نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

تحلیل غیرخطی کمانش نانوتیر کامپوزیتی با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود

مهدی محمدی‌مهر* و سجاد علی‌میرزایی
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۰/۲۱ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۷/۱۳)

چکیده– در این پژوهش، تحلیل کمانش غیرخطی نانوتیرکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لولهٔ نیترید-بور براساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی به‌روش اجزاء محدود بررسی می‌شود. نانوتیرکامپوزیتی تحت بارگذاری‌های الکتروترمومکانیکی و نقص هندسی اولیه درنظر گرفته می‌شود. نانولوله‌های نیترید- بور در راستای ضخامت تیر به‌صورت یکنواخت و مدرج تابعی با چیدمان کاهشی- افزایشی توزیع شده‌اند و از مدل مخلوط توسعه یافته، برای تخمین خواص نانوتیر کامپوزیتی استفاده شده است. محیط الاستیک اطراف نانوتیر کامپوزیتی هوشمند به‌صورت بستر الاستیک مدل‌سازی شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و تئوری غیرموضعی الاستیسیته استخراج شده و بار کمانش بحرانی برای نانوتیر کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف شامل دو طرف تکیه‌گاه ساده یا دو طرف تکیه‌گاه گیردار به‌روش اجزاء محدود به‌دست می‌آیند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش پارامتر نقص هندسی، سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته، درنتیجه پایداری سازه افزایش می‌یابد. استحکام چیدمان کاهشی- افزایشی، بیشتر از توزیع یکنواخت است. همچنین با اعمال پارامترهای میدان الکتریکی و بستر الاستیک بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل غیرخطی کمانش، نقص هندسی اولیه، توزیع‌های مختلف نانولولهٔ نیترید- بور، بستر الاستیک، تئوری غیرمحلی الاستیسیته، روش اجزاء محدود.

Nonlinear Buckling Analysis of Nano-composite Beam with Initial Geometrical Imperfection using Finite Element Method

M. Mohammadimehr* and S. Alimirzaei

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract*: In this research, the nonlinear buckling analysis of Functionally Graded (FG) nano-composite beam reinforced by various distributions of Boron Nitrid Nanotube (BNNT) is investigated under electro-thermodynamical loading with considering*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

initial geometrical imperfection. The analysis is performed based on nonlocal elasticity theory and using the Finite Element Method (FEM). Various distributions of BNNT along the beam's thickness are considered as uniform and decreasing-increasing functionally graded; and the extended mixture model is used to estimate the properties of nano-composite beam. The elastic medium around the smart nano-composite beam is modeled as elastic foundation. The governing equations of equilibrium are derived using energy method and nonlocal elasticity theory; and the critical buckling load is obtained for various boundary conditions such as simply-simply supported (S-S) and clamped-clamped (C-C) using the FEM. The results indicate that with an increase in the geometrical imperfection parameter, the stiffness of nano-composite beam increases and consequently the stability of the system increases. The effect of FG-X distribution type is more than uniform distributions. Also, the critical buckling load of nano-composite beam increases with an increase in the electric field and elastic foundation.

Keywords: *Nonlinear buckling analysis, Initial geometrical imperfection, Various distributions of BNNTs, Elastic foundation, Nonlocal elasticity theory, Finite element method.*

فهرست علائم

c_{ij}	درایه‌های ماتریس سختی الاستیک	$[k_{\varphi d}]$	ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های پتانسیل الکتریکی و درجات آزادی
$\{D\}$	بردار جابه‌جایی الکتریکی	$[k_{\varphi d}]$	ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های درجات آزادی و پتانسیل الکتریکی
E	مدول الاستیسیته	$[k_{dd}]$	ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های درجات آزادی
$\{E\}$	میدان الکتریکی	$\left[\bar{N}(x)\right]$	ماتریس توابع شکل
$e_{\circ}a$	اثر مقیاس کوچک	P_M	نیروی محوری
$[e]^T$	ضرایب پیزوالکتریک	$\{\bar{q}\}$	بردار درجات آزادی
$\{f\}$	بردار نیروی خارجی	T	افزایش دما
G	مدول برشی	$[T]$	ماتریس شیب سختی
$[G]$	ماتریس کمانش	$\{\varepsilon\}$	بردار کرنش
$[G]^{-1}$	میدان جابه‌جایی برای گره‌های یک المان	λ	ضرایب تنش حرارتی
k_w	مدول فنری وینکلر	μ	دامنه نقص هندسی
k_g	مدول برشی پاسترناک	υ	ضریب پواسون
$[k]^{Linear}$	ماتریس سختی خطی	$\{\sigma\}$	بردار تنش
$[k]^{Nonlinear}$	ماتریس سختی غیرخطی	$\in$	ثابت‌های دی الکتریک
$[k_{\varphi\varphi}]$	ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های پتانسیل الکتریکی	u_j, w_j, ψ_j و φ_j	مؤلفه‌های میدان‌های جابه‌جایی مکانیکی و الکتریکی سیستم

۱- مقدمه

همه سیستم‌ها از جمله سیستم‌های مکانیکی، در عمل به‌دلیل فرایند ساخت و آسیب‌های وارده در مراحل حمل و نقل و نصب فاقد یک هندسه کامل و بی‌نقص هستند. در واقع نقص‌هایی در سطح مقطع و طول سازه‌ها وجود دارد. حضور نقص می‌تواند بر رفتار سازه مقابل بارهای وارده تا حد زیادی تأثیرگذار باشد. اکثر سازه‌ها در معرض عیوبی قرار می‌گیرند که از جملهٔ این عیوب می‌توان به عیوب هندسی اشاره کرد. این عیوب در ساخت نانولوله‌ها از جمله نانولوله‌های نیترید- بور مشاهده شده است. این نانولوله‌ها به‌دلیل خصوصیات مکانیکی،

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

الکتریکی و حرارتی جزء نانوساختارهای هوشمند محسوب می‌شوند. از جمله تحقیقات انجام شده در زمینهٔ تحلیل‌های الکترو- ترمو- مکانیکی نانوساختارها، توابع مدرج، مواد هوشمند و عیوب هندسی، می توان به موارد زیر اشاره کرد:

وانگ و همکاران [۱] انتشار موج غیرخطی در نانولوله‌های تک جداره براساس تئوری غیرمحلی الاستیسیته را مورد بررسی قرار دادند. سپس آنها اثرات عیوب هندسی، تغییر دما و میدان مغناطیسی بر فرکانس قطع بررسی کردند. نتایج عددی آنها نشان داد که سهم اثرات مقیاس کوچک در تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی می‌تواند به کاهش در فرکانس منجر شود. لیو و همکاران [۲] به تجزیه و تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (CNTRC) و کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (FG-CNTRC) پرداختند. تأثیر پارامتر مقیاس کوچک طول بر کمانش و ارتعاشات ورق دو لایه نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله نیترید- بور با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط محمدی مهر و همکاران [۳] انجام گرفت. آنها نشان دادند که با افزایش نسبت طول به ضخامت بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد افزایش پیدا یافته و همچنین با افزایش نسبت طول به عرض ورق، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی سازه کاهش می‌یابد. کمانش ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از روش‌های تحلیلی و المان محدود توسط قربانپور آرانی و همکاران [۴] بررسی شد. تأثیرات نانولولهٔ کربنی، شرایط مرزی مختلف و ضریب رعنایی روی بار کمانش بحرانی ورق‌های کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفت. لای [۵] به بررسی کمانش حرارتی تیر سه بعدی با درنظر گرفتن نقص هندسی، تحت توزیع دماهای مختلف پرداخت. نتایج وی نشان داد که توزیع دما، درصد حجمی الیاف، نقص هندسی و زاویه الیاف روی رفتار کمانشی تیر کامپوزیتی تأثیرگذار است. تحلیل کمانش و خمش نانوتیر تقویت شده با استفاده از روش تحلیلی توسط سیمسک و یورچی [۶] انجام شد. آنها نشان دادند که اعمال ضریب مقیاس کوچک باعث کاهش بار کمانش بحرانی سیستم می‌شود. محمدی مهر و همکاران [۷] به بررسی کمانش غیرخطی میکرو ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و به‌کارگیری روش مربع‌سازی دیفرانسیلی پرداختند. تأثیرات ضریب مقیاس کوچک، مدول الاستیسیته، اثرات سطحی، ضرایب ماتریس و همچنین شرایط مرزی مختلف روی کمانش غیرخطی سیستم مورد مطالعه قرار گرفت. کمیجانی و همکاران [۸] به تحلیل غیرخطی پایداری حرارتی و ارتعاشات ناشی از حرارت در تیرهای تقویت شده واقع بر بستر الاستیک پرداختند. کمانش نانوتیر واقع بر بستر الاستیک با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه توسط محمدی و همکاران [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش ثابت‌های مربوط به بستر الاستیک بار کمانش بحرانی افزایش یافته و پایداری سیستم بیشتر می‌شود. تحلیل کمانش و ارتعاشات ورق‌های ساندویچی هسته‌دار و تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) توسط محمدی‌مهر و شاهدی [۱۰] انجام گرفت. تأثیرات اثر درصد حجمی نانولوله‌ها، تغییرات دما، نسبت طول به ضخامت و همچنین شرایط مرزی مختلف روی بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم مورد مطالعه گرفت. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق دو لایهٔ تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله کربنی براساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی با استفاده از روش بدون شبکه توسط محمدی‌مهر و همکاران [۱۱] انجام گرفت. تأثیرات اثر توزیع‌های مختلف نانولوله، بستر الاستیک، نیروهای واندروالس، ثابت میرایی و همچنین شرایط مرزی مختلف روی فرکانس طبیعی سیستم مورد مطالعه گرفت. در کار دیگری آنها [۱۲] تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات میکرو ورق تقویت شده تحت اثرات دمایی و رطوبتی را با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های تک جداره با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه تحت بارگذاری هارمونیک توسط وانگ و همکاران [۱۳]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

انجام شد. تأثیرات پارامتر غیرمحلی و ثابت موج بر پاسخ دینامیکی مورد بررسی قرار گرفت. انجم شعاع و همکاران [۱۴] به تحلیل صفحات گرافن واقع بر بستر الاستیک با استفاده از روش المان محدود پرداختند. اثرات بستر الاستیک، نیروی واندروالس بین صفحات، مودهای مختلف، مدل‌های مختلف نانولوله‌های کربنی و شرایط مرزی مختلف بر بار کمانش بحرانی صفحات مورد بررسی قرار گرفت. ردی [۱۵] به معرفی تحلیل‌های غیرخطی تیر، ورق و پوسته با استفاده از روش اجزاء محدود پرداخت. آثار تجمع نانولوله و تنش سطحی بر روی کمانش دو محوره نانو ورق مرکب تقویتی شده با نانولوله‌های کربنی توسط قربانپورآرانی و همکاران [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها نشان دادند که بار کمانش دو محوری با افزایش پارامتر غیرمحلی کاهش می‌یابد. مورمو و پردهان [۱۷] به تحلیل کمانش نانولوله‌های کربنی تک جداره براساس تئوری غیرمحلی الاستیسیته با استفاده از روش DQM پرداختند. آنها تأثیر پارامترهای ضریب غیرمحلی، ثابت‌های وینکلر و پاسترناک بر بار کمانش بحرانی مورد مطالعه قرار دادند. آمابیلی و همکاران [۱۸] به بررسی اثرات نقص هندسی بر پایداری غیرخطی پوستهٔ استوانه‌ای حاوی جریان سیال پرداختند. محمدی‌مهر و علی‌میرزائی [۱۹] به تحلیل غیرخطی خمش و ارتعاشات تیر نانوکامپوزیتی با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود پرداختند. تأثیرات توزیع‌های مختلف نانولوله، پارامتر نقص هندسی، ضرایب مغناطیس، ضریب رعنایی، ضرایب وینکلر و پاسترناک، شرایط مرزی مختلف و درصد حجمی مختلف الیاف روی فرکانس طبیعی و خمش تیر نانو کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفت. عبداللهی و همکاران [۲۰] به بررسی کمانش ورق‌های برشی مرتبه بالا با درنظر گرفتن بارهای الکتریکی پرداختند. اثرات بارهای الکتریکی، بارگذاری مختلف، ضریب رعنایی و ضخامت بر بار کمانش بحرانی سیستم مورد بررسی قرار گرفت.

هدف از تحقیق حاضر، تحلیل غیرخطی کمانش نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود است که مزایا و تفاوت‌های تحقیق حاضر با سایر تحقیق‌ها به شرح ذیل بیان می‌شود:

۱- تحلیل غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی انجام شده و جملات غیرخطی در روابط لحاظ شده است.

۲- اثر نقص هندسی اولیه که در واقع توزیع ذاتی در سیستم‌ها است، روی بار کمانش بحرانی بررسی شده است.

۳- برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده شده و در این روش به‌دلیل استفاده از فرمول‌بندی انتگرالی و استفاده از توابع وزنی پیوسته دقت حل بیشتر از برخی دیگر از روش‌های عددی است. همچنین به‌دلیل آسان بودن فهم روش و به‌کارگیری این روش در نرم‌افزارهای اجزاء محدود نویسندگان را تشویق به استفاده از این روش کرد، لذا برنامه‌نویسی این معادلات غیرخطی در نرم‌افزار متلب و اعتبارسنجی آن به‌روش اجزاء محدود انجام شد.

۴- از توابع شکل مرتبه بالا برای حل معادلات استفاده شده است.

۵- تأثیر پارامترهای مختلف شامل نقص هندسی اولیه، توزیع مختلف نانولوله، ضریب غیرموضعی الاستیسیته، بستر الاستیک، نسبت طول به ضخامت و شرایط مرزی مختلف بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در این تحقیق، کمانش غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولولهٔ نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه بررسی می‌شود. محیط الاستیک توسط بستر الاستیک پاسترناک مدل‌سازی شده است. شکل (۱) شمای کلی نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی نشان می‌دهد.

۲-۱- معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی

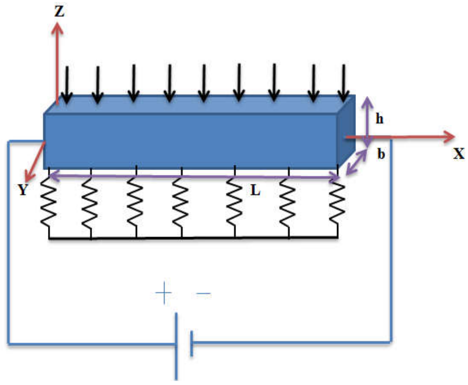
روابط تنش- کرنش برای یک سازه پیزوالکتریکی تحت بارهای ترکیبی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۱ و ۲۲]:

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]



شکل ۱- شمای کلی نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [c]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\} - \{\lambda\}T \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\in]^T\{E\} + \{\lambda\}T\end{aligned} \qquad (۱)$$

$\{\sigma\}$، $\{\varepsilon\}$، $\{D\}$، $\{E\}$ و $\{\lambda\}$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ تنش، کرنش، بردار جابه‌جایی الکتریکی، میدان الکتریکی و ضرایب تنش حرارتی هستند. همچنین T افزایش دما و $[c]$، $[e]^T$ و $[\in]^T$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ سختی الاستیک، ضرایب پیزوالکتریک و ثابت دی‌الکتریک هستند. در تئوری محلی مکانیک محیط پیوسته در مقیاس ماکرو، تنش در هر نقطه به کرنش در آن نقطه وابسته است. در ابعاد کوچک تنش در نقطه متناسب با تنش در تمام نقاط جسم است. این پدیده اثر مقیاس کوچک نامیده شده و پارامتر e_0a نشان‌دهندهٔ این اثر است. روابط تنش- کرنش صفحه‌ای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولولهٔ نیترید- بور براساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(1-(e_0a)^2\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^{nl}\\ \sigma_{yy}^{nl}\\ \sigma_{zz}^{nl}\\ \sigma_{yz}^{nl}\\ \sigma_{xz}^{nl}\\ \sigma_{xy}^{nl}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{yz}\\ 2\varepsilon_{xz}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha_x\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\Delta T\right)-\begin{bmatrix}e_{11} & 0 & 0\\ e_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

مؤلفه‌های سختی رابطه بالا به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \frac{E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}\\ c_{12} &= c_{13} = c_{23} = \frac{\upsilon_{12}(z)E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}\\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = G_{12}(z)\end{aligned} \qquad (۳)$$

رابطه جابه‌جایی الکتریکی براساس معادلات اساسی یک ماده پیزو الکتریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۶ و ۲۴]:

$$D_x-(e_0a)^2\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2}=\left[e_{11}\left(\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial\psi}{\partial x}+(\mu+\frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2\right\}-\alpha_x\Delta T\right)+\in_{11}E_x\right] \qquad (۴)$$

میدان الکتریکی در رابطه فوق به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱ و ۲۲]:

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad (۵)$$

طبق تئوری تیر تیموشنکو جابه‌جایی‌ها در راستای محور x، y و z به‌صورت (۶) تعریف می‌شوند [۲۳]:

$$\begin{aligned}u_1(x,z) &= u(x)+z\psi(x),\\ u_2(x,z) &= 0,\\ u_3(x,z) &= w(x)\end{aligned} \qquad (۶)$$

در صورت وجود نقص هندسی اولیه، که اصولاً ناشی از فرایند ساخت است، معمولاً این نقص متناسب با تغییر شکل عرضی تیر درنظر گرفته می‌شود. با درنظر گرفتن این پارامتر

درصدی از مودهای مختلف به فرم غیرخطی به مدل اولیه اضافه می‌شود. روابط کرنش- جابه‌جایی تیر تیموشنکو با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه به‌صورت (۷) تعریف می‌شود [۱، ۵، ۹ و ۱۳]:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\ \gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz} \qquad (۷)$$

w تغییر شکل عرضی تیر و w_0 پارامتر تعیین کننده وجود نقص هندسی است که به‌صورت یک فرم شبیه به تغییر شکل عرضی تیر با یک دامنه خاص درنظر گرفته شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۵، ۱۳ و ۲۵]:

$$w_0=\mu w \qquad (۸\text{- الف})$$

در رابطه فوق μ دامنه نقص هندسی اولیه است.

با جای‌گذاری رابطه (۸- الف) در رابطه (۷) چنین نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial \psi}{\partial x}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\ \gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz} \qquad (۸\text{- ب})$$

۲-۲- تخمین خواص نانوکامپوزیت

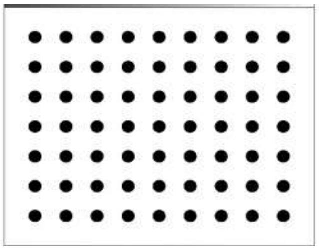
فرض کنید ذرات نانولولهٔ نیترید- بور به‌صورت مدرج تابعی باعث تقویت زمینه شوند. در صورتی که v_{BNNT} کسر حجمی نانولوله نیترید- بور و v_m کسر حجمی زمینه باشد آنگاه $v_{BNNT}+v_m=1$. در این تحقیق فرض شده است ذرات نانو با دو چیدمان مختلف شامل توزیع یکنواخت و مدرج تابعی زمینه را در راستای ضخامت تقویت می‌کنند. در ادامه به دو توزیع یکنواخت و کاهشی- افزایشی پرداخته می‌شود.

۲-۳- توزیع یکنواخت تک جهته (UD)

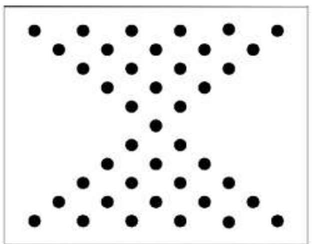
مطابق شکل (۲) در صورتی که ذرات نانولوله نیترید- بور به‌طور یکنواخت در راستای ضخامت توزیع شوند به این چیدمان توزیع یکنواخت گویند که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_{BNNT}=v^*_{BNNT} \qquad (۹)$$

v^*_{BNNT} نشان‌دهنده درصد حجمی نانولوله نیترید بور است.



شکل ۲- نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع یکنواخت



شکل ۳- نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع کاهشی- افزایشی

۲-۳- توزیع کاهشی- افزایشی (SFG or FG-X)

در صورتی که که مطابق شکل (۳) نانولوله‌ها به‌صورت کاهشی- افزایشی در راستای ضخامت توزیع شوند آنگاه می‌توان نوشت [۱۹]:

$$v_{BNNT}=2\left(\frac{2|z|}{h}\right)v^*_{BNNT} \qquad (۱۰)$$

همچنین با استفاده از روابط میکرومکانیک می‌توان چگالی، مدول الاستیسیته، ضرایب انبساط گرمایی و ضریب پواسون را برای نانو کامپوزیت به‌صورت زیر تعریف کرد [۲۳]:

$$E_{11}=\eta_1 v_{BNNT}E_{11}^{BNNT}+v_mE_m$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}}=\frac{v_{BNNT}}{G_{12}^{BNNT}}+\frac{v_m}{G_m}$$

$$\upsilon=v_{BNNT}\upsilon_{BNNT}+v_m\upsilon_m$$

$$\rho=v_{BNNT}\rho_{BNNT}+v_m\rho_{cn}$$

$$\alpha_{xx}=\alpha_{11}=v_{BNNT}\alpha_{11}^{BNNT}+v_m\alpha_m \qquad (۱۱)$$

η_1 و η_3 ضرایب بازدهی نانو لوله و بدون واحد هستند، همچنین v_{BNNT} و v_m به‌ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی نانولوله و زمینه و بدون واحد هستند. G_{12}^{BNNT}، G_m و G_{12} به‌ترتیب مدول برشی نانو لوله نیترید بور، مدول برشی زمینه و مدول برشی نانوکامپوزیت هستند. همچنین، E_{11} مدول الاستیک

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

نانولوله، υ ضریب پواسون نانوکامپوزیت، ρ چگالی نانو کامپوزیت، α_{11}^{BNNT} و α_m به‌ترتیب ضرایب انبساط نانولوله و زمینه هستند.

۳- استخراج معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی

انرژی کلی سیستم از مجموع انرژی‌های پتانسیل و کار ناشی از نیروهای خارجی تشکیل می‌شود:

$$\Pi = U^s + W_{Ext} \tag{۱۲}$$

که U^s و W_{Ext} به‌ترتیب نشان‌دهنده انرژی کرنشی و کار ناشی از نیروهای خارجی است و Π بیانگر انرژی پتانسیل کل است. اصل حداقل انرژی پتانسیل بیان می‌کند که تغییرات انرژی پتانسیل کل $\delta\Pi$ باید برابر صفر باشد، لذا چنین نتیجه می‌شود:

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \delta U^s + \delta W_{Ext} = 0 \tag{۱۳}$$

انرژی پتانسیل کرنشی برای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیترید- بور برابر است با:

$$U^s = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(\{ \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz} - D_x E_x \} \right) dA dx \tag{۱۴}$$

که با جای‌گذاری رابطه (۷) در رابطه (۱۴) چنین نتیجه می‌شود:

$$U^s = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left\{ \sigma_{xx}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \psi}{\partial x} + (\mu + \frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2\right] + \sigma_{xz}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right] - D_x E_x \right\} dA dx \tag{۱۵- الف}$$

$$U^s = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_x \psi + M_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\mu + \frac{1}{2}) N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx \tag{۱۵- ب}$$

که نیروی محوری (N_x)، نیروی برشی (Q_x) و گشتاور خمشی (M_x) در نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیترید- بور با رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA\ ,\ \ M_x = \int_A z\sigma_{xx} dA,\ \ Q_x = k_s \int_A \sigma_{xz} dA \tag{۱۶}$$

که k_s ضریب تصحیح برشی است.

با جای‌گذاری روابط (۲) و (۷) در رابطه (۱۶)، نیروی محوری، نیروی برشی و گشتاور خمشی غیرمحلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &N_x - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_x = A_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_{11}^0 (\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ &M_x - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_x = A_{11}^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_{11}^1 (\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ &Q_x - (e_0 a)^2 \nabla^2 Q_x = B_{11}^0 (\frac{\partial w}{\partial x} + \psi) \end{aligned} \tag{۱۷}$$

با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییرات انرژی کرنشی با درنظر گرفتن تئوری غیرمحلی الاستیسیته به‌صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود:

$$\delta U^s = \int_0^L \left\{ N_x \delta\frac{\partial u}{\partial x} + Q_x \delta\frac{\partial w}{\partial x} + Q_x \delta\psi + M_x \delta\frac{\partial \psi}{\partial x} + 2(\mu + \frac{1}{2}) N_x \frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x} + D_x \delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx \tag{۱۸}$$

درنهایت با ترکیب روابط (۱۷) و (۱۸) مربوط به نیروی محوری و ممان‌های خمشی با رابطهٔ مربوط به انرژی پتانسیل کرنشی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U^s = \int_0^L \Bigg[&\frac{\partial \delta u}{\partial x}\left\{ A_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_{11}^0 (\mu + \frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - (AT_{11}^0)\Delta T + m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial \delta u}{\partial x}(e_0 a)^2 \nabla^2 N_x + \\ &\frac{\partial \delta w}{\partial x}\left\{ k_s B_{11}^0 [\psi + \frac{\partial w}{\partial x}] \right\} + \delta\psi \left\{ k_s B_{11}^0 [\psi + \frac{\partial w}{\partial x}] \right\} + \\ &\frac{\partial \delta w}{\partial x}(e_0 a)^2 \nabla^2 Q_x + \\ &\frac{\partial \delta \psi}{\partial x}\left\{ A_{11}^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_{11}^1 (\mu + \frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - (AT_{11}^1)\Delta T + m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial \delta \psi}{\partial x}(e_0 a)^2 \nabla^2 M_x + \\ &\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} 2(\mu + \frac{1}{2})\left\{ A_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_{11}^0 (\mu + \frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - (AT_{11}^0)\Delta T + m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \\ &\frac{\partial \delta w}{\partial x} 2(\mu + \frac{1}{2})(e_0 a)^2 \nabla^2 (\frac{\partial w}{\partial x} N_x) + \\ &\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}\left\{ m_0 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + m_0 (\mu + \frac{1}{2})(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - m_3 \Delta T - m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + (e_0 a)^2 \nabla^2 D_x \Bigg] dx \end{aligned} \tag{۱۹}$$

همچنین کار خارجی نیروهای اعمال شده بر نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیترید- بور، شامل انرژی پتانسیل

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

ناشی از بستر الاستیک و پتانسیل ناشی از نیروی محوری است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{Elastic} = -\int_0^L \left(F_{Elastic\,Medium}\, w\right) dx = -\int_0^L \left(-k_w w + k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) w\, dx \qquad (\text{الف}-20)$$

$$W_{Axialforce} = -\frac{1}{2}\int_0^L P_M \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (\text{ب}-20)$$

در روابط فوق k_w ثابت فنری نوع وینکلر، k_g ثابت برشی نوع پاسترناک و P_M مقدار نیروی محوری است. با اعمال اصل حساب تغییرات بر روابط فوق داریم:

$$\delta W_{Elastic} = -b\int_0^L \left(-k_w w + k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \delta w\, dx \qquad (\text{ج}-20)$$

$$\delta W_{Axialforce} = -\int_0^L P_M \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \qquad (\text{د}-20)$$

با به‌کارگیری روش انرژی و روش ارائه شده در مقال ردی [26]، تغییرات انرژی برای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولولهٔ نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\int_0^L A^0_{11}\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^L A^0_{11}(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\partial \delta u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx+\\&\int_0^L A^1_{11}\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\int_0^L m_0\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\\&\int_0^L (AT^0_{11})\frac{\partial \delta u}{\partial x}\Delta T dx=0\end{aligned} \qquad (\text{الف}-21)$$

$$\begin{aligned}&b\int_0^L k_w \delta w w dx-b\int_0^L k_g \delta w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx+\\&\int_0^L k_s B^0_{11}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\int_0^L k_s B^0_{11}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\psi dx+\\&2\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})A^0_{11}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\\&2\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})A^1_{11}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\\&2\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})^2A^0_{11}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}dx+\\&2\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})m_0\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-\\&\int_0^L(1-(e_0a)^2\nabla^2)bP_M\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-\\&2\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})(AT^0_{11})\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\Delta T dx=0\end{aligned} \qquad (\text{ب}-21)$$

$$\begin{aligned}&\int_0^L A^1_{11}\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^L k_s B^0_{11}\delta\psi\frac{\partial w}{\partial x}dx+\\&\int_0^L k_s B^0_{11}\delta\psi\psi dx+\int_0^L A^2_{11}\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\\&\int_0^L m_1\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\int_0^L A^1_{11}(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx-\\&\int_0^L (AT^1_{11})\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\Delta T dx=0\end{aligned} \qquad (\text{ج}-21)$$

$$\begin{aligned}&\int_0^L m_0\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^L m_1\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx-\\&\int_0^L m_2\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\int_0^L(\mu+\tfrac{1}{2})m_0\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx-\\&\int_0^L m_3\frac{\partial \delta\varphi}{\partial x}\Delta T dx=0\end{aligned} \qquad (\text{د}-21)$$

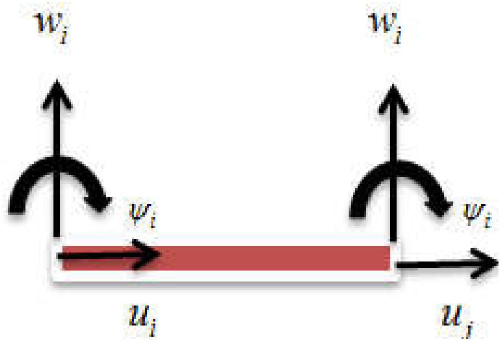
ثابت‌های ذکر شده در روابط فوق به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&A^i_{11}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i c_{11}dz,\ i=0,1,2\ ,\\&B^i_{11}=D^i_{11}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G dz,\ i=0,1,2\ ,\\&AT^i_{11}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i c_{11}\alpha dz,\ i=0,1\ ,\\&BT^i_{11}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G\alpha dz,\ i=0,1\ ,\\&CT^i_{11}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G\alpha_{,z} dz,\ i=0,1\ ,\\&\{m_0,m_1\}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1,z)e_{11}dz\ ,\\&m_2=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\in_{11}dz\end{aligned} \qquad (22)$$

در روابط فوق h معرف ارتفاع تیر کامپوزیتی است.

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]



شکل ۴- المان نانوتیر تیموشنکو با درجات آزادی در هر گره

۳-۱- روش حل و شرایط مرزی

در این تحقیق، برای حل معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولولهٔ نیترید- بور تحت بارهای الکتروترمو مکانیکی با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه از روش اجزاء محدود استفاده شده است. طبق این روش توابع مربوط به متغیرهای مسئله به گونه‌ای باید به‌دست آیند که شرایط مرزی و معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی را برآورده کنند.

۳-۱-۱- فرمول‌بندی توابع شکل

در این قسمت به استخراج توابع شکل با استفاده از توابع درون‌یاب و حل مسئله با استفاده از این توابع پرداخته شده و درنهایت فرم ماتریسی معادلات حاکم بر سیستم استخراج می‌شود. شکل (۴) المان نانوتیر تیموشنکو با فرض جابه‌جایی محوری درنظر گرفته که این المان دارای دو گره بوده و هر گرهٔ آن دارای ۳ درجه آزادی (u, w, ψ) و یک شرط مرزی میدان الکتریکی (φ) است.

طبق روش اجزاء محدود میدان جابه‌جایی محوری، عرضی، دورانی و میدان جابه‌جایی حاصل از میدان الکتریکی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله‌های نیترید- بور به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$u(x)=\sum_{J=1}^{6} N_{uj}u_j\,,\; w(x)=\sum_{J=1}^{4} N_{wj}w_j,\quad \psi(x)=\sum_{J=1}^{4} N_{\psi j}\psi_j,\; \varphi(x)=\sum_{J=1}^{2} N_{\varphi j}\varphi_j \qquad (۲۳)$$

ψ_j، w_j، u_j و φ_j معرف مقادیر گره‌ای میدان جابه‌جایی و میدان الکتریکی هر المان و نیز $N_{\psi j}$، N_{wj}، N_{uj}، $N_{\varphi j}$ معرف توابع شکل مربوطه است که در ادامه به نحوه به‌دست آوردن این توابع پرداخته می‌شود. توابع درون‌یاب میدان‌های مذکور برای فرمول‌بندی اجزاء محدود به‌صورت زیر ارائه می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned} u(x)&=c_1+c_2x+c_3x^2\\ w(x)&=c_4+c_5x+c_6x^2+c_7x^3\\ \psi_x(x)&=c_8+c_9x+c_{10}x^2\\ \varphi(x)&=c_{11}+c_{12}x \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

این معادلات دارای دوازده ثابت هستند.

با جای‌گذاری رابطه (۲۴) در معادلات حاکمه سیستم چهار ثابت برحسب هشت ثابت دیگر به‌صورت رابطه (۲۵) به‌دست می‌آید:

$$c_3=\left(\frac{-A^1_{11}}{A^0_{11}}\right)c_{10}\,,\quad c_6=-\frac{1}{2}c_9\,,\; c_7=-\frac{1}{3}c_{10}$$
$$c_8=\frac{\left(-2(A^1_{11})^2+2A^0_{11}A^2_{11}\right)c_{10}-A^0_{11}B^0_{11}k_s c_5}{A^0_{11}B^0_{11}k_s} \qquad (۲۵)$$

با جای‌گذاری ثابت‌های به‌دست آمده در رابطه (۲۴)، رابطه (۲۶) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u&=c_1+c_2x+\left(-\frac{A^1_{11}}{A^0_{11}}c_{10}\right)x^2\\ w&=c_4+c_5x+\left(-\frac{1}{2}c_9\right)x^2+\left(-\frac{1}{3}c_{10}\right)x^3\\ \psi_x&=-c_5+c_9x+\left(\frac{-2(A^1_{11})^2+2A^0_{11}A^2_{11}}{A^0_{11}B^0_{11}k_s}+x^2\right)c_{10}\\ \varphi&=c_{11}+c_{12}x \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

درنهایت میدان‌های جابه‌جایی و الکتریکی اجزاء محدود برای یک المان تیر به فرم ماتریسی به‌صورت رابطه (۲۷) به‌دست می‌آید:

$$\{q\}=\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi_x \\ \varphi \end{Bmatrix}=[N(x)]\{a\},\ \ \{a\}=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_9,c_{10},c_{11},c_{12}\}^T$$

(۲۷- الف)

در رابطـه فـوق $[N(x)]$ مـاتریس حـاوی توابـع x و $\{a\}$ بـردار ثابت‌های است. در واقع $[N(x)]$ ماتریس حاوی توابع x است که برای کل المان با گره‌های ابتدایی و انتهایی تعریف می‌شود.

$$[N(x)]=\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{A^1_{11}}{A^0_{11}}\right)x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \frac{-x^2}{2} & \frac{-x^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & \left(\frac{-2(A^1_{11})^2+2A^0_{11}A^2_{11}}{A^0_{11}B^0_{11}k_s}+x^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

(۲۷- ب)

حال طبق رابطه (۲۷- ب) و با ارزیـابی مـاتریس $[N(x)]$ در محل گره‌های ابتدایی و انتهایی، روابط (۲۸) حاصل می‌شـود با ارزیابی ماتریس در گره $x=0$ چنین نتیجه می‌شود:

$$[N(0)]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{-2(A^1_{11})^2+2A^0_{11}A^2_{11}}{A^0_{11}B^0_{11}k_s}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

(۲۸- الف)

به‌طور مشابه با ارزیابی ماتریس ارائه شـده در رابطـه (۲۷- ب) در گره $x=l_e$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[N(l_e)]=\begin{bmatrix} 1 & l_e & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{A^1_{11}}{A^0_{11}}\right)l_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_e & \frac{-l_e^2}{2} & \frac{-l_e^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & l_e & \left(\frac{-2(A^1_{11})^2+2A^0_{11}A^2_{11}}{A^0_{11}B^0_{11}k_s}+l_e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_e \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

(۲۸- ب)

با در نظر گرفتن هر دو گره المان می‌توان نوشت:

$$[G]_{8\times 8}=\begin{bmatrix} [N(0)]_{4\times 8} \\ [N(l_e)]_{4\times 8} \end{bmatrix}_{8\times 8} \qquad (۲۸- ج)$$

درنهایت برای مقادیر گره‌ای و با توجه بـه رابطـه (۲۷- الـف)، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\{\bar{q}\}=[G]\{a\}\Rightarrow\{a\}=[G]^{-1}\{\bar{q}\} \qquad (۲۹)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۹) در معادلـۀ (۲۷- الـف) روابـط (۳۰) حاصل می‌شوند [۲۴]:

$$\{q\}=\begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \psi_x(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix}=[N(x)]\{a\}= [N(x)][G]^{-1}\{\bar{q}\}=[\bar{N}(x)]\{\bar{q}\} \qquad (۳۰- الف)$$

$$\bar{N}(x)=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & N_7 & N_8 & 0 & 0 & N_9 & N_{10} & 0 \\ 0 & N_{11} & N_{12} & 0 & 0 & N_{13} & N_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{15} & 0 & 0 & 0 & N_{16} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_u(x) \\ N_w(x) \\ N_\psi(x) \\ N_\varphi(x) \end{bmatrix} \qquad (۳۰- ب)$$

که در رابطه فوق $\bar{N}(x)$ توابع شکل مربـوط بـه درجـات آزادی سیستم است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_1=1-\frac{x}{l_e},\qquad N_2=-(6\hat{c}_1)x+\left(\frac{6\hat{c}_1}{l_e}\right)x^2,$$

$$N_3=(3\hat{c}_1 l_e)x-(3\hat{c}_1)x^2,\quad N_4=\frac{x}{l_e},$$

$$N_5=(6\hat{c}_1)x-\left(\frac{6\hat{c}_1}{l_e}\right)x^2,$$

$$N_6=(3\hat{c}_1 l_e)x-(3\hat{c}_1)x^2,$$

$$N_7=1-\left(\frac{\hat{c}_2}{l_e}\right)x-(3\hat{c}_3)x^2+\left(\frac{2\hat{c}_3}{l_e}\right)x^3,$$

$$N_8=(\hat{c}_5)x+\left(\frac{2\hat{c}_4}{l_e}\right)x^2-(\hat{c}_3)x^3,$$

$$N_9=\left(\frac{\hat{c}_2}{l_e}\right)x+(3\hat{c}_3)x^2-\left(\frac{2\hat{c}_3}{l_e}\right)x^3,$$

$$N_{10}=-\left(\frac{1}{2}\hat{c}_2\right)x+\left(\frac{\hat{c}_6}{l_e}\right)x^2-(\hat{c}_3)x^3,$$

$$N_{11}=(6\hat{c}_3)x-\left(\frac{6\hat{c}_3}{l_e}\right)x^2,$$

$$N_{12}=1+\left(\frac{\hat{c}_7}{l_e}\right)x+(3\hat{c}_3)x^2,$$

$$N_{13}=-(6\hat{c}_3)x+\left(\frac{6\hat{c}_3}{l_e}\right)x^2,$$

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

$$N_{14}=-\left(\frac{\hat{c}_8}{l_e}\right)x+\left(3\hat{c}_3\right)x^2,$$
$$N_{15}=\left(1-\frac{x}{l_e}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right),$$
$$N_{16}=\left(\frac{x}{l_e}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right) \tag{۳۱}$$

در رابطه (۳۱) ثابت‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{c}_1=\frac{A^1_{11}B^0_{11}k_s}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_2=\frac{\left(12A^0_{11}A^2_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_3=\frac{k_s B^0_{11}A^0_{11}}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_4=\frac{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+6A^2_{11}A^0_{11}-6(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_5=-\frac{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+3A^2_{11}A^0_{11}-3(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_6=\frac{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}-6A^2_{11}A^0_{11}+6(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_7=\frac{\left(-4k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}-12A^2_{11}A^0_{11}+12(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)}$$
$$\hat{c}_8=\frac{\left(2k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}-12A^2_{11}A^0_{11}+12(A^1_{11})^2\right)}{\left(k_s l_e^2 B^0_{11}A^0_{11}+12A^2_{11}A^0_{11}-12(A^1_{11})^2\right)} \tag{۳۲}$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۳) و نیز درنظر گرفتن $\delta u(x)=N_{ui}(x)$، $\delta w(x)=N_{wi}(x)$، $\delta\psi(x)=N_{\psi i}(x)$ و $\delta\varphi(x)=N_{\varphi i}(x)$ در معادلات حاکم بر مسئله (روابط (۲۱))، معادلات تعادل سیستم به‌صورت رابطه (۳۳) به‌دست می‌آیند [۱۵]:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}K^{11}_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{n}K^{12}_{ij}w_j+\sum_{j=1}^{p}K^{13}_{ij}\psi_j\right)-F^i_1=0\\
&\left(\sum_{j=1}^{m}K^{21}_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{n}K^{22}_{ij}w_j+\sum_{j=1}^{p}K^{23}_{ij}\psi_j\right)+\sum_{j=1}^{n}G^{22}_{ij}w_j-F^i_2=0\\
&\left(\sum_{j=1}^{m}K^{31}_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{n}K^{32}_{ij}w_j+\sum_{j=1}^{p}K^{33}_{ij}\psi_j\right)-F^i_3=0
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در روابط فوق ضرایب میدان جابه‌جایی بدین صورت تعریف می‌شوند:

ماتریس سختی، مؤلفه‌های خطی

$$\begin{cases}
K^{11}_{ij}=\int_0^{le}A^0_{11}\dfrac{dN_{ui}}{dx}\dfrac{dN_{uj}}{dx}dx\\
K^{13}_{ij}=\int_0^{le}A^1_{11}\dfrac{dN_{ui}}{dx}\dfrac{dN_{\psi j}}{dx}dx\\
K^{14}_{ij}=\int_0^{le}m_0\dfrac{dN_{ui}}{dx}\dfrac{dN_{\varphi j}}{dx}dx
\end{cases} \tag{۳۴-الف}$$

$$\begin{cases}
K^{22}_{ij}=\int_0^{le}k_sB^0_{11}\dfrac{dN_{wi}}{dx}\dfrac{dN_{wj}}{dx}dx+\\
\quad b\int_0^{le}k_w N_{wi}N_{wj}dx-b\int_0^{Le}k_g N_{wi}\dfrac{d^2N_{wj}}{dx^2}dx\\
K^{23}_{ij}=\int_0^{le}k_sB^0_{11}\dfrac{\partial N_{wi}}{\partial x}N_{\psi j}dx
\end{cases} \tag{۳۴-ب}$$

$$\begin{cases}
K^{31}_{ij}=\int_0^{le}A^1_{11}\dfrac{dN_{\psi i}}{dx}\dfrac{dN_{uj}}{dx}dx\\
K^{32}_{ij}=\int_0^{le}k_sB^0_{11}N_{\psi i}\dfrac{\partial N_{wj}}{\partial x}dx\\
K^{33}_{ij}=\int_0^{le}k_sB^0_{11}N_{\psi i}N_{\psi j}dx+\\
\quad\int_0^{le}A^2_{11}\dfrac{dN_{\psi i}}{dx}\dfrac{dN_{\psi j}}{dx}dx\\
K^{34}_{ij}=\int_0^{le}m_1\dfrac{dN_{\psi i}}{dx}\dfrac{dN_{\varphi j}}{dx}dx
\end{cases} \tag{۳۴-ج}$$

$$\begin{cases}
K^{41}_{ij}=\int_0^{le}m_0\dfrac{dN_{\varphi i}}{dx}\dfrac{dN_{uj}}{dx}dx\\
K^{43}_{ij}=\int_0^{le}m_1\dfrac{dN_{\varphi i}}{dx}\dfrac{dN_{\psi j}}{dx}dx\\
K^{44}_{ij}=-\int_0^{le}m_2\dfrac{\partial N_{\varphi i}}{\partial x}\dfrac{\partial N_{\varphi j}}{\partial x}dx
\end{cases} \tag{۳۴-د}$$

مؤلفه‌های غیرخطی

$$\begin{cases}
K^{12}_{ij}=\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})A^0_{11}\dfrac{dN_{ui}}{dx}\dfrac{dN_{wj}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})dx\\
K^{21}_{ij}=2\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})A^0_{11}\dfrac{dN_{wi}}{dx}\dfrac{dN_{uj}}{dx}(\dfrac{\partial w}{\partial x})dx\\
K^{22}_{ij}=2\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})^2A^0_{11}\dfrac{dN_{wi}}{dx}\dfrac{dN_{wj}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})^2dx
\end{cases},$$

$$\begin{cases}
K^{23}_{ij}=2\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})A^1_{11}\dfrac{dN_{wi}}{dx}\dfrac{dN_{\psi j}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})dx,\\
K^{32}_{ij}=\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})A^1_{11}\dfrac{dN_{\psi i}}{dx}\dfrac{dN_{wj}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})dx
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
K^{24}_{ij}=2\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})m_0\dfrac{dN_{wi}}{dx}\dfrac{dN_{\varphi j}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})dx\\
K^{42}_{ij}=\int_0^{le}(\mu+\tfrac{1}{2})m_0\dfrac{dN_{\varphi i}}{dx}\dfrac{dN_{wj}}{dx}(\dfrac{dw}{dx})dx
\end{cases} \tag{۳۵}$$

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

جدول ۱- مشخصات هندسی نانوتیر کامپوزیتی

h	L	b
۱۷/۶ nm	۲۰h	۲h

ماتریس کمانش

$$G^{l}_{ww} = P_M \int_{0}^{le} \frac{dN_{wi}}{dx}\frac{dN_{wj}}{dx}dx$$

$$G^{nl}_{ww} = -P_M (e_0 a)^2 \int_{0}^{le} \frac{d^2 N_{wi}}{dx^2}\frac{d^2 N_{wj}}{dx^2}dx$$

$$G^{nl}_{\psi w} = -P_M (e_0 a)^2 \int_{0}^{le} \frac{dN_{\psi i}}{dx}\frac{d^2 N_{wj}}{dx^2}dx$$

$$G^{nl}_{w\psi} = -P_M (e_0 a)^2 \int_{0}^{le} \frac{d^2 N_{wi}}{dx^2}\frac{dN_{\psi j}}{dx}dx \qquad (۳۶)$$

فرم ماتریسی رابطه (۳۳) به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$[k]\{\bar{q}\}+[G]\{\bar{q}\}=\{f\} \qquad (۳۷)$$

که در آن $[k]$، $[G]$ و $\{f\}$ به‌ترتیب ماتریس‌های سختی، کمانش و بردار نیروی خارجی هستند. ماتریس سختی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[k]=[k]^{Linear}+[k]^{Nonlinear} \qquad (۳۸)$$

$\{\bar{q}\}$ شامل دو بخش یکی مربوط به درجات آزادی جابه‌جایی $\{\bar{q}_d\}$ و دیگری $\{\bar{q}_\varphi\}$ مؤلفه مربوط به پتانسیل الکتریکی است، بردار $\{f\}$ نیز به همین صورت قابل تفکیک است. بر این اساس شکل ماتریسی معادلات حاکم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}[K_{dd}] & [K_{d\varphi}]\\ [K_{\varphi d}] & [K_{\varphi\varphi}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{q}_d\}\\ \{\bar{q}_\varphi\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[G_{dd}] & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{q}_d\}\\ \{\bar{q}_\varphi\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{f_d\}\\ \{f_\varphi\}\end{Bmatrix} \qquad (۳۹)$$

همان‌طور که از رابطه (۳۹) مشهود است عبارات مربوط به نیروی محوری برای پتانسیل الکتریکی برابر با صفر است. از سطر دوم رابطه (۳۹)، $\{\bar{q}_\varphi\}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[K_{\varphi d}]\{\bar{q}_d\}+[K_{\varphi\varphi}]\{\bar{q}_\varphi\}=\{f_\varphi\} \Rightarrow \{\bar{q}_\varphi\}= \qquad (۴۰)$$
$$[K_{\varphi\varphi}]^{-1}\left(\{f_\varphi\}-[K_{\varphi d}]\{\bar{q}_d\}\right)$$

با جای‌گذاری رابطه (۴۰) در معادله (۳۹) و ساده‌سازی روابط، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[K_m]\{\bar{q}_d\}+[G_{dd}]\{\bar{q}_d\}=\{F_m\} \qquad (۴۱)$$

که $[K_m]$ و $\{F_m\}$ به‌ترتیب ماتریس سختی و بردار نیرویی اصلاح شده هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[K_m]=[K_{dd}]-[K_{d\varphi}][K_{\varphi\varphi}]^{-1}[K_{\varphi d}] \qquad (۴۲)$$
$$\{F_m\}=\{f_d\}-[K_{d\varphi}][K_{\varphi\varphi}]^{-1}\{f_\varphi\}$$

به‌دلیل وجود ترم‌های غیرخطی برای رسیدن به همگرایی از روش تکرار نیوتن- رافسون استفاده می‌شود. در این روش مراحل زیر برای رسیدن به همگرایی استفاده می‌شود:

- حذف ترم‌های خطی و محاسبه پارامترهای خطی سیستم.
- محاسبه پارامترهای غیرخطی با استفاده از مقادیر خطی به‌دست آمده از بند ۱.
- تکرار نتایج تا رسیدن به همگرایی.

۴- بحث و تفسیر نتایج

در این بخش، به تحلیل غیرخطی کمانش الکتروترمومکانیکی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولولهٔ نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه براساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی با استفاده از روش المان محدود پرداخته می‌شود. تأثیر نقص هندسی اولیه، توزیع مختلف نانولوله نیترید- بور، بستر الاستیک، ضریب غیرمحلی، ضریب رعنایی و میدان الکتریکی بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات هندسی و مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی در جداول‌های (۱) و (۲) آمده است.

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

جدول ۲- مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی

مقدار	کمیت	مقدار	کمیت	مقدار	کمیت
۳/۵۹	E_m, GPa	۱/۸	E_{BNNT}, TPa	۰/۱۷	V^*_{BNNT}
۰/۳۴	v_m	۲۳۰۰	$P_{BNNT}, \frac{kg}{m^3}$	۱۲۲۰۰	$\rho_m, \frac{kg}{m^3}$
۱/۶۲۶	η_3	۰/۱۴۲	η_1	۰/۳۴	υ_{BNNT}
۰/۹۵	$e, \frac{C}{m^2}$	۱۰−۵	$k_g, \frac{N}{m}$	۱۰۱۲	$k_w, \frac{N}{m^3}$

جدول ۳- مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی

پارامتر	مقدار عددی	پارامتر	مقدار عددی	پارامتر	مقدار عددی
V^*_{CNT}	۰/۱۲	E_{CNT}, GPa	۶۰۰	E_m, GPa	۲/۵
$\rho_m, \frac{kg}{m^3}$	۱۹۰۰	$\rho_{CNT}, \frac{kg}{m^3}$	۱۴۰۰	v_m	۰/۳
V_{CNT}	۰/۱۹	η_1	۱/۲۸۳۳	η_2	۱/۰۵۵۶
G_{12}^{CNT}, GPa	۱۷/۲	$k_w, \frac{N}{m^3}$	۱۰۱۲	$k_g, \frac{N}{m}$	10^{-5}

جدول ۴- بار کمانش بحرانی بدون بعد، بدون درنظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک [۲۳]

$V^*_{CNT}=0/12 \quad \frac{L}{h}=15$	UD			FG-X		
	تحقیق حاضر	مرجع [۲۳]	درصد خطا	تحقیق حاضر	مرجع [۲۳]	درصد خطا
C-C	۰/۲۱۱۵۳	۰/۲۱۳۹۵	۱/۱۴	۰/۲۴۱۰۶	۰/۲۴۵۹۳	۲/۰۲

بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی بدون بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{P}_M = \frac{P_M}{A_{110}}, \quad A_{110} = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_m\, dz \qquad (۴۳)$$

مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی استفاده شده برای مقایسه نتایج و اعتبارسنجی در جدول (۳) آمده است.

در جدول (۴)، بار کمانش بحرانی بدون بعد نانوتیر کامپوزیتی در غیاب اثرات مقیاس کوچک برای دو نوع توزیع مختلف نانولوله و شرایط مرزی دوسر گیردار به‌روش اجزاء محدود محاسبه شده و با نتایج به‌دست آمده توسط یاس و صمدی [۲۳] مقایسه می‌شود. نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج ارائه شده توسط یاس و صمدی [۲۳] تطابق خوبی دارند.

همچنین برای اعتبارسنجی و صحت نتایج حاصل از تحقیق، بار کمانش بحرانی بدون بعد با درنظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک در غیاب اثرات پیزوالکتریک برای حالت ایزوتروپیک در جدول (۵) آورده شده است نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج به‌دست آمده توسط سیمسک و یورکو [۶] تطابق بسیار خوبی دارند. همچنین در جدول (۶) بار کمانش بحرانی بدون

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79] [DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6] [Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

جدول ۵- بار کمانش بحرانی بدون بعد با درنظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک در غیاب اثرات پیزوالکتریک برای حالت ایزوتروپیک [۲۵]

L/h	L/h=۱۰			L/h=۲۰		
$e_{\circ}a=1nm$, $E_1=1TPa$, $\nu=0/3$, $k_s=\frac{5}{6}$	مرجع [۶]	تحقیق حاضر	درصد خطا	مرجع [۶]	تحقیق حاضر	درصد خطا
	۸/۷۵۸۲	۸/۷۵۴۳	۰/۰۴۴	۹/۵۷۰۵	۹/۴۷۹۶	۰/۹۵۸۹

جدول ۶- بار کمانش بحرانی بدون بعد با درنظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک و اثرات پیزوالکتریک [۲۷ و ۲۸]

$\frac{L}{h}=16,\quad \frac{e_{\circ}a}{L}=0/1$	C-C			S-S		
$\Delta T=0$, $V_{\circ}=0$	مرجع [۲۷]	مرجع [۲۸]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۷]	مرجع [۲۸]	تحقیق حاضر
	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۸۷۳۹	۰/۰۰۸۷۶۲	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۹۲۲	۰/۰۰۲۹۲۶

جدول ۷- بار کمانش بحرانی بدون بعد به‌ازای پارامتر نقص هندسی مختلف و شرط مرزی دو سر گیردار

$\frac{L}{h}=10$, $e_{\circ}a=2nm$	$\mu=0$	$\mu=0/1$	$\mu=0/2$	$\mu=0/3$
	$9/2653\times10^{-7}$	$9/2898\times10^{-7}$	$9/3184\times10^{-7}$	$9/3510\times10^{-7}$

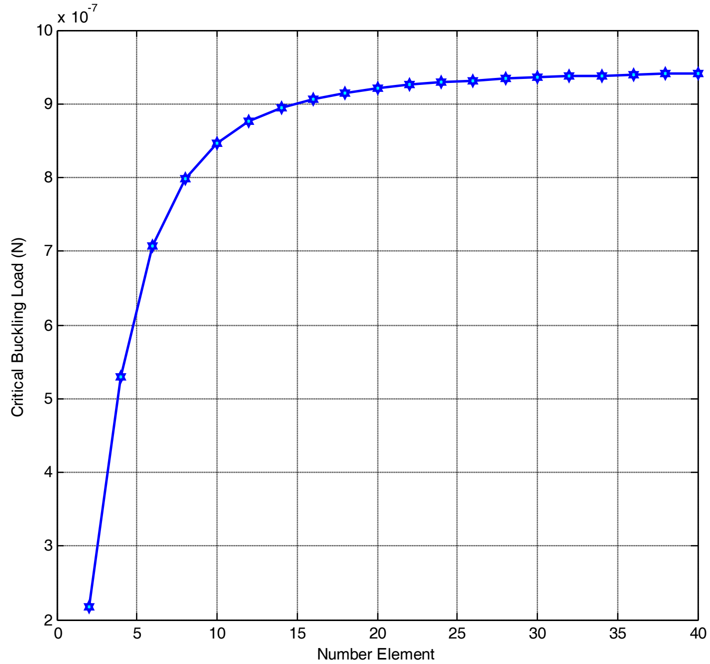
بعد با درنظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک و پیزوالکتریک به طور همزمان برای شرایط مرزی مختلف محاسبه شده و با نتایج حاصل از مراجع [۲۷ و ۲۸] مقایسه شده است. اختلاف مشاهده شده در نتایج به دلیل اختلاف در پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته شده است ولی در عین حال نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج به‌دست آمده توسط مراجع [۲۷ و ۲۸] تطابق خوبی دارد.

جدول (۷) مقدار بار کمانش بحرانی را به‌ازای پارامتر نقص هندسی مختلف برای شرط مرزی دو سرگیردار و $L/h=10,\quad e_{\circ}a=2nm$ نشان می‌دهد. همان‌طوری که از جدول مشاهده می‌شود با افزایش دامنه نقص هندسی بار کمانش بحرانی افزایش پیدا می‌کند.

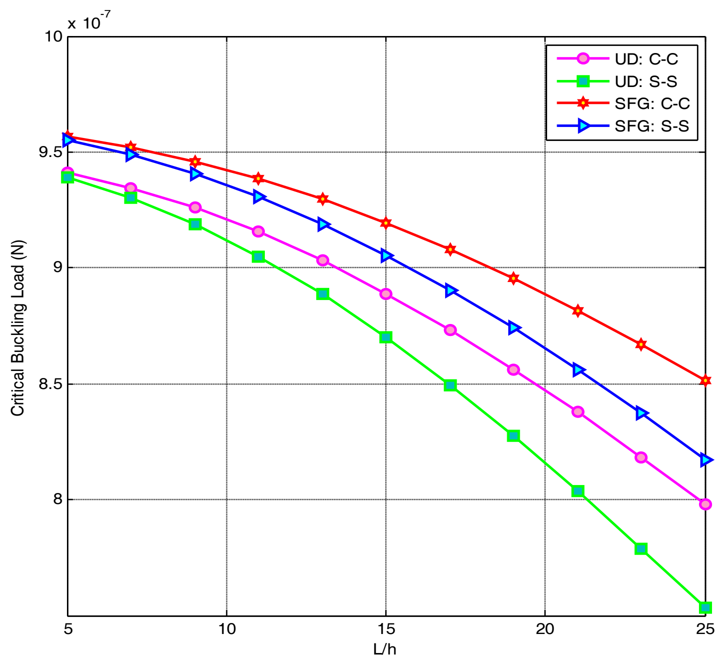
در شکل (۵) همگرایی روش اجزاء محدود برای نانوتیر کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق این شکل با افزایش تعداد المان‌ها مقدار بار کمانش بحرانی سیستم افزایش پیدا کرده و درنهایت به یک نقطه همگرا می‌شود. همان‌طوری که از شکل مشاهده می‌شود، تعداد المان‌های لازم برای همگرایی سیستم مورد نظر برابر با ۳۵ المان است.

در شکل (۶) اثر تغییرات بار کمانش بحرانی به‌ازای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه ساده برای توزیع‌های UD و $e_{\circ}a=0/5nm$ براساس تئوری غیرمحلی الاستیسیته نشان داده شده است. با توجه به این شکل با افزایش نسبت طول به ضخامت، بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی کاهش می‌یابد. همچنین در بین توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید- بور توزیع SFG بیشترین مقدار بار کمانش بحرانی را به‌ازای شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار به خود اختصاص می‌دهد، بنابراین سفتی در این حالت بیشتر از حالت‌های دیگر بوده و پایداری سیستم افزایش پیدا می‌کند.

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]



شکل ۵- بررسی همگرایی روش اجزاء محدود برای بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی



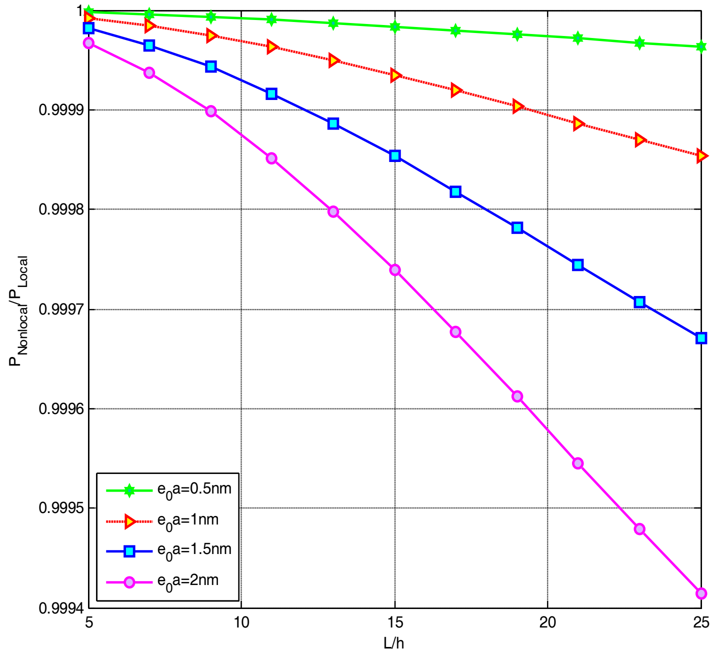
شکل ۶- تأثیر شرایط مرزی مختلف به‌ازای توزیع مختلف نانولوله نیترید- بور بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی

شکل (۷) منحنی‌های بار کمانش بحرانی غیرمحلی به بار کمانش بحرانی محلی برحسب افزایش طول به ضخامت به‌ازای ضرایب غیرمحلی مختلف و چیدمان UD نانولولهٔ نیترید- بور را نشان می‌دهد. در این منحنی‌ها مشاهده می‌شود که به‌ازای

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]

[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]



شکل ۷- اثر تغییرات ضریب غیرمحلی به‌ازای تغییرات نسبت طول به ضخامت بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی

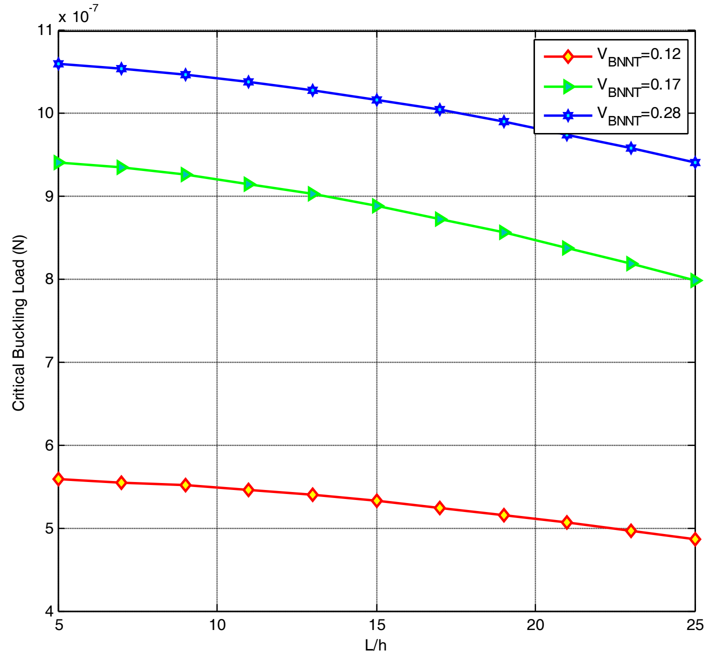
یک ضریب غیرمحلی ثابت، با افزایش نسبت طول به ضخامت نسبت بار کمانش بحرانی غیرمحلی به بار کمانش بحرانی محلی کاهش یافته و با افزایش پارامتر غیرمحلی به‌ازای یک طول ثابت این نسبت کاهش پیدا می‌کند. دلیل آن این است که با افزایش پارامتر غیرمحلی تغییر مکان‌های سازه افزایش یافته که به معنای کاهش سفتی و در نتیجه کاهش بار کمانش بحرانی سیستم است.

شکل (۸) تأثیر بستر الاستیک را بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی برای توزیع UD نانولوله نیترید- بور در حالتی که $e_0a = 0/5nm$ نشان می‌دهد. واضح است که با درنظر گرفتن ثابت‌های وینکلر و پاسترناک سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته و در نتیجه بار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد. در واقع بستر الاستیک نشان‌دهندهٔ خاصیت کشسانی محیط اطراف نانوتیر بوده و با درنظر گرفتن آن، پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

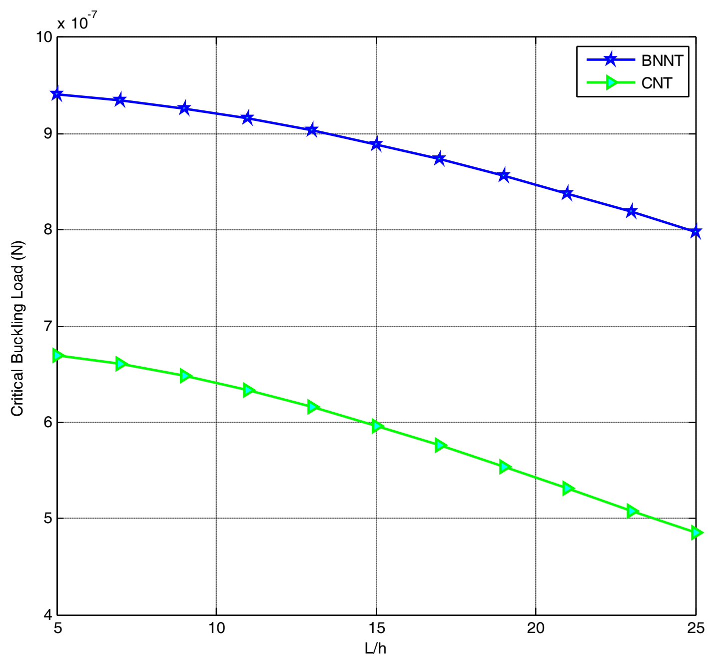
شکل (۹)، منحنی‌های بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع UD نانولوله‌های نیترید- بور برای درصد حجمی مختلف نانولوله‌ها را نشان می‌دهد. در منحنی‌ها مشاهده می‌شود بار کمانش بحرانی با افزایش درصد حجمی نانولوله‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه باعث افزایش سفتی نانوتیر کامپوزیتی و افزایش پایداری سیستم می‌شود.

شکل (۱۰) نمودار بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی برحسب نسبت طول به ضخامت در دو حالت مختلف درنظر گرفتن نانولوله‌ها به‌صورت کربنی و نیترید- بور را نشان می‌دهد. در صورتی که میدان الکتریکی بر یک سازه اعمال شود برای آنکه عکس‌العمل‌ها در مقابل بارهای اعمالی قابل مشاهده باشد باید از موادی با جنس خاص استفاده شود. نانولوله‌های نیترید- بور از جملهٔ این مواد هستند (وقتی که میدان الکتریکی بر یک سازه اعمال شود از نانولوله‌های کربنی به خاطر آن که قادر نیستند در مقابل بارهای الکتریکی از خود عکس‌العمل نشان دهد نمی‌توان استفاده کرد). در منحنی‌های فوق مشاهده می‌شود که درنظر گرفتن میدان الکتریکی و به تبع آن استفاده از نانولوله‌های نیترید- بور باعث افزایش سفتی سیستم و در نتیجه

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]



شکل ۹- تأثیر درصد حجمی نانولوله نیترید- بور به‌ازای تغییرات نسبت طول به ضخامت بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی



شکل ۱۰- تأثیرانواع مختلف نانولوله به‌ازای تغییرات نسبت طول به ضخامت بر بارکمانش بحرانی نانوتیرکامپوزیتی

افزایش پایداری نانوتیر کامپوزیتی می‌شود و سفتی هم رابطه مستقیمی با بار کمانش بحرانی سیستم دارد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق تحلیل کمانش غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی تقویت

شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید- بور با درنظر گرفتن نقص هندسی اولیه واقع بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا میدان جابه‌جایی و تغییر مکان نانوتیر کامپوزیتی به‌دست آمد. سپس روابط کرنش- تغییر مکان با استفاده از میدان جابه‌جایی حاصل، استخراج شد. درنهایت برای حل معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی از روش اجزاء محدود استفاده شد. براساس نتایج به‌دست آمده می‌توان بیان کرد:

۱- تعداد المان‌های لازم برای همگرایی سیستم مورد نظر ۳۵ المان است.

۲- اثرات پارامتر مقیاس کوچک ماده روی سفتی نانوتیر کامپوزیتی بیشتر از اثرات توزیع‌های مختلف نانولوله نیترید- بور است.

۳- برای توزیع‌های مختلف نانولوله‌های تک دیواره نیترید- بور در نانوتیر کامپوزیتی، توزیع‌های FG–X و UD به‌ترتیب بزرگترین و کوچک‌ترین بار کمانش بحرانی را دارند. لازم به ذکر است که توزیع FG-X، در نواحی بالا و پایین تیر بیشتر از بقیه نواحی است، لذا سفتی تیر نسبت به حالت دیگر افزایش بیشتری داشته و بار کمانش افزایش می‌یابد.

۴- بار کمانش بحرانی با ضرایب وینکلر و پاسترناک رابطه مستقیم دارد و هر چه طول تیر افزایش یابد، اثرات ضرایب بر نانوتیر افزایش پیدا کرده و باعث افزایش بار کمانش بحرانی می‌شود.

۵- بار کمانش بحرانی در تکیه‌گاه گیردار بیشتر از تکیه‌گاه ساده است. علت آن این است که درتکیه‌گاه گیردار تیر سفت‌تر شده در نتیجه بار کمانش بحرانی آن افزایش یافته و درنهایت پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

۶- استفاده از نانولوله‌های نیترید- بور و درنظر گرفتن میدان الکتریکی باعث افزایش سفتی سیستم و در نتیجه افزایش بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی می‌شود و به واسطه آن پایداری سیستم افزایش پیدا می‌کند.

۷- با افزایش درصد حجمی نانولوله‌ها بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی افزایش می‌یابد. در نتیجه سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته و باعث افزایش پایداری سیستم می‌شود.

۸- با افزایش پارامترغیرمحلی تغییر مکان‌های سازه افزایش یافته که به معنای کاهش سفتی ویا کاهش بار کمانش بحرانی سیستم است.

تشکر و قدردانی

از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۴۶۳۸۵۵/۹ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌شود.

واژه‌نامه

1. uniform distribution
2. symmetrically linear distribution functionally graded or functionally graded-x

مراجع

1. Wang, B., Zichen., D., Huajiang., O., and Jiaxi., Z., “Wave Propagation Analysis in Nonlinear Curved Single-Walled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Elasticity Theory”, *Physica E*, Vol. 66, pp. 283-292, 2015.
2. Liew, K. M., Lei, Z. X., and Zhan, L.W., “Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review”, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 90-97, 2015.
3. Mohammadimehr, M., Mohandes, M., and Moradi, M., “Size Dependent Effect on the Buckling and Vibration Analysis of Double-Bonded Nanocomposite Piezoelectric Plate Reinforced by Boron Nitride Nanotube Based on Modified Couple Stress Theory”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 22, No. 7, pp. 1790-1807, 2016.
4. Ghorbanpour Arani, A., Maghamikia, S. H.,

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

Mohammadimehr, M., and Arefmanesh, A., “Buckling Analysis of Laminated Composite Rectangular Plates Reinforced by SWCNTs using Analytical and Finite Element Method”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 25, pp. 809-820, 2011.

5. Li, Z. M., “Thermal Postbuckling Behavior of 3D Braided Beams with Initial Geometric Imperfection under Different Type Temperature Distribution”, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 924-936, 2014.
6. Simsek, M., and Yurtcu, H. H., “Analytical Solutions for Bending and Buckling of Functionally Graded Nanobeams Based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory”, *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.
7. Mohammadimehr, M., Mohammadimehr, M. A., and Dashti, P., “Size-Dependent Effect on Biaxial and Shear Nonlinear Buckling Analysis of Nonlocal Isotropic and Orthotropic Micro-Plate Based on Surface Stress and Modified Couple Stress Theories using Differential Quadrature Method”, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 37, pp. 529-554, 2016.
8. Komijani, M., Esfahani, S. E., Reddy, J. N., Liu, Y. P., and Eslami, M. R., “Nonlinear Thermal Stability and Vibration of Pre/Post-Buckled Temperature and Microstructure- Dependent FGM Beams Resting on Elastic Foundation”, *Composite Structures*, Vol. 112, No. 1, pp. 292-307, 2014.
9. Mohammadi, H., Mahzoon, M., and Mohammadi, M., “Postbuckling Instability of Nonlinear Nanobeam with Geometric Imperfection Embedded in Elastic Foundation”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 76, No. 4, pp. 2005-2016, 2014.
10. Mohammadimehr, M., and Shahedi, S., “High-Order Buckling and Free Vibration Analysis of Two Types Sandwich Beam Including AL or PVC-Foam Flexible Core and CNTs Reinforced Nanocomposite Face Sheets using GDQM”, *Composites Part B: Engineering* Available online 29 September 2016. http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.040.
11. Mohammadimehr, M., Rousta Navi, B., and Ghorbanpour Arani, A. “Free Vibration of Viscoelastic Double-Bonded Polymeric Nanocomposite Plates Reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, Sinusoidal Shear Deformation Theory and Meshless Method”, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 654-671, 2015.
12. Mohammadimehr, M., Salemi, M., and Rousta Navi, B., “Bending, Buckling, and Free Vibration Analysis of MSGT MicrocompositeReddy Plate Reinforced by FG-SWCNTs with Temperature-Dependent material Properties under Hydro-Thermo-Mechanical Loadings using DQM”, *Composite Structures*, Vol. 138, pp. 361-380, 2016.
13. Wang, B., Deng, Z. C., and Zhang, K., “Nonlinear Vibration of Embedded Single-Walled Carbon Nanotube with Geometrical Imperfection under Harmonic Load Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory”, *Applied Mathematics and Mechanics. English Edition*, Vol. 34, No. 3, pp. 269-280, 2013.
14. Anjomshoa, A., Shahidi, A. R., Hassani, B., and Jomehzadeh, E., “Finite Element Buckling Analysis of Multi-Layered Graphemesheets on Elastic Substrate Based on Nonlocal Elasticity Theory”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, pp. 5934-5955, 2014.
15. Reddy, J. N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2004.
16. Ghorbanpour Arani, A., Rousta Navia, B., and Mohammadimehr M., “Surface Stress and Agglomeration Effects on Nonlocal Biaxial Buckling Polymeric Nanocomposite Plate Reinforced by CNT using Various Approaches”, *Accepted in Advanced Composite Material*, DOI: 10.1080/09243046. 2015. 1052189, 2015.
17. Murmu, T., and Pradhan, S. C., “Buckling Analysis of a Single-Walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Elasticity and Timoshenko Beam Theory and Using DQM”, *Physica E*, Vol. 41, pp. 1232-1239, 2009.
18. Amabilia, M., Karagiozis, K., and Padoussisa, M. P., “Effect of Geometric Imperfections on Non-Linear Stability of Circular Cylindrical Shells Conveyingfluid”, *International Journal of Nonlinear Mecch*, Vol. 44, pp. 276-289, 2009.
19. Mohammadimehr, M. and Alimirzaei, S., “Nonlinear Static and Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Composite Beam Model Reinforced by FG-SWCNT with Initial Geometrical Imperfection using FEM”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 59, pp. 431-454, 2016.
20. Abdollahi, M., Saidi, A. R., and Mohammadi, M., “Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Plates Based on the Higher-Order Shear and Normal Deformable Theory”, *Acta Mechanica*, Vol. 226, pp. 2497-2510, 2015.
21. Cady, W. G., *Piezoelectricity; an Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, McGraw-Hill, NewYork, 1946.
22. Moon, W. H., and Hwang, H. J., “Molecular Mechanics of Structural Properties of Boron-Nitride Nanotubes”, *Physica E*, Vol. 23, pp. 26-30, 2004.
23. Yas, M. H., and Samadi, N., “Free Vibrations and Buckling Analysis of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Timoshenko Beams on Elastic Foundation”, *Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, pp. 119-128, 2012.
24. Chakraborty, A., Mahaptra, D. R., and Gopalakrishnan, S., “Finite Element Analysis of

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]

Free Vibration and Wave Propagationin Asymmetric Composite Beam with Structural Discontinuities", *Composite Structures*, Vol. 55, pp. 23-36, 2002.
25. Rafiee, M., He, X. Q., and Liew, K. M., "Non-Linear Dynamic Stability of Piezoelectric Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates with Initial Geometric Imperfection", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 59, pp. 37-51, 2014.
26. Reddy, J. N., "Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 288-307, 2007.
27. Ansari, R., Faraji Oskouie, M., Gholami, R. and Sadeghi, F., "Thermo-Electro-Mechanical Vibration of Postbuckled Piezoelectric Timoshenko Nanobeams Based on the Nonlocal Elasticity Theory", *Composites Part B*, Vol. 89, pp. 316-327, 2016.
28. Liu, C., Ke, L. L., Wang, Y., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Buckling and Post-buckling of Size-Dependent Piezoelectric TimoShenko Nanobeams Subject to Thermoelectro-Mechanical Loadings", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 14, p. 1350067, 2014.

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.2.7.6]
[DOI: 10.29252/jcme.36.2.79]