱۸) تا (۲۳)، به‌وسیله نرم‌افزار متلب، ضریب سفتی خطی محل ترک استخراج شد. مدل به‌روزرسانی مورد استفاده برای یافتن ضریب سفتی

پیزوالکتریک مدل B&K (TYPE ۴۵۰۷) و سیستم داده‌برداری چهار کاناله B&K (TYPE ۳۱۰۹) در انتهای آزاد استخراج شد. همچنان که قبلاً ذکر شد به‌دلیل نصب شتاب‌سنج و لرزاننده به انتهای تیر، جرم متمرکز ناشی از اثر شتاب‌سنج و لرزاننده در هنگام استخراج معادلات ارتعاشی منظور شد. در ابتدا تیر ترک‌دار با یک نیروی تصادفی با دامنه تحریک پایین تحریک شده و سه فرکانس اول خطی تیر استخراج شد. تحت دامنه نوسانات کوچک، اختلاف شیب طرفین ترک اندک

جدول ۱- فرکانس‌های تشدید حاصل از آزمون تجربی و پیش‌بینی شده از مدل خطی برحسب هر تیز

شماره فرکانس	۱	۲	۳
اندازه گیری شده	۲۰/۰۰	۱۴۸/۵۰	۴۵۱/۰۰
پیش‌بینی شده	۲۰/۰۰	۱۴۹/۰۳	۴۵۲/۵۴
درصد خطا	۰/۰۰	۰/۳۶	۰/۳۴

با ۷۴۱/۶ نیوتن متر حاصل شد.

برای انجام آزمون ارتعاشی، تیر مورد نظر تحت تحریک نیروی سینوسی با دامنه تحریک ۸۵ میلی نیوتن در فرکانس‌های حوالی فرکانس طبیعی اول تیر قرار گرفت و پاسخ تیر استخراج شد و با تکرار چندین باره آزمون ارتعاشی، نتیجه نهایی حاصل شد. تابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده در انتهای تیر در شکل (۴) نمایش داده شده است. در شکل (۴)، محور عمودی دامنه ارتعاش تیر در انتها و محور افقی فرکانس نیروی تحریک است.

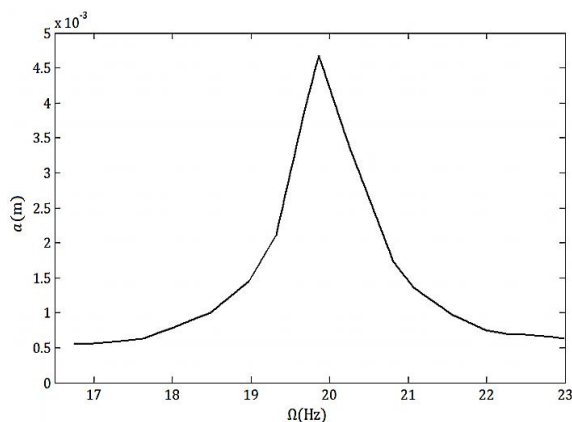
ضریب سفتی مکعبی و ضریب میرایی با استفاده از نمودار پاسخ فرکانسی قابل محاسبه است. دامنه ماکزیمم در نمودار پاسخ فرکانسی تابعی از میرایی است و میزان غیرخطی بودن مسئله باعث انتقال محل ماکزیمم در جهت محور پارامتر تنظیم می‌شود. بنابراین با دانستن دامنه ماکزیمم و میزان انتقال در جهت محور پارامتر تنظیم می‌توان مقادیر مجهول ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میرایی محل ترک را تعیین کرد. با مشتق‌گیری از رابطه (۳۵) نسبت به پارامتر تنظیم  $\sigma$  و مساوی صفر قرار دادن آن، ضریب سفتی غیرخطی،  $K_3$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_3 = \frac{\alpha r \omega (\Omega - \omega)}{r b^2 a^2} \quad (38)$$

در نهایت، با قرار دادن رابطه (۳۸) در رابطه (۳۵)، ضریب میرایی پیشگی در محل ترک به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C = \frac{FE |Y_r(L)|}{a \omega b E} - \frac{a \omega C_s \left[ M \omega^2 (Y_r(L))^2 - J \omega^2 (Y_r^{(1)}(L))^2 + m \omega^2 - K_1 b \right]}{a \omega b E} \quad (39)$$

با توجه به رابطه (۳۹) ضریب میرایی در محل ترک نیز تابع غیرخطی وابسته به دامنه ارتعاشی تیر است. همان‌طور که



شکل ۴- نمودار پاسخ فرکانسی تیر با دامنه تحریک ۸۵ میلی نیوتن

خطی محل ترک، روش الگوریتم ژنتیک پیوسته است و تابع هزینه به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Cost} = \sum_{i=1}^3 \text{abs} \left( \frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\omega_i} \right) \quad (37)$$

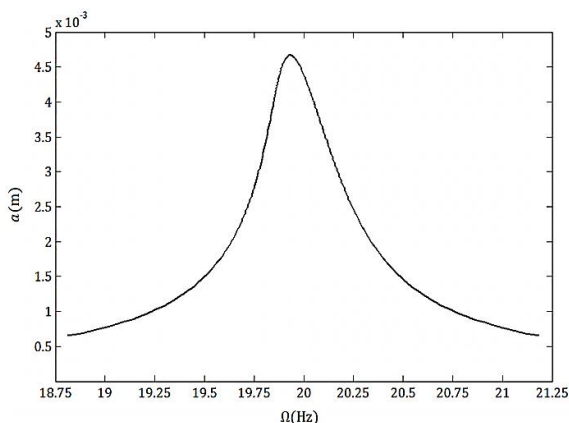
در رابطه (۳۷)،  $\omega_i$  فرکانس طبیعی خطی حاصل از آزمون تجربی و  $\bar{\omega}_i$  فرکانس پیش‌بینی شده از سیستم خطی مدل شده است. در روش الگوریتم ژنتیک در هر نسل به تعداد مشخصی سفتی که مقادیر آنها مابین سفتی تیر در محل ترک در دو حالت کاملاً بسته و کاملاً باز است، به صورت تصادفی تولید می‌شود و فرکانس‌های طبیعی متناظر محاسبه و در تابع هزینه مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و هر سفتی که تابع هزینه را به سمت صفر میل دهد سفتی مورد نظر خواهد بود.

فرکانس‌های حاصل از آزمون تجربی و فرکانس‌های پیش‌بینی شده از مدل خطی و درصد خطا در جدول (۱) نشان داده شده است.

با استفاده از روش بیان شده، ضریب سفتی خطی  $K_1$  برابر

جدول ۲- پارامترهای پیش‌بینی شده محل ترک

پارامتر غیرخطی	$K_1$ (Nm)	$K_2$ (Nm)	C (Nms)
مقدار پیش‌بینی شده	۷۴۱/۶	$-۴/۹۷ \times 10^6$	۰/۳۵



شکل ۵- نمودار پاسخ فرکانسی تیر حاصل از پارامترهای غیرخطی پیش‌بینی شده

نیست که منجر به باز و بسته شدن کامل دهانه ترک شود. در تحلیل ارتعاشی سیستم‌هایی که در آن دهانه ترک به‌طور کامل باز و بسته نمی‌شود نمی‌توان از مدل‌های موجود در ادبیات فن استفاده کرد و به‌منظور مدل‌سازی دقیق رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار در نوسانات کم دامنه، پارامترهای محل ترک (سفتی و میرایی) باید وابسته به وضعیت و میزان باز و بسته شدن دهانه ترک باشد. یکی از مهم‌ترین اهداف این تحقیق ارائه یک مدل پیوسته برای ارتعاشات تیر با یک ترک خستگی در نوسانات کم دامنه بود که در آن دهانه ترک هرگز به مرحله باز و بسته شدن کامل نمی‌رسد. در مدل ارائه شده برای محل ترک به‌منظور در نظر گرفتن اثرات غیرخطی ترک بر رفتار ارتعاشی تیر، یک فنر پیچشی غیرخطی و میراگر لزج در محل ترک منظور شد و ممان خمشی در محل ترک به‌صورت یک تابع غیرخطی از اختلاف شیب و نرخ اختلاف شیب به‌دلیل اتلاف انرژی در محل ترک در نظر گرفته شد. به‌منظور حل دستگاه معادلات ارتعاشی و ارائه یک رابطه تحلیلی از پارامترهای محل ترک، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شد.

حل معادلات سیستم ارتعاشی تیر منجر به استخراج پاسخ

مشاهده می‌شود، پارامترهای محل ترک به‌صورت یک رابطه تحلیلی و صریح وابسته به پارامترهای ارتعاشی و هندسی تیر هستند. در آزمایشات انجام شده بر روی تیر مذکور فرکانس طبیعی اول سیستم خطی ۲۰ هرتز و فرکانس ماکزیمم متناظر ۱۹/۸۳ هرتز است. در جدول ۲ پارامترهای محل ترک حاصل از روابط (۳۸) و (۳۹) نمایش داده شده است.

با معلوم بودن پارامترهای مدل ارائه شده برای محل ترک و با جای‌گذاری مقادیر جدول (۲) در رابطه (۳۵)، نمودار پاسخ فرکانسی حاصل از مقادیر پیش‌بینی شده در منحنی شکل (۵) به‌دست می‌آید.

باز و بسته شدن دهانه ترک باعث تغییر رفتار ارتعاشی تیر از حالت خطی به حالت غیرخطی و ایجاد نرم‌شوندگی در محل ترک می‌شود که این اثرات غیرخطی به‌صورت انحراف جزئی به سمت چپ در منحنی پاسخ فرکانسی نمایان می‌شود که معرف رفتار نرم شونده در سیستم است.

## ۵- بحث و نتیجه‌گیری

در بسیاری از حالت‌های عملی دامنه ارتعاشات سازه آنقدر زیاد

محل ترک با استفاده از این منحنی و همچنین روابط استخراجی برای یک تیر با شرایط هندسی و نیرویی مشخص تعیین شد. در نهایت نمودار پاسخ فرکانسی حاصل از مقادیر پیش‌بینی شده برای تیر مورد آزمایش استخراج و رسم شد. در این نمودار رفتار غیرخطی ترک و پدیده نرم‌شوندگی در محل ترک به صورت انحراف منحنی به چپ نمایان است. نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که به دلیل رفتار غیرخطی ترک در ارتعاشات کم دامنه، نمی‌توان از مدل‌های ترک دوخطی یا ترک-باز برای مدل‌سازی و بررسی رفتار ارتعاشی ترک استفاده کرد.

فرکانسی تیر و رابطه برای پارامترهای محل ترک، از جمله ضریب سفتی غیرخطی و ضریب میرایی پیش‌پیشی لزج در محل ترک شد که وابسته به شرایط هندسی و فیزیکی تیر و همچنین دامنه تحریک و دامنه پاسخ است. با دقت در منحنی پاسخ فرکانسی می‌توان دریافت که فرکانس نوسان وابسته به دامنه ارتعاشی است. به منظور استخراج پارامترهای محل ترک، یک تیر فولادی یک سر گیردار توسط یک لرزاننده در انتهای تیر تحت تحریک قرار گرفت و پاسخ ارتعاشی آن استخراج و منحنی پاسخ فرکانسی آن رسم شد. همچنین ضرایب غیرخطی

## واژه‌نامه

- |                    |                       |                |
|--------------------|-----------------------|----------------|
| 1. fatigue crack   | 3. Runge Kutta Method | 5. secular     |
| 2. Volterra Series | 4. spatial variable   | 6. non-secular |

## مراجع

- Bovsunovsky, A. P., and Surace, C., "Considerations Regarding Superharmonic Vibrations of a Cracked Beam and the Variation in Damping Caused by the Presence of the Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, pp. 865-886, 2005.
- Irwin, G. R., "Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force", *9<sup>th</sup> Congress of Applied Mechanics*, Brussels, 1957.
- Maghsoodi, A., Ghadami, A., and Mirdamadi, H. R., "Multiple-Crack Damage Detection in Multi-Step Beams by a Novel Local Flexibility-Based Damage Index", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 294-305, 2013.
- Lu, X. B., Liu, J. K., and Lu, Z. R., "A Two-Step Approach for Crack Identification in Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 282-293, 2013.
- Friswell, M. I., and Penny, J. E. T., "A Simple Nonlinear Model of a Cracked Beam", *Proceedings of 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 516-521, 1992.
- Pugno, N., Surace, C., and Ruotolo, R., "Evaluation of the Non-Linear Dynamic Response to Harmonic Excitation of a Beam with Several Breathing Cracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 235, No. 5, pp. 749-762, 2000.
- Surace, C., Ruotolo, R., and Storer, D., "Detecting Nonlinear Behavior using the Volterra Series to Assess Damping in Beam-Like Structures", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 905-926, 2011.
- Clark, R., Dover, W. E., and Bond, L. J., "The Effect of Crack Closure on the Reliability of NDT Prediction of Crack Size", *NDT International*, Vol. 20, pp. 269-275, 1987.
- Abraham, O. N. L., and Brandon, J. A., "Modeling of the Opening and Closure of a Crack", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 370-377, 1995.
- Cheng, S. M., Wu, X. J., and Wallace, A. S. J. "Swamidias, Vibration Response of a Beam with a Breathing Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 1, pp. 201-208, 1999.
- Rezaee, M., and Hassannejad, R., "A New Approach to Free Vibration Analysis of Beam with Breathing Crack Based on Mechanical Energy Balance Method", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 24, pp. 185-190, 2011.
- Rezaee, M., and Fekrmandi, H., "A Theoretical and Experimental Investigation on Free Vibration Behavior of a Cantilever Beam with Breathing Crack", *Journal of Shock and Vibration*, Vol. 18, pp. 1-12, 2011.
- Bovsunovsky, A. P., Surace, C., and Ruotolo, R., "The Effect of Damping on the Non-Linear Dynamic Behavior of a Cracked Beam at Resonance and Super-Resonance Vibrations", *Key Engineering Materials*, Vol. 245, pp. 97-106, 2003.
- Rezaee, M., and Hassannejad, R., "Damped Free Vibration Analysis of a Beam with a Fatigue Crack Using Energy Balance Method", *International Journal of the Physical Sciences*, Vol. 5, No. 6, pp. 793-803, 2010.
- Bovsunovsky, A. P., "The Mechanisms of Energy Dissipation in the Non-Propagating Fatigue Cracks

in Metallic Materials”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 2271-2281, 2004.

۱۶. حسن‌نژاد، ر.، " توسعه تحلیل ارتعاشات عرضی سازه‌های ترک‌دار با مدل غیرخطی ترک"، رساله برای دریافت دکتری در رشته مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، ۱۳۸۹.

17. Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, New York: Wiley Interscience, 1979.

18. Pakdemirli, M., and Boyacy, H., "Nonlinear Vibration of a Simple-Simple Beam with Non-Ideal Support in Between", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 268, No. 2, pp. 331-341, 2003.