نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

شبیه‌سازی عددی دو بعدی معادلات انتقال رسوب با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین

علی رحمانی فیروزجائی* و مصطفی صاحبدل
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۱۳ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۲/۱۸)

چکیده– در این پژوهش، روش عددی بدون شبکه گالرکین برای شبیه‌سازی معادلات انتقال رسوب بستر در حالت دو بعدی به‌کار گرفته شد. این روش که یکی از روش‌های بدون شبکه است، با استفاده از توزیع دلخواه گره‌ها در دامنه محاسباتی به گسسته‌سازی مکانی مسئله می‌پردازد و در این روش، نیازی به شبکه، المان و یا هرگونه اطلاعات ارتباط بین گره‌ای نیست. بخش هیدرودینامیک معادلات انتقال رسوب توسط معادلات دو بعدی آب‌های کم عمق مدل شده و معادله اکسنر پیوستگی رسوب را توصیف می‌کند. در انتها به حل مثال‌های مرجع جهت بررسی صحت کارایی روش مورد استفاده پرداخته شد و نتایج حاصل با تحقیقات سابق انجام شده مقایسه شد.

واژه‌های کلیدی: روش‌های عددی، روش بدون شبکه گالرکین، معادلات آب‌های کم‌عمق، روابط تجربی معادلات رسوب.

Numerical Simulation of 2D Sediment Transport Equations via Element Free Galerkin

A. Rahmani Firoozjaee* and M. Sahebdel

Department of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

Abstract*: In this research, the element free Galerkin is implemented to simulate the bed-load sediment transport equations in two dimensions. In this method, which is a meshless method, the computational domain is discretized by a set of arbitrarily scattered nodes and there is no need to use meshes, elements or any other connectivity information in nodes. The hydrodynamical part of sediment transport equations is modeled using 2D shallow water equations; and the Exner equation describes the sediment continuity. Eventually, to appraise the ability of considered method, several benchmark examples are solved and then, the obtained results are compared with previously published works*

Keywords: *Numerical methods, Element free Galerkin, Shallow water equations, Empirical relations of sediment transport.*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: rahmani@nit.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]

فهرست علائم

A_g	پارامتر اندرکنش رسوب و سیال	$q_x \, , q_y$	دبی در واحد عرض جریان
$A_i(W), \quad i=1,2$	ماتریس‌های ضرایب	t	زمان
$\mathbf{F}$	بردار نیروها	$u \, , v$	مؤلفه‌های سرعت جریان در جهات x وy
g	شتاب ثقل	$\mathbf{w}$	بردار متغیرهای پایستار
h	عمق جریان	$\overline{\mathbf{w}}$	مقدار مشخص شرط مرزی دریشله
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی	Z	توپوگرافی بستر
N	تعداد نقاط گره‌ای	$\mathbf{\Phi}(x)$	ماتریس توابع شکل
m	مرتبه توابع پایه	α	ضریب جریمه
p_0	تخلخل رسوب	Δt	گام زمانی
$Q_1 \, , Q_2$	دبی انتقال رسوب بستر	Γ_1	منحنی مرزی دارای شرط مرزی دریشله

۱- مقدمه

ارزیابی و برآورد انتقال رسـوب و فراینـدهای همـراه بـا آن، از دیرباز، یکی از مسائل عمده و اصلی مهندسین هیدرولیک و رودخانه بوده است و محققین به حل این مسئله بـا اسـتفاده از روش‌های عددی پرداخته‌اند. در حالت کلـی، مـدل ریاضـیاتی مسئله مورفودینامیک به دو بخش از معادلات تقسیم مـی‌شـود. معادلات غیرخطی آب‌های کم‌عمق، پیوستگی و مومنتوم جریان آب را توصیف می‌کنند و معادله اکسنر که از پیوستگی رسـوب منتج می‌شود، تغییرات بستر را توصیف می‌کند. تاکنون مدل‌های مختلف برای محاسبه دبی انتقال رسوب نظیر مدل گراس، مدل میر- پیتر و مولر، مدل ون‌راین، مدل فرناندز لـوک- ون‌بیـک و مدل نیلسن معرفی شده که عموماً براسـاس روش‌هـای تجربـی ارائه شده‌اند [۱]. در اکثر مدل‌های فوق بـه جـز مـدل گـراس، تنش برشی بحرانی کنترل کننده حرکت رسوب است.

همزمان با پیشرفت سریع و چشم گیر فنـاوری کـامپیوتر در طی چند دهه اخیر، روش‌های عددی مورد اسـتفاده بـرای حـل مسائل مهندسی و علمی، توسعه و تنوع قابل توجهی یافته‌اند. از جمله معروف‌ترین این روش‌ها، تفاضل محدود، احجام محدود و اجزاء محدود هستند که هر یک دارای ویژگـی‌هـایی هسـتند. روش‌های تفاضل محدود تا مـدتی نسـبتاً طـولانی، تنهـا روش موجود حل عددی معادله‌های دیفرانسیل به‌شمار می‌رفت. امـا کاربرد این روش به مسائلی محدود می‌شـود کـه امکـان تولیـد شبکه منظم از نقاط گره‌ای در دامنه آنها وجـود دارد. از جملـه محققینی که با استفاده از این روش به شبیه‌سـازی انتقـال[1] بـار رسوبی بستر پرداخته‌اند می‌توان به نوروزی اشـاره کـرد. او بـه حل مدل دو بعدی انتقال رسوب با استفاده از روش تفاضـلات محدود پرداخت و برای حل معـادلات جریـان، روش مـاتریس سه قطری و روش Ultimate Quickest را برای حـل جمـلات انتقال در معادله انتقال- انتشار به‌کار بـرد [۲]. برخـی دیگـر از محققین به حل مسئله انتقال بار بستر با استفاده از روش اجـزاء محدود پرداختند [۳ و ۴]. آیزم با استفاده از روش المان محدود با گره‌های گسسته گالرکین[2] به حل این مسئله پرداخـت کـه در روش پیشنهادی او، گسسته‌سازی مکانی توسط شار[3] عددی بـر پایهٔ شار محلی لاکس- فردریش[4] و گسسته‌سازی زمـان توسـط روش صریح رانگ- کوتای[5] مرتبه سوم انجام می‌شود [۴].

کاربرد روش حجم محدود در شـبیه‌سـازی انتقـال رسـوب مورد توجـه بسـیاری از محققـین قـرار گرفتـه اسـت [۵-۱۶]. هادسون با تمرکز بر روش پایدار و ناپایدار و ارائه فرمولاسیون متفاوت بر آن مبنا، روش عددی پیشنهادی خود را از نظر دقت مورد بررسی قرار داد. او یک نسخه محدود کننده شار از روش

رو[6] بر مبنای روش حجم محدود به‌کار گرفت [۵]. همچنین، او از تقریب‌های عددی گوناگونی برای سیستم تشکیل شده از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادله انتقال بار بستر با استفاده از مدل گراس ارائه کرد و چندین فرمول‌نویسی متفاوت برای مسئله درنظر گرفت [۶].

گروهی از محققین، روش ENO[7] و WENO[8] را برای سیستم معادلات انتقال رسوب تعمیم دادند [۷]. در حالی که کالفی، با به‌کارگیری روش CWENO[9] به حل مسئله انتقال رسوب پرداخت [۸]. اما ایراد اکثر روش‌های ENO، WENO و CWENO که به‌خوبی مدل مورفودینامیک را حل می‌کنند، هزینه‌بر بودن آنها از لحاظ محاسباتی است [۹]. دلیس و پاپگلو، به حل عددی معادلات انتقال بار بستر توسط روش حجم محدود و با استفاده از تقریب آرام[10] در جریان‌های آب‌های کم‌عمق در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی پرداختند. با به‌کارگیری تقریب آرام، معادلات غیرخطی تبدیل به نیمه‌خطی قطری‌پذیر[11] با متغیر مشخصه‌های خطی می‌شود. همچنین آنها برای گسسته‌سازی زمانی از روش ضمنی-صریح[12] استفاده کرده‌اند [۱۰].

بن‌خلدون و سعید با ترکیب روش مشخصات و روش حجم محدود، روش FVC[13] را معرفی کرده و توسط آن به گسسته‌سازی مکانی معادلات با درنظرگیری روش صریح برای پیشروی زمانی پرداختند [۱۱]. در این مقاله، آنها مسئله انتقال رسوب را در حالت کلی با درنظرگیری بار معلق و بار بستر در جریان آب‌های سطحی مورد بررسی قرار دادند و از روش شبه‌پایدار[14] برای حل استفاده کردند. همچنین بن‌خلدون در مقاله‌ای دیگر به حل مسئله در حالت یک‌بعدی با استفاده از فرمول‌بندی‌های متفاوت پرداخت و در انتها نتایج ناشی از فرمول‌بندی‌های متفاوت را با یکدیگر مقایسه کرد. وی برای گسسته‌سازی مکانی از روش حجم محدود مبتنی بر MUSCL که محدود کننده‌های شیب[15] را یکی می‌کند، و از روش رانگ کوتای مرتبه دوم برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرد [۱۲]. در مقاله‌ای دیگر بن‌خلدون، از شبکه‌بندی نامنظم برای حل مسئله انتقال بار بستر با به‌کارگیری ترکیب شار عددی آپویند[16] و محدود کننده‌های شیب برای ایجاد وضوح قوی گرادیان بستر تند استفاده کرده‌اند و دسته‌ای از روش‌های حجم محدود برای تحلیل مدل دوبعدی مورفودینامیک برای شبکه‌های نامنظم مثلثی به نمایش گذاشته شد و از روش صریح برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرده‌اند [۱۳].

بیلانسری و همکاران، دستگاه معادلات انتقال بار بستر را توسط روش حجم محدود و یک روش رو اصلاحی (MR)[17] طراحی شده برای سیستم‌های غیرپایستار انجام دادند. در مورد پیشروی زمانی که در این مقاله مورد تمرکز بوده، دو روش ضمنی و صریح به‌کار گرفته شده و از لحاظ دقت و زمان محاسباتی در حالت‌های یک‌بعدی و دو بعدی سیستم معادلات انتقال رسوب با یکدیگر مقایسه شده‌اند [۱۴]. آنها از یک روش خطی ضمنی[18] با دقت از مرتبه دوم برای گسسته‌سازی زمانی استفاده کرده و به مقایسه نتایج با نتایج حاصل از روش صریح پرداختند. همچنین آنها برای گسسته‌سازی مکانی، دو روش حجم محدود، یکی روش پیش‌بینی-اصلاح[19] SRNH و دیگری روش اصلاح شده رو را برای سیستم معادلات غیرپایستار درنظر گرفتند [۱۵]. کاسترو دیاز و همکاران، به حل مسئله انتقال بار رسوبی با استفاده از روش رو با دقت مرتبه دوم پرداختند. او ابتدا روش مرتبه اولی از انواع روش‌های رو به همراه متغیر بر مبنای استفاده از محدود کننده‌های شار، درنظر گرفتند؛ سپس این روش را با استفاده از یک اپراتور جدید بازسازی از نوع MUSCL روی شبکه‌های نامنظم به دقت از مرتبه دوم ارتقا دادند [۱۶].

نکته حائز اهمیت در تمامی روش‌های فوق، نیازمند بودن آنها به وجود یک شبکه‌بندی از پیش تعریف شده برای ایجاد ارتباط بین گره‌ها است که اساس فرمول نویسی این نوع روش‌های عددی است. به‌طور کلی در استفاده از روش‌هایی که وابسته به شبکه هستند اگر چه می‌توان شبکه را سریع تولید کرد، اما نیاز به چندین بار سعی و خطا است تا شبکه مطلوب و بهینه به دست آید [۱۷]. روش‌های بدون شبکه طی سه دهه اخیر به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده است. در

روش‌های بدون شبکه برای نمایش دامنه مسئله نیازی به درنظرگیری المان نبوده و حل مسئله مبتنی بر شبکه‌ای از نقاط گره‌ای است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده‌اند. از جمله روش‌های بدون شبکه می‌توان به هیدرودینامیک ذره هموار[20] ارائه شده توسط موناقان، روش المان‌های پراکنده[21] توسط نیرولز، RKPM[22] توسط لیو و همکاران، روش پتروف–گالرکین موضعی بدون شبکه[23] و روش ابرهای محدود[24] اشاره کرد. در این مقاله، یک مدل عددی بر پایه روش‌های بدون شبکه، ارائه شده است. روش بدون شبکه گالرکین[25] از جمله روش‌های بدون شبکه بوده که توسط بلیشکو توسعه پیدا کرده است [۱۸]. در این روش با استفاده از نقاط گره‌ای دلخواه توزیع شده در دامنه به حل مسئله پرداخته و برای تقریب از روش حداقل مربعات متحرک (MLS)[26] استفاده می‌شود. ساختار کلی این مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم معادلات حاکم بر انتقال رسوب ارائه شد، روش عددی EFG به همراه توابع شکل MLS در بخش سوم بیان شده و سپس در بخش چهارم مثال‌های مرجع مورد بررسی قرار گرفتند.

۲- معادلات حاکم بر پدیده انتقال رسوب

با فرض توزیع هیدرواستاتیکی فشار، غیرقابل تراکم‌پذیر بودن سیال و یکنواخت بودن توزیع پروفیل سرعت در عمق، با متوسط‌گیری نسبت به عمق از معادلات ناویر استوکس، معادلات آب‌های کم‌عمق حاصل می‌شود. معادلات آب‌های کم‌عمق در حالت دو بعدی با صرف‌نظر کردن از ترم پخشیدگی و اثر باد و کوریولیس به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\partial_t h + \partial_x (hu) + \partial_y (hv) = 0 \\
&\partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \tfrac{1}{2} gh^2) + \partial_y (huv) = -gh\partial_x Z \\
&\partial_t (hv) + \partial_x (huv) + \partial_y (hv^2 + \tfrac{1}{2} gh^2) = -gh\partial_y Z
\end{aligned} \tag{1}$$

که در آن t زمان، h عمق جریان روی کف، Z، g شتاب ثقل و u و v به‌ترتیب مؤلفهٔ سرعت در جهت x و y هستند. در فرمول‌بندی استاندارد آب‌های کم‌عمق، بستر کانال فقط تابعی از مکان است، بدین معنی که $Z = Z(x, y)$. به منظور درنظرگیری اثر انتقال رسوب نیاز به‌کارگیری معادلهٔ اضافی که تغییرات زمانی تراز بستر را توصیف کند، است. از این‌رو از معادله اکسنر که بیان کننده پیوستگی حجم رسوب است برای تعیین مورفودینامیک استفاده می‌شود:

$$\partial_t(Z) + \xi\left[\partial_x(Q_1) + \partial_y(Q_2)\right] = 0 \tag{2}$$

که در آن:

$$\xi = \frac{1}{1-p_0} \tag{3}$$

p_0 تخلخل رسوب بوده و ثابت درنظر گرفته می‌شود. Q_1 و Q_2 دبی بار بستر در راستای x و y هستند. در این پژوهش، برای تعیین دبی بار بستر، از مدل گراس استفاده شده است. مدل گراس به‌صورت زیر است [۱۹]:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= A_g u \left(u^2 + v^2\right)^{\frac{m_g - 1}{2}} \\
Q_2 &= A_g v \left(u^2 + v^2\right)^{\frac{m_g - 1}{2}}
\end{aligned} \tag{4}$$

که $0 \le A_g \le 1$ و $1 \le m_g \le 4$ پارامترهای وابسته به شرایط خاص مسئله است. A_g پارامتر مربوط به قطر ذرات و لزجت سینماتیکی بوده و به‌طور مستقیم با قدرت اندرکنش بین جریان آب و بار بستر در ارتباط است. به این معنی که مقادیر کوچک برای A_g متناظر با تعامل ضعیف بین رسوب و سیال و مقادیر نزدیک به ۱ نشان‌دهندهٔ تعامل قوی بین آن دو است. همچنین برای m_g به‌طور معمول، مقدار ۳ درنظر گرفته می‌شود. سیستم معادلات فوق را می‌توان به فرم سیستم معادلات هذلولوی غیرپایستار[27] درنظر گرفت:

$$\partial_t(\mathbf{W}) + \mathbf{A}_1\partial_x(\mathbf{W}) + \mathbf{A}_2\partial_y(\mathbf{W}) = 0 \tag{5}$$

که در آن:

$$\mathbf{W} = \left[h \;\; hu \;\; hv \;\; Z\right]^T \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{q_x^2}{h^2} + gh & 2\dfrac{q_x}{h} & 0 & gh \\ -\dfrac{q_x q_y}{h^2} & \dfrac{q_y}{h} & \dfrac{q_x}{h} & 0 \\ \xi\dfrac{\partial Q_1}{\partial h} & \xi\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_x} & \xi\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_y} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]

$$\mathbf{A}_{۲}(\mathbf{W})=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -\dfrac{q_x q_y}{h^{۲}} & \dfrac{q_y}{h} & \dfrac{q_x}{h} & ۰ \\ -\dfrac{q_y{}^{۲}}{h^{۲}}+gh & ۰ & ۲\dfrac{q_y}{h} & gh \\ \xi\dfrac{\partial Q_{۲}}{\partial h} & \xi\dfrac{\partial Q_{۲}}{\partial q_x} & \xi\dfrac{\partial Q_{۲}}{\partial q_y} & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

که در آن $\mathbf{W}$ بردار متغیرها بوده و شامل h عمق جریان، $q_x = hu$ دبی جریان در واحد عرض در جهت x، $q_y = hv$ دبی جریان در واحد عرض در جهت y و Z عمق بار رسوبی بستر است. همچنین $\mathbf{A}_{۱}(\mathbf{W})$ و $\mathbf{A}_{۲}(\mathbf{W})$ ماتریس‌های ضرایب، $Q_{۱}$ و $Q_{۲}$ دبی بار بستر در جهت‌های x و y هستند.

۳- روش بدون شبکه گالرکین

روش‌های بدون شبکه طی سه دهه اخیر به مجموعه روش‌های عددی با هدف حل تقریبی بر مبنای عبارات تعدادی از گره‌ها اضافه شده است. در این روش‌ها، برای ایجاد حل گسسته نیازی به المان‌ها یا برقراری روابط داخلی بین گره‌ها نیست. روش‌های بدون شبکه وابستگی کمتری به نظم در قرار گیری گره‌ها نسبت به روش‌های عددی دیگر دارد. برای استفاده از فرم گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم و پوشش دامنه مورد نظر، لازم است که توابع درون‌یاب تولید شود. در روش بدون شبکه گالرکین این توابع با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک تولید می‌شود [۲۰].

سیستم معادلات انتقال بار بستر را که به فرم هذلولوی غیرپایستار در (۶) درنظر گرفته را دوباره بازنویسی می‌شود:

$$\partial_t(\mathbf{W})+\mathbf{A}_{۱}\partial_x(\mathbf{W})+\mathbf{A}_{۲}\partial_y(\mathbf{W})=۰ \qquad (۹)$$

با درنظرگیری روش پیش‌روی زمانی ضمنی[۲۸] برای گسسته‌سازی زمانی می‌توان نوشت:

$$\frac{(\mathbf{W}^{n+۱}-\mathrm{W}^{n})}{\Delta t}+\mathbf{A}_{۱}\partial_x(\mathbf{W}^{n+۱})+\mathbf{A}_{۲}\partial_y(\mathbf{W}^{n+۱})=۰ \qquad (۱۰)$$

که در آن $\Delta t = t^{n+۱} - t^{n}$. معادله (۹) پس از بازنویسی به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{W}^{n+۱}+\mathbf{A}_{۱}\,\Delta t\,\partial_x(\mathbf{W}^{n+۱})+\mathbf{A}_{۲}\,\Delta t\,\partial_y(\mathbf{W}^{n+۱})=\mathbf{W}^{n} \qquad (۱۱)$$

شرط مرزی دریشله (بر $\Gamma_{۱}$) به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{W}^{n+۱}-\overline{\mathbf{W}}=۰ \qquad (۱۲)$$

از آنجایی که توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS) شرط دلتای کرونکر را ارضا نمی‌کند، لذا برای اعمال شرایط مرزی نیاز به تمهیدات ویژه‌ای است. روش‌های متفاوتی جهت اعمال شرایط مرزی ارائه شده است که از جمله آن می‌توان به روش جریمه[۲۹]، روش ضرایب لاگرانژ[۳۰] [۲۰]، اصول تغییرات اصلاح شده[۳۱] [۱۸]، روش کوپله FE-EFG[۳۲] [۲۲] اشاره کرد. در این پژوهش از روش جریمه برای تحمیل شرایط مرزی استفاده شده است. از مزایای روش جریمه می‌توان به سادگی در اعمال شرایط مرزی نسبت به روش ضرایب لاگرانژ اشاره کرد. همچنین این روش دستگاه معادلات را بزرگ‌تر نمی‌کند. با وزن‌دار کردن رابطه (۱۱) و انتگرال‌گیری بر دامنه $\mathbf{\Omega}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\mathbf{\Phi}_i\sum_{j=۱}^{N}\mathbf{\Phi}_j\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{A}_{۱}\Delta t\mathbf{\Phi}_i\sum_{j=۱}^{N}\frac{\partial\mathbf{\Phi}_j}{\partial x}\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\\&\int_{\Omega}\mathbf{A}_{۲}\Delta t\mathbf{\Phi}_i\sum_{j=۱}^{N}\frac{\partial\mathbf{\Phi}_j}{\partial y}\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_{۱}}\mathbf{\Phi}_i{}^{T}\sum_{j=۱}^{N}\mathbf{\Phi}_j\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Gamma_{۱}=\\&\int_{\Omega}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{W}^{n}d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_{۱}}\mathbf{\Phi}_i{}^{T}\overline{\mathbf{W}}d\Gamma_{۱}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که $\mathbf{\Phi}$ ماتریس توابع شکل MLS بوده و برابر است با:

$$\mathbf{\Phi}_i=\begin{bmatrix}\Phi_i & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & \Phi_i & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & \Phi_i & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & \Phi_i\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

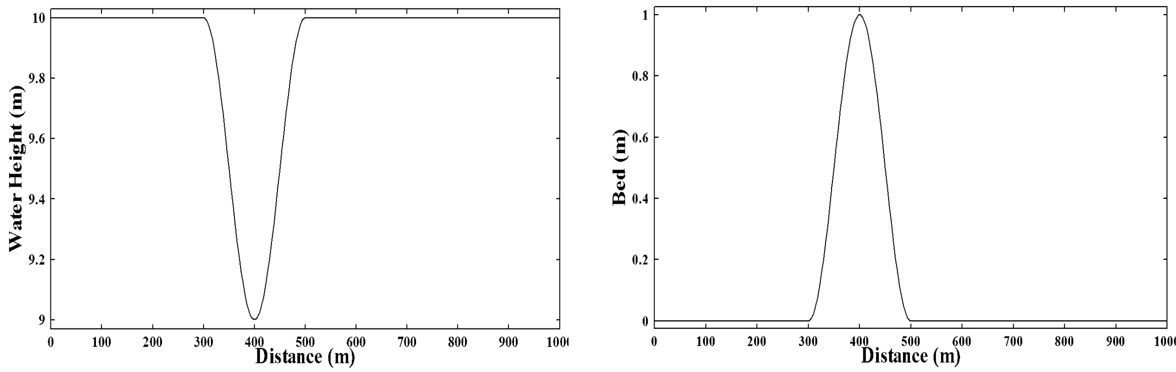
و N تعداد گره‌ها و α ضریب جریمه است. معمولاً، ضریب جریمه عدد مثبت بزرگی درنظر گرفته می‌شود. بنابراین، فرم نهایی معادلات EFG با درنظر گرفتن روش جریمه به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{K}\ \mathbf{W}^{n+۱}=\mathbf{F} \qquad (۱۵)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{ij}=&\int_{\Omega}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{\Phi}_j\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{A}_{۱}\Delta t\mathbf{\Phi}_i\mathbf{\Phi}_{j,x}\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\\&\int_{\Omega}\mathbf{A}_{۲}\Delta t\mathbf{\Phi}_i\mathbf{\Phi}_{j,y}\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_{۱}}\mathbf{\Phi}_i{}^{T}\mathbf{\Phi}_j\mathbf{W}_j^{n+۱}d\Gamma_{۱}\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

$$\mathbf{F}_i=\int_{\Omega}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{W}^{n}d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_{۱}}\mathbf{\Phi}_i{}^{T}\overline{\mathbf{W}}d\Gamma_{۱} \qquad (۱۷)$$



(ب) (الف)

شکل ۱- الف) شرایط اولیه رسوب و ب) تراز آب در مثال ۱

روش بدون شبکه گالرکین جهت انجام انتگرال‌گیری روابط فوق نیاز به شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای[33] دارد. شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای مستقل از گره‌هایی است که جهت تقریب متغیرهای میدان استفاده شده است. جهت ایجاد شبکه‌بندی پس‌زمینه‌ای از نقاط گوسی[34] استفاده شده که تعداد آنها به میزان زیادی به تراکم گره‌ای وابسته است.

۴- مثال عددی

در این بخش به حل چند مثال مرجع پرداخته شد تا توانایی و قابلیت روش EFG در شبیه‌سازی مسئله انتقال رسوب بررسی شود. در این مقاله برای تعیین دبی بار بستر، از مدل گراس با درنظرگرفتن $m_g = 3$ استفاده شد تا قابلیت مقایسه نتایج با سایر محققین فراهم شود. در تمامی مسائل ($p_\circ = 0/4$)، شرایط مرزی از نوع دریشله و ضریب جریمه برابر 10^8 لحاظ شده است. برای حل مسائل این بخش، دو نحوه توزیع گره‌ای دلخواه و متفاوت به‌کار گرفته شده که در حالت اول، از ۲۵۰ گره، به فاصله $\Delta x = 4m$ از یکدیگر و در حالت دوم از ۵۰۰ گره به فاصله $\Delta x = 2m$ از یکدیگر استفاده شده است. در این مقاله، توزیع گره در حالت اول با نام (LNSD)[35] و توزیع گره در حالت دوم با نام (MNSD)[36] درنظر گرفته شده است.

۴-۱- انتقال لایه رسوبی بستر با توپوگرافی معین

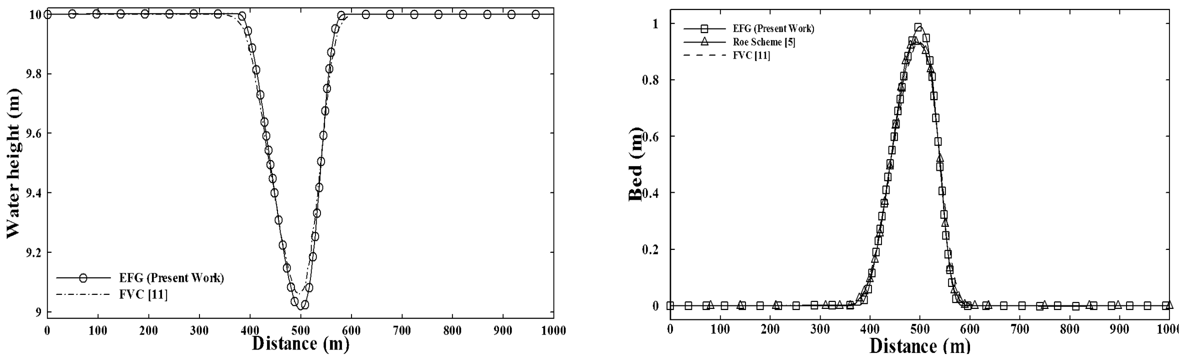
اولین مسئله مورد بررسی، انتقال لایه رسوبی بستر، بدون احتساب رسوب معلق است که از مسائل مورد علاقه بسیاری از محققین در کارهای عددی است [۵، ۱۱، ۱۲ و ۱۵]. طول کانال ۱۰۰۰ متر بوده و توپوگرافی بستر و شرایط اولیه برای دبی جریان و ارتفاع رسوب به فرم زیر است. شرایط اولیه مسئله در شکل (۱) نشان داده شده است. به عنوان شرایط مرزی مسئله، در بالادست دبی و رسوب اعمال شده است.

$$\begin{cases} Z\,(x,0) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{(x-300)\pi}{200}\right) & 300 \le x \le 500 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \\ h\,(x,0) = 10 - Z\,(x,0) \\ hu\,(x,0) = 10 \end{cases} \qquad (17)$$

همان‌طور که در بخش دوم مقاله بیان شد، A_g پارامتر مربوط به قطر ذرات و لزجت سینماتیکی بوده و به‌طور مستقیم با قدرت اندرکنش بین جریان آب و بار بستر در ارتباط است. از این‌رو مطابق تحقیقات محققین، مسئله در دو حالت با قدرت اندرکنش قوی رسوب بستر و جریان آب $(A_g = 1)$ و قدرت اندرکنش ضعیف آنها $(A_g = 0/001)$ بررسی شده است. برای هر دو نحوه توزیع گره‌ای LNSD و MNSD، ۱۰۰۰ نقطه گوسی برای انتگرال‌گیری درنظر گرفته شد.

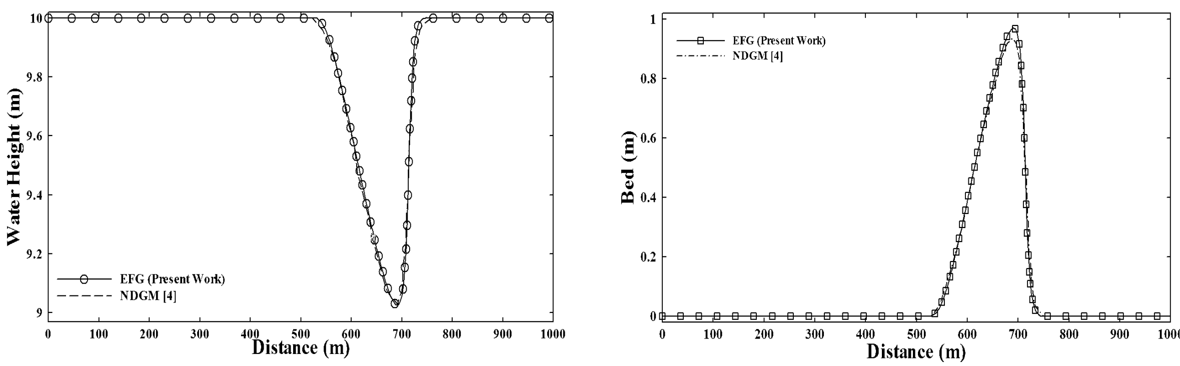
در این مسئله، بخش فوقانی تپه با سرعت بیشتری نسبت به بخش پایینی آن حرکت می‌کند که این امر باعث ایجاد یک ناپیوستگی در جبهه جلویی بعد از یک زمان مشخص خواهد شد که در مدل‌سازی، این ناپیوستگی با ایجاد نوسان‌های جعلی

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]



(ب) (الف)

شکل ۲- الف) تغییرات بستر و ب) و تراز آب در زمان (t=۲۳۸ s) با درنظر گیری ($A_g = 1$) و مقایسه نتایج در مثال ۱



(ب) (الف)

شکل ۳- الف) تغییرات بستر و ب) تراز آب در زمان (t = ۷۰۰ s) با درنظر گیری ($A_g = 1$) و مقایسه نتایج در مثال ۱

در دو طرف آن همراه می‌شود که همان‌طور که در نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود مدل EFG به‌خوبی توانسته این ناپیوستگی را شبیه‌سازی کند.

۴- ۲- اندرکنش قوی[۳۷] رسوب و جریان آب

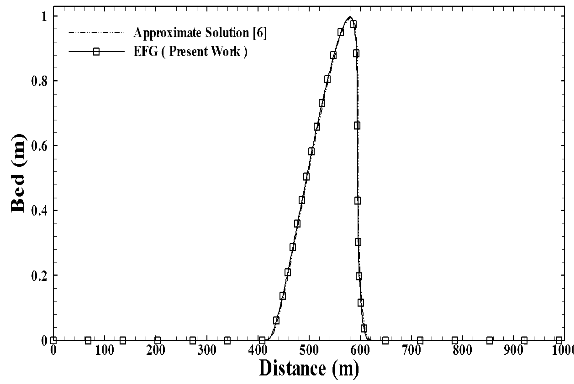
اولین حالت مورد بررسی، حالتی است که در آن قدرت اندرکنش بین رسوب بستر و جریان آب بیشتر بوده و رسوب سریع‌تر به حرکت در می‌آید ($A_g = 1$). انتظار می‌رود با گذشت زمان تپه رسوبی به پایین‌دست جابه‌جا شود. نتایج در دو زمان (t = ۲۳۸ s) و (t = ۷۰۰ s) به‌دست آمد و با نتایج سایرین مقایسه شد. شکل (۲) نتایج را در زمان (t = ۲۳۸ s) و شکل (۳) در زمان (t = ۷۰۰ s) ارائه می‌کند. در این وضعیت اندرکنش رسوب و جریان آب، توزیع گره‌ای LNSD با شعاع تأثیر ۲ برابر فاصله گره‌ای، گام زمانی ($\Delta t = 0/5s$) و مرتبه ۱ توابع پایه لحاظ شد. همان‌طور که نمایان است، نتایج روش EFG از مطابقت خوبی با نتایج روش رو و روش ترکیبی حجم محدود و مشخصه برخوردار بوده و اثری از نوسانات جعلی دیده نمی‌شود.

۴- ۳- اندرکنش ضعیف[۳۸] رسوب و جریان آب

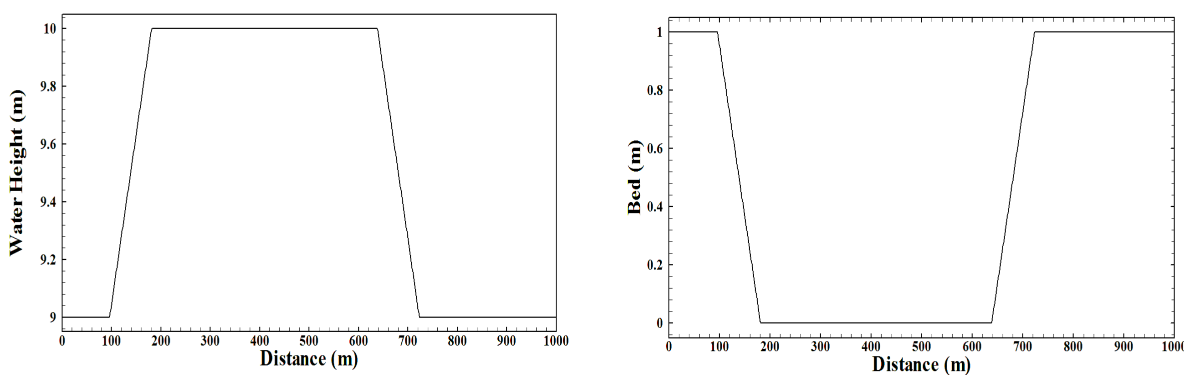
در این حالت، اندرکنش بین جریان آب و رسوب ضعیف است ($A_g = 0/001$). هادسون با ارائه یک حل تقریبی برای این مسئله در حالتی که ($A_g \leq 0/01$) است، به شبیه‌سازی آن پرداخت [۶]. برای حل این مسئله در وضعیت اندرکنش ضعیف رسوب و جریان آب، توزیع گره‌ای MNSD با شعاع تأثیر ۱/۱ برابر فاصله نقاط گره‌ای، مرتبه توابع پایه برابر ۱ و گام زمانی ($\Delta t = 500s$) مورد استفاده قرار گرفته شد. کمتر بودن

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]



شکل ۴- تغییرات بار بستر در زمان $(t = 238000s)$ با درنظر گرفتن $(A_g = 0/001)$ در مثال ۱



(ب) (الف)

شکل ۵- الف) شرایط اولیه رسوب و ب) تراز آب در مثال ۲

قدرت اندرکنش بستر و جریان در مقایسه با حالت قبل منجر به سرعت تغییرات پایین‌تری می‌شود و همچنین گام‌های زمانی متفاوتی نیز برای آن مطرح می‌شود. باید خاطر نشان کرد در مسائل انتقالی، گام زمانی تأثیر قابل توجهی در دقت پاسخ و همچنین زمان انجام محاسبات دارند. به‌دلیل اینکه برای گسسته‌سازی زمان از روش ضمنی استفاده شده است، گام‌های زمانی بزرگ‌تری را درنظر گرفته شده است.

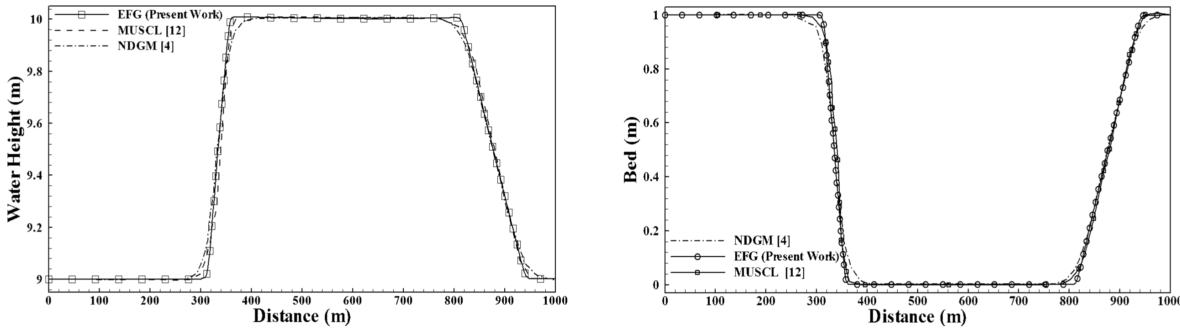
از آنجایی که جواب دقیق مسئله مشخص نیست، به جهت تشخیص پاسخ صحیح، به مقایسه نتایج به‌دست آمده روش EFG با نتایج قابل استناد محققین گذشته پرداخته شده است و همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، مدل ارائه شده عملکرد خوبی در شبیه‌سازی انتقال رسوب از خود نشان داده است و همچون حالت اندرکنش قوی، به‌خوبی توانسته نوسانات جعلی را تسخیر کند.

۴- ۴- انتقال لایه رسوبی بستر با توپوگرافی نامنظم

در این مسئله، حفره رسوبی دارای تغییرات بستر با توپوگرافی نامنظم و ناپیوستگی‌های عمودی و ناگهانی[39] در کانالی به طول ۱۰۰۰ متر و با شرایط اولیه زیر قرار گرفته است و توسط محققین نیز مطالعه شده است [۴ و ۱۲]. شرایط اولیه مسئله به‌صورت زیر است:

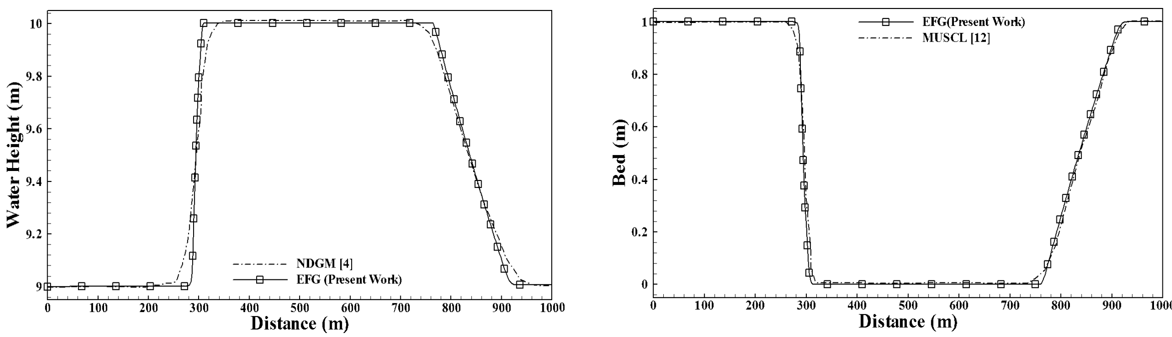
$$\begin{cases} Z(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 96 \\ \dfrac{-x+181}{85} & 96 \le x \le 181 \\ 0 & 181 \le x \le 638 \\ \dfrac{x-638}{85} & 638 \le x \le 723 \\ 1 & 723 \le x \le 1000 \end{cases} \\ h(x,0) = 10 - Z(x,0) \\ hu(x,0) = 10 \end{cases} \qquad (18)$$

شکل (۵) نمایانگر شرایط اولیه بستر و تراز آب است.



(ب) (الف)

شکل ۶- الف) بار بستر و ب) تراز آب در زمان ($t = 482\ s$) با درنظر گرفتن ($A_g = 1$) در مثال ۲



(ب) (الف)

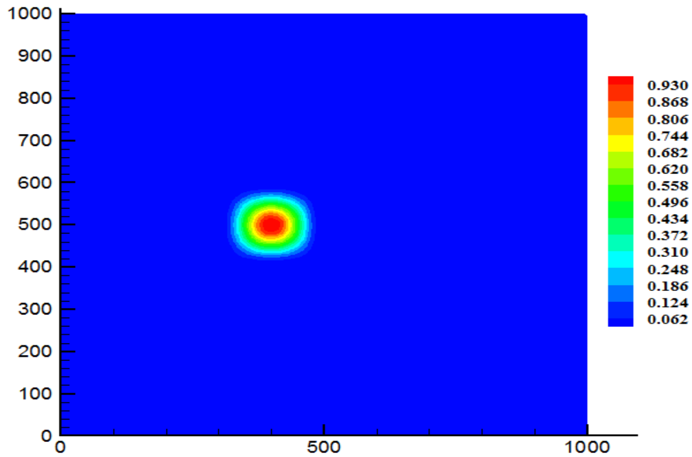
شکل ۷- الف) بار بستر و ب) تراز آب در زمان ($t = 250000\ s$) با درنظر گرفتن ($A_g = 0/001$) در مثال ۲

همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود شرایط اولیه مسئله دارای ناپیوستگی‌های زیادی بوده و مدل را به چالش بیشتری نسبت به مثال قبل می‌کشد. دامنه محاسباتی مسئله با استفاده از توزیع گره‌ای MNSD و با درنظر گرفتن ۱۰۰۰ نقطه انتگرال‌گیری به‌صورت منظم گسسته‌سازی شده است. توابع پایه از مرتبه ۱ و شعاع تأثیر ۲ برابر فاصله نقاط گره‌ای لحاظ شد. گام زمانی در حالت اندرکنش قوی، برابر ($\Delta t = 1\ s$) و در حالت اندرکنش ضعیف، برابر ($\Delta t = 200\ s$) درنظر گرفته شده است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله، اعمال مقادیر ثابت به دبی جریان و رسوب بستر در بالادست است. در شکل (۶) تغییرات بستر و ارتفاع آب با درنظر گیری ($A_g = 1$) در زمان ($t = 482\ s$) و در شکل (۷) تغییرات ایجاد شده با درنظر گرفتن ($A_g = 0/001$) در زمان ($t = 250000\ s$) ارائه شده است. نتایج در مقایسه با نتایج محققین نشان داد که روش EFG بهتر از روش‌های دیگر در حال مقایسه توانسته ناپیوستگی‌های موجود را مدل کند که این نشان از توانایی بالای این روش در شبیه‌سازی ناپیوستگی‌ها دارد.

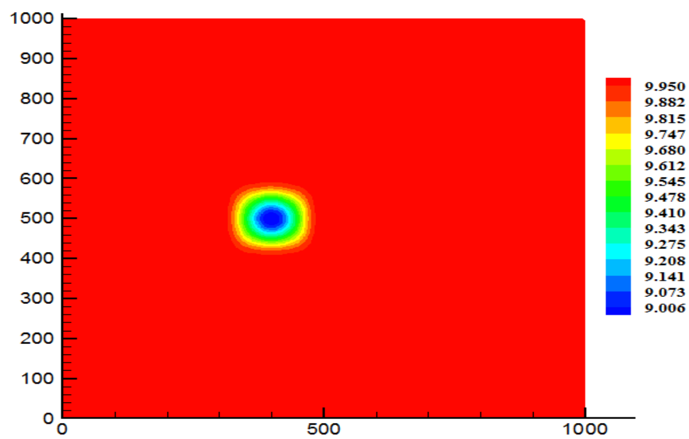
۴-۵- انتقال لایه رسوبی با توپوگرافی معین در حالت دو بعدی

جهت ارزیابی روش EFG در حل مسائل دو بعدی، به حل مثال زیر پرداخته شد که توسط سایر محققین نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳، ۱۶ و ۲۱]. توپوگرافی بستر طبق رابطه زیر بوده که در شکل (۸) نشان داده شده است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله به‌صورت زیر لحاظ شده است:

$$Z(x,y,0) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{(x-300)\pi}{200}\right)\sin^2\left(\dfrac{(y-400)\pi}{200}\right) & \begin{array}{l} 300 \le x \le 500 \\ 400 \le y \le 600 \end{array} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (19)$$



شکل ۸- شرایط اولیه بستر در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

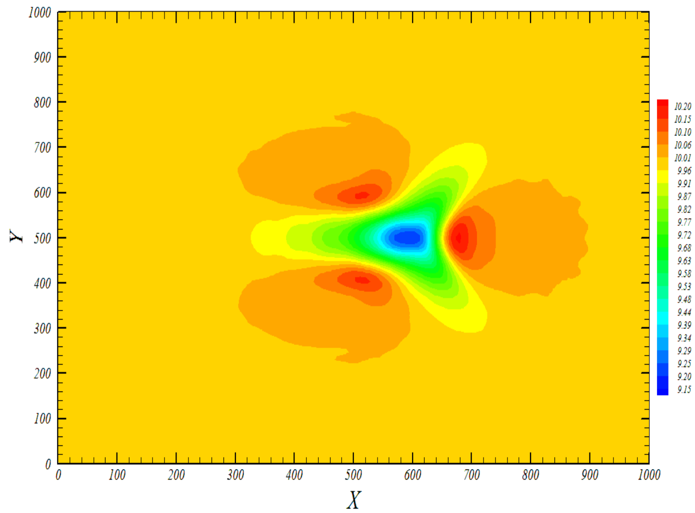


شکل ۹- شرایط اولیه تراز آب در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

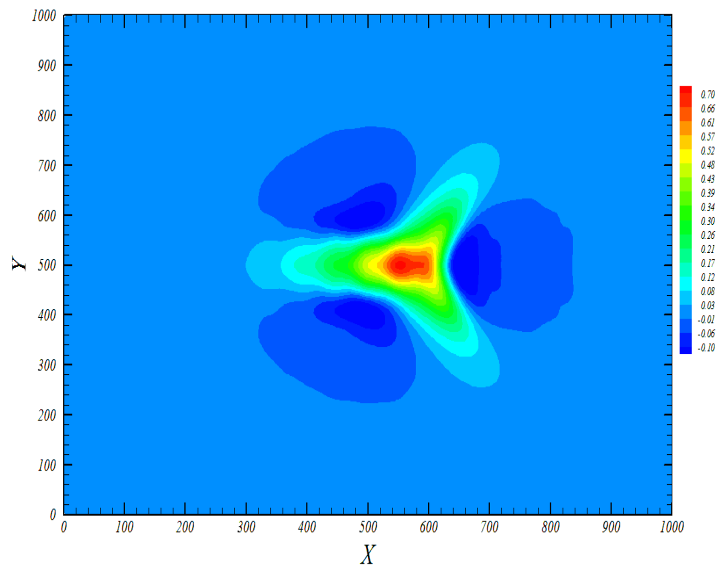
در مرز بالادست در جهت x ، دبی جریان برابر ۱۰ مترمکعب بر ثانیه در واحد عرض و در پایین‌دست، ارتفاع آب ۱۰ متر درنظر گرفته شد. در دیواره‌های جانبی، شرط عدم لغزش تحمیل شده است.

برای حل این مسئله، ابتدا معادلات آب‌های کم‌عمق را به‌تنهایی و با درنظر گیری بستر ثابت مدل کرده تا جریان، حالت پایدار به‌خود بگیرد. مقادیر به‌دست آمده فوق برای عمق و دبی جریان به‌عنوان شرایط اولیه جریان درنظرگرفته می‌شود که در شکل (۹) ارائه شده است. این مسئله با استفاده از پخش نقاط گره‌ای به‌طور منظم و نامنظم مدل‌سازی شد. ابتدا دامنه توسط ۱۶۸۰ نقطه گره‌ای به فاصله ($\Delta x = \Delta y =$ ۲۵ m) که به‌طور منظم در دامنه پخش شده‌اند گسسته‌سازی شد. همچنین شعاع تأثیر، ۶۵ متر و توابع پایه از مرتبه ۱ درنظر گرفته و از ۱۴۸۸۰ نقطه انتگرال‌گیری استفاده شد. با انتخاب گام زمانی برابر ($\Delta t =$ ۱ s) در حالت اندرکنش قوی جریان آب و رسوب و گام زمانی ($\Delta t =$ ۱۰۰۰ s) برای حالت اندرکنش ضعیف، مسئله مورد نظر تحلیل شد. شکل (۱۰) نتایج را در حالت ($A_g =$۱) در زمان ($t =$ ۵۰۰ s) و شکل (۱۱) نتایج برای حالت ($A_g =$۰/۰۰۱) در زمان ($t =$ ۱۰۰ hour) نشان می‌دهد.

همچنین در وضعیت اندرکنش ضعیف جریان آب و رسوب ($A_g =$۰/۰۰۱)، دامنه توسط ۱۷۱۲ نقطه گره‌ای که



شکل ۱۰- شرایط تراز آب در زمان $(t=500\,s)$ با درنظر گرفتن $(A_g=1)$ در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



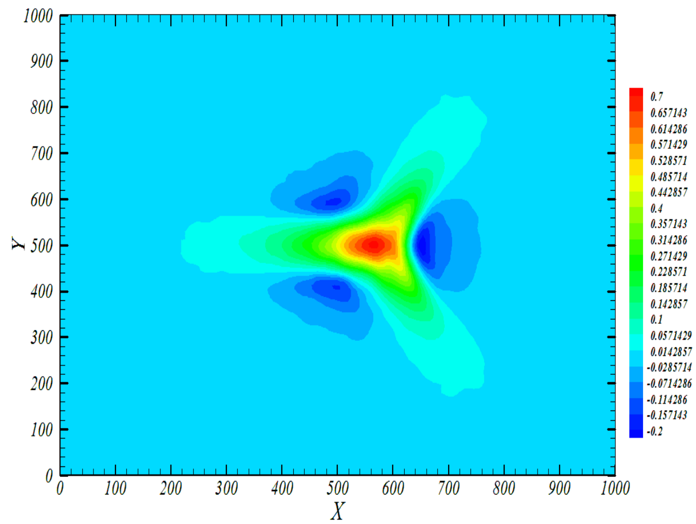
شکل ۱۱- تغییرات بستر در زمان $(t=100\,hour)$ با درنظر گرفتن $(A_g=0/001)$ در مثال ۳ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

به‌صورت نامنظم پخش شده‌اند گسسته‌سازی شد. در این حالت همچون حالت پخش منظم نقاط گره‌ای، از ۱۴۸۸۰ نقطه گوسی جهت انتگرال‌گیری استفاده شد. توابع پایه از مرتبه ۱، شعاع تأثیر برابر ۶۵ و گام زمانی برابر $(\Delta t=1000\,s)$ درنظر گرفته شد. شکل (۱۲) نتایج به‌دست آمده در زمان $(t=100\,hour)$ در حالت پخش نامنظم گره‌ای را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به‌دست آمده در هر دو حالت پخش منظم و نامنظم، تطابق خوبی با نتایج سایر محققین دارد شکل (۱۳) و می‌توان بیان کرد که روش EFG در حالت دو بعد نیز به‌خوبی قادر به شبیه‌سازی مسئله انتقال رسوب است.

۵- نتیجه‌گیری

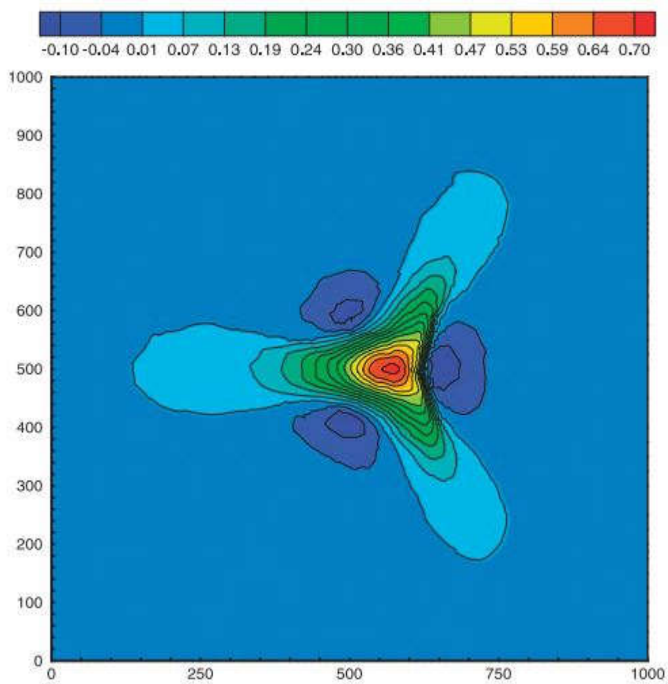
در این مقاله به حل مسئله انتقال بار بستر توسط روش بدون شبکه گالرکین پرداخته شد. این روش بر خلاف سایر روش‌های

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]



شکل ۱۲- تغییرات بستر در حالت پخش نامنظم نقاط گره‌ای در زمان (t = ۱۰۰ hour) با درنظر گرفتن (A_g = ۰/۰۰۱) در مثال ۳

(رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۳- تغییرات بستر به‌دست آمده در زمان (t = ۱۰۰ hour) با درنظر گرفتن (A_g = ۰/۰۰۱) در مرجع [۱۳]

(رنگی در نسخه الکترونیکی)

مورد استفاده در حل مسئله انتقال رسوب، نیازی به شبکه‌بندی از پیش تعریف شده بین گره‌ها ندارد و گره‌ها به‌صورت دلخواه در دامنه محاسباتی پراکنده می‌شوند. همان‌طور که بیان شد معادلات انتقال رسوب از دو بخش معادلات آب‌های کم‌عمق و

معادله اکسنر تشکیل شده است. معادلات آب‌های کم‌عمق بیان کننده بخش هیدرودینامیک جریان بوده که با درنظرگیری فرضیاتی از معادلات ناویر استوکس منتج می‌شوند و معادله اکسنر نشان‌دهنده پیوستگی رسوب است. معادلات فوق را به‌صورت درگیر[۴۰] درنظر گرفته و معادلات درگیر به‌صورت سیستم معادلات هذلولوی غیرپایستار نوشته شد. همچنین برای دبی انتقال بار بستر، مدل معروف گراس مورد استفاده قرار گرفت و به حل مثال با استفاده از این مدل پرداخته شد. در انتها به حل چند مثال مرجع در حالت یک بعدی و دو بعدی پرداخته شد و نتایج ناشی از روش EFG با نتایج سایر محققین مقایسه شد و نشان داده شد که روش بدون شبکه گالرکین قادر به حل مسائل انتقال رسوب در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی با دقت قابل قبولی است.

واژه‌نامه

1. Convection
2. Nodal Discontinuous Galerkin
3. flux
4. Lax- Friedrichs
5. Runge-Kutta
6. Roe scheme
7. Essentially Non-Oscillatory
8. Weighted Essentially Non-Oscillatory
9. Centeral Weighted Essentially Non-Oscillatory
10. Relaxation approximation
11. diagonalizable
12. implicit-explicit scheme
13. Finite Volume Characteristic
14. quasi-steady
15. slope limiters
16. upwind
17. modified Roe Scheme
18. linearized implicit method
19. predictor-corrector
20. Smooth Particle Hydrodynamics
21. Diffuse Element Method (DEM)
22. Reproducing Kernel Particle
23. Local Petrov-Galerkin
24. Finite Clouds (FC)
25. Element Free Galerkin
26. Moving Least Squares
27. Non-conservative hyperbolic system of equations
28. implicit time marching
29. Penalty method
30. Lagrange Multiplier
31. modified variational principles
32. FE-EFG coupled method
33. background cell
34. gauss quadrature
35. Large Nodal Spacing Distribution (LNSD)
36. Medium Nodal Spacing Distribution (MNSD)
37. strong interaction
38. weak interaction
39. shock
40. coupled

پیوست‌ها:

پیوست ۱

تقریب با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک (MLS)

تقریب با استفاده از MLS از دو ویژگی برجسته برخوردار است که سبب محبوبیت آن شده است: ۱) تابع میدان تقریبی در کل دامنه مسئله به‌صورت پیوسته و نرم است و ۲) توانایی ایجاد تقریب با مرتبه دلخواهی از سازگاری دارا است [۲۰]. تقریب تابع $u(x)$ در روش MLS به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{i}^{m}p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x})=\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad \text{(پ-۱)}$$

که در آن $u^h(\mathbf{x})$ تابع تقریب زده شده در نقطه $\mathbf{x}=[x,y]$، $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ بردار توابع پایه چند جمله‌ای از مختصات مکانی و m تعداد جملات توابع پایه است. در روش بدون شبکه، توابع شکل به توابع پایه بستگی داشته که نقش مهمی در بالا بردن دقت پاسخ ایفا می‌کند. توابع پایه $p(x)$ از تک جمله‌هایی از مثلث پاسکال ایجاد می‌شود که به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{p}^T(x)=\{p_0(x),p_1(x),...,p_m(x)\} \qquad \text{(پ-۲)}$$

که در حالت یک‌بعدی به‌صورت:

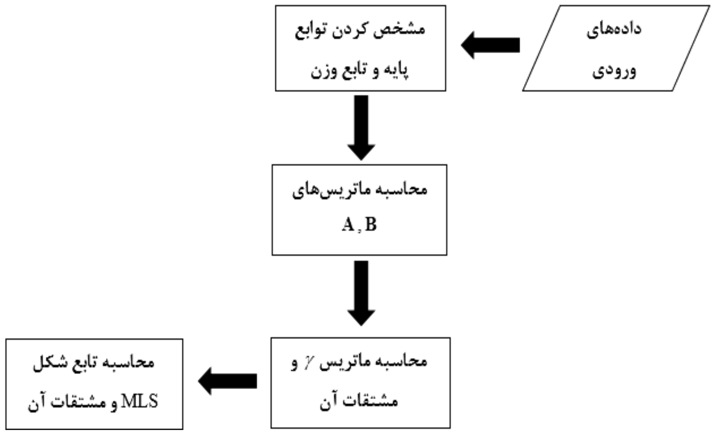
$$\mathbf{p}^T(x)=\left\{1,x,x^2,...,x^m\right\}$$

و

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x},y)=\left\{1,x,y,xy,x^2,y^2,...,x^m,y^m\right\}$$

در دو بعد است. در معادله (پ-۱)، $\mathbf{a}(x)$ بردار ضرایب بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}^T(x)=\{\,a_0(x),\ a_1(x),\ ...\ ,a_m(x)\} \qquad \text{(پ-۳)}$$



شکل پ ۱. فلوچارت روش محاسبه تابع شکل MLS

باید خاطرنشان کرد که $\mathbf{a}(x)$ در معادله (پ-۱)، تابعی از x است و با استفاده از کمینه کردن تابع $J(x)$ که در زیر نشان داده شده است به دست می‌آید:

$$J(x)=\sum_{i=1}^{N}\hat{W}(x-x_i)\left[\mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{a}(x)-u_i\right]^2 \tag{پ-۴}$$

که $\hat{W}(x-x_i)=\hat{W}_i(x)$ تابع وزن (Weight function) گره iام، N تعداد گره‌ها و u_i پارامتر گره‌ای u در $x=x_i$ است. با کمینه کردن تابع $J(x)$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}(x)=\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)U_s \tag{پ-۵}$$

که درآن:

$$\mathbf{A}(x)=\sum_{i=1}^{N}\hat{W}(x-x_i)\mathbf{p}(x_i)\mathbf{p}^T(x_i) \tag{پ-۶}$$

$$\mathbf{B}(x)=\left[\hat{W}_1(x)p(x_1),\ \hat{W}_2(x)p(x_2),\ \ldots,\ \hat{W}_N(x)p(x_N)\right] \tag{پ-۷}$$

$$U_s=\left\{u_1\ \ u_2\ \ldots\ \ u_N\right\}^T \tag{پ-۸}$$

در معادله (پ-۶)، $\mathbf{A}(x)$ ماتریس ممان وزن‌دار (Weighted Moment Matrix) و $\mathbf{U}_s$ بردار پارامترهای گره‌ای تابع تقریب برای تمامی گره‌های داخل دامنه تأثیر است. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^{-1}$ متقارن بوده که این خاصیت، کاهش زمان محاسباتی را در پی خواهد داشت. باید به این نکته توجه داشت که همواره تعداد گره‌ها نسبت به مرتبه توابع پایه، عددی خیلی بزرگ‌تری است که این شرط مانع ایجاد تکین در ماتریس $\mathbf{A}$ شده و بنابراین $\mathbf{A}^{-1}$ ایجاد می‌شود. با جای‌گذاری معادله (پ-۵) در (پ-۱) خواهیم داشت:

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p_j(x)(\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x))_{ji}u_i=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x)u_i=\mathbf{\Phi}^T(x)\mathbf{U}_s \tag{پ-۹}$$

که $\Phi(x)$ تابع شکل MLS است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_i(x)=\sum_{j=1}^{m}p_j(x)(\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{B}(x))_{ji}=\mathbf{p}^T\mathbf{A}^{-1}B_i \tag{پ-۱۰}$$

برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، نیاز به محاسبه مشتقات جزئی تابع شکل مورد نظر است. فلوچارت محاسبه تابع شکل MLS در شکل زیر ارائه شده است. می‌توان ثابت نمود که مشتق تابع شکل MLS طبق رابطه زیر به دست می‌آید [۲۰]:

$$\mathbf{\Phi}_{,i}(x)=\boldsymbol{\gamma}_{,i}\mathbf{B}+\boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{B}_{,i} \tag{پ-۱۱}$$

که در آن γ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\gamma}(x)=\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}(x) \tag{پ-۱۲}$$

فلوچارت سکلی روش محاسبه توابع شکل MLS در شکل (پ-۱) ارائه شده است.

پیوست ۲

تابع وزن انتخابی در روش MLS

توابع وزن نقش مهمی در روش‌های بدون شبکه ایفا می‌کنند.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.6.5]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.139]

توابع وزن باید در همسایگی کوچکی از x_i دارای مقادیر غیر صفر باشد که این همسایگی کوچک، دامنه تأثیر نامیده می‌شود. توابع وزن باید در این دامنه علاوه بر مثبت بودن، پیوسته و مشتق‌پذیر نیز باشد. همچنین توابع وزن باید در گره‌های نزدیک به نقطه مورد بررسی دارای مقادیر بزرگ‌تری به نسبت نقاط دورتر باشد. اکثر توابع وزن به کار گرفته شده در روش‌های بدون شبکه زنگوله‌ای شکل هستند. تعدادی از توابع وزن معروف در ادامه آورده شده است [۲۰].

تابع وزن اسپلاین درجه ۳ ($\hat{W}_1$):

$$\hat{W}(x-x_I)=\hat{W}(\bar{d})=\begin{cases}\frac{2}{3}-4\bar{d}^2+4\bar{d}^3 & \text{for} \quad \bar{d}\le\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4\bar{d}+4\bar{d}^2-\frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for} \quad \frac{1}{2}\le\bar{d}\le 1\\ 0 & \text{for} \quad \bar{d}>1\end{cases} \qquad \text{(پ-۱۳)}$$

تابع وزن اسپلاین درجه ۴ ($\hat{W}_2$):

$$\hat{W}(x-x_I)=\hat{W}(\bar{d})=\begin{cases}1-6\bar{d}^2+8\bar{d}^3-3\bar{d}^4 & \text{for} \quad \bar{d}\le 1\\ 0 & \text{for} \quad \bar{d}>1\end{cases} \qquad \text{(پ-۱۴)}$$

تابع وزن نمایی ($\hat{W}_3$):

$$\hat{W}(x-x_I)=\hat{W}(\bar{d})=\begin{cases}e^{-\left(\bar{d}/\alpha\right)^2} & \text{for} \quad \bar{d}\le 1\\ 0 & \text{for} \quad \bar{d}>1\end{cases} \qquad \text{(پ-۱۵)}$$

که در معادله (پ-۱۵)، α عددی ثابت بوده و معمولاً برابر ۰/۳ درنظر گرفته می‌شود.

تابع وزن درجه ۴ ($\hat{W}_4$):

$$\hat{W}(x-x_I)=\hat{W}(\bar{d})=\begin{cases}\frac{2}{3}-\frac{9}{32}\bar{d}^2+\frac{19}{192}\bar{d}^3-\frac{5}{512}\bar{d}^4 & \text{for} \quad \bar{d}\le 1\\ 0 & \text{for} \quad \bar{d}>1\end{cases} \qquad \text{(پ-۱۶)}$$

در تمامی توابع وزن فوق، مقدار $\bar{d}$ برابراست با:

$$\bar{d}=\frac{|x-x_i|}{d_w} \qquad \text{(پ-۱۷)}$$

که در آن d_w شعاع دامنه تأثیر برای گره مربوطه است.

قابل ذکر است که در تحقیق حاضر از تابع وزن اسپیلاین درجه ۳ جهت ساختن توابع شکل MLS بهره گرفته شده است.

مراجع

۱. شفاعی بجستان، م.، *هیدرولیک رسوب*، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ویرایش دوم، ۱۳۸۴.

2. Noroozi, S., Kolahdoozan, M., and Zarrati, A. R., "Study on Sediment Exchange Between Bed and Flow with a 2D Shallow Water Model", *7th International River Engineering Conference,* Shahid Chamran University, Ahwaz, 2007.
3. Tassi, P. A., Rhebergen, S., Vionnet, C. A., and Bokhove, O., "A Discontinuous Galerkin Finite Element Model for River Bed Evolution under Shallow Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2930-2947, 2008.
4. Izem, N., Seaid, M., and Wakrim, M., "A High-Order Nodal Discontinuous Galerkin Method for 1D Morphodynamic Modelling", *International Journal of Computer Applications*, Vol. 41, pp. 19-27, 2012.
5. Hudson, J., and Sweby, P. K., "Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 19, pp. 225-252, 2003.
6. Hudson, J., "Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling", Ph.D. Thesis, University of Reading, Department of Mathematics, 2001.
7. Črnjarić-Žic, N., Vuković, S., and Sopta, L., "Extension of ENO and WENO Schemes to One-

DImensional Sediment Transport Equations”, *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 31-56, 2004.
8. Caleffi, V., Valiani, A., and Bernini, A., “High-Order Balanced CWENO Scheme for Movable Bed Shallow Water Equations”, *Advances in Water Resources*, Vol. 30, pp. 730-741, 2007.
9. Sportiello, V., *Implicit Simulations for Morphodynamic Shallow Water Flows*, in Department of Civil and Industrial Engineering, University of Pisa, 2012.
10. Delis, A. I. and Papoglou, I., “Relaxation Approximation to Bed-Load Sediment Transport”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 231, pp. 521-546, 2008.
11. Benkhaldoun, F., and Seaïd, M., “Combined Characteristics and Finite Volume Methods for Sediment Transport and Bed Morphology in Surface Water Flows”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, pp. 2073-2086, 2011.
12. Benkhaldoun, F., Seaïd, M., and Sahmim, S., “Mathematical Development and Verification of a Finite Volume Model for Morphodynamic Flow Applications”, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol 3, pp. 470-492, 2011.
13. Benkhaldoun, F., Sahmim, S., and Seaïd, M., “A Two-Dimensional Finite Volume Morphodynamic Model on Unstructured Triangular Grids,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 63, pp. 1296-1327, 2009.
14. Bilanceri, M., Beux, F., Elmahi, I., Guillard, H., and Salvetti, M. V., “Implicit Time Advancing Combined with Two Finite-Volume Methods in the Simulation of Morphodynamic Flows”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 99, pp. 153-169, 2014.
15. Bilanceri, M., Beux, F., Elmahi, I., Guillard, H., and Salvettia, M. V., “Linearized Implicit Time Advancing and Defect Correction Applied to Sediment Transport Simulations”, *Computers & Fluids*, Vol. 63, pp. 82-104, 2012.
16. Castro Díaz, M. J., Fernández-Nieto, E. D., Ferreiro, A. M., and Parés, C., “Two-Dimensional Sediment Transport Models in Shallow Water Equations. A Second order Finite Volume Approach on Unstructured Meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2520-2538, 2009.
17. Idelsohn, S. R., Oñate, E., Calvo, E., and Del Pin, F. “Meshless Finite Element Ideas”, *Proceeding in Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, 2002.
18. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., “Element Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
19. Grass, A. J., Sediment Transport by Wave and Currents, SERC London Cent. Mar. Technol, Report No, FL29, 1981.
20. Liu, G. R., *Mesh-Free Methods: Moving beyond the Finite Element Methods*, CRC Press, 2003.
21. Hudson, J., and Sweby, P. K, “A High-Resolution Scheme for the Equations Governing 2D Bed-Load Sediment Transport”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, pp. 1085-1091, 2005.
22. Belytschko, T., Organ, D., and Krongauz, Y., “A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method”, *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp.186-195, 1995.