نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

انتشار امواج عرضی در ورق‌های نازک به روش مودال طیفی

فاطمه شیرمحمدی و محمدمهدی سعادت‌پور*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۱/۰۹ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴)

چکیده– در این نوشتار روش مودال طیفی به منظور مطالعه انتشار امواج عرضی در ورق‌های نازک مستطیلی با ضخامت ثابت و متغیر در راستای عرضی و با شرایط مرزی مختلف که تحت بارهای ضربه‌ای قرار می‌گیرند، توسعه داده می‌شود. روش مودال طیفی که ترکیبی از روش‌های سختی دینامیکی (DSM)، آنالیز طیفی و یا آنالیز فوریه (SAM) و روش نوار محدود کلاسیک (FSM) است، با مدل‌سازی دقیق توزیع جرم و سختی در حوزه فرکانسی منجر به پاسخ‌هایی با دقت کافی می‌شود. این روش برخلاف سایر روش‌های عددی از تعداد محدودی از اجزا برای نیل به پاسخ در حوزه زمانی بهره می‌گیرد که موجب کاهش زمان و هزینه لازم برای انجام محاسبات می‌شود. در ادامه پارامترهای حائز اهمیت در این روش معرفی و ضمن حل مثال‌هایی تأثیر هر یک از این پارامترها در دستیابی به پاسخ با دقت کافی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: ورق‌های نازک مستطیلی، انتشار امواج عرضی، روش المان محدود طیفی، روش مودال طیفی، دینامیک ورق‌ها.

Modelling Wave Propagation in Thin Plates with the Spectral Modal Method

F. Shirmohammadi and M. M. Saadatpour*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

Abstract*: In this article spectral modal method is developed for studying wave propagation in thin plates with constant or variable thickness. Theses plates are subjected to the impact forces and different boundary conditions. Spectral modal method can be considered as the combination of Dynamic Stiffness Method (DSM), Fourier Analysis Method (FAM) and Finite Stripe Method (FSM). Using modeling of continuous distribution of mass and an exact stiffness causes solutions in frequency domain. Unlike the most numerical methods, in this method refining meshes is no longer necessary in which the cost and computational time is decreased. In this paper the important parameters of the method and their effects on results are studied through different examples.*

Keywords: *Rectangular thin plates, Wave propagation, Spectral finite element method, Spectral modal method, Dynamic of Plates.*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mmehdi@cc.iut.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]

[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]

[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]

فهرست علائم

D	سختی خمشی ورق (N.m)	$\bar{p}$	نیروی خارجی در واحد سطح در حوزه فرکانسی
$\{d_g\}$	بردار جابه‌جایی‌های کلی در حوزه زمانی	t	زمان (sec)
$\{\bar{d}_g\}$	بردار جابه‌جایی‌های کلی در حوزه فرکانسی	T	سایز پنجره زمانی (sec)
$f_{Nyquist}$	فرکانس نایکوست (sec^{-1})	$\bar{V}$	نیروی برشی در حوزه فرکانسی
$\{\bar{f}_g\}$	بردار نیروهای کلی در حوزه فرکانسی	w	جابه‌جایی در حوزه زمانی (m)
h	ضخامت ورق (m)	$\bar{w}$	جابه‌جایی در حوزه فرکانسی
$[\bar{k}_g]$	ماتریس سختی دینامیکی کلی	ω_n	فرکانس زاویه‌ای گسسته (sec^{-1})
k_x	عدد موج در راستای x	$\omega_{natural}$	فرکانس زاویه‌ای طبیعی ورق (sec^{-1})
k_y	عدد موج در راستای y	Δt	نمو پارامتر زمانی
$\bar{M}$	لنگر خمشی در حوزه فرکانسی	ρ	چگالی (kg/m^3)
N	تعداد نمونه‌های زمانی	η	میرایی در واحد حجم $(\text{N.sec}/\text{m}^4)$
$[S]$	ماتریس سختی دینامیکی	ν	ضریب پواسون
p	نیروی خارجی در واحد سطح در حوزه زمانی (N/m^2)		

۱- مقدمه

مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌ها یکی از گسترده‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در علوم مهندسی است، که در دهه‌های متمادی محققان زیادی را به خود جلب کرده است. از آنجایی که تعیین مشخصات و رفتار دینامیکی سازه‌ها به‌طور بهینه ضروری است، روش‌های آنالیز متعددی برای مدل کردن و مطالعه پدیده انتشار امواج توسعه داده شده است که برخی از آنها عبارتند از: روش تفاضل‌های محدود (FDM)، روش اجزا محدود کلاسیک (FEM) و روش اجزا مرزی (BEM). بدون شک در میان همه این روش‌ها، روش اجزا محدود کلاسیک یکی از کارامدترین و رایج‌ترین ابزارهای حل بسیاری از مسائل مهندسی از جمله مسائل دینامیکی است که در چند دهه گذشته رشد فزاینده‌ای داشته است. در مسائل دینامیکی تحت بارهای ضربه‌ای (بار با دوره تداوم بسیار کوتاه) با فرکانس های بالا سر و کار داریم، لذا در صورت استفاده از روش اجزا محدود کلاسیک، بهره‌گیری از شبکه بسیار ریز اجزا اجتناب ناپذیر است. بهره‌گیری از چنین شبکه ریز اجزا (به‌طور تقریبی ابعاد اجزا بایستی ۱۰ الی ۲۰ برابر کوچک‌تر از طول موج بزرگ‌ترین فرکانس موج انتشار یابنده باشد) هزینه و زمان لازم برای انجام محاسبات را به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد، ضمن اینکه خطاهای عددی ناشی از گرد کردن اعداد نیز افزایش می‌یابد. با توجه به آنچه گفته شد، توسعه روشی که بتواند مسائل دینامیکی انتشار امواج عرضی در ورق‌ها را با استفاده از شبکه درشت اجزا، با دقت قابل قبول آنالیز کند کاملاً ضروری به‌نظر می‌رسد.

به عنوان یک روش مناسب، روش المان طیفی در سال ۱۹۸۶ توسط دویل ارائه شد. وی در این سال با بیان اصل اساسی روش المان طیفی که در آن تغییرات زمانی سیگنال امواج با مجموعه مؤلفه‌های فرکانسی آنها با استفاده از الگوریتم تبدیل فوریه سریع جایگزین می‌شوند، کار در این زمینه را آغاز

کرد. وی برخی پارامترهای مهم در این روش نظیر، سایز پنجره زمانی، نرخ نمونه زمانی، فرکانس نایکوست، سرعت فاز و سرعت گروهی را معرفی کرد. دویل در این مقاله ضمن نشان دادن برخی از محاسن این روش، به بیان برخی مشکلات و ارائه راه حل‌های ساده برای آنها نیز می‌پردازد. از جمله این مشکلات انتشار موج از یک پنجره زمانی به پنجره زمانی بعدی است که محدودیت‌هایی را در فاصله‌ای که موج می‌تواند طی کند، ایجاد می‌کند. در این راستا بزرگ کردن سایز پنجره زمانی، به‌عنوان یک راه حل ساده و مناسب معرفی شده است [۱]. دویل و شاگردانش در دانشگاه پردو تأثیر بسزایی در پیشبرد این روش در حل مسائل دینامیکی انتشار امواج در جامدات و سیالات برای اجزا مختلف داشته و دارند که از آن جمله می‌توان به تحقیقی که در سال ۱۹۹۰ دویل با همکاری فاریس انجام داد اشاره کرد. آنها انتشار امواج طولی در میله، امواج خمشی در تیر و امواج پیچشی در شافت را مورد بررسی قرار داده و ماتریس سختی دینامیکی در حوزه فرکانسی را برای هر یک از این المان‌ها به‌دست می‌آوردند و با استفاده از آنها ماتریس سختی دینامیکی را برای المان سه بعدی قاب توسعه دادند [۲]. با توجه به اینکه لایه‌های زمین را می‌توان با یک محیط نیمه بی‌نهایت چند لایه شبیه‌سازی کرد و با هدف حل مسائل معکوس انتشار موج در سال ۱۹۹۲ ریزی و دویل از روش المان طیفی برای بررسی انتشار امواج صفحه‌ای در محیط‌های نیمه بی‌نهایت چند لایه ایزوتروپیک استفاده کردند و ماتریس سختی دینامیکی را برای دو المان، یکی المان نیمه بی‌نهایت لایه‌ای یک گره‌ای و دیگری المان نیمه بی‌نهایت لایه‌ای دو گره‌ای ارائه دادند [۳]. در همین سال گوپالاکریشنان (یکی دیگر از شاگردان دویل) و همکاران با بهره‌گیری از روش المان طیفی انتشار موج در تیر تیموشنکو را مورد بررسی قرار دادند [۴].

در سال ۱۹۹۴ مارتین و همکاران ماتریس سختی دینامیکی مربوط به المان میله‌ای عمیق را توسعه دادند. برای این منظور از معادلات میندلین- هرمن استفاده شده است و نتایج با المان میله‌ای معمولی که در آن اثرات پراش درنظر گرفته نمی‌شود، مقایسه می‌شود [۵]. در همین سال گوپالاکریشنان و دویل با استفاده از روش المان طیفی و با معرفی المان دو بعدی با ضخامت متغیر انتشار موج‌های طولی و خمشی را در المان‌های با ضخامت متغیر مورد بررسی قرار دادند. برای دستیابی به این هدف، آنها ماتریس دینامیکی وابسته به فرکانس را با استفاده از روابط جابه‌جایی برای مقطع یکنواخت به‌دست آوردند و هندسه المانی که ضخامت آن به‌صورت خطی تغییر می‌کند، را با چندین المان با ضخامت ثابت تقریب زدند [۶]. در سال ۱۹۹۵ دنیل و دویل تأثیر مرزها بر انتشار امواج خمشی در ورق‌های با استهلاک لزج را با دو روش اجزا محدود کلاسیک و روش المان طیفی مورد بررسی قرار دادند. ورق‌هایی که توسط این دو درنظر گرفته شده‌اند، ورق‌های نیمه محدود و نامحدود با یک لبه مستقیم است [۷]. چاکرابورتی وگوپالاکریشنان (از دیگر شاگردان دویل) در سال ۲۰۰۴ با منظور کردن حرکت‌های داخل صفحه، دو المان، یکی برای مواد غیرایزوتروپیک و دیگری برای مواد غیرهمگن ارائه کردند. فرمول‌بندی این دو جزء براساس عمومی‌ترین روش رفتار انتشار امواج الاستیک، تکنیک امواج پاره‌ای (PWT) به‌دست آمده است. در جایی که حرکت‌های خارج صفحه علاوه بر حرکت‌های داخل صفحه درنظر گرفته می‌شود نیز می‌توان از این تکنیک استفاده کرد [۸].

در سال ۲۰۰۵ نیز این دو پژوهشگر با استفاده از روش المان طیفی، المان دیگری را برای حرکت‌های داخل و خارج صفحه ورق نازک با مواد غیرایزوتروپیک توسعه دادند و راه ساده‌تری برای پیدا کردن شماره امواج و دامنه آنها ارائه کردند. در این بین یک استراتژی جدید برای حل مسائل مقادیر ویژه پیشنهاد شده است که نفوذ خطای انسانی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد [۹].

از سوی دیگر یوسیک لی و شاگردانش نیز تحقیقات بسزایی را در این زمینه به انجام رساندند که برخی از تحقیقات ایشان در مراجع [۱۰-۱۶] آورده شده است. البته شایان ذکر

است که تحقیقات پراکنده‌ای نیز توسط محققان دیگر انجام گرفته است که با جستجو راجع به این موضوع می‌توان به آنها دست پیدا کرد.

۲- روابط طیفی

۲-۱- ماتریس سختی دینامیکی نوار ورق نازک

رابطه‌سازی ماتریس سختی دینامیکی از معادله حاکم بر حرکت آغاز می‌شود. با بهره‌گیری از فرضیات کیرشهف معادله دینامیکی حاکم بر ورق نازک مطابق با رابطه (۱) بیان می‌شود [۱۴]؛

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta h \frac{\partial w}{\partial t} = p(x,y,t) \qquad (۱)$$

در رابطه فوق w جابه‌جایی عرضی ورق، D سختی خمشی ورق، h ضخامت ورق، ρ چگالی، η استهلاک در واحد حجم ماده تشکیل دهنده ورق و $p(x,y,t)$ نیروی دینامیکی خارجی اعمالی هستند. با فرض رفتار هارمونیکی برای پاسخ دینامیکی و با استفاده از سری فوریه و شیوه جداسازی متغیرها پاسخ معادله (۱) مطابق با رابطه (۲) ارائه می‌شود [۱۵ و ۱۶]؛

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \bar{w}_n(x,y;\omega_n)e^{i\omega_n t}$$
$$\bar{w}_n(x,y;\omega_n) = \bar{X}(x;\omega_n).\bar{Y}(y;\omega_n) \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، $\bar{w}_n$ و ω_n به‌ترتیب معرف ضریب تبدیل فوریه و یا به‌عبارت دیگر جابه‌جایی در حوزه فرکانسی و فرکانس زاویه‌ای گسسته هستند. فرکانس زاویه‌ای گسسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \qquad (۳)$$

که در این رابطه T معرف طول پنجره زمانی (زمان لازم برای میرا شدن ارتعاشات ورق) است به‌طوری که؛

$$T = N.\Delta t \qquad (۴)$$

در رابطه فوق N تعداد نمونه‌های زمانی و Δt نمو پارامتر زمانی t است. با فرض اینکه بار با بازه‌های زمانی مساوی Δt در پنجره زمانی T وارد شود، بزرگ‌ترین فرکانس قابل دسترسی که تحت عنوان فرکانس نایکوست شناخته می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t} \qquad (۵)$$

با توجه به خواص تبدیل فوریه گسسته، قسمت حقیقی تبدیل فوریه گسسته، نسبت به فرکانس میانی متقارن و قسمت موهومی آن متقارن معکوس است. به‌عبارت دیگر، مقادیر تبدیل فوریه گسسته در بازه $\omega_{N/2} \le \omega \le \omega_N$ مزدوج موهومی مقادیر این تبدیل در بازه $0 \le \omega \le \omega_{N/2}$ هستند. بنابراین ضرایب تبدیل فوریه گسسته تنها در فرکانس‌های پایین‌تر از $\omega_{N/2}$ منحصر به فرد بوده و N داده زمانی حقیقی به $N/2$ داده فرکانسی مختلط تبدیل می‌شوند. از این‌رو بزرگ‌ترین فرکانس قابل دسترسی با استفاده از تبدیل فوریه گسسته، همان فرکانس میانی $\omega_{N/2} = \pi/\Delta t$ است که تحت عنوان فرکانس نایکوست[1] نیز شناخته می‌شود.

باید توجه کرد که Δt به‌گونه‌ای انتخاب شود که فرکانس نایکوست حاصل از آن از فرکانس‌های مهم سیستم بزرگ‌تر باشد، این امر تحت عنوان شرط نایکوست شناخته می‌شود. در صورتی که شرط نایکوست رعایت نشود، خطایی تحت عنوان خطای Aliasing در فرایند تبدیل فوریه عددی رخ خواهد داد [۱۶].

واضح است که توابع $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ در رابطه (۲) باید به نحوی باشند که شرایط مرزی طولی و عرضی ورق را ارضا کنند. همان‌گونه که از عنوان روش مشخص می‌شود، در راستای طولی همانند روش نوار محدود کلاسیک از توابع ارتعاشی تیر اولر- برنولی استفاده می‌شود که برای شرایط مرزی مختلف در جدول (۱) مشخص شده‌اند. با جانشین کردن رابطه (۲) در معادله دینامیکی ورق نازک در حوزه زمانی، معادله دینامیکی ورق در حوزه فرکانسی مطابق زیر استخراج می‌شود؛

$$D\nabla^4 \bar{w} + (i\eta h\omega_n - \rho h\omega_n^2)\bar{w} = \bar{p}(x,y,t) \qquad (۶)$$

در رابطه فوق $\bar{p}(x,y,t)$ ضریب تبدیل فوریه بار و یا به‌عبارت دیگر بار در حوزه فرکانسی را نشان می‌دهد. این ضریب با استفاده از تبدیل فوریه سریع بار در حوزه زمانی مطابق رابطه زیر به‌دست می‌آید؛

جدول ۱- توابع ارتعاش تیر اولر- برنولی برای شرایط مرزی مختلف [۱۷]

شرایط مرزی مختلف در راستای x	$\bar{X}$	مسئله مقدار ویژه
S-S	$\sin k_x x$	$\sin k_x x = 0$
C-C	$\cosh k_x x - \cos k_x x - \dfrac{\cos k_x L - \cosh k_x L}{\sin k_x L - \sinh k_x L}\left(\sinh k_x x - \sin k_x x\right)$	$\cos k_x L \,.\, \cosh k_x L - 1 = 0$
C-S	$\cosh k_x x - \cos k_x x - \dfrac{\cos k_x L - \cosh k_x L}{\sin k_x L - \sinh k_x L}\left(\sinh k_x x - \sin k_x x\right)$	$\tan k_x L - \tanh k_x L = 0$

$$\bar{p}\left(x,y;\omega_n\right) = FFT\left(p\left(x,y,t\right)\right) \quad (۷)$$

چنانچه مشاهده می‌شود؛ معادله دینامیکی ورق در حوزه فرکانسی، یک معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت است. لذا حل آن به‌صورت $e^{-i(k_x x + k_y y)}$ است. k_x و k_y به‌ترتیب عدد موج در راستای x و عدد موج در راستای y هستند. با جانشین کردن این تابع در معادله همگن رابطه‌ای بین اعداد موج و فرکانس گسسته استخراج می‌شود که تحت عنوان رابطه طیفی شناخته می‌شود، رابطه مزبور چنین است:

$$(k_x^2 + k_y^2)^2 = \frac{\rho h}{D}\omega_n^2 - i\frac{\eta h}{D}\omega_n \quad (۸)$$

از آنجا که برای حل موجود در راستای طولی از توابع ارتعاشی تیر اولر- برنولی استفاده می‌شود، عدد موج در راستای x از حل مسئله مقدار ویژه ارتعاش تیر اولر- برنولی که در جدول (۱) موجود است، استفاده می‌شود. با مشخص شدن عدد موج در راستای x در هر مود ارتعاشی، عدد موج در راستای y با استفاده از رابطه طیفی (۸) تعیین می‌شود.

با توجه به معادله دینامیکی حاکم بر حرکت ورق در حوزه فرکانسی حل تابع مکانی $\bar{Y}$ به‌صورت زیر است که با اعمال شرایط مرزی در دو خط گره نوار، ضرائب ثابت آن در هر فرکانس به‌دست می‌آیند:

$$\bar{Y}\left(y;\omega_n\right) = c_1 e^{-ik_{y1}y} + c_2 e^{-ik_{y2}y} + c_3 e^{-ik_{y3}y} + c_4 e^{-ik_{y4}y} \quad (۹)$$

مقادیر k_{y1}، k_{y2}، k_{y3} و k_{y4} با حل رابطه طیفی برحسب اعداد موج در راستای y به‌دست می‌آیند که در رابطه (۱۰) مشاهده می‌شود:

$$\begin{aligned} k_{y1} &= -k_{y2} = \left(\beta^2 - k_x^2\right)^{1/2} \\ k_{y3} &= -k_{y4} = i\left(\beta^2 - k_x^2\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در روابط ارائه شده β به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta^2 = \left(\frac{\rho h}{D}\omega_n^2 - i\frac{\eta h}{D}\omega_n\right)^{1/2} \quad (۱۱)$$

برای تعیین ماتریس سختی دینامیکی نوار ورق نشان داده شده در شکل (۱) از روش رابطه نیرو- جابه‌جایی استفاده می‌شود [۱۵]. برای نیل به این هدف در ابتدا رابطه میدان جابه‌جایی و ضرائب ثابت c_j، $(j=1:4)$ توسط ماتریس $[A]$ مشخص می‌شود:

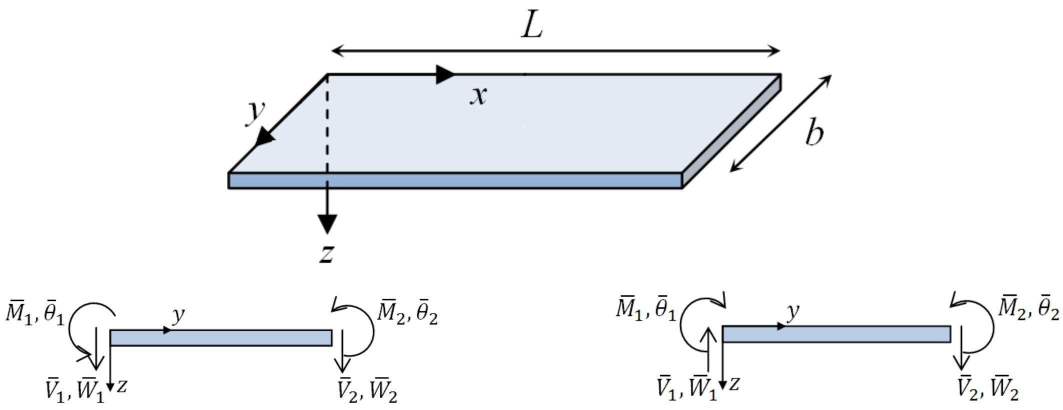
$$\left[\bar{w}_1 \;\; \bar{\theta}_1 \;\; \bar{w}_2 \;\; \bar{\theta}_2\right]^T = [A].\left[c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \;\; c_4\right]^T \quad (۱۲)$$

در رابطه فوق $\bar{w}_i$ و $\bar{\theta}_i$، $(i=1,2)$ به‌ترتیب جابه‌جایی و دوران در خط گره‌ای iام را مشخص می‌کنند. حل معادله (۱۲) منجر به تعیین ماتریس $[A]$ می‌شود که درایه‌های مختلف آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} &A_{1,1} = A_{1,2} = A_{1,3} = A_{1,4} = \bar{X} \\ &A_{2,1} = -A_{2,2} = \left(-ik_{y1}\right)e^{ik_{y1}b} \\ &A_{3,1} = \left(-ik_{y1}\right)e^{-ik_{y1}b} A_{3,2} = e^{ik_{y1}b} \\ &A_{4,1} = e^{-ik_{y1}b} A_{4,2} = -\bar{X}ik_{y1} \\ &A_{2,3} = -A_{2,4} = (-k_{y2})e^{k_{y2}b} \\ &A_{3,3} = (-k_{y2})e^{-k_{y2}b} A_{3,4} = e^{k_{y2}b} \\ &A_{4,3} = e^{-k_{y2}b} A_{4,4} = -\bar{X}k_{y2} \end{aligned} \quad (۱۳)$$

در ادامه بحث به تعیین رابطه بین نیروهای طیفی گره و ضرائب ثابت c_j، $(j=1:4)$ می‌پردازیم. این رابطه در هر فرکانس توسط ماتریس $[B]$ مشخص می‌شود؛

$$\left[\bar{V}_1 \;\; \bar{M}_1 \;\; \bar{V}_2 \;\; \bar{M}_2\right]^T = [B].\left[c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \;\; c_4\right]^T \quad (۱۴)$$



(ب) (الف)

شکل ۱- الف) علامت‌گذاری مثبت در نیروهای گره‌ای، ب) انتخاب علامت مثبت در آنالیز ماتریسی

در رابطه فوق $\bar{V}_i$ و $\bar{M}_i$، $(i=۱,۲)$ به‌ترتیب نیروی برشی و لنگر خمشی بر واحد طول در خط گره‌ای iام را مشخص می‌کنند که با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند، در این روابط ν معرف ضریب پواسون است؛

$$\begin{aligned} \bar{M} &= -D\left[\frac{\partial^۲\bar{w}}{\partial y^۲}+\nu\frac{\partial^۲\bar{w}}{\partial x^۲}\right] \\ \bar{V} &= -D\left[\frac{\partial^۳\bar{w}}{\partial y^۳}+(۲-\nu)\frac{\partial^۳\bar{w}}{\partial x^۲\partial y}\right] \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در تشکیل ماتریس $[B]$ لازم است به تفاوت علامت راستاهای مثبت قراردادی در مقاومت مصالح و آنچه در آنالیز ماتریسی به‌کار می‌رود، توجه کرد. این راستاها برای یک نوار نازک در شکل (۱) قابل رؤیت است. با توجه به این نکته ماتریس $[B]$ پس از حل رابطه (۱۴) تعیین می‌شود که درایه‌های مختلف آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} &B_{۱,۱} = -B_{۱,۲} = -B_{۳,۱}e^{ik_{y۱}b} = B_{۳,۲}e^{-ik_{y۱}b} = \\ &\qquad D.ik_{y۱}\left(k_{y۱}^۲\bar{X}-(۲-\nu)\bar{Z}\right) \\ &B_{۱,۳} = -B_{۱,۴} = -B_{۳,۳}e^{k_{y۲}b} = B_{۳,۴}(۳,۴)e^{-k_{y۲}b} = \\ &\qquad -D.k_{y۲}\left(k_{y۱}^۲\bar{X}+(۲-\nu)\bar{Z}\right) \\ &B_{۲,۱} = B_{۲,۲} = -B_{۳,۳}e^{ik_{y۱}b} = -B_{۳,۴}e^{-ik_{y۱}b} = \\ &\qquad D\left(k_{y۱}^۲\bar{X}-\nu\bar{Z}\right) \\ &B_{۲,۳} = B_{۲,۴} = -B_{۴,۳}e^{k_{y۲}b} = -B_{۴,۴}e^{-k_{y۲}b} = \\ &\qquad -D(k_{y۱}^۲\bar{X}+\nu\bar{Z}) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در این روابط $\bar{Z}=\frac{d^۲\bar{X}}{dx^۲}$ است. با تعیین ماتریس‌های $[A]$ و $[B]$ ماتریس متقارن سختی دینامیکی مطابق زیر قابل حصول است؛

$$[S]=[B].[A]^{-۱} \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق $[S]$ ماتریس سختی دینامیکی یک نوار نازک ورق است که در مود ارتعاشی مشخصی مرتعش است. دقت شود که به‌کارگیری واژه نوار صرفاً برای درک بهتر موضوع است وگرنه تا جایی که تغییری در خصوصیات نوار نازک ورق، چه از نظر خواص فیزیکی و چه از نظر خواص هندسی اتفاق نیافتد، پهنای ورق محدودیتی ندارد.

۲-۲- نیروهای گره‌ای طیفی

در روش مودال طیفی نیز می‌توان نیروهای خارجی را با نیروهای گره‌ای معادل جایگزین کرد. نیروهای گره‌ای طیفی معادل را می‌توان با استفاده از اصل کار مجازی به‌طور دقیق از نیروهای خارجی طیفی استنتاج کرد. بنابراین، برای تعیین نیروهای گره‌ای طیفی در ابتدا با استفاده از تبدیل فوریه سریع که در رابطه (۷) مشخص شده است مؤلفه‌های نیرویی در حوزه فرکانسی تعیین می‌شود. سپس با استفاده از اصل کار مجازی مشابه با روش اجزا محدود کلاسیک نیروهای گره‌ای محاسبه می‌شوند. لازم به توضیح است که در راستای طولی با استفاده از روابط (۱۸) تابع بار برحسب توابع متعامد ارتعاش تیر اولر- برنولی بسط داده می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]

$$\bar{p}(x,y;\omega_n)=\sum_{m=1}^{Mode}\bar{f}(y;\omega_n)\bar{X}(x)$$

به‌طوری که

$$\bar{f}(y;\omega_n)=\frac{\int_0^L \bar{f}(x,y;\omega_n)\bar{X}_m(x)dx}{\int_0^L \bar{X}_m^2(x)dx} \qquad (۱۸)$$

۲-۳- تعیین جابه‌جایی‌ها

با دستیابی به ماتریس سختی دینامیکی و ماتریس نیرویی مربوط به هر نوار در حوزه فرکانسی، مشابه آنچه در روش نوار محدود کلاسیک انجام می‌شود، ماتریس سختی و بردار نیروی کل سیستم محاسبه می‌شود. در رابطه زیر $\left[\bar{k}_g\right]$، $\left\{\bar{f}_g\right\}$ و $\left\{\bar{d}_g\right\}$ به‌ترتیب بیان کننده ماتریس‌های سختی، بردار نیرو و جابه‌جایی درجات آزادی کل سیستم در حوزه فرکانسی هستند.

$$\left\{\bar{f}_g\right\}=\left[\bar{k}_g\right]\left\{\bar{d}_g\right\} \qquad (۱۹)$$

چنانچه منظور از حل مسئله تعیین فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد، با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل سیستم می‌توان مقادیر این فرکانس‌ها را تعیین کرد:

$$\det\left(\left[\bar{k}_g\right]\right)=0\rightarrow\omega_{natural} \qquad (۲۰)$$

با حل معادله (۱۹) و تعیین جابه‌جایی‌های تعمیم یافته در هر خط گره در حوزه فرکانسی و سپس استفاده از تبدیل معکوس فوریه سریع جابه‌جایی‌ها در حوزهٔ زمانی تعیین می‌شوند:

$$\left\{d_g\right\}=\mathrm{IFFT}(\left\{\bar{d}_g\right\}) \qquad (۲۱)$$

در رابطه فوق $\left\{d_g\right\}$ جابه‌جایی‌های درجات آزادی کل سیستم را در حوزه زمان مشخص می‌کند.

برای اطمینان از اینکه پس از استفاده از تبدیل معکوس فوریه سریع پاسخ‌های حاصل در حوزه زمانی حقیقی هستند، لازم است تمامی عملیات در چرخه فرکانسی تنها تا فرکانس نایکوست انجام شود و جابه‌جایی‌ها در حوزه فرکانسی تا این فرکانس خاص محاسبه شوند. معکوس فوریه برای فرکانس‌های بالاتر از فرکانس نایکوست، با استفاده از مزدوج موهومی تابع فرکانسی در فرکانس‌های پایین‌تر از فرکانس نایکوست، به‌دست می‌آیند. نکته دیگری که توجه به آن ضروری است، این است که؛ زمانی که انتشار موج انجام می‌شود، مؤلفه مربوط به فرکانس صفر مشخص نمی‌شود، لذا می‌توان این مؤلفه را با علم به اینکه شرایط اولیه صفر است به‌صورت زیر ارزیابی کرد [۴]. برای سایر شرایط اولیه غیرصفر می‌توان از شیوه نیروی مجازی که در مرجع [۱۶] موجود است، استفاده کرد.

$$\bar{w}_1(x,y;\omega_1)=-\sum_{n=2}^{N}\bar{w}_n(x,y;\omega_n) \qquad (۲۲)$$

۲-۴- تقریب مقطع

استفاده از اعضا با مقطع متغیر به طراحان کمک می‌کند، وزن سازه را کاهش دهند. در شرایطی که وزن سازه و ظاهر زیبای آن، از اهمیت زیادی برخوردار باشند، به‌طوری‌که بتوان به طرح بهینه‌ای دست یافت، اعضا با ضخامت متغیر به‌عنوان مناسب‌ترین انتخاب مطرح می‌شوند. مطالعه انتشار موج در ورق‌های با ضخامت متغیر تحت بارهای ضربه‌ای، در بررسی اثر ناشی از ضربه جسم خارجی بر بدنه هواپیماها و فضاپیماها از اهمیت خاصی برخوردار است.

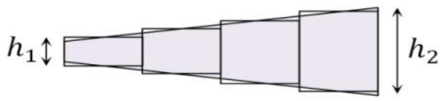
روابط اخیری که برای ورق‌های نازک با مقطع ثابت توسعه داده شده است به‌خوبی ممکن است برای حل دینامیکی ورق‌های با ضخامت متغیر در راستای پهنای نوارها مورد استفاده قرار گیرد.

برای کاربرد این روابط به منظور مدل‌سازی انتشار امواج عرضی در ورق‌های نازک با ضخامت متغیر در راستای عرضی، ورق به نوارهایی با ضخامت‌های متغیر تقسیم می‌شود. ضخامت نوارها چنانچه در شکل (۲) مشاهده می‌شود به‌صورت پله‌ای تغییر می‌کند. برای دستیابی به حل با دقت کافی برای ورق‌های نازک با ضخامت متغیر در راستای عرضی، تعداد نوارها تا همگرایی حل افزایش می‌یابد. تعداد نوارهای لازم برای دستیابی به حل با دقت کافی به نحوه تغییرات ضخامت بستگی دارد؛ لیکن عملاً مشاهده می‌شود که با تعداد کم تقسیم‌بندی پهنا دسترسی به جواب با دقت کافی مناسب است.

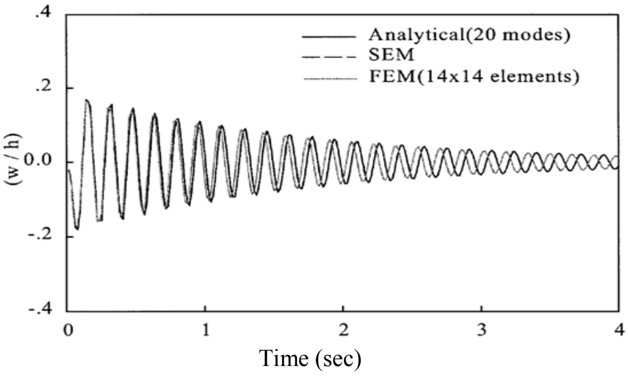
۲-۵- شیوه استهلاک مصنوعی[۲]

با توجه به طبیعت تناوبی تبدیل فوریه، محاسبه پاسخ دینامیکی

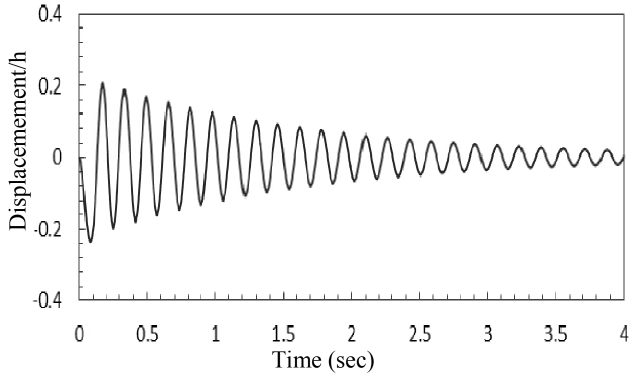
[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]



شکل ۲- تغییر ضخامت نوارها برای مدل‌سازی مقطع با ضخامت متغیر



شکل ۳- جابه‌جایی نقطه میانی ورق در مرجع [۱۱]



شکل ۴- جابه‌جایی نقطه میانی ورق با استفاده از روش حاضر

سیستم‌های فاقد میرایی حتی با استفاده از شیوه اضافه کردن باند صفر[۳] به انتهای پنجره زمانی بار امکان‌پذیر نیست. از آنجا که در این روش لازم است ارتعاش سیستم در طول پنجره زمانی مستهلک شود، لذا برای سیستم‌های نامیرا اندازه پنجره زمانی باید بی‌نهایت باشد، حال آنکه چنین امری امکان‌پذیر نیست. برای محاسبه پاسخ ارتعاشی سیستم‌های نامیرا و یا با میرایی پایین، ناگزیر به استفاده از شیوه استهلاک مصنوعی و یا به‌عبارت دیگر شیوه پنجره نمایی هستیم [۱۵]. از دیگر مزایای این شیوه، کاهش خطای Leakage در فرایند تبدیل فوریه گسسته است. برای استفاده از این شیوه، در ابتدا استهلاک مصنوعی a به‌صورت تابع نمایی e^{-at} به بار ورودی در حوزه زمانی اضافه می‌شود:

$$f'_n = f_n . e^{-at_n} \qquad (n = 0,1,2,\cdots,N-1) \qquad (۲۳)$$

پس از آن استهلاک مصنوعی به‌صورتی که در زیر ارائه می‌شود به ماتریس سختی دینامیکی در حوزه فرکانسی اضافه می‌شود:

$$S'_n = S_n(\omega_n - ia) \qquad (n = 0,1,2,\cdots,N-1) \qquad (۲۴)$$

پس از محاسبه جابه‌جایی‌های حاصل از کاربرد استهلاک مصنوعی در حوزه زمانی، استهلاک مصنوعی مطابق رابطه (۲۵) از جابه‌جایی‌ها حذف شده و پاسخ حقیقی به‌دست می‌آید:

$$x_n = x'_n e^{at_n} \qquad (n = 0,1,2,\cdots,N-1) \qquad (۲۵)$$

۳- صحت‌سنجی نتایج

با استفاده از ماتریس سختی دینامیکی استخراج شده در قسمت (۲- ۱) و با توجه به انواع خطاهای موجود در آنالیز طیفی که از آن جمله می‌توان به خطای Aliasing، خطای Leakage، اثر Picket-Fences و خطای Wraparound اشاره کرد [۱۶] و تلاش در به حداقل رساندن آنها برای انجام عملیات محاسباتی برنامه‌ای در فضای نرم افزار MATLAB نوشته شد. به‌منظور صحت‌سنجی برنامه آماده شده مثال موجود در مرجع [۱۱] حل شد که نتایج حاصل از برنامه نوشته شده و نتایج مرجع [۱۱] در شکل‌های (۳) و (۴) ارائه شده است. چنانچه مشاهده می‌شود خروجی برنامه حاضر در حد غیرقابل تشخیصی با نتایج مرجع [۱۱] انطباق دارد.

۴- مثال‌های عددی

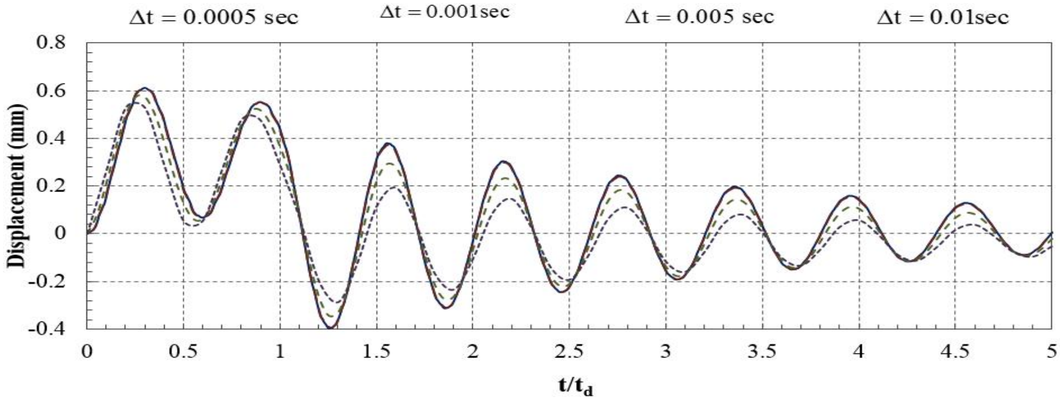
مثال ۱

در مثال اول اثر برخی از پارامترهای حائز اهمیت در روش

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]

جدول ۲- مشخصات مکانیکی ورق‌های مثال ۱

$E = ۳۰۰۰ MPa$	$\rho = ۱۳۰۰ \frac{kg}{m^۳}$	$\eta = ۱۰^۴ \frac{N.sec}{m^۴}$
$\nu = ۰/۴$	$L = l = ۳ m$	$h = ۰/۱ m$



شکل ۵- جابه‌جایی نقطه میانی ورق مثال ۱ در حوزه زمانی

جدول ۳- مشخصات مکانیکی ورق‌های مثال ۱

$E = ۳۰۰۰ MPa$	$\rho = ۱۳۰۰ \frac{kg}{m^۳}$	$\eta = ۱۰^۴ \frac{N.sec}{m^۴}$
$\nu = ۰/۴$	$L = l = ۴ m$	$h = ۰/۱ m$

آنالیز طیفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پارامترها شامل نـرخ نمونه زمانی و دنباله صفر متوالی اضافه شده در همگرایـی حـل است.

ورق مربعی چهار طرف مفصل با مشخصات ارائـه شـده در جدول (۲) تحت ضربه مستطیلی با ارتفاع یک کیلـو نیـوتن، بـا دوره تـداوم ۰/۱ ثانیـه در نقطـه میـانی خـود قـرار گرفتـه و جابه‌جایی آن در همین نقطه محاسبه می‌شود. این جابه‌جایی در شکل (۵) دیده می‌شود. همان‌طور که در شکل مزبـور مشـاهده می‌شود، در صورتی که بازه زمانی Δt در محـدوده ۰/۰۰۰۱ تـا ۰/۰۰۱ نباشد به نتایج معتبری در حوزه زمانی دست نخـواهیم یافت. علت این امر عدم رعایت شرط نایکوست است. با بزرگ شـدن بـازه زمـانی Δt بـزرگ‌تـرین فرکـانس قابـل دسترسـی (فرکانس نایکوست) کاهش یافتـه و شـرط نایکوسـت رعایـت نمی‌شود.

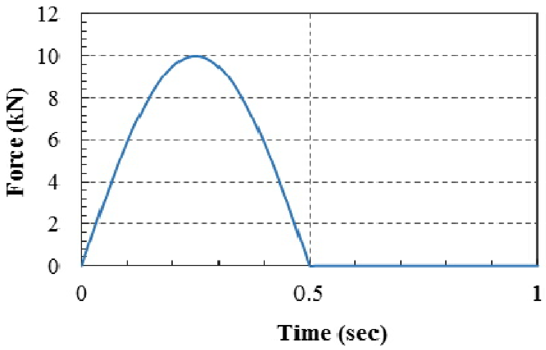
مثال ۲

در این مثال اثر تکنیک اضافه کردن دنباله صفر بر ارتعـاش دو ورق مربعی با شرایط مرزی SSSS و CSCS و با مشخصات مکانیکی و هندسی مطابق با جدول (۳) مـورد بررسـی قـرار مـی‌گیـرد. ایـن ورق‌ها به‌ترتیب تحت اثر بارهای ضربه‌ای نقطه‌ای $P_۱$ و سـپس $P_۲$ با تغییرات زمانی متفاوت نشان داده شده در شـکل‌هـای (۶) و (۷) در نقطه مرکزی خود قرار می‌گیرنـد. شـکل‌هـای (۸) و (۹) نشـان دهنده ارتعاش نقطه مرکزی ورق‌ها دقیقاً در زیر نقطـه اعمـال نیـرو به‌ازای مقادیر مختلف تعداد نمونه N است.

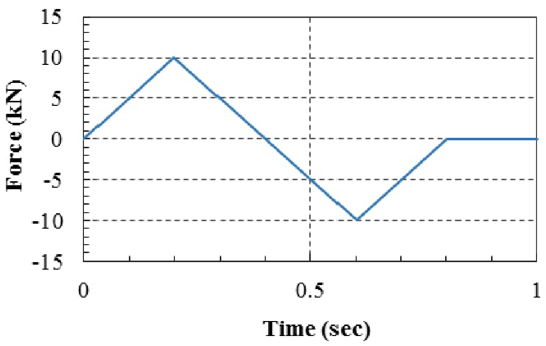
شیوه اضافه کردن دنباله صفر به‌دلایل مختلفی انجام می‌شود که مهم‌ترین آنها کـاهش خطـای Leakage و Wraparound در فرایند حـل اسـت. چنانچـه در شـکل‌هـای (۸) و (۹) مشـاهده می‌شود با افزایش تعداد صفرهای اضافه شده دقت حل افـزایش می‌یابد. با بررسی‌هـای انجـام گرفتـه مشـخص شـد کـه تعـداد

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]

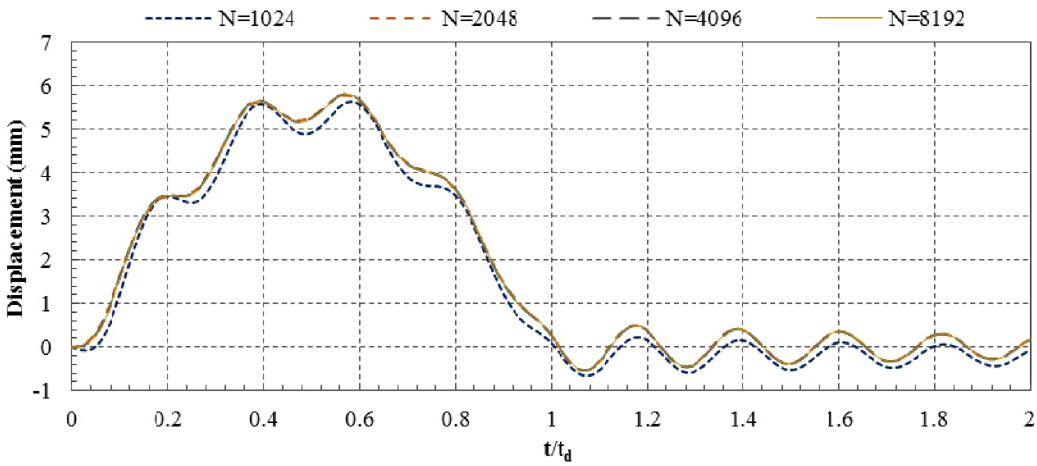
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]



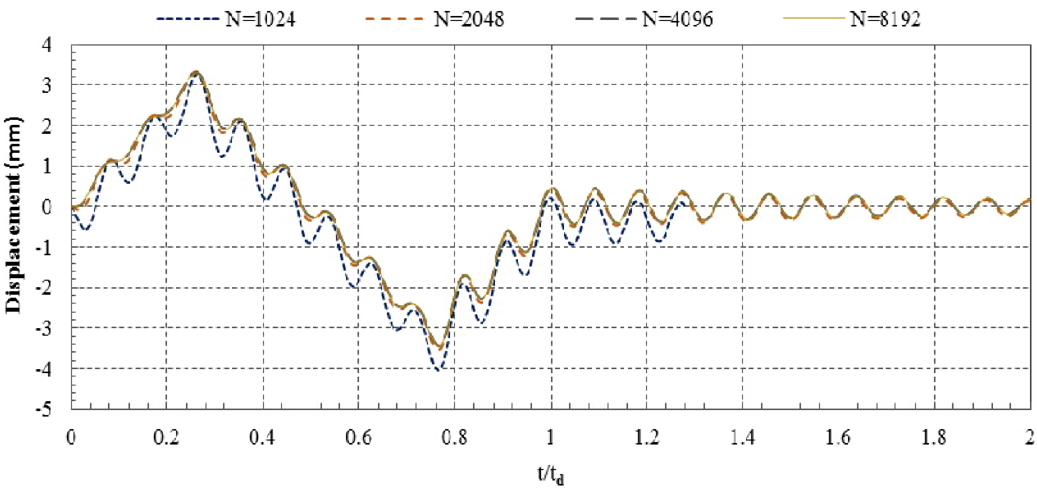
شکل ۶- تغییرات بار P_1 در حوزه زمانی



شکل ۷- تغییرات بار P_2 در حوزه زمانی

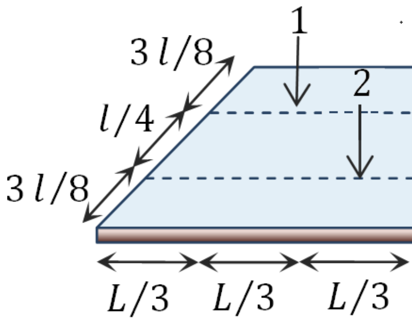


شکل ۸- جابه‌جایی نقطه میانی ورق SSSS مثال ۲ در حوزه زمانی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

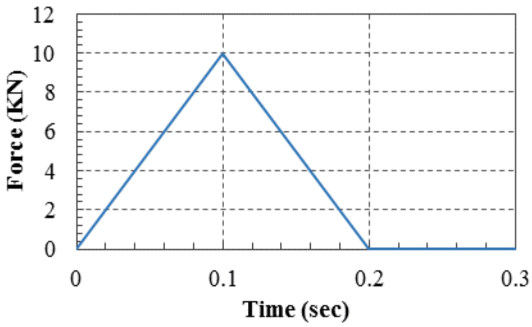


شکل ۹- جابه‌جایی نقطه میانی ورق CSCS مثال ۲ در حوزه زمانی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

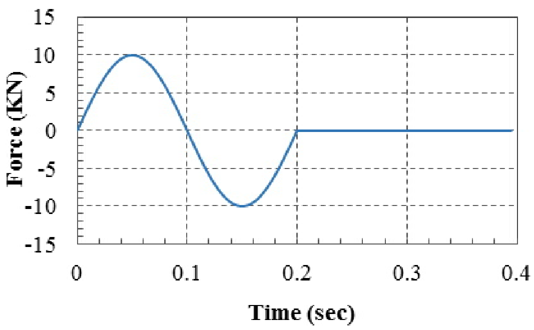
صفرهای لازم برای همگرایی رابطه مستقیم با زمان تداوم ضربه و رابطه معکوس با استهلاک مستقیم دارد. چرا که استهلاک زیاد سیستم و نیز زمان تداوم ضربه پایین موجب می‌شوند که پاسخ سیستم در بازه زمانی کوچک‌تری $T = N.\Delta t$ متناوب به نظر برسد.



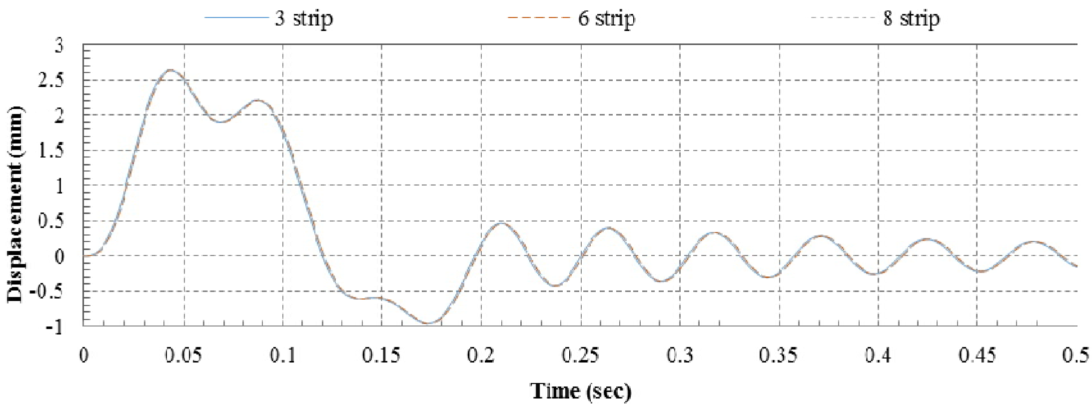
شکل ۱۰- ورق مثال ۳



شکل ۱۱- تغییرات بار ۱ در حوزه زمانی



شکل ۱۲- تغییرات بار ۲ در حوزه زمانی



شکل ۱۳- جابه‌جایی نقطه میانی ورق مثال ۳ در حوزه زمانی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

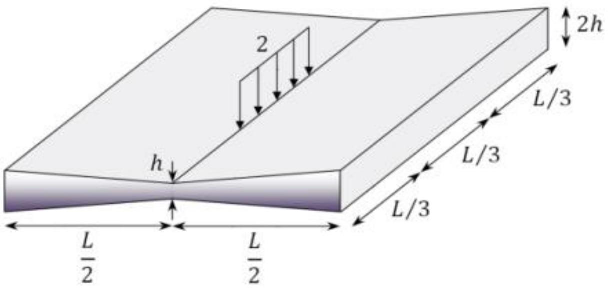
مثال ۳

مثال سوم مربوط به ورق مربعی CCCC نشان داده شده در شکل (۱۰) است که همان طورکه مشاهده می‌شود، تحت اثر دو بار متمرکز قرار می‌گیرد. تغییرات زمانی بار یک در شکل (۱۱) و تغییرات زمانی بار دو در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود.

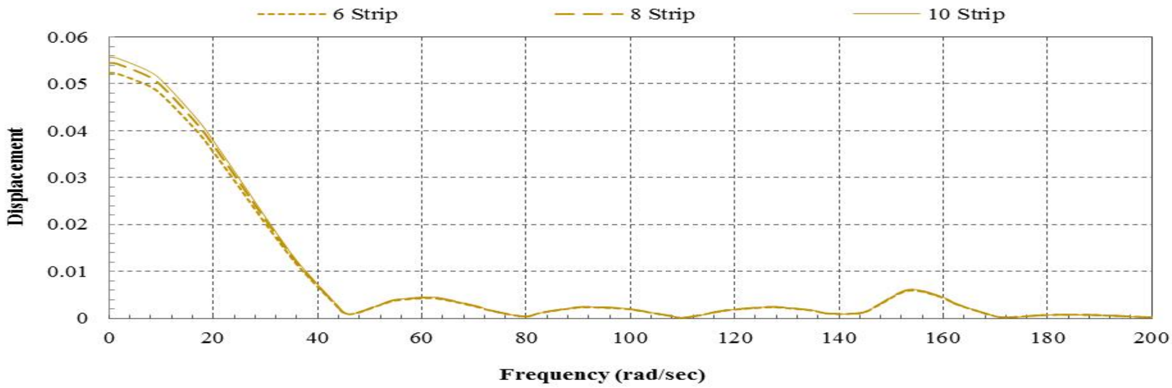
با حل این ورق و تعیین ارتعاش نقطه مرکزی آن جواب حاصل در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود. همگرایی حل نسبت به تعداد نوارها بررسی شده و مشاهده می‌شود که افزایش تعداد نوارها تأثیری بر دقت حل ندارد که تأکیدی بر دقیق بودن حل است.

مثال ۴

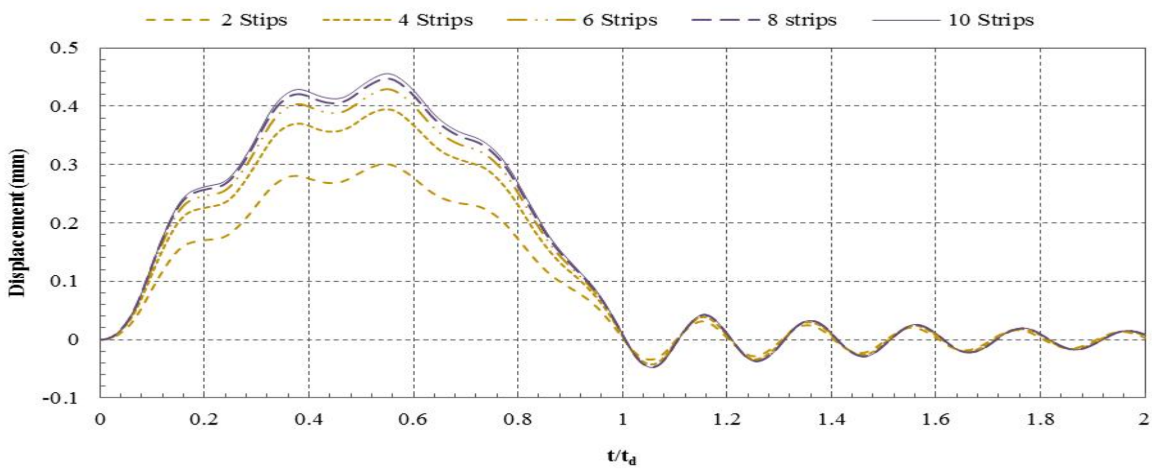
در این مثال ورق مربعی شکل (۱۴) با شرایط مرزی CCCC تحت بار ضربه‌ای خطی با تداوم طولی از L/۳ تا ۲L/۳ ادامه



شکل ۱۴- ورق مثال ۴



شکل ۱۵- جابه‌جایی نقطه میانی ورق مثال ۴ در حوزه زمانی (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۶- جابه‌جایی نقطه میانی ورق مثال ۴ در حوزه زمانی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

دارد قرار گرفته است. مشخصات مکانیکی و هندسی این ورق مطابق با جدول (۳) بوده و تغییرات زمانی بار خطی اعمالی همان است که در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود.

شکل‌های (۱۵) و (۱۶) به‌ترتیب نشان‌دهنده همگرایی جابه‌جایی نقطه میانی ورق در حوزه فرکانسی و در حوزه زمانی نسبت به تعداد نوار ورق‌ها است.

چنانچه در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) مشاهده می‌شود؛ با افزایش تعداد نوار ورق‌ها جابه‌جایی‌ها در حوزه فرکانسی و نیز در حوزه زمانی افزایش می‌یابد و درنهایت با به‌کارگیری ده نوار ورق جابه‌جایی‌ها در هر دو حوزه زمانی و فرکانسی همگرا می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله انتشار موج در ورق‌های مستطیلی با ضخامت ثابت و متغیر در یک راستا با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش مودال طیفی مدل‌سازی شده است. روش مودال طیفی روشی مناسب برای مدل کردن انتشار امواج خمشی در ورق‌های نازک است. از آنجا که گستردگی جرم در این روش به صورت دقیق مدل می‌شود، پاسخ دینامیکی در حوزه فرکانسی به‌صورت دقیق به‌دست می‌آید. بنابراین تا جایی که تغییری در خصوصیات هندسی و مکانیکی سیستم وجود نداشته باشد، نیازی به گسسته کردن سازه وجود ندارد. این امر در مثال ۳ به وضوح مشاهده می‌شود، در این مثال مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نوار ورق‌ها تغییری در دقت حل حاصل نمی‌شود.

در این مقاله ضمن حل مثال‌هایی مشاهده می‌شود که مسائل انتشار موج با استفاده از این روش برخلاف روش نوار محدود کلاسیک و یا روش اجزا محدود کلاسیک نیازی به ایجاد شبکه ریز اجزا ندارد. در این مثال‌ها استفاده از نوارهای متعدد تنها برای دستیابی به همگرایی حل برای مقطع متغیر است. به‌طوری که برای ورق نازک با مقطع ثابت استفاده از تنها دو نوار دستیابی به پاسخ با دقت کافی را تضمین می‌کند. بنابراین استفاده از این روش برای مسائل دینامیکی، به‌خصوص هنگامی که بارهای اعمالی ضربه‌ای هستند، هزینه و زمان لازم برای انجام محاسبات را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد.

واژه‌نامه

1. Nyquist frequency
2. Artificial Damping
3. Zero Padding

مراجع

1. Doyle, J. F., "Application of the Fast-Fourier Transform (FFT) to Wave Propagation Problems", *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 1, pp. 18-25, 1986.
2. Doyle, J. F., and Farris, T. N., "A Spectrally Formulated Element for Wave Propagation in 3-D Frame Structures", *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 5, No. 4, pp. 223-237, 1990.
3. Rizzi, S. A., and Doyle, J. F., "A Spectral Element Approach to Wave Motion in Layered Solids", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 569-576, 1992.
4. Gopalakrishnan, S., Martin, M., and Doyle, J. F., "A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiple Connected Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, No. 4, pp. 11-24, 1992.
5. Martin, M., Gopalakrishnan, S., and Doyle, J. F., "Wave Propagation in Multiply Connected Deep Waveguides", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174, No. 4, pp. 521-538, 1994.
6. Gopalakrishnan, S., and Doyle, J. F., "Wave Propagation in Connected Waveguides of Varying Cross-Section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 3, pp. 347-363, 1994.
7. Danial, A. N., and Doyle, J. F., "Transverse Impact a Damped Plate near a Straight Edge", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 103-108, 1995.
8. Chakraborty, A., and Gopalakrishnan, S., "Wave Propagation in Inhomogeneous Layered Media: Solution of Forward and Inverse Problems", *Journal of Acta Mechanica*, Vol. 169, No. 1-4, pp. 153-185, 2004.
9. Chakraborty, A., and Gopalakrishnan, S., "A Spectrally Formulated Plate Element for Wave Propagation Analysis in Anisotropic Material," *International Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 42-44, pp. 4425-4446, 2005.
10. Lee, J., and Lee, U., "Spectral Element Analysis of the Structure under Dynamic Distributed Loads", *AIAA*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Reston, Va, pp. 1494-96, 1996.
11. Lee, U., and Lee, J., "Spectral-Element Method for Levy-Type Plates Subjected to Dynamic Loads", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, pp. 243-247 1999.
12. Lee, U., "Dynamic Continuum Modelling of

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]

[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]

Beamlike Space Structures Using Finite-Element Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 4, pp. 725-731, 1990.
13. Lee, U., and Lee, C., "Spectral Element Modelling for Extended Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 993-1002, 2009.
14. Szilard, R., *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numericaland Engineering Methods*, John Wiley & Sons, 2004.
15. Doyle, J. F., *Wave Propagation in Structure*, Springer, NewYork, 1997.
16. Lee, U., *Spectral Element Method in Structural Dynamic*s, John Wiley & Sons (Asia), Singapore, 2009.
17. Paz, M., *Structural Dynamics: Theory and Computation*, 3rd Ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.7.1]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.51]