

## روش وزنی تصادفی شبیه‌سازی مونت کارلو برای تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌ها

سحر سراوانی و بهروز کشته‌گر\*

گروه مهندسی عمران، دانشگاه زابل، زابل

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۲۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۰۴/۲۴)

**چکیده** - برآورد صحیح احتمال خرابی همراه با حجم محاسبات پایین، دغدغه اصلی در قابلیت اعتماد سازه‌ها به‌شمار می‌آید. روش شبیه‌سازی مونت کارلو، به‌سادگی می‌تواند برآورد صحیحی از احتمال خرابی ارائه دهد. اما، برای مسائل پیچیده مهندسی با احتمال خرابی پایین زمان‌بر بوده و ممکن است برآورد ناکارآمدی از احتمال خرابی ارائه دهد. در این مقاله، بر اساس یک روش وزنی، کارایی روش شبیه‌سازی مونت کارلو بهبود بخشیده شده است. بر مبنای یک تابع نمایی، وزن نمونه‌ها به‌صورت تصادفی در فضای طراحی تنظیم شده و داده‌های تنظیم شده تصادفی، برای بهبود روش مونت کارلو استفاده شده است. عملکرد همگرایی روش وزنی تصادفی شبیه‌سازی مونت کارلو مانند صحت و میزان برآورد تابع عملکرد، به‌کمک چندین مثال غیرخطی ریاضی و سازه‌ای با متغیرهای تصادفی نرمال و غیرنرمال با روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه شده است. نتایج حاکی از آن است که روش پیشنهادی، نتایج صحیحی برآورد کرده و در حدود ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ برابر حجم محاسبات را نسبت به روش مونت کارلو کاهش داده است.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی مونت کارلو، قابلیت اعتماد سازه‌ها، احتمال خرابی، روش وزنی تصادفی شبیه‌سازی مونت کارلو.

## Random - weighted Monte Carlo Simulation Method for Structural Reliability Analysis

S. Saravani and B. Keshtegar\*

Department of Civil Engineering, University of Zabol, Zabol, Iran.

**Abstract:** *The computational burdens and more accurate approximations for the estimation of the failure probability are the main concerns in the structural reliability analyses. The Monte Carlo simulation (MCS) method can simply provide an accurate estimation for the failure probability, but it is a time-consuming method for complex reliability engineering problems with a low failure probability and may efficiently approximate the failure probability. In this paper, the efficiency of MCS for the computations of the performance function is improved using a random-weighted method known as the random-weighted MCS (RWMC) method. By using the weighted exponential function, the weights of random data points generated by MCS are*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: bkeshtegar@uoz.ac.ir

adjusted by selecting the random point in the design space. The convergence performances including the computational burdens for evaluating the limit state function and the accuracy of failure probabilities of RWMC are compared with MCS by using several nonlinear and complex mathematical and structural problems with normal and no-normal random variables. The results indicate that the proposed RWMC method can estimate the accurate results with the less computational burdens, about 100 to 1000 times faster than MCS.

**Keywords:** Monte Carlo Simulation, Structural reliability analysis, Failure possibility, Random-weighted Monte Carlo simulation

## فهرست علائم

احتمال خرابی	$P_f$	میانگین احتمال خرابی	$E(P_f)$
نقطه تصادفی در فضای نرمال استاندارد	$U_f$	تابع چگالی احتمالی توام	$f_X(x)$
واریانس احتمال خرابی	$Var(P_f)$	ناحیه خرابی	$g(X_i) \leq 0$
وزن تصادفی	$w_i$	تابع شمارنده	$I(X)$
$i$ امین متغیر تصادفی	$X_i$	تعداد آزمون	$N$

### ۱- مقدمه

استوار است که در آن باید شرایط تحدب و تقعر تابع عملکرد در نظر گرفته شود. بنابراین، پیش فرض یکتایی نقطه حداکثر محتمل برای مسائل با چندین نقطه محتمل قابل حفظ نمی‌شود. روش‌های شبیه‌سازی مانند مونت‌کارلو<sup>۳</sup>، برآورد صحیحی از احتمال خرابی ارائه داده اما، به حجم محاسبات بالایی از برآورد تابع عملکرد برای تخمین احتمال خرابی نیاز دارد.

روش‌های شبیه‌سازی نسبت به روش‌های تحلیلی از صحت برآورد بالایی در تخمین احتمال خرابی توابع غیرخطی برخوردار بوده و نیاز به محاسبه بردار حساسیت بر مبنای گرادینان تابع عملکرد ندارند. اما، این روش‌ها نیازمند برآورد بالایی از تابع عملکرد برای یک تخمین مناسب بوده و نیز حجم داده‌های شبیه‌سازی آنها، ممکن است وابسته به نوع مسئله و تعداد متغیرهای تصادفی باشد. به‌منظور کاهش تعداد شبیه‌سازی، روش مونت‌کارلو توسط محققین بهبود یافته است [۶ و ۷]. نمونه‌گیری اهمیتی<sup>۴</sup>؛ یک روش کاهش واریانس است که می‌تواند در روش مونت‌کارلو استفاده شود. برای یک تابع عملکرد با توزیع داده مناسب می‌توان به صرفه‌جویی در زمان اجرا از نقاط قوت و فرمولاسیون پیچیده در توزیع داده‌ها در فضای طراحی از نقاط ضعف این روش اشاره کرد.

سازه‌های مهندسی تحت بارهای محیطی وارده که به‌طور ذاتی ماهیت تصادفی دارند، هستند [۱]. از طرف دیگر، پارامترهای مکانیکی مصالح سازه همچون خواص مواد و شرایط هندسی سازه به لحاظ ابعاد و نیز شرایط مرزی به‌طور عمومی، از منابع اساسی عدم قطعیت در یک سازه به‌شمار می‌آیند [۲]. ماهیت تصادفی در بارها و پارامترهای مکانیکی مصالح و هندسی سازه، می‌تواند عملکرد تصادفی سازه در سطح بهره‌برداری را نتیجه دهد. از این‌رو، ارزیابی و برآورد احتمال خرابی در سطح بهره‌برداری سازه با در نظر گرفتن انواع عدم قطعیت از اهمیت ویژه‌ای در برآورد میزان ایمنی سازه برخوردار است [۳]. برای تخمین ایمنی سازه (برآورد احتمال خرابی<sup>۱</sup>) می‌توان از روش‌های احتمالاتی مفید قابلیت اعتماد سازه‌ها استفاده کرد. روش‌های برآورد احتمال خرابی یک سازه به‌طور عمده به دو دسته، روش‌های تحلیلی و روش‌های شبیه‌سازی، تقسیم‌بندی می‌شوند [۴]. روش‌های تحلیلی مانند اولین مرتبه قابلیت اطمینان<sup>۲</sup>، کارایی مناسبی داشته اما، برآورد صحیحی از احتمال خرابی به‌خصوص در مسائل با مرتبه غیرخطی بالا ارائه نمی‌دهند [۵]. از طرفی فرمول‌بندی روش‌های تحلیلی برای تخمین احتمال خرابی بر مبنای یک الگوریتم تکرار

از طرفی، توزیع نامناسب داده‌ها برای برآورد احتمال خرابی یک تابع عملکرد پیچیده، ممکن است سبب ایجاد خطاهای چشمگیری شود [۸]. نمونه‌گیری جهتی<sup>۵</sup>؛ یک روش شبیه‌سازی کاهش واریانس است که می‌تواند بر مبنای روش مونت کارلو توسعه داده شود. در مقایسه با شبیه‌سازی ساده مونت کارلو، اگر تابع عملکرد به شدت غیرخطی نباشد، حدود نیمی از شبیه‌سازی در ناحیه خرابی تولید می‌شوند که یکی از مزیت‌های روش نمونه‌گیری جهتی است. اما، فرمولاسیون پیچیده و دقیق نبودن تخمین احتمال خرابی توابع با ابعاد بالا و غیرخطی از نقاط ضعف روش نمونه‌گیری جهتی به‌شمار می‌آید [۸]. شبیه‌سازی زیرمجموعه‌ای<sup>۶</sup>؛ یکی از روش‌های مورد استفاده در قابلیت اعتماد سازه‌ها به‌منظور محاسبه احتمال خرابی است که ارتباط بین متغیرهای تصادفی و تعداد پاسخ‌های مورد استفاده را به‌عنوان یک جعبه سیاه می‌گیرد، این موضوع می‌تواند برای سیستم‌های پیچیده جذاب باشد. روش‌های احتمالاتی بر اساس ترکیب مدل‌سازی و الگوریتم قابلیت اعتماد اغلب کارآمدتر از روش‌های کاهش واریانس مانند نمونه‌گیری اهمیتی و جهتی است. راندمان پایین، فرمولاسیون پیچیده و تخمین احتمال خرابی بالا برای محاسبه احتمال خرابی‌های کوچک، از نقاط ضعف این روش است [۹]. شبیه‌سازی یکنواخت وزنی<sup>۷</sup> به‌طور یکنواخت به تولید نمونه در یک فضای متغیر تصادفی با اعمال وزن برای هر داده بر مبنای تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی، می‌پردازد. روش وزنی یکنواخت دارای راندمان بالا و مستقل از نقطه طراحی است. در تخمین مقادیر کوچک احتمال شکست دقیق بوده و رابطه‌سازی ساده‌ای دارد [۶]، اما، برای برآورد توابع با متغیرهای زیاد نیاز یک حجم داده تولید شده بالایی داشته و نیز حجم محاسبات تابع عملکرد در تخمین احتمال خرابی وابسته به تعداد متغیرهای تصادفی و خصوصیات آماری آنها وابسته است. سادگی استفاده و نیز برآورد صحیح همراه با تعداد شبیه‌سازی پایین به‌طور عمده، مهم‌ترین فاکتورها برای انتخاب یک روش تحلیل قابلیت اعتماد در برآورد احتمال

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۷

خرابی سازه‌های پیچیده مهندسی با توابع عملکرد غیرخطی هستند.

روکو (۲۰۰۳) یک روش نمودار درختی ترکیب شده با روش مونت کارلو برای تخمین مدل‌های تجربی تابع عملکرد در ارزیابی قابلیت اطمینان ارائه کرده است. ایده اصلی او با آموزش یک مدل با تعدادی محدود داده استوار است که جایگزین تابع عملکرد در روش مونت کارلو می‌شود [۱۰]. صحت تخمین تابع عملکرد بر مبنای تعدادی محدود داده برای آموزش مدل درختی می‌تواند نمایانگر صحت و کارایی آن به‌شمار آید. ناسه و همکاران (۲۰۰۹) یک روش تخمین برآورد احتمال خرابی مبتنی بر روش مونت کارلو توسعه دادند [۱۱]. روش آنها بر اساس برآورد با تابع نمایی برای مقادیر مختلف احتمال خرابی بر مبنای یک شاخص افزایشده احتمالاتی استوار است که صحت برآورد احتمالات پایین در این روش همانند روش مونت کارلو نیاز به شبیه‌سازی بالایی دارد. راشکی و همکاران (۲۰۱۲) یک روش شبیه‌سازی جدید برای تخمین احتمال خرابی و نقطه حداکثر محتمل<sup>۸</sup> ارائه کردند که این روش بر تولید نمونه با توزیع یکنواخت در فضای طراحی برای تمام متغیرهای تصادفی استوار بوده و تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی برای محاسبه شاخص وزن استفاده شده است [۱۲]. اوکاشا (۲۰۱۶) روش شبیه‌سازی یکنواخت وزنی متوسط را ارائه کرده، این روش توانایی بالایی در حل مسائل قابلیت اطمینان سازه نشان داده است [۱۳]. جان و همکاران (۲۰۱۶) با توجه به حداکثر مقدار توزیع به‌دست آمده توسط اصل حداکثر آنتروپی، یک روش کارآمد برای ارزیابی قابلیت اطمینان از سازه سیستم‌های دینامیکی ارائه کرده‌اند [۱۴]. روش یکنواخت وزنی برای مسائل با تعداد متغیرهای پایین بسیار کارا و دقیق بوده اما، در این نوع شبیه‌سازی حدود حدی متغیرهای تصادفی بسیار حائز اهمیت است و ممکن است با انتخاب ناصحیح دامنه تولید تصادفی برآورد احتمال خرابی به‌نحو مناسب صورت نپذیرد. از طرفی در این نوع روش‌ها،

چگالی تولید تصادفی نمونه‌ها وابسته به تعداد متغیرهای تصادفی است به طوری که، نوع تابع شرایط حدی، تعداد متغیرها و نیز خصوصیات آماری آنها در یک مسئله قابلیت اعتماد می‌توانند بر صحت برآورد و کارایی این روش تأثیرگذار باشد.

به طور عمده، برای بهبود کارایی روش مونت کارلو از روش‌های ترکیبی مدل‌سازی و مونت کارلو استفاده می‌شود که از آن جمله می‌توان، به روش پاسخ سطح با تابع چند جمله‌ای مرتبه دوم، شبکه‌های مصنوعی و کریجینگ اشاره کرد. داس و ژنگ (۲۰۰۰) یک روش برای برازش تابع سطح پاسخ پیشنهاد داده‌اند که بر مبنای سه مرحله: ۱- جستجوی داده‌ها، ۲- بهبود داده‌ها و نیز ۳- چک کردن آنها برای برآورد صحیح تابع عملگر استوار است [۱۵]. کیم و نا (۱۹۹۷) یک روش بهبود پاسخ سطح بر مبنای انتخاب نقاط نمونه‌گیری با استفاده از اطلاعات تابع شرایط حدی پیشنهاد کردند و مشخص شده است که نتایج تابع تقریبی پاسخ سطح بر مبنای انتخاب نقاط با استفاده از اطلاعات تابع شرایط حدی می‌تواند نتایج صحیح‌تری را به سادگی فراهم کند [۱۶]. پاپادراکاکیس و لاگاروس (۲۰۰۲) شبکه عصبی مصنوعی را برای برآورد قیود توابع احتمالاتی مسائل بهینه‌سازی برای کاهش برآورد حجم محاسبات استفاده کرد [۱۷]. کایماز (۲۰۰۵) روش کریجینگ را برای مسائل قابلیت اطمینان سازه با روش پاسخ سطح بررسی و مقایسه کرد و نتیجه گرفت که پارامترهای روش کریجینگ بر نتایج قابلیت اعتماد سازه‌ها تأثیرگذار است با این حال، هیچ راهنمایی در انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای این روش برای مسائل مختلف وجود ندارد و اجرای روش کریجینگ بسیار مشکل‌تر از روش پاسخ سطح است [۱۸]. در روش‌های فوق کمی‌سازی خطاهای ناشی از مدل‌سازی اغلب مشکل است و یا گاهی غیرممکن است و از طرفی صحت مدل‌سازی تابع عملکرد به‌طور مستقیم بر صحت برآورد احتمال خرابی تأثیرگذار است. همچنین در احتمال خرابی‌های بسیار پایین ممکن است به دلیل شبیه‌سازی

بالا، نتوان تولید تصادفی داده مناسبی برای برآورد احتمال خرابی پایین همانند روش مونت کارلو داشت لذا، روش‌های ترکیبی مدل‌سازی و شبیه‌سازی می‌توانند حجم محاسبات و نیز برآورد تابع عملکرد ضمنی را کاهش دهد اما، صحت برآورد تابع عملکرد و انتخاب نمونه‌ها جهت آموزش مدل بسیار حائز اهمیت است. از این رو می‌توان ادعا کرد که برآورد صحیح همراه با کاهش محاسبات برای تخمین احتمال خرابی از موضوع‌های اساسی در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها به‌شمار می‌آیند.

روش شبیه‌سازی مونت کارلو بر خلاف روش‌های بهبود یافته آن مانند روش یکنواخت وزنی و شبیه‌سازی زیرمجموعه‌ای به تعداد متغیر تصادفی و نیز شرایط حدی تابع عملکرد وابسته نبوده اما، برآورد صحیح احتمال خرابی منجر به تولید تصادفی بالایی برای احتمال خرابی پایین می‌شود. در این تحقیق بر مبنای تولید تصادفی داده با استفاده از قاعده شبیه‌سازی مونت کارلو، یک الگوی تصادفی وزنی تدوین شده است. بر اساس یک نقطه تصادفی، یک شاخص وزن تصادفی با تابع نمایی برای نقاط شبیه‌سازی شده با استفاده از روش مونت کارلو تعریف شده است. به کمک شش مثال قابلیت اعتماد شامل دو مثال ریاضی (توابع غیرخطی محدب/مقعر و تابع غیرنرمال با ابعاد بالا) و چهار مثال غیرخطی سازه‌ای، صحت برآورد روش پیشنهادی و نیز حجم محاسبات تابع شرایط حدی آزمون شده است. کارایی روش وزنی تصادفی مونت کارلو برای مثال‌های مورد بررسی با روش مونت کارلو مقایسه شده است. نتایج نشان داده است که روش پیشنهادی می‌تواند نتایج صحیحی با حجم محاسبات در حدود ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ برابر کمتر از روش مونت کارلو ارائه دهد.

## ۲- روش شبیه‌سازی مونت کارلو

این روش کاربردهای فراوانی در تحلیل فرایندهای تصادفی گسسته و نیز مسائل پیچیده قابلیت اعتماد با تابع شرایط حدی

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } g \leq 0 \\ 0 & \text{if } g > 0 \end{cases} \quad (2)$$

در رابطه (۱)،  $f_x(x)$  تابع چگالی احتمالی مشترک مؤلفه‌ای برداری  $x$  یعنی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  است. حل انتگرال رابطه (۱) و یافتن احتمال خرابی  $P_f$ ، در یک حالت عمومی بسیار پیچیده است. پیچیدگی این انتگرال‌گیری در حالت عمومی به دلایل زیر است:

الف)  $f_x(x)$  ترکیب ساده‌ای ندارد (برای مثال این تابع می‌تواند غیرگوسی و یا غیرنرمال باشد). در این تابع وابستگی میان مؤلفه برداری  $x$  باید به شایستگی منعکس شده باشد.

ب) در فضای  $n$  بعدی  $x$ ، تابع حالت حدی  $g() = 0$  می‌تواند تابع غیرخطی غیرهموار باشد.

پ) انتگرال‌گیری  $n$  گانه فوق در حالت عمومی حل بسته‌ای ندارد و برای ابعاد بالاتر از ۵ بسیار دشوار است.

در روش مونت‌کارلو میانگین برآورد احتمال خرابی و واریانس احتمال خرابی پیش‌بینی شده به صورت زیر تخمین زده می‌شود [۲۲ و ۲۳]:

$$E(P_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) f_x(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^N I(x)}{N} \approx \frac{N_f}{N} \quad (3)$$

$$\text{var}(P_f) \approx \frac{1}{N} \left( (E(P_f))^2 - P_f^2 \right) \quad (4)$$

با ساده‌سازی دو رابطه (۳) و (۴) ضریب تغییرات برآورد احتمال خرابی به صورت زیر است [۲۴]:

$$\text{cov}(P_f) = \frac{\sqrt{\text{var}(P_f)}}{P_f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1 - E(P_f)}{E(P_f)}} \quad (5)$$

می‌توان اظهار کرد که برای رسیدن به یک احتمال خرابی برابر  $\hat{P}_f = E(P_f) = 10^{-4}$  و همچنین حداکثر ضریب تغییرات احتمال خرابی برابر با  $\text{cov} = 0.05$  تعداد شبیه‌سازی

باید طوری باشد که  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1 - 10^{-4}}{10^{-4}}} > 0.05$  و در نتیجه

$N \geq 3999600$  باشد. بر اساس نتایج فوق می‌توان نتیجه گرفت که با فرض ضریب تغییرات احتمال خرابی برابر با ۵

مشمول بر چند نقطه حداکثر محتمل دارد. روش مونت‌کارلو برای برآورد احتمال خرابی بر مبنای سه گام اساسی به صورت زیر قابل استفاده است [۱۹-۴]:

(۱) تولید تصادفی اعداد با استفاده از تابع توزیع تجمعی احتمال متغیرهای تصادفی در بازه صفر و یک  $X \in [0, 1]$

(۲) برآورد مقدار هر متغیر تصادفی با استفاده از خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی بر اساس عدد تولید شده تصادفی در گام یک

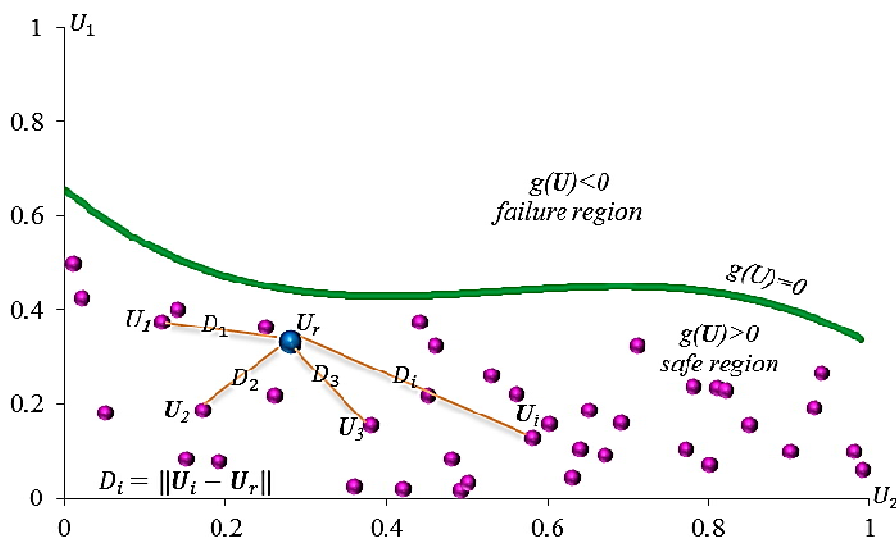
(۳) برآورد تابع شرایط حدی مطابق با داده‌های تولید شده گام دوم و تخمین احتمال خرابی

روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، یک روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بر اساس ایجاد دنباله‌ای از نمونه‌های تصادفی است که هر متغیر تصادفی  $X_i$  به صورت تصادفی نمونه‌گیری شده و سپس تابع حالت حدی بررسی می‌شود. اگر  $g(X_i) \leq 0$  برقرار باشد در چنین حالتی نمونه تولید شده داده تصادفی  $X_i$  در ناحیه خرابی و در غیر این صورت در ناحیه سلامتی قرار می‌گیرد. این آزمون (شبیه‌ساز متغیرهای تصادفی با کنترل تابع حالت حدی) به تعداد زیادی تکرار نیازمند است که در هر یک از این دفعات بردار  $X_i$  به طور تصادفی انتخاب می‌شود تا چندین نقطه در ناحیه خرابی تولید شود.

در پایان، برای  $N$  آزمون انجام گرفته شده، احتمال خرابی تقریباً برابر با  $\frac{n(g \leq 0)}{N} \approx P_f$  است. که در آن  $n(g \leq 0)$  تعداد آزمون‌هایی است که در آنها  $G \leq 0$  است. واضح است که تعداد آزمون‌ها ( $N$ ) به دقت  $P_f$  ارتباط می‌یابد. از مزایای مهم این روش عدم وجود محدودیت در نوع و شکل  $f_x(X)$  و نیز تابع حالت حدی  $g(X) \leq 0$  است [۲۰]. بنابراین برای آنکه بتوان تخمینی از مقدار ایمنی در سازه ارائه کرد، باید بتوان مقدار احتمال خرابی  $P_f$  را برآورد کرد. مقدار این احتمال در ناحیه خرابی به صورت زیر به دست می‌آید [۲۱]:

$$P_f = p[g(X) \leq 0] = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) f_x(x) dx \quad (1)$$

که در آن تابع  $I(x)$  تابع شمارنده به صورت زیر است:



شکل ۱- نمایش نمادین محاسبه وزن بر اساس یک نقطه تصادفی در فضای نرمال

$$U = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad (7)$$

در شکل (۱) فاصله بین نقاط شبیه‌سازی شده و نقطه تصادفی به صورت نمادین در یک فضای نرمال دو بعدی نشان داده شده است. بر اساس این فاصله مقدار تابع وزن رابطه (۷) برای داده شبیه‌سازی شده  $w_i$  قابل محاسبه است. مشخص است که نقاطی که به نقطه تصادفی نزدیک‌تر هستند، وزن بزرگ‌تری را نسبت به داده‌های شبیه‌سازی شده دورتر از نقطه تصادفی اتخاذ می‌کنند. تابع وزن ارائه شده برای نقاطی که در یک فاصله یکسان در ناحیه سلامتی یا خرابی قرار گیرند، مشابه بوده که شاخص وزن بر اساس فاصله از نقطه تصادفی برای هر داده قابل تنظیم است. انتخاب نقطه تصادفی می‌تواند یک ماهیت عدم قطعیت برای این روش ارائه دهد. لذا، می‌توان این عدم قطعیت را در برآورد احتمال خرابی را بر اساس چگالی داده‌های تصادفی در فضای طراحی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو کنترل کرد.

ممکن است چگالی شبیه‌سازی (تعداد داده‌های تولید شده) نسبت به احتمال خرابی پایین بوده و هیچ نقطه‌ای از شبیه‌سازی‌ها در ناحیه خرابی واقع نشود. از این رو وزن محاسبه شده برای نقاط در ناحیه سلامتی صورت گرفته و مطابق با

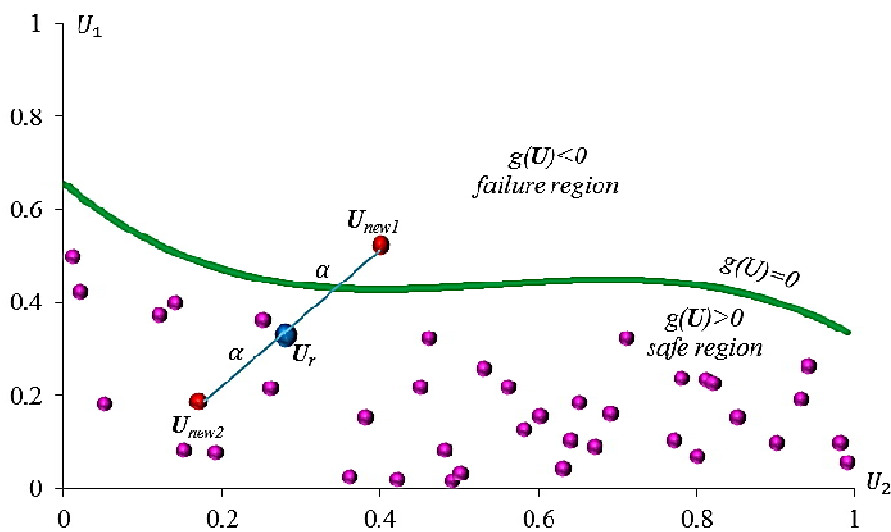
درصد و احتمال خرابی برابر با  $10^{-4}$  نیاز به تعداد تقریباً  $4 \times 10^6$  شبیه‌سازی است، که برای مسائل پیچیده مهندسی نیاز به صرف زمان بالایی است. از این رو، رویکرد بهبود روش مونت کارلو با کاهش تعداد نمونه‌های انتخاب شده جهت شبیه‌سازی می‌تواند یک موضوع قابلیت اعتماد جذاب به‌شمار آید.

### ۳- بهبود روش شبیه‌سازی مونت کارلو

استفاده از یک روش ساده، مانند شبیه‌سازی مونت کارلو با تعداد شبیه‌سازی پایین به نحوی که برآورد صحیحی ارائه دهد، در مسائل قابلیت اعتماد می‌تواند حائز اهمیت باشد. عملکرد شبیه‌سازی مونت کارلو بر مبنای تعداد محدود برآورد تابع عملکرد با استفاده از تابع وزنی تصادفی برای هر داده شبیه‌ساز بهبود بخشیده شده است. در این مقاله تابع وزن تصادفی به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$w_i = \exp\left(-\frac{|D_i|}{100}\right) \quad (8)$$

که  $D_i = \|U_i - U_r\|$  فاصله هر داده شبیه‌سازی  $U_i$  با یک نقطه تصادفی  $U_r$  در فضای نرمال بوده که U به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۲- نمایش نمادین تولید نقاط کمکی با استفاده از ضریب  $\alpha$

اساس  $N+2$  نقطه تصادفی می‌توان رابطه (۱) را برای برآورد از احتمال خرابی به صورت زیر تصحیح کرد:

$$P_f = \int \frac{I(x)w_i}{w_i} f(x) dx \approx \frac{\sum_{i=1}^{N+2} I(x)w_i}{\sum_{i=1}^{N+2} w_i} \quad (10)$$

فرمول‌بندی روش پیشنهادی مشابه با روش مونت کارلو بوده با این تفاوت که، برای هر داده یک شاخص وزن بر اساس یک تابع توانی تولید شده است. از طرفی در این روش بر خلاف روش وزنی، از یک تابع نمایی استفاده شده در حالی که در روش شبیه‌سازی وزنی یکنواخت، شاخص وزن بر اساس خصوصیات تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی محاسبه می‌شود. در این روش برای تولید دنباله‌ای تصادفی برای تابع عملکرد، نیاز به تعریف حدود حداقل و حداکثر برای هر متغیر تصادفی همانند روش وزنی یکنواخت نیست بلکه، ماهیت تولید تصادفی بر مبنای روش مونت کارلو استفاده می‌شود. از این رو، به نظر می‌رسد که سادگی این روش همانند روش مونت کارلو بوده و برای مسائل با ابعاد بالا و غیرنرمال همانند روش مونت کارلو مستقل از حجم نمونه و تعداد متغیر باشد. از طرفی مشخص

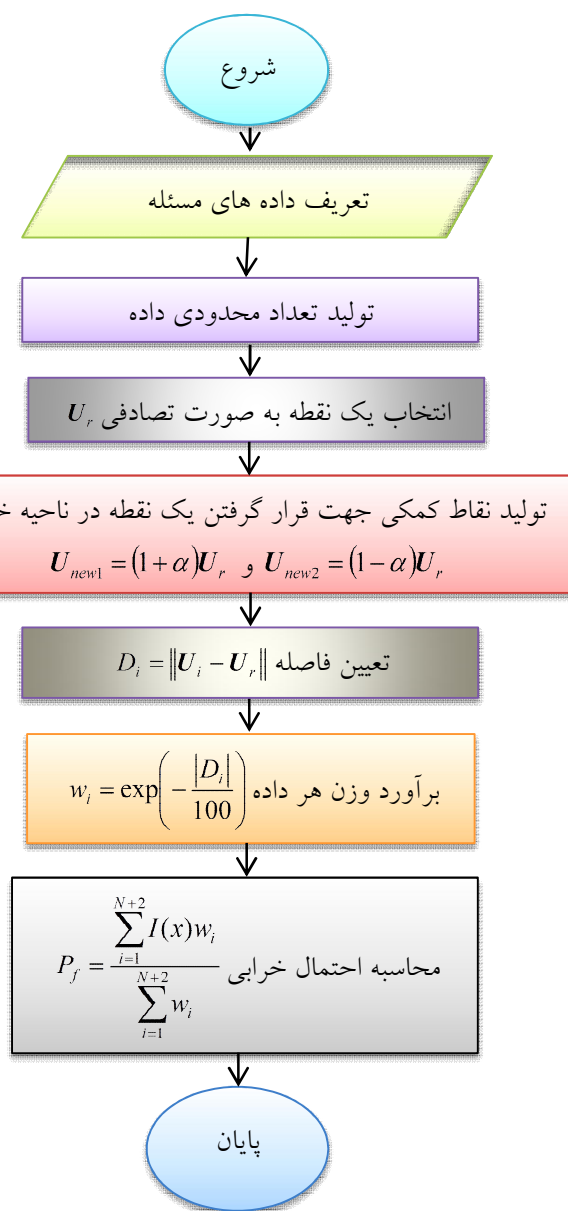
رابطه (۱) احتمال خرابی بر اساس روش مونت کارلو، به دلیل عدم وجود هیچ نقطه شبیه‌سازی شده در ناحیه خرابی برابر با صفر محاسبه می‌شود. لذا، این روش نیز همانند روش مونت کارلو نمی‌تواند احتمال خرابی را به درستی برای تعداد شبیه‌سازی پایین تخمین زند. برای بهبود این نقص، بر اساس نقطه تصادفی دو نقطه دیگر تولید کرده که فاصله یکسانی از نقطه تصادفی داشته به نحوی که فرض شود یکی از آنها در ناحیه خرابی واقع شود.

در شکل (۲) به صورت نمادین دو نقطه تصادفی جدید نشان داده شده که این دو نقطه در فواصل یکسان از نقطه تصادفی  $U_r$  در ناحیه سلامتی و خرابی قرار گرفته‌اند. با انتخاب این دو نقطه مشخص است که به ازای تعداد شبیه‌سازی پایین می‌توان یک نقطه در ناحیه خرابی تولید کرد. این دو نقطه را در فضای نرمال می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$U_{new1} = (1 + \alpha) U_r \quad (8)$$

$$U_{new2} = (1 - \alpha) U_r \quad (9)$$

که در آن  $\alpha$  یک ضریب بزرگنمایی است که عددی بین  $0/1$  و  $0/9$  ( $0/1 < \alpha < 0/9$ ) در نظر گرفته شده است. از این رو بر



شکل ۳- روندنمای به کارگیری روش تصادفی وزنی مونت کارلو برای محاسبه احتمال خرابی

#### ۴- نتایج عددی و مثال‌های سازه‌ای

در این بخش، دو مثال ریاضی و چهار مثال سازه‌ای برای نشان دادن کارایی و همچنین صحت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. از روش شبیه‌سازی مونت کارلو به عنوان مرجع برای مقایسه دقت و کارایی استفاده می‌شود. مثال‌ها به صورت یک مثال ریاضی تابع محدب/مقعر، مسئله با ابعاد بالا با

است که، با افزایش تعداد داده‌های شبیه‌سازی می‌توان تعداد نقاط بیشتری را در ناحیه خرابی برآورد کرد لذا، در چنین مواردی می‌توان نتیجه گرفت که این روش ممکن است مستقل از نقطه تصادفی و ضریب بزرگنمایی باشد. بر اساس روابط ارائه شده، الگوی محاسبه احتمال خرابی در شکل (۳) بر اساس روش وزنی تصادفی مونت کارلو نشان داده شده است.



جدول ۱- نتایج قابلیت اعتماد روش‌های شبیه‌سازی برای مثال تابع محدب/ مقعر

روش شبیه‌سازی	تعداد نمونه تصادفی	تابع محدب			تابع مقعر		
		$P_f \times 10^{-4}$	$\beta$	خطای نسبی (%)	$P_f$	$\beta$	خطای نسبی (%)
مونت کارلو	۱۰ <sup>۶</sup>	۲/۲۰۵	۳/۵۱۴۲	-	۰/۴۵۰۱	۰/۱۲۵۴	-
	۱۰۰	-	-	-	۰/۴۳۴۹	۰/۱۶۳۹	-۳۰/۷
	۵۰۰	۱۷	۲/۹۳۲۲	۱۶/۵۶	۰/۴۵۵۲	۰/۱۱۲۴	۱۰/۳۶
وزنی تصادفی	۱۰۰۰	۹/۰۶۱۴	۳/۱۱۹۴	۱۱/۲۳	۰/۴۴۶۴	۰/۱۳۴۷	-۷/۴۱
مونت کارلو	۲۰۰۰	۴/۲۹۰۰	۳/۳۱۳۰	۵/۷۲	۰/۴۵۲۱	۰/۱۲۰۳	۴/۰۶
	۵۰۰۰	۲/۰۰۱۶	۳/۵۳۹۹	-۰/۷۳	۰/۴۴۹۵	۰/۱۲۶۷	۱/۰۴
	۱۰۰۰۰	۲/۱۹۳۹	۳/۵۱۸۱	-۰/۱۱	۰/۴۵۰۴	۰/۱۲۴۷	-۰/۵۶

می‌توان یک برآورد از شاخص قابلیت اعتماد با خطایی در حدود ۱۶/۵ درصد اتخاذ کرد که افزایش شبیه‌سازی منجر به افزایش صحت برآورد احتمال خرابی از ۱۶ درصد به ۰/۱ درصد می‌شود. بر اساس تابع مقعر و محدب می‌توان نتایج قابل قبولی از احتمال خرابی صحیح و کارا بر اساس شبیه‌سازی ۲۰۰۰ داده با ضریب بزرگنمایی برابر با ۰/۲ به دست آورد که این برآورد در حدود ۵۰۰ برابر کمتر از روش شبیه‌سازی مونت کارلو است.

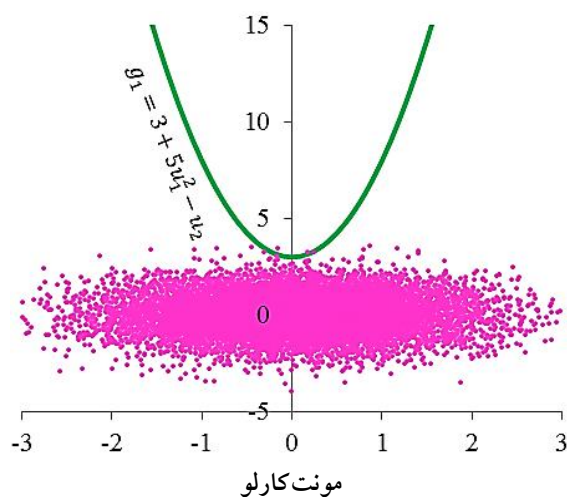
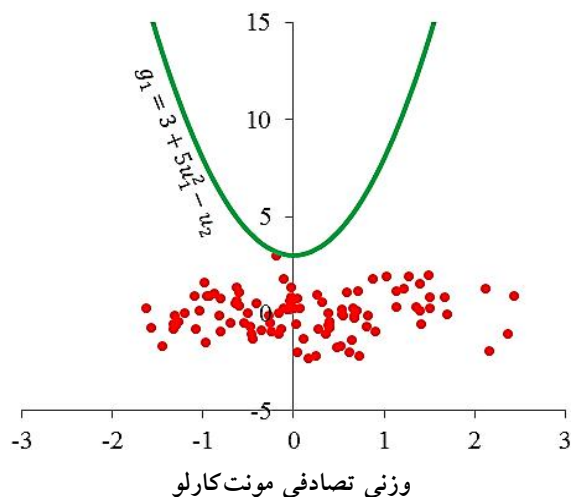
در شکل (۴) تابع محدب (۴-الف) و مقعر (۴-ب) بر اساس داده‌های تصادفی روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو با یک میلیون نمونه و وزنی تصادفی مونت کارلو با ۱۰۰ داده شبیه‌سازی شده و  $\alpha = 0/2$  نشان داده شده است. بر اساس شکل (۴-الف) مشخص است که، نقطه حداکثر محتمل منحصر به فردی برای تابع محدب در فاصله ۳ از مبدأ نتیجه می‌شود که این عدد، متناظر با شاخص قابلیت اعتماد مرتبه اول است. اما، تابع مقعر شامل دو نقطه حداکثر محتمل است لذا، روش‌های تحلیلی قابلیت اعتماد نمی‌توانند به درستی برآورد مناسبی از احتمال خرابی برای تابع مقعر به دلیل چندگانه بودن نقطه حداکثر محتمل ارائه کنند. در حالی که روش شبیه‌سازی مورد استفاده بر اساس تعدادی محدود از شبیه‌سازی می‌تواند یک برآورد از احتمال خرابی برای این تابع ارائه دهد. از طرفی

متغیرهای غیرنرمال و مثال‌های سازه‌ای با توابع توزیع نرمال و غیرنرمال انتخاب شده‌اند.

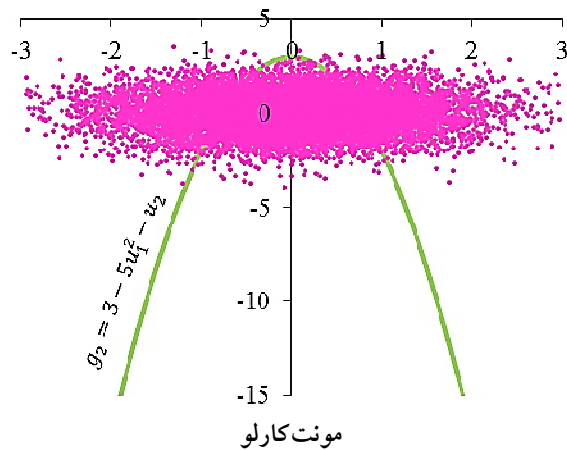
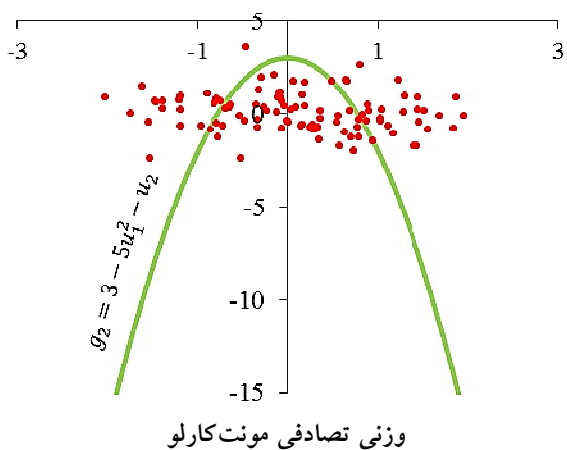
#### مثال ۱- تابع محدب / مقعر

(۱۱) تابع محدب  $g_1 = 3 + 5u_1^2 - u_2$   
 (۱۲) تابع مقعر  $g_2 = 3 - 5u_1^2 - u_2$   
 که در آن  $u_1$  و  $u_2$  متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد با میانگین صفر و انحراف معیار یک هستند. این دو تابع بر اساس روش مونت کارلو و روش بهبود یافته مونت کارلو با شاخص وزن تصادفی تحلیل شده‌اند، نتایج قابلیت اعتماد شامل تعداد برآورد تابع شرایط حدی، شاخص قابلیت اعتماد  $(P_f) = -\Phi^{-1}(\beta)$  که در آن  $\Phi$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است و نیز خطای نسبی که به صورت  $(\beta_{MCS} - \beta) / \beta_{MCS} \times 100$  محاسبه می‌شود، برای هر تابع به ازای ضریب بزرگنمایی برابر با  $0/2$  ( $\alpha = 0/2$ ) در جدول (۱) نشان داده شده است. مشخص است که تابع مقعر به ازای تمامی شبیه‌سازی‌های مورد بررسی (۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ داده) نتایج قابل قبولی از احتمال خرابی ارائه داده است در حالی که تابع محدب به دلیل احتمال خرابی پایین به ازای شبیه‌سازی ۱۰۰ داده و  $\alpha = 0/2$  نتیجه مناسبی از احتمال خرابی ارائه نداده است. مشخص است که با افزایش تعداد شبیه‌سازی برای این تابع با احتمال خرابی پایین در حدود ۵۰۰ داده

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۷



(الف)



(ب)

شکل ۴- نمایش داده‌های شبیه‌سازی برای روش‌های مونت کارلو و وزنی تصادفی مونت کارلو: (الف) تابع محدب و (ب) تابع مقعر

زیر است [۲۵]:

$$g(x) = n + 3\sigma\sqrt{n} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

که در آن  $x_i=1,2,\dots,n$  از توزیع لوگ-نرمال با میانگین یک، انحراف معیار  $0/2$  ( $\sigma=0/2$ ) پیروی می‌کند. تعداد کل متغیرهای تصادفی،  $n$ ، برای مطالعه عددی حاضر ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج تحلیل قابلیت اعتماد برای این مثال در جدول (۲) نشان داده شده است. مشخص است که افزایش تعداد داده‌های تصادفی برای روش وزنی تصادفی مونت کارلو منجر به دستیابی نتایجی مطابق با نتیجه مونت کارلو شده با این تفاوت که در حدود ۱۰۰۰۰-۱۰۰ برابر حجم محاسبات

مشخص است که در تابع محدب به‌ازای ۱۰۰ داده شبیه‌سازی شده هیچ نقطه‌ای در ناحیه خرابی واقع نشده از این‌رو، مقدار ضریب بزرگنمایی می‌تواند یک فاکتور مهم برای تخمین احتمال خرابی‌های پایین باشد. به‌طوری که به‌ازای ۲۰۰۰ داده شبیه‌سازی شده می‌توان شاخص قابلیت اعتمادی در حدود ۳/۳۱ تخمین زد که به مراتب بسیار صحیح‌تر از روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد ( $\beta=3$ ) برآورد شده است.

## مثال ۲- تابع ریاضی غیرنرمال با ابعاد بالا

یک مسئله قابلیت اطمینان با ابعاد بالا و متغیرهای غیرنرمال در این مثال در نظر گرفته شده که تابع شرایط حدی آن به‌صورت

جدول ۲- نتایج روش‌های قابلیت اطمینان با مثال غیرنرمال با ابعاد بالا

روش شبیه‌سازی	تعداد نمونه تصادفی	$P_f$	$\beta$	خطا نسبی (%)
مونت کارلو	$10^6$	۰/۰۰۱۷۳	۲/۹۲۳۷	--
وزنی تصادفی مونت کارلو	۱۰۰	۰/۰۲	۲/۰۵۴۲	۲۹/۷۳
	۵۰۰	۰/۰۰۴۶۵	۲/۶۰۱۲	۱۱/۰۳
	۱۰۰۰	۰/۰۰۳۷	۲/۶۷۹۳	۸/۳۵
	۲۰۰۰	۰/۰۰۲	۲/۸۸	۱/۴۹
	۵۰۰۰	۰/۰۰۲	۲/۸۹۲۶	۱/۰۶
	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۸۵	۲/۹۰۵۱	۰/۶۷

مشخص است که، میزان صحت برآورد احتمال خرابی علاوه بر تعداد شبیه‌سازی به ضریب بزرگنمایی به‌خصوص، به‌ازای داده‌های شبیه‌سازی شده پایین وابستگی زیادی نشان می‌دهد. در روش پیشنهادی، به‌ازای  $\alpha$  برابر ۰/۱ و ۰/۲ با تعداد نمونه تصادفی برابر ۳۰۰۰ و به‌ازای  $\alpha$  برابر ۰/۵، ۰/۷ و ۰/۹ با تعداد نمونه برابر ۵۰۰۰ برآورد مناسبی از احتمال خرابی منطبق بر روش مونت کارلو مشاهده شده است. به‌ازای حجم نمونه پایین در محدوده بین ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ داده، می‌توان نتایج صحیح‌تری از ضریب بزرگنمایی بزرگ‌تر از ۰/۵ نسبت به مقادیر  $\alpha$  برابر ۰/۱ و ۰/۲ مشاهده کرد. به‌نظر می‌رسد برای داده‌های کم، انتخاب مقادیر بالا برای ضریب بزرگنمایی مناسب بوده و می‌توان یک انتقال مناسب از نمونه در ناحیه خرابی مشاهده کرد در حالی که با افزایش تعداد داده‌ها ( $N > 5000$ )، تحلیل قابلیت روش پیشنهادی مستقل از ضریب  $\alpha$  نتیجه شده است.

### مثال ۳- یک نوسانگر غیرخطی

یک نوسانگر غیرخطی نشان داده شده در شکل (۶) با تابع عملکرد به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۲۶]:

$$g(x) = 3r - |s_{\max}| \quad (14)$$

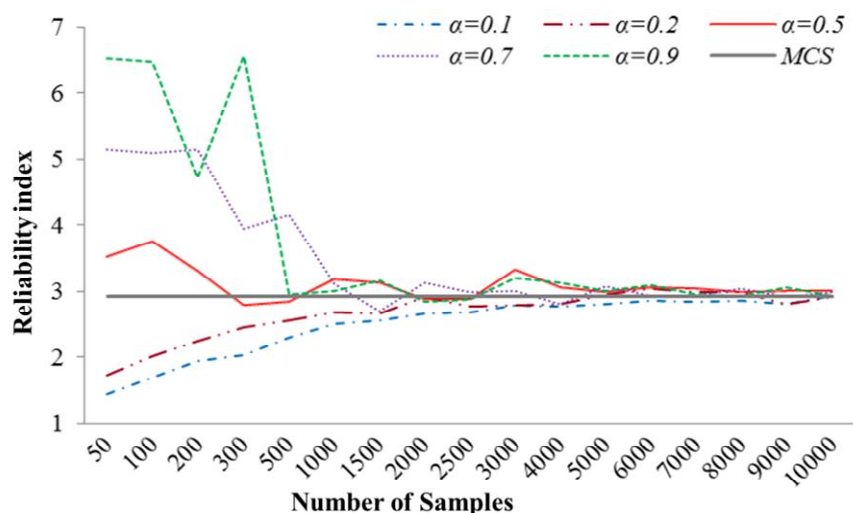
که در آن،  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ ،  $c_1$  و  $c_2$  به‌ترتیب سختی فنز اول و دوم است.  $m$  جرم جسم است که بر اساس جابه‌جایی حداکثر  $s_{\max}$  به‌صورت رابطه (۱۵) محدود می‌شود:

کاهش یافته است. از طرف دیگر مشخص است که به‌ازای تعداد شبیه‌سازی بیشتر از ۱۰۰۰ و  $\alpha = 0.2$  می‌تواند نتایج قابل قبولی از این مسئله با ابعاد بالا حاصل شود (خطای کمتر از ۱۰ درصد). روش وزنی تصادفی مونت کارلو نه تنها نتایج پایداری از تحلیل قابلیت اعتماد ارائه می‌دهد بلکه، منجر به کاهش شدید حجم محاسبات برای این مسئله غیرنرمال با ابعاد بالا نیز شده است.

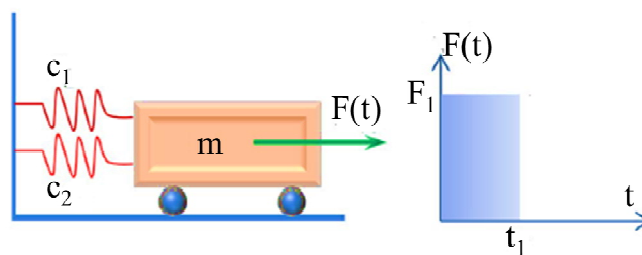
بر اساس نتایج استخراج شده از مرجع [۲۵]، شاخص‌های قابلیت اطمینان با استفاده از روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد بر مبنای الگوریتم تکرار هاسوفر و لیند برابر  $\beta = 3.8428$  به‌ازای ۱۰۰۵ محاسبه تابع عملکرد رابطه (۱۳) است که خطای نسبی در حدود ۳۱/۴ درصد نتیجه می‌دهد. با مقایسه نتایج روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد و روش پیشنهادی وزنی تصادفی مونت کارلو مشخص است که روش ارائه شده این مقاله با حجم محاسبات دو برابر کمتر (تعداد داده ۵۰۰) از روش اولین مرتبه قابلیت، نتایج صحیح‌تری ( $\beta = 2.6012$ ) را برآورد کرده است. همان‌طور که مشاهده شد، نتایج حاصل از روش پیشنهادی به میزان قابل توجهی به نتایج حاصل از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در مقایسه با روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد نزدیک است.

انتخاب مناسب ضریب  $\alpha$  برای انتخاب وزن در ناحیه خرابی برای روش پیشنهادی یک فاکتور اساسی است. در شکل (۵) برای مسئله قابلیت اطمینان با ابعاد بالا (مثال ۲) نمودار شاخص قابلیت اعتماد برای مقادیر  $\alpha$ های مختلف رسم شده است.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۷



شکل ۵- شاخص قابلیت اعتماد نسبت به ضریب  $\alpha$  های روش RWMC برای مسئله غیرنرمال با ابعاد بالا



شکل ۶- نوسانگر غیرخطی مثال ۳

جدول ۳- توزیع متغیرهای تصادفی نوسانگر غیرخطی مثال ۳

$t_1$	$F_1$	$r$	$c_2$	$c_1$	$m$	متغیر
۱	۱	۰/۵	۰/۱	۱	۱	میانگین
۰/۲	۰/۲	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۱	۰/۰۵	انحراف معیار

استخراج شده است. نتایج تحلیل قابلیت اعتماد دو روش مونت کارلو و روش ارائه شده وزنی تصادفی مونت کارلو شامل احتمال خرابی ( $P_f$ )، شاخص قابلیت اعتماد ( $\beta$ ) و درصد خطای نسبی  $(\beta_{MCS} - \beta) / \beta_{MCS} \times 100$  در جدول (۴) برای مثال نوسانگر غیرخطی درج شده است. نتایج دلالت بر کارایی روش پیشنهادی دارد به طوری که، به ازای داده در حدود ۵۰۰ نمونه می توان به ازای ضریب بزرگنمایی برابر با  $\alpha = 0.2$  نتایج قابل قبول و صحیحی از این روش برای این مثال استخراج کرد. لذا،

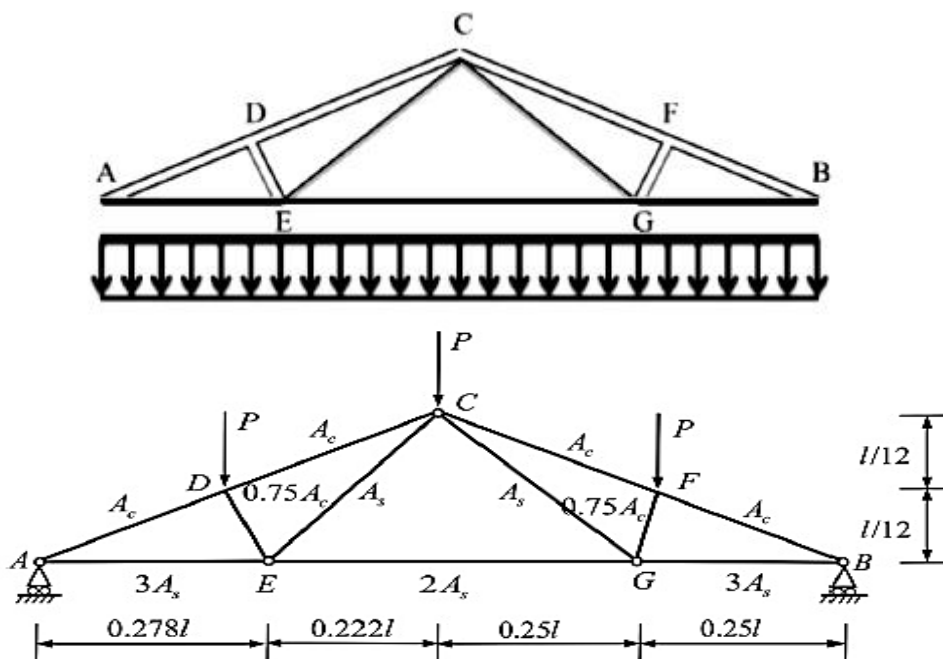
$$s_{\max} = \begin{cases} \frac{\sqrt{F_1}}{m\omega_s} \sin \frac{\omega_s t_1}{2} & t_1 < \frac{\pi}{\omega_s} \\ \frac{\sqrt{F_1}}{m\omega_s} & t_1 \geq \frac{\pi}{\omega_s} \end{cases} \quad (15)$$

این مسئله شامل شش متغیر تصادفی مستقل نرمال  $x = (m, c_1, c_2, r, F_1, t_1)$  است که مشخصات آماری متغیرهای آن طبق جدول (۳) است.

بر اساس نتایج حاصل از روش هاسوفر و لیند بر گرفته از مرجع [۲۷] مقدار شاخص قابلیت اعتماد برابر با  $1/8651$

جدول ۴- نتایج تحلیل قابلیت اعتماد نوسانگر غیرخطی مثال ۳

خطانسیبی (%)	$\beta$	$P_f$	تعداد نمونه تصادفی	روش
—	۱/۹۰۲۰	۰/۰۲۸۶	۱۰ <sup>۶</sup>	شبیه‌سازی مونت کارلو
۴/۴	۱/۸۱۸۵	۰/۰۳۴۸	۱۰۰	وزنی تصادفی
۱/۷۲	۱/۸۶۹۳	۰/۰۳۰۸	۵۰۰	
۱/۵۵	۱/۸۷۲۵	۰/۰۳۰۷	۱۰۰۰	مونت کارلو
۱/۵۲	۱/۸۷۳۱	۰/۰۳۰۵	۲۰۰۰	
۰/۲۴	۱/۸۹۷۵	۰/۰۲۸۸	۵۰۰۰	
۰/۱۴	۱/۸۹۹۴	۰/۰۲۸۷	۱۰۰۰۰	



شکل ۷- خرپا سقفی - مثال ۴

کنید که به میله‌های افقی خرپا یک بار یکنواخت  $q$  وارد شده که می‌توان به بارگره‌ای  $P = ql/4$  تبدیل کرد. تغییر مکان قائم نقطه C به صورت  $\Delta c$  نباید بیشتر از سه سانتی‌متر باشد. بنابراین تابع حالت حدی با توجه به این عملکرد محدود کننده به صورت زیر بیان می‌شود [۲۸]:

$$g(x) = 0.03 - \Delta c \quad (16)$$

$$\Delta c = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{3/81}{A_c E_c} + \frac{1/13}{A_s E_s} \right) \quad (17)$$

روش وزنی تصادفی مونت کارلو به‌طور چشمگیری حجم محاسبات برآورد تابع عملکرد رابطه (۱۴) را نسبت به روش شبیه‌سازی مونت کارلو کاهش داده و نسبت به روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد (خطای نسبی در حدود دو درصد) برآورد صحیح‌تری به‌ازای تعداد داده بزرگ‌تر از ۵۰۰ تا نشان داده است.

#### مثال ۴- خرپا سقفی

ساختار خرپا سقفی در شکل (۷) نشان داده شده است؛ فرض

جدول ۵- خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی نرمال مثال خرپا سقفی

متغیر	q (N/m)	l (m)	A <sub>s</sub> (m <sup>2</sup> )	A <sub>c</sub> (m <sup>2</sup> )	E <sub>s</sub> (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>c</sub> (N/m <sup>2</sup> )
میانگین	۲۰۰	۱۲	۹/۸۲×۱۰ <sup>-۴</sup>	۰/۰۴	۱۰ <sup>۱۱</sup>	۲×۱۰ <sup>۱۰</sup>
انحراف معیار	۱۴۰۰	۰/۱۲	۵/۹۸۲×۱۰ <sup>-۵</sup>	۰/۰۰۴۸	۶×۱۰ <sup>۹</sup>	۱/۲×۱۰ <sup>۹</sup>

جدول ۶- نتایج قابلیت اعتماد روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو و وزنی تصادفی مونت کارلو برای مثال خرپا سقفی

روش شبیه‌سازی	تعداد نمونه تصادفی	P <sub>f</sub>	β	خطا نسبی (%)
مونت کارلو	۱۰ <sup>۶</sup>	۰/۰۰۹۵	۲/۳۴۶۱	--
وزنی تصادفی مونت کارلو	۱۰۰	۰/۰۱۳۴	۲/۲۳۵۳	۴/۷۲
	۵۰۰	۰/۰۱۲۲	۲/۲۵۹۵	۳/۶۹
	۱۰۰۰	۰/۰۱۱۶	۲/۲۸۶۵	۲/۵۴
	۲۰۰۰	۰/۰۰۹۹	۲/۳۳۱۳	۰/۶۳
	۵۰۰۰	۰/۰۰۹۷	۲/۳۳۸۰	۰/۳۴
	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۹۴	۲/۳۵۰۰	-۰/۱۷

برابر با  $\alpha = 0/2$  نتایج قابل قبول و صحیحی از روش وزنی تصادفی مونت کارلو برای این مثال به دست آورد. لذا، روش وزنی تصادفی مونت کارلو به طور چشمگیری حجم محاسبات برآورد تابع عملکرد این مثال را نسبت به روش شبیه‌سازی مونت کارلو کاهش داده (خطای نسبی در حدود سه درصد) و برآورد صحیح‌تری به‌ازای تعداد داده بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ نسبت به روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد نشان داده است.

#### مثال ۵- یک سیستم دینامیکی دو درجه آزادی

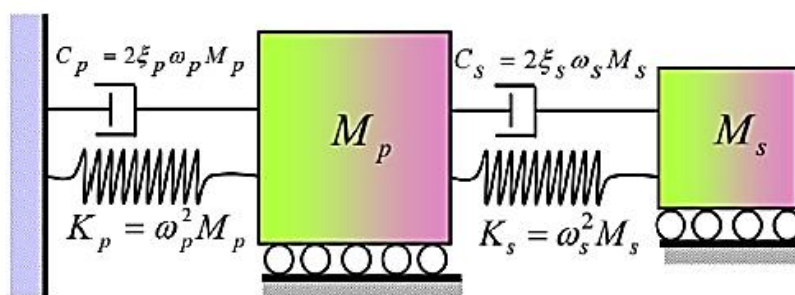
یک سیستم دو درجه آزادی مطابق شکل (۸) که تابع عملکرد آن بر اساس ظرفیت نیروی فنر دومی به صورت زیر بیان شده برای این مثال در نظر گرفته شده است [۲۸]:

$$g = F_s - K_s \times P \left( E \left[ x_s^2 \right] \right)^{1/2} \quad (18)$$

که P ضریب بزرگنمایی است و برای سادگی سه در نظر گرفته شده،  $E \left[ x_s^2 \right]$  پاسخ متوسط جابه‌جایی نسبی فنر دومی که به صورت رابطه (۱۹) قابل محاسبه است:

این مسئله شامل شش متغیر تصادفی مستقل نرمال  $x = (q, l, A_s, A_c, E_s, E_c)$  است که مشخصات آماری متغیرهای آن مطابق جدول (۵) ارائه شده است.

بر اساس نتایج حاصل از مرجع [۲۸]، روش هاسوفر و لیند منجر به نتایج ناپایداری برای این مثال شده اما، با استفاده از روش گرادیان مزدوج اولین مرتبه قابلیت اعتماد پس از ۸۰۶ محاسبه تابع عملکرد رابطه (۱۶) شاخص قابلیت اعتماد برابر با  $\beta = 2/4227$  استخراج شده است. نتایج تحلیل قابلیت اعتماد دو روش مونت کارلو و روش ارائه شده وزنی تصادفی مونت کارلو شامل احتمال خرابی ( $P_f$ )، شاخص قابلیت اعتماد ( $\beta$ ) و درصد خطای نسبی  $(\beta_{MCS} - \beta) / \beta_{MCS} \times 100$  در جدول (۶) برای مثال خرپا سقفی نشان داده شده است. نتایج نمایانگر صحت و کارایی روش ارائه شده وزنی نسبت به روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد است. به طوری که با هشت برابر تعداد برآورد تابع عملکرد کمتر از روش اولین مرتبه قابلیت، روش پیشنهادی تخمین قابل قبولی از شاخص قابلیت اعتماد ارائه داده است. به‌ازای داده در حدود ۱۰۰۰ نمونه می‌توان با ضریب بزرگنمایی



شکل ۸- نمای شماتیک سیستم دینامیکی دو درجه آزادی

جدول ۷- خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی یک سیستم دو درجه آزادی

متغیر	$M_p$ (kg)	$M_s$ (kg)	$K_p$ (N/m)	$K_s$ (N/m)	$\xi_p$	$\xi_s$	$F_s$ (N)	$S_o$
میانگین	۱	۰/۰۱	۱	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۰۲	۱۵	۱۰۰
انحراف معیار	۰/۱	۰/۰۰۱	۰/۲	۰/۰۰۲	۰/۰۲	۰/۰۱	۱/۵	۱۰

برای  $F_s=15$ ، خطای حدود ۱۱ درصد به ازای ۱۰۰ نمونه تحت ضریب بزرگنمایی برابر با ۰/۸ و ۰/۲ نتیجه شده درحالی که، به ازای داده در حدود ۵۰۰ نمونه خطای تخمین شاخص قابلیت اعتماد به مقدار ۲ و ۷ درصد به ترتیب برای  $\alpha=0/8$  و  $\alpha=0/2$  استنتاج شده است. به ازای مقادیر شبیه سازی بیشتر از ۱۰۰۰ برای  $F_s=15$  نتایجی منطبق بر روش مونت کارلو می توان بر اساس روش پیشنهادی دست یافت.

مشخص است که با افزایش مقدار نیروی مجاز فنر به ۲۰ نمی توان با تعداد داده برابر با ۱۰۰ شبیه سازی بر اساس روش پیشنهادی نتیجه قابل قبولی از احتمال خرابی برآورد کرد. این بدان معنا است که هیچ یک از نقاط تصادفی کمی در ناحیه خرابی واقع نشده اند و برای این مثال غیرخطی نتیجه احتمال خرابی برآورد کرد. اما، افزایش تعداد شبیه سازی شانس قرارگرفتن یک نقطه در محدوده خرابی به ازای این نیرو را افزایش داده به نحوی که به ازای  $\alpha=0/8$  با تعداد ۵۰۰ داده می توان برآورد با خطای در حدود ۲۰ درصد از شاخص قابلیت اعتماد داشت. افزایش شاخص قابلیت اعتماد نه تنها منجر به افزایش تعداد شبیه سازی شده در روش مونت کارلو شده بلکه

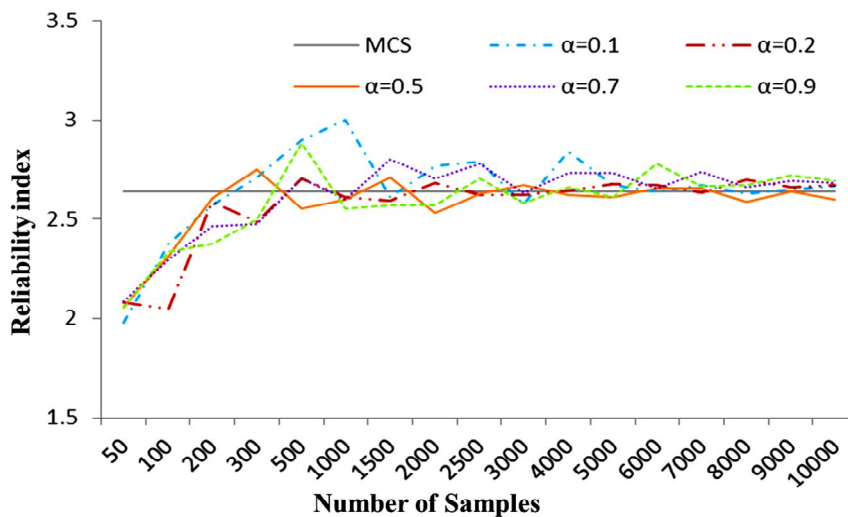
$$E[x_s^2] = \frac{\pi S_o}{4\xi_s \omega_s} \left[ \frac{\xi_a \xi_s}{\xi_p \xi_s (\xi_s^2 + \theta^2)} + \gamma \xi_a^2 \right] \times \frac{(\xi_p \omega_p^2 + \xi_s \omega_s^2) \omega_p}{4\xi_a \omega_a^4} \quad (19)$$

که در آن، نسبت جرمی  $\gamma = M_s/M_p$  فرکانس متوسط  $\omega_a = (\omega_p + \omega_s)/2$  متوسط نسبت میرایی  $\xi_a = (\xi_p + \xi_s)/2$  پارامتر تنظیم  $\theta = (\omega_p - \omega_s)/\omega_a$  و شدت نویز  $S_o$  هستند. میانگین ها و انحراف استاندارد متغیرهای تصادفی پایه با توزیع لوگ- نرمال در جدول (۷) آمده است.

طبق نتایج حاصل از روش مونت کارلو، شاخص قابلیت اعتماد در این مثال برای  $F_s=15$  و  $F_s=20$  به ازای ۱۰<sup>۶</sup> نمونه تصادفی به ترتیب برابر  $2/6366$  ( $P_f=0/004$ ) و  $3/7502$  ( $P_f=8/95 \times 10^{-5}$ ) حاصل شده است. نتایج تحلیل قابلیت اعتماد روش ارائه شده وزنی تصادفی مونت کارلو شامل شاخص قابلیت اعتماد ( $\beta$ ) و درصد خطای نسبی ( $(\beta_{MCS} - \beta) / \beta_{MCS} \times 100$ ) در جدول (۸) برای مثال سیستم دینامیکی دو درجه آزادی به ازای دو مقدار نیروی مجاز فنر (Fs) ۱۵ و ۲۰ تحت مقادیر ضریب بزرگنمایی ( $\alpha$ ) ۰/۸ و ۰/۲ درج شده است. نتایج نشان می دهد،

جدول ۸- نتایج قابلیت اعتماد روش وزنی تصادفی مونت کارلو برای سیستم دینامیکی دو درجه آزادی

$F_S=20$				$F_S=15$				تعداد نمونه
$\alpha=0/8$		$\alpha=0/2$		$\alpha=0/8$		$\alpha=0/2$		
خطا نسبی (%)	$\beta$	خطا نسبی (%)	$\beta$	خطا نسبی (%)	$\beta$	خطا نسبی (%)	$\beta$	
--	--	--	--	۱۰/۷	۲/۳۵۴۳	۱۰/۶۲	۲/۳۵۶۶	۱۰۰
۱۹/۶۷	۳/۰۱۲۴	--	--	۷/۱۲	۲/۴۴۸۸	۲/۱۰	۲/۵۸۱۳	۵۰۰
۱۵/۵۱	۳/۱۶۸۳	-۲۴/۴۶	۴/۶۶۷۳	۲/۴۲	۲/۵۷۲۷	۰/۳۳	۲/۶۲۸۰	۱۰۰۰
۷/۴۰	۳/۴۷۲۴	۱۱/۸۳	۳/۳۰۶۴	۱/۵۷	۲/۵۹۵۹	۰/۲۶	۲/۶۲۹۷	۲۰۰۰
۵/۰۶	۳/۵۶۰۱	۵/۶	۳/۵۳۹۱	-۲/۵	۲/۷۰۴۴	۰/۱۰	۲/۶۳۳۹	۵۰۰۰
۰/۹۳	۳/۷۱۵۲	-۰/۱۳	۳/۷۵۵۰	۰/۶	۲/۶۲۰۳	-۰/۱۱	۲/۶۳۹۶	۱۰۰۰۰



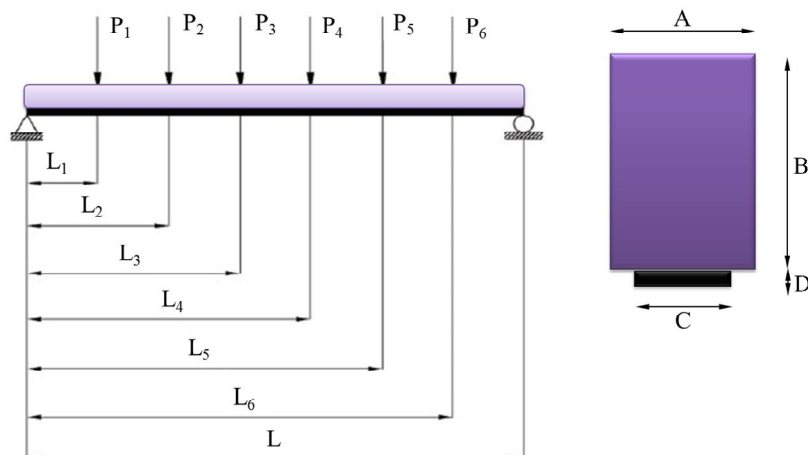
شکل ۹- بررسی تأثیر ضریب  $\alpha$  برای یک سیستم دینامیکی دو درجه آزادی به ازای  $F_S=15$

مشاهده می‌شود به‌ازای  $\alpha$  برابر ۰/۲ و ۰/۵ همگرایی بهتری نسبت به  $\alpha$  برابر ۰/۱، ۰/۷ و ۰/۹ بر اساس شبیه‌سازی بزرگ‌تر از ۵۰۰ حاصل شده است درحالی‌که، افزایش تعداد شبیه‌سازی (بیشتر از ۵۰۰۰) به‌شدت صحت نتایج روش پیشنهادی تأثیر دارد. به‌ازای شبیه‌سازی بیشتر از ۵۰۰۰ داده، روش پیشنهادی نسبت به ضریب بزرگ‌نمایی برای این مثال حساس نیست. همچنین با استفاده از روش گرادیان مزدوج اولین مرتبه قابلیت اعتماد، شاخص قابلیت اعتماد برابر با  $\beta = 2/0.245$  (خطایی در حدود ۲۳ درصد) پس از ۲۹۵۴ محاسبه تابع عملکرد حاصل

منجر به افزایش تعداد داده در روش وزنی می‌شود به‌طوری‌که برای  $F_S=20$  روش وزنی تصادفی مونت کارلو با بیشتری داده (بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ نمونه تصادفی) می‌تواند نتایج صحیح و قابل قبولی ارائه دهد. در مجموع، روش پیشنهادی به‌طور چشمگیری حجم محاسبات برآورد محاسبات تابع شرایط حدی این مثال را نسبت به روش شبیه‌سازی مونت کارلو کاهش داده است.

در شکل (۹) برای مسئله سیستم دینامیکی دو درجه آزادی نمودار شاخص قابلیت اعتماد روش وزنی تصادفی مونت کارلو به‌ازای  $\alpha$ های مختلف رسم شده است. همان‌طور که در شکل





شکل ۱۰- تیر کامپوزیت مثال ۶

### مثال ۶- تیر کامپوزیت

تیر کامپوزیتی که در شکل (۱۰) نشان داده شده به عنوان یک مسئله کاربردی با ابعاد بالا برای نشان دادن دقت روش پیشنهادی استفاده شده است. تابع عملکرد تیر بر اساس تنش به واسطه خمش به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$g(x) = S - \sigma \quad (20)$$

که در آن:

$$\sigma = \frac{\left[ \frac{\sum_{i=1}^6 p_i (1-l_i)}{1} l_r - p_1 (l_r - l_1) - p_2 (l_r - l_2) \right] K}{\frac{1}{12} AB^3 + AB \left\{ K - \frac{0.5B}{5B} \right\}^2 + \frac{1}{12} \frac{E_a}{E_w} CD^3 + \frac{E_a}{E_w} DC \left\{ B + \frac{0.5D}{5D} - K \right\}^2} \quad (21)$$

(S) است که مشخصات آماری متغیرهای تصادفی در جدول (۹) ارائه شده است.

این مثال بر اساس روش مونت کارلو با یک میلیون تعداد شبیه سازی تحلیل قابلیت اعتماد شده که شاخص قابلیت اعتمادی برابر با ۳/۰۱۹۷ و احتمال خرابی برابر با ۰/۰۰۱۳ حاصل شده است. نتایج تحلیل قابلیت اعتماد روش ارائه شده وزنی تصادفی مونت کارلو شامل احتمال خرابی ( $P_f$ )، شاخص قابلیت اعتماد ( $\beta$ ) و درصد خطای نسبی ( $(\beta_{MCS} - \beta) / \beta_{MCS} \times 100$ ) در جدول (۱۰)

شده است [۲۸] که بر اساس نتایج موجود در شکل (۹) و جدول (۸)، خطای به دست آمده به ۱۱ (با تعداد تکرار ۱۰۰ تا ۳۰ برابر کمتر از روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد است) بهبود یافته است. از این رو، این روش نسبت به روش مونت کارلو بسیار کارتر بوده و نیز نسبت به روش اولین مرتبه به نحو چشمگیری صحت و کارایی تحلیل قابلیت اعتماد را برای این مثال ارتقا داده است.

$$K = \left[ \frac{0.5AB^3 + \frac{E_a}{E_w} DC (B + 0.5D)}{AB + \frac{E_a}{E_w} DC} \right] \quad (22)$$

این مسئله شامل ۲۰ متغیر تصادفی از جمله ۶ بار متمرکز خارجی روی تیر ( $P_1-P_6$ ) و محل اعمال بار از تکیه گاه سمت چپ ( $L_1-L_6$ )، طول تیر (L)، مدول ارتجاعی مقطع اصلی ( $E_w$ ) و ورق آلومینیومی ( $E_a$ )، ابعاد مقطع تیر ( $A \times B$ )، ابعاد یک ورق آلومینیومی ( $C \times D$ ) که به تیر متصل شده و تنش مجاز خمشی

جدول ۹- خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی تیر کامپوزیت

متغیر	میانگین	انحراف معیار	توزیع	متغیر	میانگین	انحراف معیار	توزیع
A(mm)	۱۰۰	۰/۲	نرمال	L(mm)	۱۴۰۰	۲	نرمال
B(mm)	۲۰۰	۰/۲	نرمال	$P_1$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
C(mm)	۸۰	۰/۲	نرمال	$P_2$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
D(mm)	۲۰	۰/۲	نرمال	$P_3$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
$L_1$ (mm)	۲۰۰	۱	نرمال	$P_4$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
$L_2$ (mm)	۴۰۰	۱	نرمال	$P_5$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
$L_3$ (mm)	۶۰۰	۱	نرمال	$P_6$ (kN)	۱۵	۱/۵	لوگ-نرمال
$L_4$ (mm)	۸۰۰	۱	نرمال	$E_a$ (GPa)	۷۰	۷	نرمال
$L_5$ (mm)	۱۰۰۰	۱	نرمال	$E_w$ (GPa)	۸/۷۵	۰/۸۷۵	نرمال
$L_6$ (mm)	۱۲۰۰	۱	نرمال	S(MPa)	۲۱	۲/۱	گامبل

جدول ۱۰- نتایج تحلیل قابلیت اعتماد روش وزنی تصادفی برای تیر کامپوزیت

$\alpha=0/8$			$\alpha=0/2$			تعداد نمونه تصادفی
خطا نسبی (%)	$\beta$	$P_f$	خطا نسبی (%)	$\beta$	$P_f$	
۳۱/۰۵	۲/۰۸۲۱	۰/۰۱۸۷	--	--	--	۱۰۰
۲/۹۵	۲/۹۳۰۶	۰/۰۰۱۷	۵/۶	۲/۸۵۱۲	۰/۰۰۲۲	۵۰۰
۲/۷۸	۲/۹۳۵۸	۰/۰۰۱۷	۳/۰۱	۲/۹۲۸۸	۰/۰۰۱۷	۱۰۰۰
۱/۴۹	۲/۹۷۴۶	۰/۰۰۱۵	۱/۲۴	۲/۹۸۲۱	۰/۰۰۱۴	۲۰۰۰
۱/۰۵	۲/۹۸۸۱	۰/۰۰۱۵	۰/۱۷	۳/۰۱۴۴	۰/۰۰۱۳	۵۰۰۰
۰/۸۸	۲/۹۹۳۰	۰/۰۰۱۴	۲/۰۲	۳/۰۱۹۱	۰/۰۰۱۳	۱۰۰۰۰

ارائه شده بسیار منطبق بر روش مونت کارلو برای این مثال کاربردی با ابعاد بالا است.

### ۵- نتیجه گیری

تحلیل قابلیت اعتماد سازه یک ابزار مناسب احتمالاتی برای برآورد احتمال خرابی سازه‌ها در سطح بهره‌برداری‌شان هستند. به‌طور عمده، روش‌های تحلیلی مبنی بر بردار گرادینان، برای مسائل با درجه غیرخطی بالا، مسائل گسسته احتمالاتی، سیستم‌های با چند نقطه حداکثر محتمل، ممکن است برآورد ناصحیح و یا ناممکنی ارائه دهند. روش‌های مبنی بر شبیه‌سازی

برای مثال تیر کامپوزیت درج شده است. نتایج نشان می‌دهد به‌ازای ضریب بزرگنمایی برابر  $0/2$  ( $\alpha=0/2$ ) و تعداد نمونه ۱۰۰۰ داده، خطای حدود ۳ درصد حاصل شده در حالی که، به‌ازای ضریب بزرگنمایی برابر  $0/8$  ( $\alpha=0/8$ )، با تعداد نمونه کمتر (۵۰۰ داده) خطای حدود سه درصد نتیجه شده است. مشخص است که، میزان صحت برآورد احتمال خرابی علاوه بر تعداد شبیه‌سازی به ضریب بزرگنمایی در شبیه‌سازی‌های کمتر از ۲۰۰۰ وابستگی نشان می‌دهد و یک فاکتور اساسی برای انتخاب وزن در ناحیه خرابی برای روش پیشنهادی به‌ازای شبیه‌سازی‌های پایین است. برای تعداد شبیه‌سازی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ نتایج روش

نتایج حاصل از برآورد قابلیت اعتماد حاکی از آن است که، روش پیشنهادی نتایج صحیحی نسبت به روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد ارائه کرده و بر خلاف آن محدودیتی برای استفاده توابع با چند نقطه محتمل و با درجه غیرخطی بالا را ندارد. همچنین برای برخی از مثال‌های مورد بررسی با تعداد بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ برآورد تابع عملکرد، نتایج صحیح‌تر با تعداد برآورد کمتری نسبت به روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد ارائه کرده است. این روش بر اساس تعداد شبیه‌سازی بیشتر از ۲۰۰۰ برای مثال‌های مورد بررسی نتایج صحیح و قابل قبولی ارائه کرده که نمایانگر عدم حساسیت به پارامترهای مسئله و افزایش کارایی چشمگیر این روش نسبت به روش مونت‌کارلو است. این روش به‌سادگی روش مونت‌کارلو بوده با این تفاوت که در حدود ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ برابر حجم محاسبات کاسته شده است. لذا، این روش تصادفی وزنی را می‌توان برای مسائل کاربردی اجزای محدود بدون محاسبه بردار گرادیان و فارغ از حجم محاسبات بالا به‌سادگی در آینده استفاده کرد.

نه تنها می‌تواند احتمال خرابی را برآورد کرده بلکه برای مسائل پیچیده قابلیت اعتماد مهندسی نیز توانایی استفاده عمومی‌تری دارند. روش مونت‌کارلو، یک روش ساده و صحیح در تخمین احتمال خرابی به‌شمار آمده که نتایج آن معیاری برای مقایسه سایر روش‌های به‌لحاظ کاربردی، صحت برآورد و کارایی است. استفاده از روش مونت‌کارلو برای مسائل پیچیده مهندسی به‌دلیل تعداد شبیه‌سازی بالا ممکن است غیرقابل کاربرد باشد. در این مقاله، بر اساس یک روش وزنی با استفاده از یک تابع نمایی، کارایی روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو به‌لحاظ حجم محاسبات تابع عملکرد بهبود بخشیده شده است. بر مبنای تولید تصادفی اعداد با قاعده مونت‌کارلو، یک الگوی وزنی تصادفی تدوین شده که با استفاده از ضریب وزن تصادفی برای هر داده تولید شده، مقدار احتمال خرابی را به‌سادگی محاسبه می‌کند. از شش مثال غیرخطی با متغیرهای تصادفی نرمال و غیرنرمال برای نشان دادن کارایی روش وزنی تصادفی مونت‌کارلو (از حیث صحت برآورد و حجم محاسبات) استفاده شده است.

## واژه‌نامه

- |  |                                 |                                |
|--|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. failure probability ( $P_f$ )         | 3. monte Carlo Simulation (MCS) | 6. subset simulation method    |
| 2. first order reliability method (FORM) | 4. hypercube sampling method    | 7. uniform weighted simulation |
|  | 5. directional sampling method  | 8. most probable point         |

## مراجع

- Spanos, P. D., and Kougioumtzoglou I. A., "Survival Probability Determination of Nonlinear Oscillators Subject to Evolutionary Stochastic Excitation", *Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 5, pp. 05101-05116, 2014.
- Li, J., and Chen, J., "Probability Density Evolution Method for Dynamic Response Analysis of Structures with Uncertain Parameters", *Computational Mechanics*, Vol. 34, No. 5, pp. 400-409, 2004.
- Li, J., and Chen, J., *Stochastic Dynamics of Structures*, John Wiley & Sons, 2009.
- Sørensen, J. D., *Notes in Structural Reliability Theory and Risk Analysis*, Aalborg University, 2004.
- Breitung, K., "Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals", *Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 3, pp. 357-366, 1984.
- Yuan, X., and Zeng, L., "Weighted Simulation for Failure Probability Function Estimation", *Second International Conference on Vulnerability, Uncertainty, and Risk: Quantification, Mitigation, and Management*, ASCE, pp. 2053-2062, 2014.
- Sørensen, J. D., *Structural Reliability Theory And Risk Analysis*, Aalborg, February, 2004.
- Bedford, T., and van Gelder, P. H. A. J. M., "Safety and Reliability", *Proceedings of European Safety and Reliability Conference, Maastricht, the Netherlands*, 15-18 June, 2003.
- Zio, E., and Pedroni, N., "How to Effectively Compute the Reliability of a Thermal-hydraulic Nuclear Passive System", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 241, pp. 310-327, 2011.
- Rocco, S. C. M., "A Rule Induction Approach to Improve Monte Carlo System Reliability Assessment", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 82, pp. 85-92, 2003.
- Naess, A., Leira, B. J., and Batsevych, O., "System Reliability Analysis by Enhanced Monte Carlo

- Simulation”, *Structural Safety*, Vol. 3, No. 1, pp. 349-355, 2009.
12. Rashki, M., Miri, M., and Moghaddam, M. A., “A New Efficient Simulation Method to Approximate the Probability of Failure and Most Probable Point”, *Structural Safety*, Vol. 46, pp. 15-26, 2012.
  13. Okasha, N. M., “An Improved Weighted Average Simulation Approach for Solving Reliability-based Analysis and Design Optimization Problems”, *Structural Safety*, Vol. 60, pp. 47-55, 2016.
  14. Xu, J., Zhang, W., and Sun, R., “Efficient Reliability Assessment of Structural Dynamic Systems with Unequal Weighted Quasi-monte Carlo Simulation”, *Computers and Structures*, Vol. 175, pp. 37-51, 2016.
  15. Das, P., and Zheng, Y., “Cumulative Formation of Response Surface and Its Use in Reliability Analysis”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 15, No. 4, pp. 309-315, 2000.
  16. Kim, S. H., and Na, S. -W., “Response Surface Method using Vector Projected Sampling Points”, *Structural Safety*, Vol. 19, No. 1, pp. 3-19, 1997.
  17. Papadrakakis, M., and Lagaros, N. D., “Reliability-based Structural Optimization using Neural Networks and Monte Carlo Simulation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 32, pp. 3491-3507, 2002.
  18. Kaymaz, I., “Application of Kriging Method to Structural Reliability Problems”, *Structural Safety*, Vol. 27, No. 2, pp. 133-151, 2005.
  19. Nowak, A. S., and Collins, K. R., *Reliability of Structures*, McGrawHill, United States, 2000.
  20. Melchers, R., *Structural Reliability: Analysis and Prediction*, Ellis Horwood, John Wiley, 1987.
  21. Prasad, J. S. R., Singh, Y., Kaynia, A. M., and Lindholm, C., “Socioeconomic Clustering in Seismic Risk Assessment of Urban Housing Stock”, *Earthquake Spectra*, Vol. 25, No. 3, pp. 619-641, 2009.
  22. Csenki, A., “An Improved Monte Carlo Method in Structural Reliability”, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 24, No. 3, pp. 275-292, 1989.
  23. Leira, B. J., Naess, A., and Brandrud Naess, O. E., “Reliability Analysis of Corroding Pipelines by Enhanced Monte Carlo Simulation”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 144, pp. 11-17, 2016.
  24. Keshtegar, B., and Chakraborty, S., “A hybrid Self-adaptive Conjugate First Order Reliability Method for Robust Structural Reliability Analysis”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 53, pp. 319-332, 2018.
  25. Pan, Q., and Dias, D., “An Efficient Reliability Method Combining Adaptive Support Vector Machine and Monte Carlo Simulation”, *Structural Safety*, Vol. 67, pp. 85-95, 2017.
  26. Keshtegar, B., “Limited Conjugate Gradient Method for Structural Reliability Analysis”, *Engineering with Computers*, Vol. 33, No. 3, pp. 621-629, 2017.
  27. Zhu, Z., and Du, X., “Reliability Analysis With Monte Carlo Simulation and Dependent Kriging Predictions”, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 138, No. 12, pp. 11-22.
  28. Keshtegar, B., and Kisi, O., “M5 Model Tree and Monte Carlo Simulation for Efficient Structural Reliability Analysis”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 48, pp. 899-910, 2017.